УДК 539.374;539.214
С.Дячук, канд.техн.наук; М.Михайлишин, канд.фіз.-мат.наук
Тернопільський державний технічний університет імені Івана Пулюя

ВИЗНАЧЕННЯ ОПТИМАЛЬНОГО НАВАНТАЖЕННЯ ДЛЯ ЗАБЕЗПЕЧЕННЯ ЗАДАНОЇ ЗАЛИШКОВОЇ ФОРМИ ОБОЛОНКИ ОБЕРТАННЯ ПІСЛЯ РОЗВАНТАЖЕННЯ

Розглянута задача визначення зовнішнього навантаження, під дією якого тонка кругла заготовка у результаті пружно-пластичного деформування після зняття навантаження і пружного пружинення отримує форму оболонки обертання із заданою формою меридіана. Використано припущення, що забезпечується просте навантаження і справедлива деформаційна теорія пластичності. Задача зведена до послідовності лінійних крайових задач, що розв'язуються методом дискретної ортогоналізації Годунова. Для лінеаризації фізичної нелінійності використано метод змінних параметрів пружності.

Умовні позначення

N_1, N_2	– інтесивності зусиль (меридіональне і колове);
M_1, M_2	– інтенсивності моментів у меридіональному і коловому напрямах;
ψ_0	– кут між нормаллю до поверхні і віссю обертання оболонки;
Θ	– зміна кута ψ за рахунок деформації;
s_0	– дугова координата точки недеформованої поверхні;
w	– нормальне переміщення точки серединної поверхні;
$\varepsilon_{10}, \varepsilon_{20}, \chi_1, \chi_2$	– деформації і зміни кривин у меридіональному “1” і коловому “2”напрямах.

Відомо, що внаслідок пружно-пластичного деформування конструкції певним зовнішнім навантаженням після його зняття відбувається пружне пружинення, що приводить до зміни форми поверхні порівняно щодо форми в кінці процесу навантаження. Остаточний стан матеріалу деталі характеризується певним залишковим полем переміщень, деформацій і напружень. Якщо забезпечується просте пропорційне навантаження, то для пошуку полів залишкових напружень, деформацій і переміщень можна використовувати теорему А.А.Ільюшина про розвантаження [1]. Згідно з цією теоремою, якщо матеріал ніде в області конструкції в процесі розвантаження не повертається у пластичну область, всі залишкові поля знаходимо як різницю відповідних полів, знайдених у результаті розв'язування пружно-пластичної задачі на основі деформаційної теорії пластичності при даному зовнішньому навантаженні і відповідних полів, знайдених у результаті розв'язування задачі для певного фіктивного тіла під дією цього ж зовнішнього навантаження у припущенні, що тіло в процесі навантаження деформується тільки пружно.

Позначимо через u і w меридіональне і нормальне переміщення точки, знайдене у результаті розв'язування пружнопластичної задачі, а через u^0, w^0 – відповідні переміщення фіктивної пружної задачі. Тоді на основі теореми про розвантаження (вважаємо, що всі умови теореми виконуються) можна записати:

$$u_{зал} = u - u^0; \quad w_{зал} = w - w^0. \tag{1}$$

Компоненти переміщеня точки серединної поверхні u_r і v у радіальному та вертикальному напрямах зв'язані з компонентами u і w у меридіональному і нормальному до поверхні напрямках такими залежностями:

$$u = u_r \cos\psi_0 + v\sin\psi_0; \qquad u_r = u\cos\psi_0 + w\sin\psi_0;$$
$$w = u_r \sin\psi_0 - v\cos\psi_0; \qquad v = u\sin\psi_0 - w\cos\psi_0. \tag{2}$$

Залишкові радіальне і вертикальне переміщення точки на основі формул (2) будуть

$$u_{r\,зал} = u_{зал}\cos\psi_0 + w_{зал}\sin\psi_0;$$
$$v_{r\,зал} = u_{зал}\sin\psi_0 + w_{зал}\cos\psi_0. \tag{3}$$

Радіальна і вертикальна координати точки поверхні після зняття зовнішнього навантаження обчислюються за формулами:

$$r = r_0 + u_{r\,зал} = r_0 + u_{зал}\cos\psi_0 + w_{зал}\sin\psi_0;$$
$$Z = Z_0 + v_{зал} = Z_0 + u_{зал}\sin\psi_0 - w_{зал}\cos\psi_0. \tag{4}$$

Припустимо, що рівняння поверхні, яку потрібно отримати після зняття навантаження, в параметричній формі виглядає так:

$$r_{зал} = r_{зал}(s_0); \qquad Z_{зал} = Z_{зал}(s_0). \tag{5}$$

Сформулюємо такий критерій мети

$$I = \int_{S_0}^{S_k} \Big\{ \alpha q_n^2(s) + (1-\alpha)\Big[\big(r_0 + (u-u^0)\cos\psi_0 + (w-w^0)\sin\psi_0 - r_{зал}(s)\big]^2 +$$
$$+ \big[\big(Z_0 + (u-u^0)\sin\psi_0 - (w-w^0)\cos\psi_0 - Z_{зал}(s)\big)\big]^2 r_0 ds \Rightarrow min, \tag{6}$$

де α - ваговий коефіцієнт.

До даного критерію входять розв'язки пружно-пластичної задачі і фіктивної пружної задачі. Тому як обмеження використовуємо всі рівняння пружно-пластичного деформування згідно з деформаційною теорією пластичності і всі рівняння пружної задачі при тому самому зовнішньому навантаженні.

Геометрично нелінійні у квадратичному наближенні рівняння рівноваги елемента оболонки і геометричні співвідношення такі [2]:

$$\frac{dN_1}{ds_0} = \frac{N_2 - N_1}{r_0}\cos\psi_0 - \frac{1}{\rho_{10}}Q_1 - q_s;$$
$$\frac{dQ_1}{ds_0} = \frac{1}{\rho_{10}}N_1 + \frac{\sin\psi_0}{r_0}N_2 - \frac{Q_1}{r_0}\cos\psi_0 - q_n;$$
$$\frac{dM_1}{ds_0} = \frac{M_2 - M_1}{r_0}\cos\psi_0 + Q_1 + N_1\Theta - \frac{\sin\psi_0}{r_0}\cdot M_2\Theta;$$
$$\varepsilon_{10} = \frac{du}{ds_0} + \frac{w}{\rho_{10}} + \frac{1}{2}\Theta^2; \qquad \varepsilon_{20} = \frac{u}{r_0}\cos\psi_0 + \frac{w}{\rho_{20}};$$
$$\chi_1 = \frac{d\Theta}{ds_0}; \quad \chi_2 = \Theta\frac{\cos\psi_0}{r_0} - \frac{1}{2}\frac{\Theta^2}{\rho_{20}}; \quad \Theta = \frac{u}{\rho_{10}} - \frac{dw}{ds_0}. \tag{7}$$

Фізичні співвідношення деформаційної теорії пластичності, орієнтовані на використання методу змінних параметрів пружності, виглядають так [2]:

$$N_1 = I_1\varepsilon_{10} + I_1'\varepsilon_{20} + I_2\chi_1 + I_2'\chi_2;$$
$$N_1 = I_1\varepsilon_{20} + I_1'\varepsilon_{10} + I_2\chi_2 + I_2'\chi_1;$$
$$M_1 = I_2\varepsilon_{10} + I_2'\varepsilon_{20} + I_3\chi_1 + I_3'\chi_2;$$
$$M_1 = I_2\varepsilon_{20} + I_2'\varepsilon_{10} + I_3\chi_2 + I_3'\chi_1;$$

де $I_k = \int_{-h/2}^{h/2} \frac{E^*}{1-\nu^{*2}} z^{k-1}dz; \qquad I_k' = \int_{-h/2}^{h/2} \frac{E^*\nu^*}{1-\nu^{*2}} z^{k-1}dz; \qquad k=1,2,3.$ (8)

Припускається, що справедлива гіпотеза Кірхгофа-Лява для розподілу деформацій на товщині оболонки.

Фізичні співвідношення для фіктивної пружної задачі визначаються за формулами[2]:

$$N_1 = \frac{Eh}{1-\nu^2}(\varepsilon_{10} + \nu\varepsilon_{20}); \qquad N_2 = \frac{Eh}{1-\nu^2}(\varepsilon_{20} + \nu\varepsilon_{10});$$
$$M_1 = \frac{Eh^3}{12(1-\nu^2)}(\chi_1 + \nu\chi_{20}); \qquad M_2 = \frac{Eh^3}{12(1-\nu^2)}(\chi_{20} + \nu\chi_1); \tag{9}$$

Введемо як і в роботі [2] , такі безрозмірні величини :

$$x = r/R; \qquad u^* = 3(1-\nu^2)Ru/h_0^2;$$
$$N_1^* = \frac{3(1-\nu^2)R^2}{Eh_0^3}N_1; \qquad M_r^* = \frac{\sqrt{[3(1-\nu^2)]^3}R^2}{Eh_0^4}M_r;$$
$$w^* = \sqrt{3(1-\nu^2)}w/h_0; \qquad Q_r^* = \frac{\sqrt{[3(1-\nu^2)]^3}R^2}{Eh_0^4}Q_r;$$
$$q_n^* = \frac{\sqrt{[3(1-\nu^2)]^3}R^4}{Eh_0^4}q_n; \qquad x_0 = r_0/R; \qquad \varsigma = \frac{z}{h}, \tag{10}$$

де r,R- відповідно внутрішній та зовніщній радіуси, h_0-товщина пластинки.

Використовуючи варіаційний метод множників Лагранжа, з умови стаціонарності розширеного функціоналу задачі (6) отримуємо всі необхідні рівняння прямої і спряженої задач, а також граничні умови для них і рівняння зв’язку між прямою і спряженою задачами. Пропускаючи громіздкі проміжні перетворення, приведемо систему рівнянь задачі у безрозмірних змінних для випадку, коли потрібно отримати задане поле залишкових прогинів $w_{зал}(x)$, якщо заготовка - кругла кільцева пластинка:

$$\frac{dN_1}{dx} = -\frac{N_1}{x} + \frac{1}{x^2}(I_1u + I_2\Theta) + \frac{1}{xI_*}(N_1I_{31} + M_2I_{12});$$
$$\frac{dQ}{dx} = -\frac{Q_1}{x} + \frac{(\lambda_2 + g_2)}{2\alpha};$$
$$\frac{dM_1}{dx} = -\frac{M_1}{x} + Q + \frac{1}{x^2}(I_2u + I_3\Theta) + \frac{1}{xI_*}(N\ I_{32} + M\ I_{13}) + N_1\Theta;$$
$$\frac{du}{dx} = \frac{1}{I_*}(NI_3 + MI_2) - \frac{1}{2}\Theta^2;$$
$$\frac{d\Theta}{dx} = \frac{1}{I_*}(MI_1 - NI_2);$$

$$\frac{dw}{dx} = -\Theta;$$

$$\frac{dN_1^0}{dx} = -\frac{(1-\nu)N_1^0}{x} + \frac{u^0}{x^2};$$

$$\frac{dQ_1^0}{dx} = -\frac{Q_1^0}{x} + \frac{(\lambda_2 + g_2)}{2\alpha};$$

$$\frac{dM_1^0}{dx} = -\frac{(1-\nu)M_1^0}{x} + Q_1^0 + \frac{(1-\nu^2)}{4x^2}\Theta^0 + N_1^0\Theta^0;$$

$$\frac{du^0}{dx} = (1-\nu^2)N_1^0 - \frac{\nu}{x}u^0 - \frac{1}{2}\Theta_0^2;$$

$$\frac{d\Theta^0}{dx} = 4M_1^0 - \frac{\nu}{x}\Theta^0; \; M_1 = \frac{Eh^3}{12(1-\nu^2)}(\chi_1 + \nu\chi_{20});$$

$$\frac{dw^0}{dx} = -\Theta^0;$$

$$\frac{dg_1}{dx} = \frac{1}{I_*}\left(\bar{I}_2 g_5 - \bar{I}_3 g_4 - \frac{1}{x}\left(\bar{I}_{31} g_1 + \bar{I}_{32} g_3\right)\right) - \Theta g_3;$$

$$\frac{dg_2}{dx} = -g_3;$$

$$\frac{dg_3}{dx} = \frac{1}{I_*}\left(I_2 g_4 - I_1 g_5 - \frac{1}{x}\left(I_{12} g_1 + I_{13} g_3\right)\right);$$

$$\frac{dg_4}{dx} = -\frac{1}{x}\left(g_4 + \frac{1}{x}\left(I_1 g_1 - I_2 g_3\right)\right) +$$
$$+ \frac{1}{xI_*}\left(I_{31} g_4 + I_{12} g_5 + \frac{g_1}{x}\left(I_1' I_{31} + I_2' I_{12}\right) + \frac{g_3}{x}\left(I_1' I_{32} + I_2' I_{13}\right)\right);$$

$$\frac{dg_5}{dx} = g_6 + g_4\Theta - g_3 N_1 - \frac{1}{x}\left(g_5 + \frac{1}{x}\left(I_2 g_1 + I_3 g_3\right)\right) +$$
$$+ \frac{1}{xI_*}\left(I_{13} g_5 + I_{32} g_4 + \frac{g_1}{x}\left(I_2' I_{31} + I_3' I_{12}\right) + \frac{g_3}{x}\left(I_2' I_{32} + I_3' I_{13}\right)\right);$$

$$\frac{dg_6}{dx} = -\frac{g_6}{x} + 2(1-\alpha)(w - w_0 - w_{зад});$$

$$\frac{d\lambda_1}{dx} = -\frac{\nu}{x}\lambda_1 - (1-\nu^2)\lambda_4 - \Theta^0\lambda_3;$$

$$\frac{d\lambda_2}{dx} = -\lambda_3;$$

$$\frac{d\lambda_3}{dx} = -\frac{\nu}{x}\lambda_3 - 4\lambda_5;$$

$$\frac{d\lambda_4}{dx} = -\frac{(1-\nu)}{x}\lambda_4 - \frac{\lambda_1}{x^2};$$

$$\frac{d\lambda_5}{dx} = -\frac{(1-\nu)\lambda_5}{x} - \frac{(1-\nu^2)\lambda_3}{4x^2} - N_1^0\lambda_3 + \Theta^0\lambda_4 + \lambda_6;$$

$$\frac{d\lambda_6}{dx} = -\frac{\lambda_6}{x} + 2(1-\alpha)(w - w^0 - w_{зад}); \qquad (11)$$

Безрозмірні змінні параметри пружності визначаються за формулами:

$$N = N_1 - I_1'\frac{u}{x} - I_2'\frac{\Theta}{x}; \qquad M = M_1 - I_2'\frac{u}{x} - I_3'\frac{\Theta}{x};$$

$$I_1 = \frac{1}{E}\bar{I}_1; \quad I_2 = \frac{\sqrt{3(1-\nu^2)}}{E}\bar{I}_2; \quad I_3 = \frac{3(1-\nu^2)}{E}\bar{I}_3;$$

$$I_1' = \frac{1}{E}\bar{I}_1'; \quad I_2' = \frac{\sqrt{3(1-\nu^2)}}{E}\bar{I}_2'; \quad I_3' = \frac{3(1-\nu^2)}{E}\bar{I}_3';$$

$$d = 2(1+\nu)\varpi + 1 - 2\nu; \qquad E^* = \frac{E}{d}; \quad \nu^* = \frac{(1+\nu)\varpi - 1 + 2\nu}{d};$$

$$\varepsilon_i = 3G\frac{\varepsilon_1}{\sigma_i}; \quad \varepsilon_i = \frac{\sqrt{3}}{2}\sqrt{(\varepsilon_{11}-\varepsilon_{22})^2 + (\varepsilon_{22}-\varepsilon_{33})^2 + (\varepsilon_{33}-\varepsilon_{11})^2};$$

$$\sigma_i = \sqrt{\sigma_{11}^2 - \sigma_{11}\sigma_{22} + \sigma_{22}^2}; \qquad G = \frac{E}{2(1-\nu)};$$

$$\varepsilon_{ii} = \varepsilon_{i0} + \sqrt{3(1-\nu^2)}\varsigma\chi_i; (i = 1,2); \quad \varepsilon_{33} = -\frac{\nu^*}{1-\nu^*}(\varepsilon_{11} + \varepsilon_{22});$$

$$I_{12} = I_1 I_2' - I_1' I_2; \quad I_{13} = I_1 I_3' - I_2' I_2; \quad I_{31} = I_3 I_1' - I_2' I_2;$$

$$I_{32} = I_3 I_2' - I_2' I_3; \qquad I_* = I_1 I_3 - I_2; \qquad (12)$$

Якщо для прямої пружно-пластичної задачі задано такі крайові умови:

$x=x_0$: $u=0$, $M_1=0$, $Q_1=0$;
$x=1$: $u=0$, $w=0$, $\Theta=0$, (13)

то аналогічні крайові умови справедливі і для фіктивної пружної задачі. Тоді крайові умови для спряжених задач отримуємо з умови стаціонарності розширеного функціоналу задачі у вигляді

$x=x_0$: $g_1=0$, $g_5=0$, $g_6=0$, $\lambda_1=0$, $\lambda_5=0$, $\lambda_6=0$;
$x=1$: $g_1=0$, $g_2=0$, $g_3=0$, $\lambda_1=0$, $\lambda_2=0$, $\lambda_3=0$. (14)

При числовому моделюванні використаний ітераційний цикл за параметром α [3]. Геометрична нелінійність лінеаризована методом Ньютона-Канторовича. Крайова задача у кожному наближенні розв'язується з допомогою стійкого методу дискретної ортогоналізації Годунова.

Рівняння серединної поверхні деталі, яку необхідно отримати в результаті пружно-пластичного деформування після розвантаження, задаємо у вигляді $Z=5*(1-x^2)$. Результати обчислення при $\alpha=10^{-7}$ подані на графіках (рис. 1). Розподіл оптимального навантаження, яке забезпечує отримання заданої форми поверхні, поданий на рис.2.

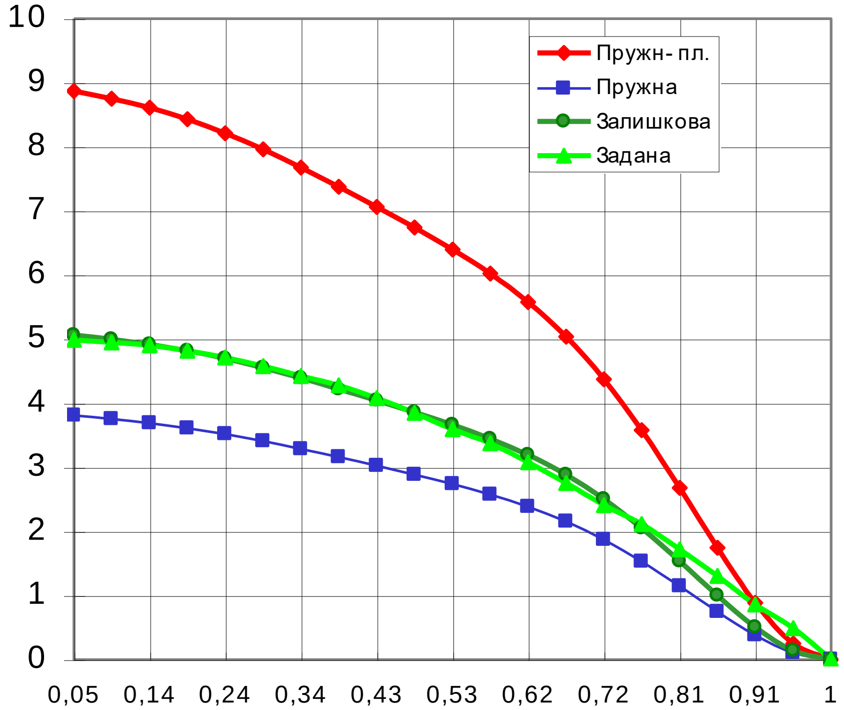

Рис. 1.Графіки залежностей безрозмірного нормального переміщення від радіальної координати

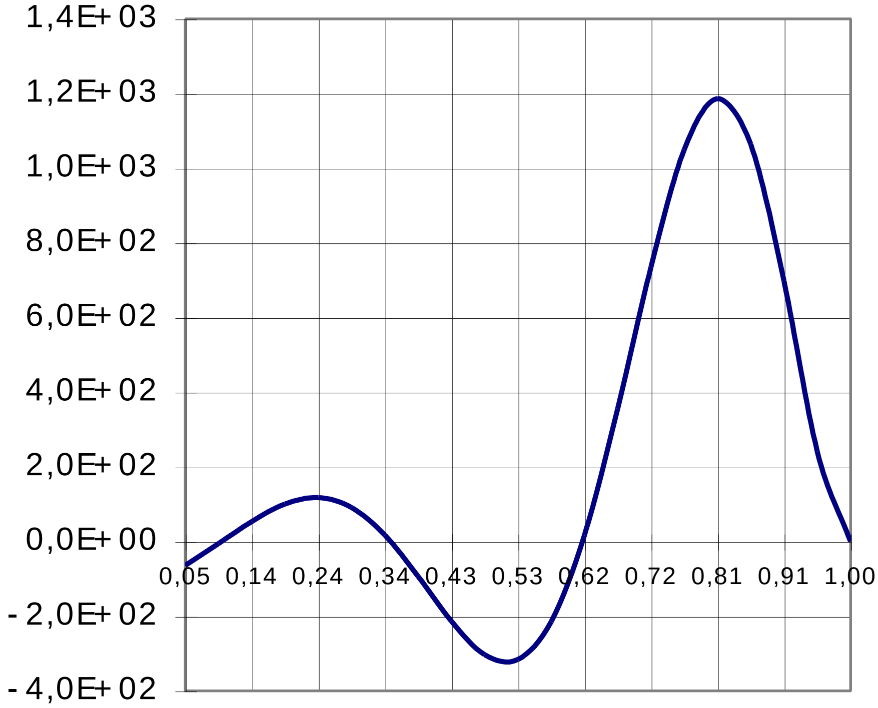

Рис. 2.Графік залежності оптимального безрозмірного нормального тиску від радіальної координати

The solution of the external load deformation problem is ontained. Under the action of this load as a result of elastic deformation round slab turns into the shell of rotation with the given meridian form after discharging.

Література

1. Валиашвили Н.В. Методы рассчета оболочек вращения на ЭЦВМ.- М.,1976. –279 с.
2. Григоренко Я.М., Мукоєд А.П. Розв’язування лінійних і нелінійних задач теорії оболонок на ЕОМ.: Навч.посібник.- К.:Либідь, 1992. – 152 с.
3. Дячук С.Ф.,Михайлишин М.С. Оптимізація пружно-пластичного деформування тонкої оболонки обертання//Вісник ТДТУ.- 2001.-Т.6.№1-с.11-20

Одержано 23.03.2001 р.