

УДК. 539.3

**О.Шаблій, докт.фіз.-мат.наук; Н.Гащин**

*Тернопільський державний технічний університет імені Івана Пулюя*

## ОПТИМІЗАЦІЯ ПОСАДКИ КІЛЬЦЕВОГО ДИСКА НА КРУГЛИЙ ВАЛ

*Важливою характеристикою технологічних процесів, пов'язаних з термообробкою, є затрати енергії, необхідної на здійснення нагрівання для забезпечення мети технологічної операції. Дана стаття присвячена визначенню оптимального розподілу потужності внутрішніх джерел, дія яких за заданий час забезпечує задане переміщення внутрішнього контура кільцевого в'язкопружного диску з метою посадки його на круглий вал. Методами варіаційного числення отримана розв'язуюча система рівнянь для круглого диска у випадку осесиметричної задачі. Отримано аналітичний розв'язок задачі, який детально проаналізований і проілюстрований графічно.*

Кільцевий диск як конструктивний елемент часто використовується у техніці. Здебільшого він насаджується на круглий вал шляхом підігрівання диска для збільшення діаметра внутрішнього контура. Вистигаючи, диск закріплюється на валі внаслідок утворення стискуючих напружень між спряженими поверхнями. Існують елементарні розрахунки необхідної температури нагрівання для здійснення посадки без урахування енергетичних затрат [1]. У даній статті задача посадки кільцевого диска на круглий вал ставиться і розв'язується при умові, що для нагрівання затрачається мінімальна кількість енергії.

Нехай кільцевий диск з внутрішнім і зовнішнім радіусами  $R_1$  і  $R_2$  і товщиною  $2h$  нагрівається тепловими джерелами, розподіленими по його об'ємі з питомою потужністю  $W(r, t)$ , що змінюється вздовж радіуса і в часі. По товщині потужність розподіляється рівномірно. Потрібно нагріти диск за час  $t = \tau$  так, щоб на внутрішньому контурі радіус збільшився на величину  $u_0$  (тобто при  $t = \tau$  контур диска  $r = R_1$  отримав переміщення  $u = u_0$ ), а сумарна потужність теплових джерел була б мінімальною.

Першу з цих умов запишемо у вигляді:

$$\int_0^\tau \int_{R_1}^{R_2} (u - u_0) \frac{\delta(r - R_1)}{r} \delta(t - \tau) r dr dt = 0, \quad (1)$$

де  $\delta(x)$  - функція Дірака.

Другу умову запишемо так:

$$\int_0^\tau \int_{R_1}^{R_2} W^2 r dr dt \rightarrow \min. \quad (2)$$

Використовуючи ізопериметричну умову (1), рівняння стану диска (рівняння рівноваги, геометричні співвідношення, фізичні залежності для в'язко-пружного тіла, рівняння теплопровідності [2], [3], [4]), користуючись методом множників Лагранжа, складемо розширений функціонал задачі

$$\begin{aligned}
 I = & \int_0^{\tau} \int_{R_1}^{R_2} \left\{ W^2 + \frac{4\psi}{r} (u - u_o) \delta(r - R_1) \delta(t - \tau) + \bar{u} \left( \frac{\partial \sigma_{11}}{\partial r} + \frac{\sigma_{11} - \sigma_{22}}{r} \right) + \right. \\
 & + \bar{\sigma}_{11} \left( \varepsilon_{11} - \frac{\partial u}{\partial r} \right) + \bar{\sigma}_{22} \left( \varepsilon_{22} - \frac{u}{r} \right) + \\
 & + \bar{\varepsilon}_{11} \left( \dot{\varepsilon}_{11} - \frac{1}{2G} \left( \dot{\sigma}_{11} + \tau_n^{-1} \sigma_{11} - \left[ \frac{1}{3} \left( 1 - \frac{2G}{3K} \right) (\dot{\sigma}_{11} + \dot{\sigma}_{22}) + \frac{\tau_n^{-1}}{3} (\sigma_{11} + \sigma_{22}) - \right. \right. \right. \\
 & \left. \left. \left. - 2G\alpha_T \dot{T} \right] \right) \right) + \\
 & + \bar{\varepsilon}_{22} \left( \dot{\varepsilon}_{22} - \frac{1}{2G} \left( \dot{\sigma}_{22} + \tau_n^{-1} \sigma_{22} - \left[ \frac{1}{3} \left( 1 - \frac{2G}{3K} \right) (\dot{\sigma}_{11} + \dot{\sigma}_{22}) + \frac{\tau_n^{-1}}{3} (\sigma_{11} + \sigma_{22}) - \right. \right. \right. \\
 & \left. \left. \left. - 2G\alpha_T \dot{T} \right] \right) \right) + \\
 & \left. + \bar{T} \left( \frac{\partial^2 T}{\partial r^2} + \frac{\partial T}{r \partial r} - m^2 T + \frac{W}{\lambda_g} - \frac{1}{a} \dot{T} \right) \right\} r dr dt,
 \end{aligned} \tag{3}$$

в якому  $\sigma_{ij}, \varepsilon_{ij}$  - відповідно компоненти тензорів напружень і деформацій,  $T$  - температура,  $u$  - радіальне переміщення,  $\tau_n = \frac{\eta_n}{G}$  - час релаксації напружень,  $\eta_n$  - коефіцієнт в'язкості при зсуві,  $G = \frac{E}{2(1 + \mu)}$  - модуль зсуву,  $K = \frac{E}{3(1 - 2\mu)}$  - об'ємний коефіцієнт пружності,  $E$  - модуль Юнга,  $\mu$  - коефіцієнт Пуасона,  $\alpha_T$  - коефіцієнт лінійного розширення матеріалу,  $m^2 = \frac{\alpha}{\lambda h}$ ,  $\alpha$  - коефіцієнт тепловіддачі на поверхнях диска  $z = \pm h$ ,  $\lambda$  - коефіцієнт теплопровідності матеріалу диска,  $a$  - коефіцієнт температуропровідності,  $\lambda_g = c \rho a$ ,  $c, \rho$  - питома теплоємність і густина матеріалу диска,  $\psi, \bar{u}, \bar{\sigma}_{11}, \bar{\sigma}_{22}, \bar{\varepsilon}_{11}, \bar{\varepsilon}_{22}, \bar{T}$  - множники Лагранжа. Крапкою зверху позначено швидкості зміни відповідних величин з часом.

Зауважимо, що припускається рівномірний розподіл по товщині диска напружень, деформацій та переміщень. Рівняння теплопровідності записане для усередненої по товщині температури, якщо на поверхнях  $z = \pm h$  виконується конвективний теплообмін із зовнішнім середовищем постійної температури.

Нехай внутрішній і зовнішній контури диска вільні від закріплення і навантаження, і на них здійснюється також конвективний теплообмін з зовнішнім середовищем. Тоді на краях диска маємо граничні умови

$$\sigma_{11} = 0 \quad \text{при} \quad r = R_1; \quad \sigma_{11} = 0 \quad \text{при} \quad r = R_2, \tag{4}$$

$$\frac{\partial T}{\partial r} - kT = 0 \quad \text{при} \quad r = R_1; \quad \frac{\partial T}{\partial r} + kT = 0 \quad \text{при} \quad r = R_2, \quad k = \frac{\alpha}{\lambda}. \tag{5}$$

Припустимо, що у початковому стані диска всі функції стану дорівнюють нулеві:

$$u = 0; \quad \sigma_{11} = 0; \quad \sigma_{22} = 0; \quad \varepsilon_{11} = 0; \quad \varepsilon_{22} = 0; \quad T = 0; \quad \text{при } t = 0. \quad (6)$$

Умовою термодинамічної рівноваги диска є умова мінімуму розширеного функціоналу задачі (3). Необхідною умовою цього є

$$\delta I = 0, \quad (7)$$

тобто повна варіація функціоналу (3) повинна бути рівна нулю.

Пропускаючи громіздкі математичні перетворення, що випливають з умови (7), запишемо остаточну систему рівнянь для визначення всіх функцій стану, множників Лагранжа, а також часові і граничні умови, які вони мають задовольняти :

рівняння рівноваги

$$\frac{\partial \sigma_{11}}{\partial r} + \frac{\sigma_{11} - \sigma_{22}}{r} = 0, \quad (8)$$

геометричні залежності

$$\varepsilon_{11} = \frac{\partial u}{\partial r}, \quad \varepsilon_{22} = \frac{u}{r}, \quad (9)$$

фізичні співвідношення

$$\dot{\varepsilon}_{11} - \frac{1}{2G} \left( \dot{\sigma}_{11} + \tau_n^{-1} \sigma_{11} - \left[ \frac{1}{3} \left( 1 - \frac{2G}{3K} \right) (\dot{\sigma}_{11} + \dot{\sigma}_{22}) + \frac{\tau_n^{-1}}{3} (\sigma_{11} + \sigma_{22}) - 2G\alpha_T \dot{T} \right] \right) = 0, \quad (10)$$

$$\dot{\varepsilon}_{22} - \frac{1}{2G} \left( \dot{\sigma}_{22} + \tau_n^{-1} \sigma_{22} - \left[ \frac{1}{3} \left( 1 - \frac{2G}{3K} \right) (\dot{\sigma}_{11} + \dot{\sigma}_{22}) + \frac{\tau_n^{-1}}{3} (\sigma_{11} + \sigma_{22}) - 2G\alpha_T \dot{T} \right] \right) = 0,$$

рівняння теплопровідності

$$\frac{\partial^2 T}{\partial r^2} + \frac{\partial T}{r \partial r} - m^2 T + \frac{W}{\lambda_g} - \frac{1}{a} \dot{T} = 0. \quad (11)$$

Для функцій стану, які задовольняють рівняння (8)-(11), повинні виконуватися граничні умови (4), (5), початкові умови (6), а також умова мети термообробки

$$u = u_0 \quad \text{при} \quad r = R_1, \quad t = \tau. \quad (12)$$

Множники Лагранжа повинні задовольняти такі рівняння:

$$\begin{aligned} & \frac{\partial \bar{\sigma}_{11}}{\partial r} + \frac{\bar{\sigma}_{11} - \bar{\sigma}_{22}}{r} + \frac{4\psi}{r} \delta(r - R_1) \delta(t - \tau) = 0, \\ & \bar{\sigma}_{11} = \dot{\varepsilon}_{11}, \quad \bar{\sigma}_{22} = \dot{\varepsilon}_{22}, \\ & -\frac{\partial \bar{u}}{\partial r} + \frac{1}{2G} \left( \dot{\varepsilon}_{11} - \tau_n^{-1} \bar{\varepsilon}_{11} - \frac{1}{3} \left( 1 - \frac{2G}{3K} \right) (\dot{\varepsilon}_{11} + \dot{\varepsilon}_{22}) + \frac{\tau_n^{-1}}{3} (\bar{\varepsilon}_{11} + \bar{\varepsilon}_{22}) \right) = 0, \\ & -\frac{\bar{u}}{r} + \frac{1}{2G} \left( \dot{\varepsilon}_{22} - \tau_n^{-1} \bar{\varepsilon}_{22} - \frac{1}{3} \left( 1 - \frac{2G}{3K} \right) (\dot{\varepsilon}_{11} + \dot{\varepsilon}_{22}) + \frac{\tau_n^{-1}}{3} (\bar{\varepsilon}_{11} + \bar{\varepsilon}_{22}) \right) = 0, \\ & \frac{\partial^2 \bar{T}}{\partial r^2} + \frac{\partial \bar{T}}{r \partial r} - m^2 \bar{T} + \frac{W}{\lambda_g} + \frac{1}{a} \dot{\bar{T}} + \alpha_T (\dot{\varepsilon}_{11} + \dot{\varepsilon}_{22}) = 0. \end{aligned} \quad (13)$$

Питома потужність  $W$  зв'язана з множником Лагранжа  $\bar{T}$  залежністю

$$W = -\frac{\bar{T}}{2\lambda_g} \quad (14)$$

З умови стаціонарності (7) і граничних та часових умов на функції стану прямої задачі впливають граничні та часові умови для множників Лагранжа:

$$\frac{\partial \bar{T}}{\partial r} - k\bar{T} = 0 \quad \text{при} \quad r=R_1; \quad \frac{\partial \bar{T}}{\partial r} + k\bar{T} = 0 \quad \text{при} \quad r=R_2, \quad (15)$$

$$\bar{\sigma}_{11}=0 \quad \text{при} \quad r=R_1, \quad \bar{\sigma}_{11}=0 \quad \text{при} \quad r=R_2, \quad (16)$$

$$\bar{\varepsilon}_{11} = 0, \quad \bar{\varepsilon}_{22} = 0, \quad \bar{T} = 0 \quad \text{при} \quad t = \tau. \quad (17)$$

Система рівнянь (8)-(11), (13) з урахуванням залежності (14), граничних умов (4), (5), (15), (16), часових умов (6), (17), а також умови (12), є замкнутою системою рівнянь для знаходження питомої потужності  $W$ , температури  $T$ , переміщення  $u$ , напружень  $\sigma_{11}, \sigma_{22}$  як функцій координати  $r$  і часу  $t$ .

Загальний розв'язок цієї системи рівнянь відносно шуканих функцій прямої задачі виглядає так:

$$W = -\frac{\alpha_T a \psi(R_1, \tau) u_+(\tau - t)}{2\lambda_g} \sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{I_3}{I_1} \left[ e^{At} W_1 + e^{\tau_n^{-1} t} W_2 + e^{a\lambda_{\nu}^2 t} W_3 - e^{At} (t - \tau) W_4 \right] * \\ [NJ_0(l_{\nu} r) + Y_0(l_{\nu} r)], \quad (18)$$

$$T = -\frac{\alpha_T a^2 \psi(R_1, \tau)}{2\lambda_g^2} \sum_{\nu=1}^{\infty} \sum_{\mu=1}^{\infty} \frac{I_3}{I_1} \left[ e^{At} T_1 + e^{\tau_n^{-1} t} T_2 + e^{a\lambda_{\nu}^2 t} T_3 - e^{-a\lambda_{\mu}^2 t} T_4 + e^{At} (t - \tau) T_5 \right] * \\ [MJ_0(l_{\mu} r) + Y_0(l_{\mu} r)], \quad (19)$$

$$u = -\frac{\alpha_T^2 a^2 \psi(R_1, \tau)}{2\lambda_g^2} \sum_{\nu=1}^{\infty} \sum_{\mu=1}^{\infty} \frac{I_3}{I_1} \left[ e^{At} u_{10} + e^{\tau_n^{-1} t} u_{11} + e^{a\lambda_{\nu}^2 t} u_{12} - e^{-a\lambda_{\mu}^2 t} u_{13} + e^{-\tau_n^{-1} t} u_{14} + \right. \\ \left. e^{-At} u_{15} + e^{At} (t - \tau) u_{16} + e^{-(\tau_n^{-1} - A)t} u_{17} + e^{(\tau_n^{-1} - A)t} u_{18} + u_{19} \right], \quad (20)$$

$$\sigma_{11} = -\frac{\alpha_T^2 a^2 \psi(R_1, \tau)}{2\lambda_g^2} \sum_{\nu=1}^{\infty} \sum_{\mu=1}^{\infty} \frac{I_3}{I_1} \left[ e^{At} s_{10} + e^{\tau_n^{-1} t} s_{11} + e^{a\lambda_{\nu}^2 t} s_{12} - e^{-a\lambda_{\mu}^2 t} s_{13} + e^{-At} s_{14} + \right. \\ \left. e^{At} (t - \tau) s_{15} + e^{-(\tau_n^{-1} - A)t} s_{16} + e^{(\tau_n^{-1} - A)t} s_{17} + e^{-\tau_n^{-1} t} s_{18} + te^{-\tau_n^{-1} t} s_{19} + te^{-At} s_{20} \right], \quad (21)$$

$$\sigma_{22} = -\frac{\alpha_T^2 a^2 \psi(R_1, \tau)}{2\lambda_g^2} \sum_{\nu=1}^{\infty} \sum_{\mu=1}^{\infty} \frac{I_3}{I_1} \left[ e^{At} s_{21} + e^{\tau_n^{-1} t} s_{22} + e^{a\lambda_{\nu}^2 t} s_{23} - e^{-a\lambda_{\mu}^2 t} s_{24} + \right. \\ \left. e^{At} (t - \tau) s_{25} + e^{-\tau_n^{-1} t} s_{26} + e^{-(\tau_n^{-1} - A)t} s_{27} + e^{(\tau_n^{-1} - A)t} s_{28} + e^{-\tau_n^{-1} t} s_{29} + te^{-At} s_{30} + te^{-\tau_n^{-1} t} s_{31} \right], \quad (22)$$

де коефіцієнти  $W_1, W_2, W_3, W_4, T_1, T_2, T_3, T_4, T_5, u_{10}, u_{11}, u_{12}, u_{13}, u_{14}, u_{15}, u_{16}, u_{17}, u_{18}, u_{19}, s_{10}, s_{11}, s_{12}, s_{13}, s_{14}, s_{15}, s_{16}, s_{17}, s_{18}, s_{19}, s_{20}, s_{21}, s_{22}, s_{23}, s_{24}, s_{25}, s_{26}, s_{27}, s_{28}, s_{29}, s_{30}, s_{31}$ ,  $\psi(R_1, \tau)$  визначаються через фізичні параметри матеріалу і геометричні розміри диска, з граничних і часових умов та умови (12);  $l_{\nu}$  - параметр, що задовольняє рівняння

$$[l_{\nu} J_1(l_{\nu} R_1) + k J_0(l_{\nu} R_1)] * [-l_{\nu} Y_1(l_{\nu} R_2) + k Y_0(l_{\nu} R_2)] - \quad (23)$$

$$-[-l_\nu J_1(l_\nu R_2) + k J_0(l_\nu R_2)] * [l_\nu Y_1(l_\nu R_1) + k Y_0(l_\nu R_1)] = 0,$$

в якому  $N = -\frac{-Y_1(l_\nu R_2)l_\nu + Y_0(l_\nu R_2)k}{-J_1(l_\nu R_2)l_\nu + J_0(l_\nu R_2)k}$ ,  $J_0(l_\nu r), Y_0(l_\nu r)$ ,  $J_1(l_\nu r), Y_1(l_\nu r)$  - функції

Бесселя відповідно першого і другого роду нульового і першого порядку,  $\lambda_\nu^2 = m^2 + l_\nu^2$ ,  $l_\mu$  -задовольняє рівняння, аналогічне (23);  $u_+(\tau-t)$  - несиметрична одинична функція,  $I_3, I_1$  - визначаються через корені характеристичних рівнянь, фізичні параметри матеріалу та геометричні розміри диска.

За формулою (18) знаходимо необхідну питому потужність, що визначає оптимальний режим термообробки диска, при якому досягається необхідний для посадки розмір радіуса його внутрішнього контура. Тоді за допомогою формул (19)-(23) визначаємо поля температури, переміщення та напружень.

Обчислення виконані для випадку, коли геометричні, фізичні і механічні параметри набувають значень :  $R_1 = 0.065$  м,  $R_2 = 0.13$  м,  $h = 0.01$  м,  $\alpha_T = 1.25E-5$  1/°C,  $a = 1.36E-5$  м²/с,  $\alpha = 800$  Вт/(°C\*м²),  $\lambda = 51.75$  Вт/(°C\*м),  $\lambda_g = 51.91$  Вт/(°C\*м),  $E = 2E+11$  Па,  $\mu = 0.3$ ,  $\tau_n = 1E+5$  с,  $t = 120$  с,  $u_0 = 0.3$  мм.

На рисунку 1 подані графіки залежності питомої потужності від радіуса  $r$  і часу  $t$ . Характерним є ввічнення в початковий момент часу певної величини питомої потужності (в даному випадку  $W(t=0) = 3.36E+6$  Вт/м³). Із зростанням часу питома потужність плавно зростає до величини  $W(t=\tau-0) = 7.52E+7$  Вт/м³, а при  $t=\tau$  джерела вимикаються ( $W(t=\tau) = 0$ ). По радіусу величина питомої потужності майже не змінюється (у даному випадку її зміна перебуває у межах 1,5%).

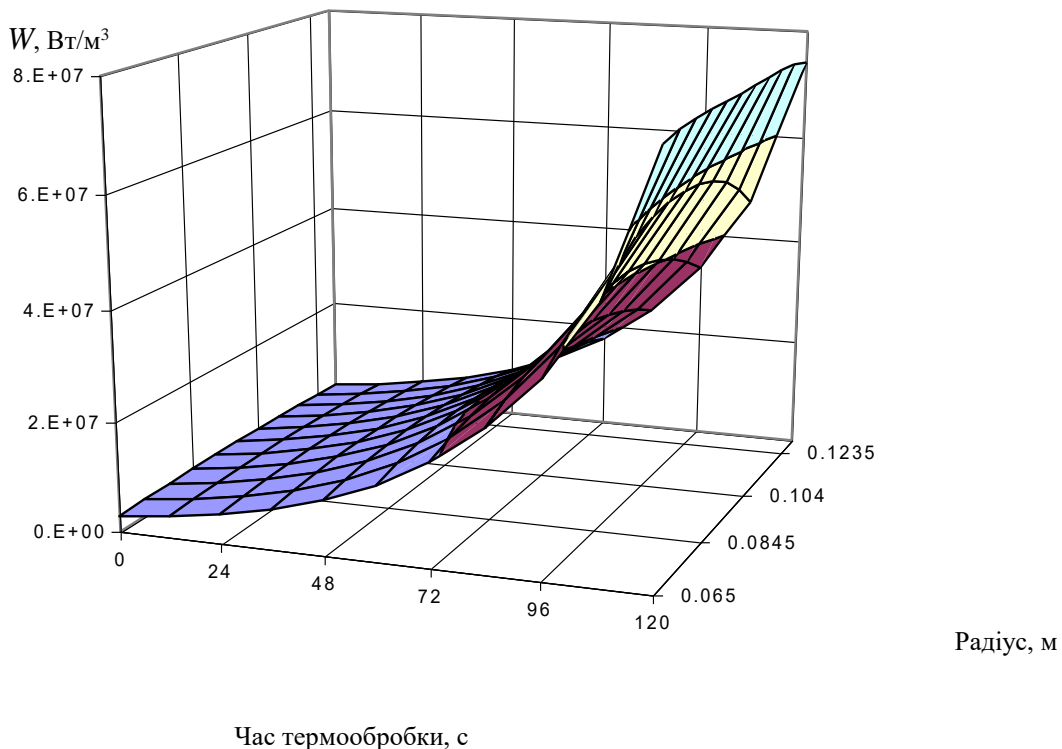


Рис.1. Розподіл оптимальної питомої потужності теплових джерел по радіусу диска і в часі .

Залежність температури термообробки від часу  $t$  і радіуса  $r$  зображена на рисунку 2. Температура зростає також плавно, але від нульового початкового значення ( $T(t=0) = 0$ ) до певного кінцевого значення, яке на різних радіусах диска різне. Так, на внутрішньому радіусі  $T(r = R_1 = 0.065\text{м}) = 330$  °C, на зовнішньому

$T(r = R_2 = 0.13\text{м}) = 315\text{ }^{\circ}\text{C}$ , а найбільша температура при  $r = 0.091\text{ м}$  і дорівнює  $T(r = 0.091\text{ м}) = 392\text{ }^{\circ}\text{C}$ . Температура змінюється по радіусу в межах 20%. Треба відзначити, що кінцевий розподіл температури забезпечує досягнення необхідного переміщення на внутрішньому контурі диска.

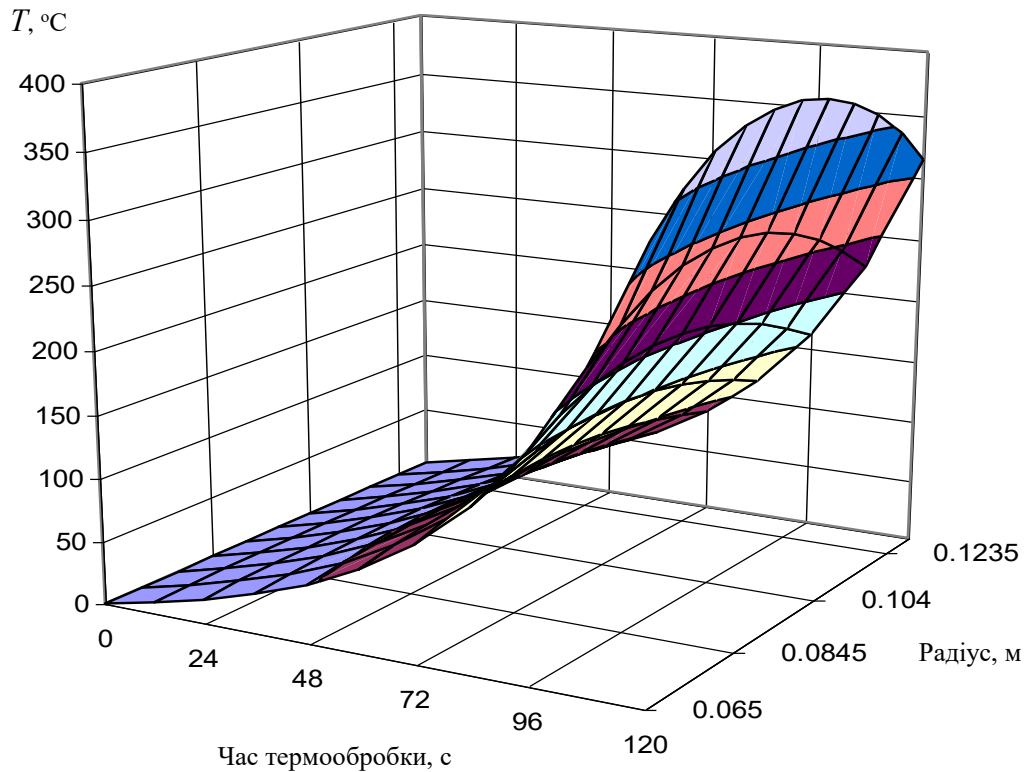


Рис.2. Залежність температури термообробки диска від радіусу і часу.

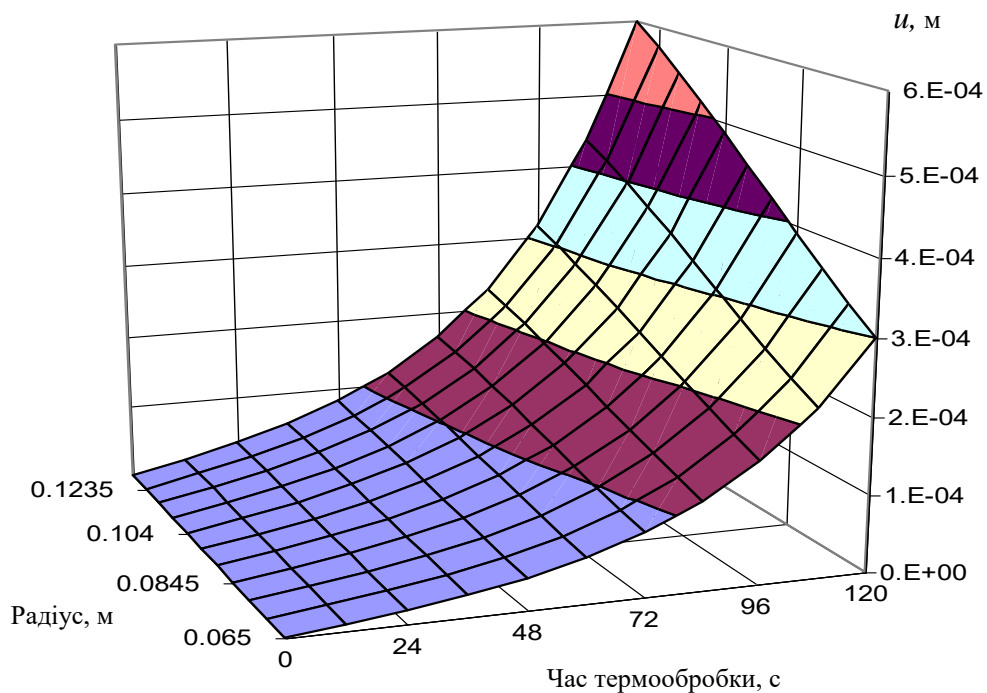


Рис.3. Переміщення у точках по радіусу диска для різних значень часу.

Зміна переміщення  $u$  по області диска і в часі, викликана такою зміною температури, зображена на рисунку 3. Переміщення в усіх точках диска плавно зростають у часі від нуля до певного значення, яке при  $r = R_1 = 0.065$  м,  $t = \tau = 120$  с дорівнює необхідному для посадки  $u_0 = 0.3$  мм. Із зростанням радіуса переміщення також плавно збільшується. Так, на зовнішньому радіусі диска  $r = R_2 = 0.13$  м у кінці термообробки  $t = \tau = 120$  с воно дорівнює  $u(r = 0.13$  м,  $t = 120$  с) = 0.6 мм.

Епюри напружень  $\sigma_{11}, \sigma_{22}$  у координатах  $r, t$  побудовані на рисунках 4 і 5.

Як видно з рисунка 4, при  $t = 0$  маємо  $\sigma_{11}(r, t = 0) = 0$ , а при  $r = R_1 = 0.065$  м та  $r = R_2 = 0.13$  м напруження  $\sigma_{11}$  нульові, тобто виконуються умови на границі  $\sigma_{11}(r = R_1 = 0.065$  м,  $t) = 0$ ,  $\sigma_{11}(r = R_2 = 0.13$  м,  $t) = 0$ . Характерним є розтяг у напрямку радіусу приграничної зони біля внутрішнього контура та стиск біля зовнішнього контура.

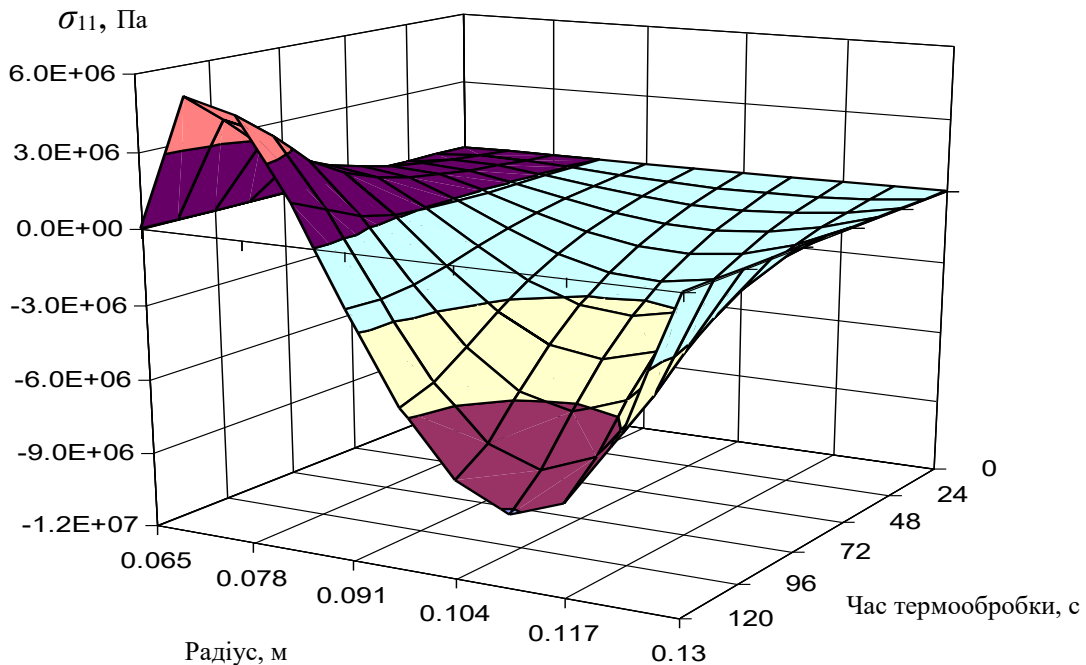


Рис.4. Розподіл радіальних напружень по області диска і в часі.

На рисунку 5 також бачимо виконання початкової умови  $\sigma_{22}(r, t = 0) = 0$ . Із зростанням часу напруження  $\sigma_{22}$  у зонах біля внутрішнього і зовнішнього контурів зростають, а в області між цими зонами спадають, досягаючи від'ємного значення.

З графіків на рисунках 4 і 5 видно, що напруження у процесі термообробки не більші допустимого, що для використаного матеріалу дорівнює  $4.14E+8$  Па.

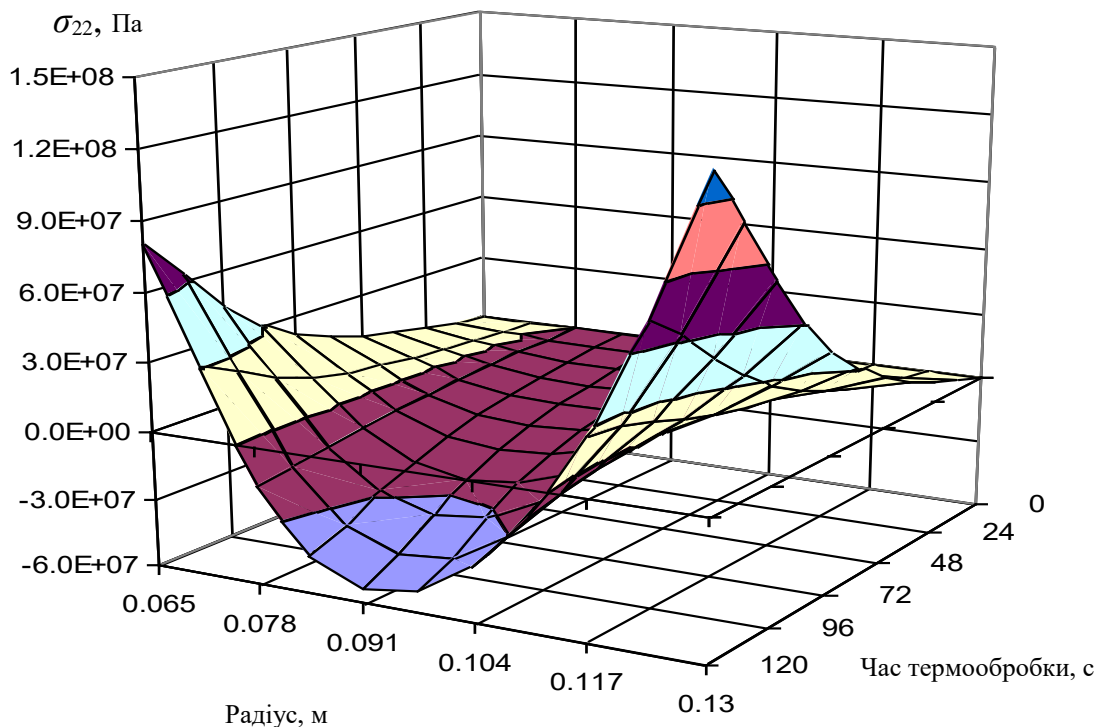


Рис.5. Залежність тангенціальних напружень від радіусу і часу.

*Important characteristics of the manufacturing processes which deal with thermal treatment are the energy expenses necessary for heating to meet the goal of the manufacturing operation. The article deals with the determination of the optimal distribution of the inside sources capacity, the action of which during the definite time provides the definite displacement of the inner duct of the stress-strained ring disk in order to slip it on the round shaft. The equation system for the round disk in the case of axis-symmetric task was obtained by the variation calculation method. The analytical solution of the task, illustrated by graphs and analyzed in details was obtained.*

### Література

1. Новиков М.П. Основы технологии сборки машин и механизмов.- М.:Машиностроение, 1969.-532 с.
2. Безухов Н.И. Основы теории упругости, пластичности и ползучести.-М.:Высш. школа, 1961.-537 с.
3. Фрейденталь С., Гейнригер Х. Математическая теория неупругой сплошной среды. -М.:Физматгиз, 1962. - 432 с.
4. Лыков А.В. Теория теплопроводности.-М.:Высш.школа, 1967.-600 с.

Одержано 02.03.2001 р.