УДК 519.6

М.Михайлишин, канд.фіз.–мат.наук; М.Шинкарик, канд.техн.наук; Л.Радіо

Тернопільський державний технічний університет імені Івана Пулюя

МАТЕМАТИЧНЕ МОДЕЛЮВАННЯ ПРОЦЕСІВ ВІДТИСКУ СТИСЛИВИХ ОСАДІВ

Розроблено математичну модель процесу відтиску стисливих осадів із врахуванням швидкості руху твердої фази на основі встановлених залежностей компресійно–фільтраційних характеристик

Умовні позначення

ε – пористість згустку, м^3/м^3;
e – коефіцієнт пористості;
P_* – зовнішній прикладений тиск, Па;
P_w – тиск у рідкій фазі, Па;
P – тиск у твердій фазі, Па;
q – швидкість руху рідкої фази, м/с;
υ – швидкість руху твердої фази, м/с;
t – час процесу відтиску, с;
μ – коефіцієнт динамічної в’язкості рідини, Па·с;
r – питомий опір фільтрації, м$^{-2}$;
z – лінійна координата, м;
h – товщина шару продукту, м.

У багатьох технологічних процесах відтиск (консолідація, експресія) є завершальною стадією фільтрування або намиву і починається тоді, коли осад перебуває між перегородками (поверхнями), що можуть зближуватися. Перегородки знаходяться безпосередньо на крайових поверхнях осаду і хоча б одна з них пропускає рідку фазу. Тверду частину осаду прийнято називати скелетом. Осад як дисперсне середовище характеризується пористістю ε – об’ємом пор в одиниці об’єму осаду, або коефіцієнтом пористості e:

$$e = \frac{\varepsilon}{1-\varepsilon}. \tag{1}$$

Для вивчення процесів відтиску використовують основні положення теорії фільтраційної консолідації [1-4].

Прикладений до осаду тиск розподіляється між рідкою та твердою фазами, і для кожного моменту часу справедлива залежність:

$$P_* = P_w + P. \tag{2}$$

Рівняння нерозривності рідкої та твердої фаз виглядають так:

$$\frac{\partial q}{\partial z} + \frac{\partial \vartheta}{\partial z} = 0; \tag{3}$$

$$\frac{\partial q}{\partial z} + \frac{\partial \varepsilon}{\partial t} = 0. \tag{4}$$

Рух рідини каналами твердої фази описує закон:

$$q - ve\vartheta = \frac{1}{\mu r}\frac{\partial P}{\partial z}. \tag{5}$$

В рівнянні (5) введено коефіцієнт ν, який може приймати значення $\nu = 0$, або $\nu = 1$. При $\nu = 0$ рівняння (5) зводиться до закону Дарсі, а при $\nu = 1$ – закону Дарсі-Герсеванова [3].

Особливістю стисливих осадів є те, що питомий опір фільтрації *r* залежить від тиску, який в даний момент сприймає тверда фаза. Експериментальні дослідження виявляють, що цю залежність можна подати у вигляді [5]:

$$r = r_0 \cdot \left(E + \frac{P}{P_*} \right)^{\gamma}, \qquad (6)$$

де r_0, E, γ – константи, що визначаються експериментально, причому для ряду харчових суспензій $\gamma > 1$.

Пористість також залежить від тиску, і для коефіцієнта пористості часто використовують залежність:

$$e = \alpha \left(\frac{P}{P_*} \right)^{-\beta}, \qquad (7)$$

де α, β – експериментальні константи, $\beta > 0$. Очевидно, що така апроксимація не придатна при $P \to 0$.

Підставимо в (4) значення для пористості ε з рівняння (1). Вважаючи, що *e* залежить від тиску, який в свою чергу залежить від часу, знайдемо:

$$\frac{\partial q}{\partial z} + \frac{\frac{\partial e}{\partial P}}{\left(1+e\right)^2} \cdot \frac{\partial P}{\partial t} = 0. \qquad (8)$$

Рівняння (8) набуде найпростішого вигляду, коли величина $\frac{\partial e}{\partial P}$ буде пропорційною $\left(1+e\right)^2$. Інтегруючи рівняння $\frac{\partial e}{\partial P} = -\frac{A}{P_*}\left(1+e\right)^2$ при умові $e = e_0$ при $P = 0$, знайдемо:

$$e = \frac{a_0}{1 + a_0 A \frac{P}{P_*}} - 1, \qquad (9)$$

де $A = \frac{a_0 - a_1}{a_0 \cdot a_1}$; $a_0 = 1 + e_0$; $a_1 = 1 + e_1$; $e_1 = e$ при $P = P_*$.

Аналіз отриманої нами залежності виявляє, що вона з достатньою точністю апроксимує експериментальні результати для цілого ряду харчових суспензій. Надалі використовуємо залежність (9), і рівняння (4) набуває вигляду:

$$\frac{\partial q}{\partial z} - \frac{A}{P_*} \frac{\partial P}{\partial t} = 0. \qquad (10)$$

Розглянемо процес одновимірного відтиску суспензії товщиною h_0. Вважатимемо, що нижня перфорована перегородка нерухома, і її опір фільтрації дорівнює нулеві. Вісь *z* спрямована догори з початком на нижній нерухомій основі шару, так що на поверхні $z = 0$ в довільний момент часу повинна виконуватися умова $\vartheta = 0$ при $z = 0$. Проаналізуємо рівняння (3) при цій умові. Знайдемо

$$q + \vartheta = F\left(t\right). \qquad (11)$$

Оскільки при $z = 0$ швидкість $\vartheta = 0$, то $q\left(0,t\right) = F\left(t\right)$ і залежність (11) перепишемо так:

$$q\left(z,t\right) + \vartheta\left(z,t\right) = q\left(0,t\right). \qquad (12)$$

В рівнянні (12) через $q\left(0,t\right)$ позначено швидкість фільтрації на поверхні $z = 0$ в даний момент часу *t*. Отже, із системи рівнянь (1) – (5) залишилися такі рівняння:

$$\begin{aligned}
&\frac{\partial P}{\partial z} = \mu r\left(q - \nu e\vartheta\right);\\
&\frac{\partial q}{\partial z} - \frac{A}{P_*}\frac{\partial P}{\partial t} = 0;\\
&\frac{\partial \vartheta}{\partial z} + \frac{A}{P_*}\frac{\partial P}{\partial t} = 0.
\end{aligned} \tag{13}$$

З двох останніх рівнянь системи (13) далі можна використовувати лише одне рівняння, якщо враховувати залежність (12). Введемо такі безрозмірні величини:

$$\begin{aligned}
&\zeta = \frac{z}{h}; \quad \bar{h} = \frac{h}{h_0}; \quad p = \frac{P}{P_*};\\
&k = \frac{q\mu r_0 h_0}{\chi P_*}; \quad w = \frac{\vartheta \mu r_0 h_0}{\chi P_*};\\
&\tau = \frac{t}{t_*}; \qquad t_* = \frac{A\mu r_0 h_0^2}{\chi P_*},
\end{aligned} \tag{14}$$

де χ – масштабний множник, який будемо підбирати при обчисленнях з метою приведення безрозмірних величин до одного порядку.

Систему рівнянь (13) в безрозмірних величинах запишемо так:

$$\frac{\partial p}{\partial \zeta} = \chi\rho\bar{h}(k - \nu e w); \tag{15}$$

$$\frac{\partial k}{\partial \zeta} = \bar{h}\,\frac{\partial p}{\partial \tau}; \tag{16}$$

$$\frac{\partial w}{\partial \zeta} = -\bar{h}\,\frac{\partial p}{\partial \tau}, \tag{17}$$

де позначено $\rho = (E + p)^{\gamma}; \quad e = \dfrac{a_0}{1 + a_0 A p} - 1.$

Продиференціюємо рівняння (15) по ζ і скористаємося рівняннями (15) і (16) для вилучення k і $\dfrac{\partial k}{\partial \zeta}$ і рівнянням (17) для виключення $\dfrac{\partial w}{\partial \zeta}$. Одержимо

$$\begin{aligned}
\frac{\partial^2 p}{\partial \zeta^2} &= \chi\bar{h}\left[\rho_1(k - \nu e w)\frac{\partial p}{\partial \zeta} + \rho\left(\frac{\partial k}{\partial \zeta} - \nu e_1 w\frac{\partial p}{\partial \zeta} - \nu e\frac{\partial w}{\partial \zeta}\right)\right] =\\
&= \chi\bar{h}\left[\frac{\rho_1}{\chi\rho\bar{h}}\left(\frac{\partial p}{\partial \zeta}\right)^2 + \rho\bar{h}\frac{\partial p}{\partial \tau} - \nu e_1\rho w\frac{\partial p}{\partial \zeta} + \nu e\rho\bar{h}\frac{\partial p}{\partial \tau}\right] =\\
&= \frac{\rho_1}{\rho}\left(\frac{\partial p}{\partial \zeta}\right)^2 - \chi\rho\bar{h}\left[\nu e_1 w\frac{\partial p}{\partial \zeta} - \bar{h}(1 + \nu e)\frac{\partial p}{\partial \tau}\right].
\end{aligned} \tag{18}$$

Тут позначено: $\rho_1 = \dfrac{\partial \rho}{\partial p} = \gamma(E + p)^{\gamma - 1}; \quad e_1 = \dfrac{\partial e}{\partial p} = -A(1 + e)^2.$

До рівняння (18) долучаємо рівняння (17) для знаходження w. Отже, отримаємо:

$$\begin{aligned}
&\frac{\partial^2 p}{\partial \zeta^2} = \frac{\rho_1}{\rho}\left(\frac{\partial p}{\partial \zeta}\right)^2 - \chi\rho\bar{h}\left[\nu e_1 w\frac{\partial p}{\partial \zeta} - \bar{h}(1 + \nu e)\frac{\partial p}{\partial \tau}\right];\\
&\frac{\partial w}{\partial \zeta} = -\bar{h}\,\frac{\partial p}{\partial \tau}.
\end{aligned} \tag{19}$$

Зведемо систему рівнянь (19) до системи трьох рівнянь першого порядку. Для цього позначимо:

$$p = y_1;$$
$$\frac{\partial p}{\partial \zeta} = \frac{\partial y_1}{\partial \zeta} = y_2; \qquad (20)$$
$$w = y_3.$$

Систему (19) в позначеннях (20) перепишемо так:

$$\frac{\partial y_1}{\partial \zeta} = y_2;$$
$$\frac{\partial y_2}{\partial \zeta} = \frac{\gamma}{E + y_1} y_2^2 - \chi \rho \bar{h} \left[\nu e_1 y_2 y_3 - \bar{h}(1 + \nu e) \dot{y}_1 \right]; \qquad (21)$$
$$\frac{\partial y_3}{\partial \zeta} = -\bar{h} \dot{y}_1,$$

причому

$$\rho = (E + y_1)^{\gamma}; \quad \rho_1 = \gamma (E + y_1)^{\gamma - 1};$$
$$e = \frac{a_0}{1 + a_0 A y_1} - 1; \quad e_1 = -A(1 + e)^2.$$

Для знаходження однозначного розв’язку системи (21) задаємо початкові і крайові умови.

У водонасиченому об’ємі осаду з непроникливими поверхнями весь тиск, прикладений до будь–якої з поверхонь, сприймає рідка фаза і він передається на всі поверхні однаково. Тобто $P_w = P_*,\ P = 0.$ В момент часу $\tau = 0$ поверхня $\zeta = 0$ стає проникною для рідкої фази, причому опір фільтрації на перегородці вважаємо рівним нулеві.

Розглянемо випадок, коли рідка фаза виходить у середовище з атмосферним тиском. Тоді надлишковий тиск у рідині на виході дорівнює нулеві.

При $\tau > 0$ на поверхні $\zeta = 0$ тиск залишається рівним прикладеному тиску P_*, швидкість руху твердої фази на цій поверхні дорівнює нулеві. На поверхні $\zeta = 1$ припускаємо виконання умови $\frac{\partial p}{\partial \zeta} = 0,$ що при використанні закону Дарсі ($\nu = 0$) рівнозначно тому, що швидкість фільтрації $k = 0$ на цій поверхні.

Отже, початкові і крайові умови такі:

$$\tau = 0: \qquad y_1 = \begin{cases} 0, & 0 < \zeta \le 1; \\ 1, & \zeta = 0; \end{cases}$$
$$y_2 = \begin{cases} 0, & 0 < \zeta \le 1; \\ -\infty, & \zeta = 0; \end{cases}$$
$$y_3 = 0, \quad 0 \le \zeta \le 1 \qquad (22)$$
$$\zeta = 0: \qquad y_1 = 1; \quad y_3 = 0;$$
$$\zeta = 1: \qquad y_2 = 0.$$

Очевидно, що крайова задача (21) – (22) нелінійна і розв’язати її можна тільки числовим способом.

Використовуємо схему Кранка-Ніколсона для дискретизації за часом. Введемо сітки $\bar{\omega}_\tau = \{\tau_j = j\Delta\tau,\ j = 0,1,\dots\}$ і $\hat{\omega}_\tau = \left\{\tau_{j+\frac{1}{2}} = \left(j + \frac{1}{2}\right)\Delta\tau,\ j = 0,1,\dots\right\}$ з кроком $\Delta\tau$. Значення будь-якої функції y_k в момент часу τ_j позначимо y_{kj} і введемо позначення:

$$y_{k\tau}=\frac{y_{kj+1}+y_{kj}}{2},\quad \text{k=1,2,3;}\quad \text{j=0,1,…}$$
$$\dot{y}_{1\tau}=\frac{y_{1j+1}-y_{1j}}{\Delta\tau};\quad \rho_\tau=(E+y_{1\tau})^\gamma;\quad \rho_{1\tau}=\gamma(E+y_{1\tau})^{\gamma-1};\tag{23}$$
$$e_\tau=\frac{a_0}{1+a_0Ay_{1\tau}}-1;\quad e_{1\tau}=-A(1+e_\tau)^2;\quad \bar{h}_\tau=\frac{\bar{h}_{j+1}+\bar{h}_j}{2}.$$

Тоді система (21) у вузлах сітки $\hat{\omega}_\tau$ набере вигляду:

$$\begin{aligned}&\frac{\partial y_{1\tau}}{\partial\zeta}=y_{2\tau};\\ &\frac{\partial y_{2\tau}}{\partial\zeta}=\frac{\gamma}{E+y_{1\tau}}y_{2\tau}^2-\chi\rho_\tau\bar{h}_\tau\left[\nu e_{1\tau}y_{2\tau}y_{3\tau}-\bar{h}_\tau(1+\nu e_\tau)\dot{y}_{1\tau}\right];\\ &\frac{\partial y_{3\tau}}{\partial\zeta}=-\bar{h}_\tau\dot{y}_{1\tau}.\end{aligned}\tag{24}$$

До розрахункових величин у систему (24) входить також біжуча товщина шару. Для її визначення використовуємо рівняння:

$$\frac{dh}{dt}=\vartheta\quad \text{при}\quad \zeta=1,\tag{25}$$

що в безрозмірних величинах перепишмо так:

$$\frac{h_{j+1}-h_j}{\Delta\tau}=Ay_{3\tau}(1)\quad\Rightarrow\quad \bar{h}_{j+1}=\bar{h}_j+A\Delta\tau y_{3\tau}(1).\tag{26}$$

Одним із основних методів розв’язування лінійних крайових задач для системи звичайних диференційних рівнянь є редукція їх до задач Коші. Для використання цього методу лінеризуємо нелінійну систему (24), розкладаючи праві частини в ряд Тейлора в околі деякого наближеного розв’язку. В результаті для $(s+1)$-го наближення знайдемо:

$$\begin{aligned}&\frac{\partial y_{1j+1}^{(s+1)}}{\partial\zeta}=-\frac{\partial y_{1j}}{\partial\zeta}+y_{2j+1}^{(s+1)}+y_{2j};\\ &\frac{\partial y_{2j+1}^{(s+1)}}{\partial\zeta}=-\frac{\partial y_{2j}}{\partial\zeta}+2F^{(s)}+2\frac{\partial F^{(s)}}{\partial y_{1j+1}}\left(y_{1j+1}^{(s+1)}-y_{1j+1}^{(s)}\right)+\\ &+2\frac{\partial F^{(s)}}{y_{2j+1}}\left(y_{2j+1}^{(s+1)}-y_{2j+1}^{(s)}\right)+2\frac{\partial F^{(s)}}{\partial y_{3j+1}}\left(y_{3j+1}^{(s+1)}-y_{3j+1}^{(s)}\right);\\ &\frac{\partial y_{3j+1}^{(s+1)}}{\partial\zeta}=-\frac{\partial y_{3j}}{\partial\zeta}-\left(\bar{h}_{j+1}^{(s)}+h_j\right)\frac{y_{1j+1}^{(s+1)}-y_{1j}}{\Delta\tau};\end{aligned}\tag{27}$$

де позначено:

$$F^{(s)}=\frac{\gamma y_{2\tau}^{(s)2}}{E+y_{1\tau}^{(s)}}-\chi\rho_{\tau}^{(s)}\bar{h}_{\tau}^{(s)}\left[\nu e_{1\tau}^{(s)}y_{2\tau}^{(s)}y_{3\tau}^{(s)}-\bar{h}_{\tau}^{(s)}\left(1+\nu e_{\tau}^{(s)}\right)\dot{y}_{1\tau}^{(s)}\right];$$

$$\frac{\partial F^{(s)}}{\partial y_{1j+1}}=-\frac{\gamma}{2}\cdot\frac{y_{2\tau}^{(s)2}}{\left(E+y_{1\tau}^{(s)}\right)^2}-\frac{1}{2}\chi\rho_{1\tau}^{(s)}\bar{h}_{\tau}^{(s)}\left[\nu e_{1\tau}^{(s)}y_{2\tau}^{(s)}y_{3\tau}^{(s)}-\bar{h}_{\tau}^{(s)}\left(1+\nu e_{\tau}^{(s)}\right)\dot{y}_{1\tau}^{(s)}\right]-$$

$$-\chi\rho_{\tau}^{(s)}\bar{h}_{\tau}^{(s)}\left[\nu A^2\left(1+e_{\tau}^{(s)}\right)^3y_{2\tau}^{(s)}y_{3\tau}^{(s)}+\frac{1}{2}\bar{h}_{\tau}^{(s)}\nu A\left(1+e_{\tau}^{(s)}\right)^2y_{1\tau}^{(s)}-\bar{h}_{\tau}^{(s)}\left(1+\nu e_{\tau}^{(s)}\right)\frac{1}{\Delta\tau}\right];$$

$$\frac{\partial F^{(s)}}{\partial y_{2j+1}}=\frac{\gamma}{\left(E+y_{1\tau}^{(s)}\right)^2}\cdot y_{2\tau}^{(s)}-\frac{1}{2}\chi\rho_{\tau}^{(s)}\bar{h}_{\tau}^{(s)}\nu e_{1\tau}^{(s)}y_{3\tau}^{(s)};$$

$$\frac{\partial F^{(s)}}{\partial y_{3j+1}}=-\frac{1}{2}\chi\rho_{\tau}^{(s)}\bar{h}_{\tau}^{(s)}\nu e_{1\tau}^{(s)}y_{2\tau}^{(s)}.$$

$$y_{k\tau}^{(s)}=\frac{y_{kj+1}^{(s)}+y_{kj}}{2};\quad \dot{y}_{1\tau}^{(s)}=\frac{y_{1j+1}^{(s)}-y_{1j}}{\Delta\tau},\ k=1,2,3;$$

$$\rho_{\tau}^{(s)}=\left(E+y_{1\tau}^{(s)}\right)^{\gamma};\quad \rho_{1\tau}^{(s)}=\gamma\left(E+y_{1\tau}^{(s)}\right)^{\gamma-1};$$

$$e_{\tau}^{(s)}=\frac{a_0}{1+a_0Ay_{1\tau}^{(s)}}-1;\quad e_{1\tau}^{(s)}=A\left(1+e_{\tau}^{(s)}\right)^2;\quad \bar{h}_{\tau}^{(s)}=\frac{\bar{h}_{j+1}^{(s)}+h_j}{2}.$$

Система рівнянь (27) дозволяє побудувати ітераційний процес для $s=0,1,\ldots$ Причому на кожній ітерації розв’язується лінійна крайова задача, що дозволяє знайти розв’язок задачі для моменту часу τ_{j+1}, якщо розв’язок для моменту часу τ_j відомий. Як нульове наближення при $s=0$ можна використовувати розв’язок, отриманий для попереднього моменту часу. Ітераційний процес для будь–якого моменту часу виконуємо доти, поки максимальне відхилення по всіх розрахункових функціях і по всіх точках вздовж координат ζ виявиться за модулем меншим деякої заданої точності ε.

Задачі Коші, що виникають внаслідок редукції крайової задачі, потрібно розв’язувати методом, який забезпечував би необхідну точність і був стійким. Практика показує, що звичайні методи Рунге–Кутта не можуть бути використані в даному випадку через сильну нестійкість, що призводить до великої похибки при визначенні коефіцієнтів лінійної комбінації розв’язків задач Коші. Тому ми використовуватимемо далі метод дискретної ортогоналізації Годунова [6], що забезпечує високу точність при правильному виборі вузлів ортогоналізації. Інтегрування між вузлами ортогоналізації виконуємо методом Рунге–Кутта четвертого порядку.

Подана математична модель з врахуванням експериментально отриманої залежності (6) і запропонованої нами залежності (9) для молочно–білкових згустків дозволяє з достатньою для інженерних задач точністю розраховувати процес відтиску.

Mathematical model of release of squeezed precipitates in view of motion velocity of a solid phase on the basis of the pressure-filtration parameters is given

Література

1. Флорин В.А. Основы механики грунтов.Т.2. – Л–М.: Госстройиздат, 1961.–543с.
2. Шукле Л. Реологические проблемы механики грунтов. – М.: Стройиздат, 1976.– 485с.
3. Герсеванов Н.Н., Польшин Д.Е. Теоретические основы механики грунтов. – М.: Высшая школа, 1978. – 447с.
4. Воробьев Е.И., Шинкарик М.Н. Математическая модель разделения жидкой и твердой фаз отжиманием // Теоретические основы химической технологии, 1988. – Т. 22. – №2. – С.226–232.

5. М.Шинкарик, Г.Єресько, Л.Формазюк, В.Ворощук. Дослідження компресійно–фільтраційних характеристик сирів з підплавленням сирної маси // Вісник ТДТУ.– 1997. – Т.2.– Число 1. – С.111-114.
6. Бидерман В.Л. Механика тонкостенных конструкций.– М.:Машиностроение, 1977. – 488с.

Одержано 19.02.2001 р.