УДК 621.3.019.4

Е.Ушаков, канд.техн.наук

Вінницький державний технічний університет

ПЛАНУВАННЯ ДОСЛІДЖЕНЬ СКЛАДНИХ ОБ`ЄКТІВ УПРАВЛІННЯ

Стаття присвячена оптимальному плануванню експериментальних досліджень складних динамічних об'ктів управління при моделюванні статичними багатомірними поліномами, подано приклад плану експериментів, що дозволяє просто його нарощувати при кроковому збільшенні ступеня моделяційного полінома.

У теорії планування експерименту особлива увага приділена багатовимірним лінійним моделям. Питання планування експерименту при моделюванні поліномами другого ступеня вивчені частково [1-3], а більш високих ступенів у літературі практично не розглядалися. У даній статті порушене питання планування експериментів для шуканої моделі i-го, $i = 1, p$, відгуку від k вхідних впливів x_j, $j = 1,k$, при моделюванні статичними $n>2$ багатомірними поліномами [2]:

$$y_i(\bar{x}) = \sum_{j_1=0}^{n_{1i}} \sum_{j_2=0}^{n_{2i}} \dots \sum_{j_k=0}^{n_{ki}} a_{j_1}, a_{j_2,\dots,j_k} x_1^{j_1} x_2^{j_2} \dots x_k^{j_k}\ , \tag{1}$$

де $x=(x_1, x_2, \dots x_n)$ – вектор вхідних впливів, $a_{j1,j2, \dots jk}$ – невідомі параметри моделі, що утворять N- мірний вектор A, $N=C^n{}_{n+k}$.

Задача моделювання - визначення вектора А невідомих параметрів a, що забезпечують адекватність моделі при заданому критерії наближення [4,5]. У випадку інтерполяційного критерію $\sum_i [y_{0i} - y_i(\bar{x})] = 0$ вектор A визначається з рівняння

$$A=X^{-1}Y_0, \tag{2}$$

а при середньоквадратичного критерію близькості $\sum_i [y_{0i} - y_i(\bar{x})]^2 = \min$ вектор A визначається з рівняння

$$A = (X^T X)^{-1} X^{-1} Y_0 = M^{-1}\overline{Y}_0\,, \tag{3}$$

де X - матриця заданих впливів, Y_0 - вектор щирих або експериментальних значень відгуків функції $y_{0i}(x)$, m - знак транспонування.

У загальному випадку X - матриця прямокутна розміру $m \times N$, m - число експериментів, виконаних для визначення вектора A, $m_0 > m \geq N$, m_0 - число експериментів у повному факторном експерименті [3].

Значення N визначає мінімальне число експериментів, необхідне для визначення вектора A при заданих $к$ и n. План експериментів має бути таким, щоб у (2) і (3) можна було забезпечити існування матриць X і M.

Матриці X і M існують і мають X^{-1} і M^{-1}, якщо ранг матриці X дорівнює N. Матриця X має ранг N, якщо хоча б N її рядків із m і всі N стовпчиків незалежні. Незалежність рядків і стовпчиків матриці X забезпечується виконанням m експериментів у різних точках багатовимірного простору вхідних впливів при нерівності й незалежності всіх координат вектора $(\bar{x}_u) = (x_{1,u}^{(r_1)}, x_{2,u}^{(r_2)}, \dots, x_{k,u}^{(r_k)})$ вхідних впливів у всіх $u = \overline{1,m}$ експериментах:

$$(\bar{x}_u) \neq (\bar{x}_v), \qquad u,v \in (\overline{1,m}), \tag{4}$$

$$x_{i,u}^{(r_i)} \neq x_{i,v}^{(r_i)} \qquad \text{і} \qquad x_{i,u}^{(r_i)} \neq x_{j,v}^{(r_j)}\,, \tag{5}$$

де $x_{i,u}^{(r_i)}$ - r_i-й рівень і-го вхідного впливу в *u-му* експерименті, $r_i \in (\overline{1,s_i})$, s_i - число рівнів i-го впливу.

Умови (4), (5) потребують багатьох рівнів кожного впливу, що не завжди можна забезпечити. Умова (4) гарантує тільки незалежність рядків матриці X і потребує істотно меншого числа рівнів вхідних впливів. При великих n_i питання про мінімально припустиме число s_i рівнів вхідних впливів, достатнє для задоволення необхідного рангу N, дуже важливе, оскільки пов'язане з числом експериментів m, $N \le m < m_0 = \prod_i^k s_i$, діапазоном вхідних впливів $[x_{imax}-x_{imin}]$ і похибкою вимірювання його рівнів, $S_i = \frac{|x_{i\max} - x_{i\min}|}{x_i^{(r_i)} - x_i^{(r_i+1)}}$. Якщо діапазон занадто вузький, а похибка вимірювання велика, то виділені рівні можуть бути так близько розташовані, що при великій похибці вимірювання стануть нерозрізнюваними. Це призведе до порушення умови (4), в результаті при обчисленнях за (2), (3) з'являться великі похибки у визначенні моделі через погіршення обумовленості матриці X.

Задоволення умови (4) при нелінійній моделі (1) замало для забезпечення незалежності стовпчиків матриці X. Справді, при проведенні серії з m' експериментів з одною і тією ж координатою $x_{i,u}^{(r_i)} = const$ у m' рядках матриці X з'являться залежні стовпчики, що відповідають добуткові ступенів незалежної $x_{i,u}^{(r_{i1})}$ змінної на множники, що є добутками інших незалежних $x_j, i \ne j$ змінних . Якщо число m' таких рядків при $m=N$ перевищує певне значення, то ранг матриці X може виявитися меншим за N. Для доказу цього можна поділити стовпчики матриці X на групи залежних. До першої групи виділимо $n+1$ залежних стовпчиків, що відповідають $a_i = \overline{0,n}$ ступеням незалежної $x_i^{a_i}$ змінної без співмножників x_j, $j \ne i$, $a_j=0$. До наступних $C_{k-1}^1 = k-1$ таких груп по n залежних стовпчиків виділимо добуток ступенів $x_i^{a_i}$ на $x_j, j \ne i, j = \overline{1,k}, a_j = 1$, до наступних $C_k^2 = \frac{k(k-1)}{2}$ таких груп по $n-1$ залежному стовпчику виділимо стовпчики, що відповідають добуткам ступенів $x_i^{a_i}$ на $x_i^{a_i} x_j^{a_j}$, де $a_j, a_i = 0,1,2, a_j + a_i = 2, i \ne j, l$, і так доти, доки не будуть виділені C_{k+n-2}^n груп, що містять по одному стовпчику добутків незалежних змінних $x_j^{a_j} x_i^{a_i} ... x_k^{a_k}$, що $x_i^{a_i}$ не мають. Загальне число q груп залежних стовпчиків визначиться виразом з [4]:

$$q = \sum_{r=0}^{n} C_{k+r-2}^r = C_{n+k-1}^n < N \,, \tag{6}$$

де r - сумарний ступінь множників $x_j^{a_j}$, $j \ne i$, при $x_i^{a_i}$, $r = \sum_{j=1, j\ne i}^{k} a_j \le n$.

Вираз (6) визначає максимально припустиме число рядків m', $m' \le q < N$, із $X_i=const$ у визначнику матриці X або її мінорі розміру $N \times N$, при якому він тотожно не дорівнює 0. Нехай $m' > q$. Тоді, застосовуючи розкладання визначника Δ за теоремою Лапласа [5], отримаємо

$$\Delta = \sum_{\nu=1}^{\omega} \Delta_\nu = \sum_{\nu 1=1}^{\omega 1} \Delta'_{\nu 1} \Delta''_{\nu 1} = \sum_{\nu 1=l}^{\omega 1} \Delta'_{\nu 1} \sum_{\nu 2=l}^{\omega 2} \Delta'_{\nu 2} \Delta''_{\nu 2} = \dots, \tag{7}$$

де Δ'_{ν_i} - мінор d_{ν_i}-го порядку, взятий по $d_{\nu_i} = m'$ рядках визначника Δ, Δ''_{ν_i} - алгебраїчне доповнення мінору, ωi - число всіх можливих миноров Δ'_{ν_l}, візьмемо для кожного мінору Δ'_{ν_l} по m' незалежних стовпчиків. Оскільки незалежних груп стовпчиків тільки q, то до будь-якого мінору Δ'_{ν_l} порядку $m' \times m'$, $m' > q$ треба взяти не менше як m' - q залежних стовпчиків, що залишилися. Отже, все $\Delta'_{v_l} \equiv 0$ і відповідно $\Delta = \det X = \sum_{vl}^{\omega l} \Delta'_{v_l} \Delta''_{v_l}$ [5].

Оскільки матриця X має групу, що складається з $n+1$ залежних стовпчиків, то для того, щоб визначник матриці X мав ранг, що дорівнює N, він повинний містити не менше $h=n+1$групп рядків з $x_i^{(r_i)} = const$. Якщо t_i - число рядків у i-й, $i = \overline{1,h}$, групі, то $\sum_1^h t_i = N$. Нехай $h<n+1$. Застосуємо розкладання Лапласа (7) по групах рядків $d_{v1} = t_1, d_{v2} = t_2, ..., d_{vh} = t_h$. Якщо в мінорі Δ'_{v_l} розміру $t_1 \times t_1$ з першої групи рядків взяти перший стовпчик із першої групи залежних стовпчиків, у мінорі Δ'_{v_2} порядку $t_2 \times t_2$ другої групи рядків буде взятий другий стовпчик і т.д., то в мінорі порядку $t_h \times t_h$ останньої h-ї групи рядків треба взяти $n+1-h$ залежних стовпчиків з першої групи, що залишилися. Останній мінор тотожно дорівнює нулеві, а отже, дорівнює нулеві визначник $\Delta_v = \Delta'_{v1} \Delta'_{v2} \Delta''_{v2} = ...$, складений з цих мінорів. Перебираючи всі $\varpi = \prod_i \varpi i$ можливі складові визначники Δ_v, переконуємося, що серед його мінорів завжди буде такий, що містить залежні стовпчики. Тому за теоремою Лапласа і з урахуванням того, що $\det X = \sum_{v=1}^{\omega} \Delta_v$, одержимо $\det X = \sum_v 0 \equiv 0$.

Якщо число h груп рядків $x_i^{(r_1)} = const$ визначається виразом $h=n+1$, то завжди складовий Δ_v не матиме мінора із залежними стовпчиками, отже, $\det X \neq 0$.

Таким чином, необхідною і достатньою умовою існування матриць X і M N-го рангу при обмеженому числі рівнянь s вхідних впливів і ступеня n моделюючого полінома є виконання умови (6) і експериментів при числі s рівнів не меншому, ніж

$$s \geq n+1. \tag{8}$$

Умови (6) і (8) виведені у припущенні, коли парні, потрійні й інші j-ні взаємодії виду $x_1^{(r_1)} x_2^{(r_2)} ... x_j^{(r_j)}$ (r_i -індекс рівня) не є довільними константами або не дорівнюють якомусь вхідному впливові x_j. Проте ці умови не порушуються й у протилежному випадку. Справді, якщо є такі j-ні впливи, коли

$$x_{j,u}^{(r_j)} x_{i,u}^{(r_2)} ... x_{k,u}^{(r_k)} = const, u = \overline{\sigma_1, \sigma_2}, \quad \sigma_2 - \sigma_1 < m', \tag{9}$$

то зменшується число груп незалежних стовпчиків і збільшується число залежних стовпчиків у деяких групах (число стовпчиків у першій групі завжди збільшується). Проте це збільшення відбувається не для всіх рядків із $x_i^{(r_1)} = const$, а тільки для деяких із них. Інші рядки $m' - (\sigma_2 - \sigma_1)$ щодо збільшення числа залежних стовпчиків у першій групі виконують функцію нових рівнів, а це не порушує умов (6) і (8).

Якщо для вхідних впливів залежностей типу (9) не існує, то для побудови плану $m \times k$ експеримента достатньо виконання умов (6), (8), що автоматично задовольняться, якщо числа t_i дослідів для одного i-го значення рівня будуть приблизно однаковими:

$t_i = \left[\dfrac{m}{n+1} \right], i = \overline{1,n}, t_{n+1} = m - \sum_1^n t_{i,}$ де [.] - ціле число від розподілу.

Для насиченого плану N×k експерименту при дотриманні умови рівномірності плану (або коли його нерівномірність не більше за одиницю) завжди число

$t_i = m' \approx \left[\frac{N}{n+1}\right]$ груп рядків із $x_i^{(r_1)} = const$ не більше від їхнього припустимого числа q. Справді, $m' \approx \left[\frac{(n+k)!}{n!k!(n+1)}\right]$, $q = \frac{(n+k-1)!}{n!(k-1)!}$, звідси $\frac{m'}{q} = \frac{n+k}{n+k-n+kn} \leq 1$.

Алгоритм побудови плану повного факторного експеримента складається в генерації всіх m_0 вибірок (тобто рядків плану) із k - підмножин по $n+1$ елементів у кожному. Правило генерації вибірок для плану $n \times k$, що забезпечує однакове використання всіх рівнів вхідних впливів і ранг N матриці X, полягає у наступному. Усі k стовпчиків плану при $S_i = S, k > S$ розподіляються на H груп по s стовпчиків у кожному, де $H = \left]\frac{k}{S}\right[$. При k, не кратному s, в останній H-й групі буде менше s стовпчиків. Номер p=1,2, … H-ї групи визначає число послідовних однакових значень рівнів j-ї змінної, що перебувають в одному циклі j-го стовпчика. Це означає, що у p-й групі кожний стовпчик утвориться циклами довжиною $L_p = sp$ з повтором у циклі по p разів кожного з s рівнів j-ї змінної, що відповідає даному стовпчикові.

Кожний j-й стовпчик плану є перерахуванням по циклі рівнів j-ї перемінної у заданому такому порядку. У p-й групі кожний $i_p = 1_p, 2_p, ... S_p$ стовпчик починається циклом з i-го рівня. У кожному стовпчику початковий рівень циклів, що випливають за перший, не залишається постійним, а через визначене число N_{ip} рядків плану, де $N_{i_p} = S^{i_p - 1} l_p = S^{i_p} p$, змінюється на наступний за чергою рівень j-ї змінної (причому після s-го випливає перший рівень). Іншими словами, у i_p+1 стовпчику цикли змінять свій початок на новий рівень, коли у i_p-м стовпчику початок циклу повертається на вихідний i-й рівень.

Подаємо приклад плану для $k=5$, $n=3$. Нехай $N=56$, $H=2$, $m'=14$, $q=21$, $s=4$. Для простоти в плані замість позначень рівнів впливів $x_i^{(r_1)}$ вказаний тільки індекс r_i.

N	**X_1**	**X_2**	**X_3**	**X_4**	**X_5**
1	1	2	3	4	1
2	2	3	4	1	1
3	3	4	1	2	2
4	4	1	2	3	2
5	2	2	3	4	3
6	3	3	4	1	3
7	4	4	1	2	4
8	1	1	2	3	4
9	3	2	3	4	2
10	4	3	4	1	2
11	1	4	1	2	3
12	2	1	2	3	3
13	4	2	3	4	4
14	1	3	4	1	4
15	2	4	1	2	1
16	3	1	2	3	1
17	1	3	3	4	3
18	2	4	4	1	3
19	3	1	1	2	4
20	4	2	2	3	4
21	2	3	3	4	1
22	3	4	4	1	1

23	4	1	1	2	2
24	1	2	2	3	2
25	3	3	3	4	4
26	4	4	4	1	4
27	1	1	1	2	1
28	2	2	2	3	1
29	4	3	3	4	2
30	2	4	4	1	2
31	2	1	1	2	3
32	3	2	2	3	3
33	1	4	3	4	1
34	2	1	4	1	1
35	3	2	1	2	2
36	4	3	2	3	2
37	2	4	3	4	3
38	3	1	4	1	3
39	4	2	1	2	4
40	1	3	2	3	4
41	3	4	3	4	2
42	4	1	4	1	2
43	1	2	1	2	3
44	2	3	2	3	3
45	4	4	3	4	4
46	1	1	4	1	4
47	2	2	1	2	1
48	3	3	2	3	1
49	1	1	3	4	3
50	2	2	4	1	3
51	3	3	1	2	4
52	4	4	2	3	4
53	2	1	3	4	1
54	3	2	4	1	1
55	4	3	1	2	2
56	1	4	2	3	2

Поданий алгоритм побудови плану $m \times k$, $m < m_0$, експеримента, що задовольняє вимогу забезпечення рангу N матриці X, доцільний, оскільки дозволяє просто його нарощувати при кроковому збільшенні ступеня моделюючого полінома.

In the theory of planning of experiment the special attention is given to repeated linear models. The questions of planning of experiment at modelling polinome of the second degree are covered partially, and higher degrees in the literature practically are not mentioned. In present clause mention a question of planning of experiments for required model i-s, i = 1, p, response from k of entrance influences x_i, i = 1, k, at modelling sedate n> 2 repeated polinomes.

Література

1. Асатурян В.И. Теория планирования эксперимента. - М.: Радио и связь, 1983.- 248с.
2. Ермаков С.М. Математическая теория планирования эксперимента. –М.: Наука, 1983. –392с.
3. Налимов В.В., Голикова Т.И. Логические основания планирования эксперимента. –М.: Металлургия, 1981. –152с.
4. Дзядык В.К. Введение в теорию приближения функций полиномами. –М.: Наука, 1977. –512с.
5. Курош А.Г. Курс высшей алгебры. –М.: Наука, 1965. –432с.

Одержано 20.06.2000 р.