УДК 517.52/524: 517.58/589

А.Блажієвський, канд.фіз.-мат.наук; М.Ленюк, докт. фіз.-мат. наук
Чернівецький державний університет

ЗОБРАЖЕННЯ СУМ ПОЛІПАРАМЕТРИЧНИХ ФУНКЦІОНАЛЬНИХ РЯДІВ МЕТОДОМ ГІБРИДНОГО ІНТЕГРАЛЬНОГО ПЕРЕТВОРЕННЯ ТИПУ ФУР'Є – ФУР'Є – (КОНТОРОВИЧА – ЛЄБЄДЄВА) 2-ГО РОДУ

Методом порівняння розв'язку крайової задачі на трискладовому сегменті для сепаратної системи модифікованих диференціальних рівнянь Бесселя й Фур'є, побудованого, з одного боку, методом функцій Коші, а з другого боку методом скінченного гібридного інтегрального перетворення типу Фур'є –Фур'є- (Конторовича-Лєбєдєва) 2-го роду підсумовано поліпараметричну сім'ю функціональних рядів за системою спеціальних функцій Бесселя й тригонометричною системою функцій.

Розглянемо задачу побудови обмеженого на множині $I_2 = \{r : r \in (R_0, R_1) \cup (R_1, R_2) \cup (R_2, R_3);\, R_0 \ge 0,\, R_3 < \infty\}$ розв'язку сепаратної системи диференціальних рівнянь Фур'є та Бесселя для модифікованих функцій

$$\left(\frac{d^2}{dr^2} - q_j^2\right)\mathrm{v}_j(r) = -g_j(r), \quad r \in (R_{j-1}, R_j),\ j = 1,2;$$

$$(B_\alpha - q_3^2)\mathrm{v}_3(r) = -g_3(r), \quad r \in (R_2, R_3) \tag{1}$$

за крайовими умовами

$$\left(\alpha_{11}^0 \frac{d}{dr} + \beta_{11}^0\right)\mathrm{v}_1\Big|_{r=R_0} = g_0, \quad \left(\alpha_{22}^3 \frac{d}{dr} + \beta_{22}^3\right)\mathrm{v}_3\Big|_{r=R_3} = g_3^*, \tag{2}$$

та умовами спряження

$$\left[\left(\alpha_{j1}^k \frac{d}{dr} + \beta_{j1}^k\right)\mathrm{v}_k(r) - \left(\alpha_{j2}^k \frac{d}{dr} + \beta_{j2}^k\right)\mathrm{v}_{k+1}(r)\right]\Big|_{r=R_k} = f_{jk};\ j,k = 1,2 \tag{3}$$

Тут

$$q_j \ge 0,\ j = \overline{1,3},\ c_{jk} = \alpha_{2j}^k \beta_{1j}^k - \alpha_{1j}^k \beta_{2j}^k;\ j,k = 1,2;\ c_{1k} \cdot c_{2k} > 0;$$

$$\left|\alpha_{11}^0\right| + \left|\beta_{11}^0\right| \ne 0, \quad \left|\alpha_{22}^3\right| + \left|\beta_{22}^3\right| \ne 0, \quad B_\alpha = r^2 \frac{d^2}{dr^2} + r(2\alpha + 1)\frac{d}{dr} + \alpha^2 - \lambda^2 r^2;$$

$$2\alpha + 1 \ge 0, \quad \lambda \in (0, \infty).$$

Фундаментальну систему розв'язків для модифікованого диференціального рівняння Фур'є $\left(\frac{d^2}{dr^2} - q^2\right)\mathrm{v} = 0$ утворюють функції $chqr$ та $shqr$ [1].

Фундаментальну систему розв'язків для модифікованого диференціального рівняння Бесселя $(B_\alpha - q^2)\mathrm{v} = 0$ утворюють модифіковані функції Бесселя першого роду $I_{q,\alpha}(\lambda r) = (\lambda r)^{-\alpha} I_q(\lambda r)$ та другого роду $K_{q,\alpha}(\lambda r) = (\lambda r)^{-\alpha} K_q(\lambda r)$ [2].

Наявність фундаментальної системи розв'язків дозволяє побудувати точний аналітичний розв'язок крайової задачі (1)-(3) методом функцій Коші [1]:

$$\mathrm{v}_1(r) = A_1 chq_1 r + B_1 shq_1 r + \int_{R_0}^{R_1} \varepsilon_1(r,\rho) g_1(\rho) d\rho,\ r \in (R_0, R_1)$$

$$\mathrm{v}_2(r) = A_2 chq_2 r + B_2 shq_2 r + \int_{R_1}^{R_2} \varepsilon_2(r,\rho) g_2(\rho) d\rho,\ r \in (R_1, R_2) \tag{4}$$

$$v_3(r)=A_3 I_{\nu,\alpha}(\lambda r)+B_3 K_{\nu,\alpha}(\lambda r)+\int_{R_2}^{R_3}\varepsilon_{\alpha;3}(r,\rho)g_3(\rho)\rho^{2\alpha-1}d\rho, r\in(R_2,R_3);$$

$\nu \equiv q_3 \geq 0.$

Тут беруть участь функції Коші $\varepsilon_j(r,\rho),\ j=1,2,$ та $\varepsilon_{\alpha;3}(r,\rho)$[1]:

$$\varepsilon_1(r,\rho)=-\frac{1}{q_1 d_1^*(q_1R_0,q_1R_1)}\begin{cases}\Phi_{11}^0(q_1R_0,q_1r)\Phi_{11}^1(q_1R_1,q_1\rho), R_0<r<\rho<R_1\\ \Phi_{11}^0(q_1R_0,q_1\rho)\Phi_{11}^1(q_1R_1,q_1r), R_0<\rho<r<R_1\end{cases}; \quad (5)$$

$$\varepsilon_2(r,\rho)=-\frac{1}{q_2\Delta_{11}(q_2R_1,q_2R_2)}\begin{cases}\Phi_{12}^1(q_2R_1,q_2r)\Phi_{11}^2(q_2R_2,q_2\rho), R_1<r<\rho<R_2\\ \Phi_{12}^1(q_2R_1,q_2\rho)\Phi_{11}^2(q_2R_2,q_2r), R_1<\rho<r<R_2\end{cases}; \quad (6)$$

$$\varepsilon_{\alpha;3}(r,\rho)=\frac{\lambda^{2\alpha}}{\Delta_{\alpha;12}(\lambda R_2,\lambda R_3)}\begin{cases}\psi_{\nu,\alpha;12}^2(\lambda R_2,\lambda r)\psi_{\nu,\alpha;22}^3(\lambda R_3,\lambda\rho), R_2<r<\rho<R_3\\ \psi_{\nu,\alpha;12}^2(\lambda R_2,\lambda\rho)\psi_{\nu,\alpha;22}^3(\lambda R_3,\lambda r), R_2<\rho<r<R_3\end{cases}; \quad (7)$$

У формулах (5)-(7) прийняті позначення:

$$V_{jk}^{m1}(q_sR_m)=\alpha_{jk}^m q_s sh q_sR_m+\beta_{jk}^m ch q_sR_m;$$

$$V_{jk}^{m2}(q_sR_m)=\alpha_{jk}^m q_s ch q_sR_m+\beta_{jk}^m sh q_sR_m;$$

$$U_{\nu,\alpha;jk}^{m1}(\lambda R_m)=(\alpha_{jk}^m\frac{\nu-\alpha}{R_m}+\beta_{jk}^m)I_{\nu,\alpha}(\lambda R_m)+\alpha_{jk}^m\lambda^2R_m I_{\nu+1,\alpha+1}(\lambda R_m);$$

$$U_{\nu,\alpha;jk}^{m2}(\lambda R_m)=(\alpha_{jk}^m\frac{\nu-\alpha}{R_m}+\beta_{jk}^m)K_{\nu,\alpha}(\lambda R_m)-\alpha_{jk}^m\lambda^2R_m K_{\nu+1,\alpha+1}(\lambda R_m);$$

$$\Phi_{jk}^m(q_sR_m,q_sr)=V_{jk}^{m2}(q_sR_m)ch q_s r-V_{jk}^{m1}(q_sR_m)sh q_s r;$$

$$\psi_{\nu,\alpha;jk}^m(\lambda R_m,\lambda r)=U_{\nu,\alpha;jk}^{m1}(\lambda R_m)K_{\nu,\alpha}(\lambda r)-U_{\nu,\alpha;jk}^{m2}(\lambda R_m)I_{\nu,\alpha}(\lambda r);$$

$$d_j^*(q_1R_0,q_1R_1)=V_{11}^{01}(q_1R_0)V_{j1}^{12}(q_1R_1)-V_{11}^{02}(q_1R_0)V_{j1}^{11}(q_1R_1);\quad j,k=1,2;$$

$$\Delta_{jk}(q_2R_1,q_2R_2)=V_{j2}^{11}(q_2R_1)V_{k1}^{22}(q_2R_2)-V_{j2}^{12}(q_2R_1)V_{k1}^{21}(q_2R_2);$$

$$\Delta_{\alpha;j2}(\lambda R_2,\lambda R_3)=U_{\nu,\alpha;j2}^{21}(\lambda R_2)U_{\nu,\alpha;22}^{32}(\lambda R_3)-U_{\nu,\alpha;j2}^{22}(\lambda R_2)U_{\nu,\alpha;22}^{31}(\lambda R_3);\quad j=1,2.$$

Крайові умови (2) і умови спряження (3) для визначення сталих A_j та $B_j(j=1,2,3)$ дають алгебраїчну систему з шістьох рівнянь:

$$\begin{aligned}
V_{11}^{01}(q_1R_0)A_1+V_{11}^{02}(q_1R_0)B_1&=g_0\\
V_{11}^{11}(q_1R_1)A_1+V_{11}^{12}(q_1R_1)B_1-V_{12}^{11}(q_2R_1)A_2-V_{12}^{12}(q_2R_1)B_2&=f_{11}\\
V_{21}^{11}(q_1R_1)A_1+V_{21}^{12}(q_1R_1)B_1-V_{22}^{11}(q_2R_1)A_2-V_{22}^{12}(q_2R_1)B_2&=f_{21}+G_{12}\\
V_{11}^{21}(q_2R_2)A_2+V_{11}^{22}(q_2R_2)B_2-U_{\nu,\alpha;12}^{21}(\lambda R_2)A_3-U_{\nu,\alpha;12}^{22}(\lambda R_2)B_3&=f_{12}\\
V_{21}^{21}(q_2R_2)A_2+V_{21}^{22}(q_2R_2)B_2-U_{\nu,\alpha;22}^{21}(\lambda R_2)A_3-U_{\nu,\alpha;22}^{22}(\lambda R_2)B_3&=f_{22}+G_{23}\\
U_{\nu,\alpha;22}^{31}(\lambda R_3)A_3+U_{\nu,\alpha;22}^{32}(\lambda R_3)B_3&=g_3^*.
\end{aligned}\quad (8)$$

У системі (8) беруть участь функції:

$$G_{12}=-c_{11}\int_{R_0}^{R_1}\frac{\Phi_{11}^0(q_1R_0,q_1\rho)}{d_1^*(q_1R_0,q_1R_1)}\cdot g_1(\rho)d\rho+c_{21}\int_{R_1}^{R_2}\frac{\Phi_{11}^2(q_2R_2,q_2\rho)}{\Delta_{11}(q_2R_1,q_2R_2)}g_2(\rho)d\rho;$$

$$G_{23}=-c_{12}\int_{R_1}^{R_2}\frac{\Phi_{12}^1(q_2R_1,q_2\rho)}{\Delta_{11}(q_2R_1,q_2R_2)}\cdot g_2(\rho)d\rho-\frac{c_{22}}{R_2^{2\alpha+1}}\int_{R_2}^{R_3}\frac{\psi_{\nu,\alpha;22}^3(\lambda R_3,\lambda\rho)}{\Delta_{\alpha;12}(\lambda R_2,\lambda R_3)}g_3(\rho)\rho^{2\alpha-1}d\rho.$$

Припустимо, що виконана умова однозначної розв'язності крайової задачі (1)-(3): визначник алгебраїчної системи (8)

$$\Delta_\alpha(q) \equiv \Delta_{\alpha;12}(\lambda R_2, \lambda R_3) A_2(q) - \Delta_{\alpha;22}(\lambda R_2, \lambda R_3) A_1(q) \equiv$$
$$\equiv d_2^*(q_1 R_0, q_1 R_1) B_{\alpha;1}(q) - d_1^*(q_1 R_0, q_1 R_1) B_{\alpha;2}(q) \neq 0 \tag{9}$$

Тут прийняті позначення:

$$A_j(q) = \Delta_{1j}(q_2 R_1, q_2 R_2) d_2^*(q_1 R_0, q_1 R_1) - \Delta_{2j}(q_2 R_1, q_2 R_2) d_1^*(q_1 R_0, q_1 R_1);$$
$$B_{\alpha;j}(q) = \Delta_{j2}(q_2 R_1, q_2 R_2)\Delta_{\alpha;12}(\lambda R_2, \lambda R_3) - \Delta_{j1}(q_2 R_1, q_2 R_2)\Delta_{\alpha;22}(\lambda R_2, \lambda R_3).$$

Визначимо: а) породжені крайовими умовами в точках $r = R_0$ та $r = R_3$ функції Гріна

$$W_{\alpha;11}(r,q) = \frac{1}{\Delta_\alpha(q)}\left[B_{\alpha;1}(q)\Phi_{21}^1(q_1 R_1, q_1 r) - B_{\alpha;2}(q)\Phi_{11}^1(q_1 R_1, q_1 r)\right];$$

$$W_{\alpha;12}(r,q) = \frac{c_{11} q_1}{\Delta_\alpha(q)}\left[\Delta_{\alpha;12}(\lambda R_2, \lambda R_3)\Phi_{21}^2(q_2 R_2, q_2 r) - \Delta_{\alpha;22}(\lambda R_2, \lambda R_3)\Phi_{11}^2(q_2 R_2, q_2 r)\right];$$

$$W_{\alpha;13}(r,q) = -\frac{c_{11} c_{12} q_1 q_2}{\Delta_\alpha(q)}\psi_{\nu,\alpha;22}^3(\lambda R_3; \lambda r);$$
$$W_{\alpha;31}(r,q) = \frac{1}{\Delta_\alpha(q)}\frac{c_{21} c_{22} q_2}{\lambda^{2\alpha} R_2^{2\alpha+1}}\Phi_{11}^0(q_1 R_0, q_1 r); \tag{9}$$

$$W_{\alpha;32}(r,q) = \frac{c_{22}}{\lambda^{2\alpha} R_2^{2\alpha+1}\Delta_\alpha(q)}\left[\Phi_{12}^1(q_2 R_1, q_2 r) d_2^*(q_1 R_0, q_1 R_1) -\right.$$
$$\left. - d_1^*(q_1 R_0, q_1 R_1)\Phi_{22}^1(q_2 R_1, q_2 r)\right];$$
$$W_{\alpha;33}(r,q) = \frac{1}{\Delta_\alpha(q)}\left[A_2(q)\psi_{\nu,\alpha;12}^2(\lambda R_2, \lambda r) - A_1(q)\psi_{\nu,\alpha;22}^2(\lambda R_2, \lambda r)\right];$$

б) породжені неоднорідністю системи (1) функції впливу

$$\mathrm{H}_{\alpha;11}(r,\rho,q) = \frac{1}{q_1 \Delta_\alpha(q)}\begin{cases}\Phi_{11}^0(q_1 R_0, q_1 r)[B_{\alpha,2}(q)\Phi_{11}^1(q_1 R_1, q_1 \rho) - \\ \Phi_{11}^0(q_1 R_0, q_1 \rho)[B_{\alpha,2}(q)\Phi_{11}^1(q_1 R_1, q_1 r) - \end{cases}$$
$$- B_{\alpha,1}(q)\Phi_{21}^1(q_1 R_1, q_1 \rho)], \quad R_0 < r < \rho < R_1$$
$$- B_{\alpha;1}(q)\Phi_{21}^1(q_1 R_1, q_1 r)], \quad R_0 < \rho < r < R_1 \quad ;$$

$$\mathrm{H}_{\alpha;12}(r,\rho,q) = \frac{c_{21}}{\Delta_\alpha(q)}\Phi_{11}^0(q_1 R_0, q_1 r)[\Delta_{\alpha;22}(\lambda R_2, \lambda R_3)\Phi_{11}^2(q_2 R_2, q_2 \rho) -$$
$$- \Delta_{\alpha;12}(\lambda R_2, \lambda R_3)\Phi_{21}^2(q_2 R_2, q_2 \rho)];$$
$$\mathrm{H}_{\alpha;13}(r,\rho,q) = \frac{c_{21} c_{22} q_2}{R_2^{2\alpha+1}\Delta_\alpha(q)}\Phi_{11}^0(q_1 R_0, q_1 r)\psi_{\nu,\alpha;22}^3(\lambda R_3, \lambda \rho);$$

$$\mathrm{H}_{\alpha;21}(r,\rho,q) = \frac{c_{11}}{\Delta_\alpha(q)}\Phi_{11}^0(q_1 R_0, q_1 \rho)[\Delta_{\alpha;22}(\lambda R_2, \lambda R_3)\Phi_{11}^2(q_2 R_2, q_2 r) -$$
$$- \Delta_{\alpha;12}(\lambda R_2, \lambda R_3)\Phi_{21}^2(q_2 R_2, q_2 r)];$$

$$H_{\alpha;22}(r,\rho,q)=\frac{1}{q_2\Delta_\alpha(q)}\begin{cases}[d_1^*\Phi_{22}^1(q_2R_1,q_2r)-d_2^*\Phi_{12}^1(q_2R_1,q_2r)]\times\\ [d_1^*\Phi_{22}^1(q_2R_1,q_2\rho)-d_2^*\Phi_{12}^1(q_2R_1,q_2\rho)]\times\end{cases}$$

$$\times[\Delta_{\alpha;12}\Phi_{21}^2(q_2R_2,q_2\rho)-\Delta_{\alpha;22}\Phi_{11}^2(q_2R_2,q_2\rho)],R_1<r<\rho<R_2$$
$$\times[\Delta_{\alpha;12}\Phi_{21}^2(q_2R_2,q_2r)-\Delta_{\alpha;22}\Phi_{11}^2(q_2R_2,q_2r)],R_1<\rho<r<R_2$$

$$\mathrm{H}_{\alpha;23}(r,\rho,q)=\frac{c_{22}}{R_2^{2\alpha+1}}\frac{1}{\Delta_\alpha(q)}$$
$$\left[d_2^*\Phi_{12}^1(q_2R_1,q_2r)-d_1^*\Phi_{22}^1(q_2R_1,q_2r)\right]\cdot\psi_{\nu,\alpha;22}^3(\lambda R_3,\lambda\rho);$$

$$\mathrm{H}_{\alpha;31}(r,\rho,q)=\frac{c_{11}c_{12}q_2}{\Delta_\alpha(q)}\Phi_{11}^0(q_1R_0,q_1\rho)\psi_{\nu,\alpha;22}^3(\lambda R_0,\lambda r);\qquad(10)$$

$$\mathrm{H}_{\alpha;32}(r,\rho,q)=\frac{c_{12}}{\Delta_\alpha(q)}\left[d_2^*\Phi_{12}^1(q_2R_1,q_2\rho)-d_1^*\Phi_{22}^1(q_2R_1,q_2\rho)\right]\cdot\psi_{\nu,\alpha;22}^3(\lambda R_3,\lambda r);$$

$$\mathrm{H}_{\alpha;33}(r,\rho,q)=\frac{\lambda^{2\alpha}}{\Delta_\alpha(q)}\begin{cases}[A_2(q)\psi_{\nu,\alpha;12}^2(\lambda R_2,\lambda r)-A_1(q)\psi_{\nu,\alpha;22}^2(\lambda R_2,\lambda r)]\times\\ [A_2(q)\psi_{\nu,\alpha;12}^2(\lambda R_2,\lambda\rho)-A_1(q)\psi_{\nu,\alpha;22}^2(\lambda R_2,\lambda\rho)]\times\end{cases}$$

$$\begin{matrix}\times\psi_{\nu,\alpha;22}^3(\lambda R_3,\lambda\rho),\ R_2<r<\rho<R_3\\ \times\psi_{\nu,\alpha;22}^3(\lambda R_3,\lambda r),\ R_2<\rho<r<R_3\end{matrix};$$

в) породжені неоднорідністю умов спряження функції Гріна

$$R_{\alpha;11}^{(1)}(r,q)=\frac{B_{\alpha;2}(q)}{\Delta_\alpha(q)}\Phi_{11}^0(q_1R_0,q_1r);\ R_{\alpha;12}^{(1)}(r,q)=\frac{c_{21}q_2}{\Delta_\alpha(q)}\Delta_{\alpha;22}\Phi_{11}^0(q_1R_0,q_1r);$$

$$R_{\alpha;21}^{(1)}(r,q)=-\frac{B_{\alpha;1}(q)}{\Delta_\alpha(q)}\Phi_{11}^0(q_1R_0,q_1r);\ R_{\alpha;22}^{(1)}(r,q)=-\frac{c_{21}q_2}{\Delta_\alpha(q)}\Delta_{\alpha;12}\Phi_{11}^0(q_1R_0,q_1r);$$

$$R_{\alpha;11}^{(2)}(r,q)=\frac{d_2^*}{\Delta_\alpha(q)}(\Delta_{\alpha;22}\Phi_{11}^2(q_2R_2,q_2r)-\Delta_{\alpha;12}\Phi_{21}^2(q_2R_2,q_2r));$$

$$R_{\alpha;21}^{(2)}(r,q)=-\frac{d_1^*}{\Delta_\alpha(q)}(\Delta_{\alpha;22}\Phi_{11}^2(q_2R_2,q_2r)-\Delta_{\alpha;12}\Phi_{21}^2(q_2R_2,q_2r));$$

$$R_{\alpha;12}^{(2)}(r,q)=\frac{\Delta_{\alpha;22}}{\Delta_\alpha(q)}(d_2^*\Phi_{12}^1(q_2R_1,q_2r)-d_1^*\Phi_{22}^1(q_2R_1,q_2r);\qquad(11)$$

$$R_{\alpha;22}^{(2)}(r,q)=-\frac{\Delta_{\alpha;12}}{\Delta_\alpha(q)}(d_2^*\Phi_{12}^1(q_2R_1,q_2r)-d_1^*\Phi_{22}^1(q_2R_1,q_2r);$$

$$R_{\alpha;11}^{(3)}=\frac{c_{12}q_2}{\Delta_\alpha(q)}d_2^*\psi_{\nu,\alpha;22}^3(\lambda R_3,\lambda r);\ R_{\alpha;21}^{(3)}(r,q)=-\frac{c_{12}q_2}{\Delta_\alpha(q)}d_1^*\psi_{\nu,\alpha;22}^3(\lambda R_3,\lambda r);$$

$$R_{\alpha;12}^{(3)}(r,q)=\frac{A_2(q)}{\Delta_\alpha(q)}\psi_{\nu,\alpha;22}^3(\lambda R_3,\lambda r);\ R_{\alpha;22}^{(3)}(r,q)=-\frac{A_1(q)}{\Delta_\alpha(q)}\psi_{\nu,\alpha;22}^3(\lambda R_3,\lambda r).$$

У результаті однозначної розв'язності алгебраїчної системи (8), підстановки обчислених значень $A_j,B_j\,(j=1,2,3)$ у формули (4) отримуємо єдиний розв'язок крайової задачі (1)-(3):

$$\mathrm{v}_j(r)=W_{\alpha;1j}(r,q)g_0+W_{\alpha;3j}(r,q)g_3^*+\int_{R_0}^{R_1}\mathrm{H}_{\alpha;j1}(r,\rho,q)g_1(\rho)d\rho+$$

$$+\int_{R_1}^{R_2}\mathrm{H}_{\alpha;j2}(r,\rho,q)g_2(\rho)d\rho+\int_{R_2}^{R_3}\mathrm{H}_{\alpha;j3}(r,\rho,q)g_3(\rho)\rho^{2\alpha-1}d\rho+ \\ +\sum_{i=1}^{2}\sum_{k=1}^{2}R_{\alpha;ik}^{(j)}(r,q)f_{ik},\quad j=1,2,3 \quad . \tag{12}$$

Побудуємо розв'язок крайової задачі (1)-(3) методом скінченного гібридного інтегрального перетворення типу Фур'є – Фур'є-(Конторовича – Лєбєдєва) 2-го роду [3]:

Визначимо величини та функції:

$$\sigma_1=\frac{c_{11}c_{12}}{c_{21}c_{22}}R_2^{2\alpha+1}a_1^{-2},\qquad \sigma_2=\frac{c_{12}}{c_{22}}R_2^{2\alpha+1}a_2^{-2},\quad \sigma_3=a_3^{-2};\, b_{jn}=(\beta_n^2+k_j^2)^{\frac{1}{2}};$$

$$V_{\alpha;1}(r,\beta_n)=\frac{c_{21}c_{22}b_{2n}}{\pi\lambda^{2\alpha}R_2^{2\alpha+1}}sh\pi b_{3n}\left[\mathrm{v}_{11}^{01}(b_{1n}R_0)\sin b_{1n}r-\mathrm{v}_{11}^{02}(b_{1n}R_0)\cos b_{1n}r\right];$$

$$V_{\alpha;2}(r,\beta_n)=\frac{c_{22}sh\pi b_{3n}}{\pi\lambda^{2\alpha}R_2^{2\alpha+1}}[d_1(b_{1n}R_0,b_{1n}R_1)\varphi_{22}^1(b_{2n}R_1,b_{2n}r)-$$

$$-d_2(b_{1n}R_0,b_{1n}R_1)\varphi_{12}^1(b_{2n}R_1,b_{2n}r)];$$

$$V_{\alpha;3}(r,\beta_n)=\left[X_{\alpha;22}^{22}(\lambda R_2,b_{3n})B_1(\beta_n)-X_{\alpha;12}^{22}(\lambda R_2,b_{3n})B_2(\beta_n)\right]C_\alpha(\lambda r,b_{3n})-$$
$$-\left[X_{\alpha;22}^{21}(\lambda R_2,b_{3n})B_1(\beta_n)-X_{\alpha;12}^{21}(\lambda R_2,b_{3n})B_2(\beta_n)\right]D_\alpha(\lambda r,b_{3n});$$

$$V_\alpha(r,\beta_n)=\sum_{k=1}^{3}\theta(r-R_{k-1})\theta(R_k-r)V_{\alpha;k}(r,\beta_n); \tag{13}$$

$$\left\|V_\alpha(r,\beta_n)\right\|^2=\int_{R_0}^{R_1}[V_{\alpha;1}(r,\beta_n)]^2\sigma_1dr+\int_{R_1}^{R_2}[V_{\alpha;2}(r,\beta_m)]^2\sigma_2dr+$$

$$+\int_{R_2}^{R_3}[V_{\alpha;3}(r,\beta_n)]^2\sigma_3r^{2\alpha-1}dr;$$

У рівностях (13) прийняті позначення:

$$\mathrm{v}_{jk}^{m1}(b_sR_m)=-\alpha_{jk}^m b_s\sin b_sR_m+\beta_{jk}^m\cos b_sR_m;$$

$$\mathrm{v}_{jk}^{m2}(b_sR_m)=\alpha_{jk}^m b_s\cos b_sR_m+\beta_{jk}^m\sin b_sR_m;$$

$$X_{\alpha;jk}^{m1}(b_sR_m)=(\alpha_{jk}^m\frac{d}{dr}+\beta_{jk}^m)C_\alpha(\lambda r,b_s)\Big|_{r=R_m};\, b_j=(\beta^2+k_j^2)^{\frac{1}{2}};$$

$$X_{\alpha;jk}^{m2}(b_sR_m)=(\alpha_{jk}^m\frac{d}{dr}+\beta_{jk}^m)D_\alpha(\lambda r,b_s)\Big|_{r=R_m};\, k_j^{\,2}\geq 0,\ j=\overline{1,3};$$

$$D_\alpha(\lambda r,b_s)=\pi^{-1}sh\pi b_sK_{ib_s,\alpha}(\lambda r);\, K_{\nu,\alpha}(x)=x^{-\alpha}K_\nu(x),$$

$$C_\alpha(\lambda r,b_s)=I_{ib_s;\alpha}(\lambda r)+iD_\alpha(\lambda r,b_s);\quad I_{\nu,\alpha}(x)=x^{-\alpha}I_\nu(x);$$

$$\varphi_{j2}^1(b_2R_1,b_2r)=\mathrm{v}_{j2}^{12}(b_2R_1)\cos b_2r-\mathrm{v}_{j2}^{11}(b_2R_1)\sin b_2r;\quad j=1,2;$$

$$d_j(b_1R_0,b_1R_1)=\mathrm{v}_{11}^{01}(b_1R_0)\mathrm{v}_{j1}^{12}(b_1R_1)-\mathrm{v}_{11}^{02}(b_1R_0)\mathrm{v}_{j1}^{11}(b_1R_1);$$

$$B_j(\beta)=d_1(b_1R_0,b_1R_1)\delta_{2j}(b_2R_1,b_2R_2)-d_2(b_1R_0,b_1R_1)\delta_{1j}(b_2R_1,b_2R_2);$$

$$\delta_{jk}(b_2R_1,b_2R_2)=\mathrm{v}_{j2}^{11}(b_2R_1)\mathrm{v}_{k1}^{22}(b_2R_2)-\mathrm{v}_{j2}^{12}(b_2R_1)\mathrm{v}_{k1}^{21}(b_2R_2);\ j,k=1,2.$$

$$\delta_{\alpha,j2}=X_{\alpha;j2}^{21}(\lambda R_2,b_3)X_{\alpha;22}^{32}(\lambda R_3,b_3)-X_{\alpha;j2}^{22}(\lambda R_2,b_3)X_{\alpha;22}^{31}(\lambda R_3,b_3);\ j=1,2$$

При цьому $I_\nu(x), K_\nu(x)$ - модифіковані функції Бесселя першого й другого роду відповідно, $\beta_n -$ корені трансцендентного рівняння

$$\delta_{\alpha;22}(\lambda R_2, \lambda R_3, b_3(\beta))\, B_1(\beta) - \delta_{\alpha;12}(\lambda R_2, \lambda R_3, b_3(\beta)) B_2(\beta) = 0$$

(14)

Наявність спектральної функції $V_\alpha(r, \beta_n)$ з квадратом норми $\|V_\alpha(r, \beta_n\|^2$ та вагової функції

$$\sigma(r) = \sum_{k=1}^{2} \theta(r - R_{k-1})\theta(R_k - r)\sigma_k + \theta(r - R_2)\theta(R_3 - r)\sigma_3 r^{2\alpha-1}$$

дозволяє визначити скінченні гібридні інтегральні перетворення типу Фур'є – Фур'є – (Конторовича – Лєбєдєва) 2-го роду [3]:

$$H_{\alpha;2}[g(r)] = \int_{R_0}^{R_3} g(r) V_\alpha(r, \beta_n)\sigma(r) dr \equiv g_n \qquad (15)$$

$$H_{\alpha;2}^{-1}[g_n] = \sum_{n=1}^{\infty} g_n \frac{V_\alpha(r, \beta_n)}{\|V_\alpha(r, \beta_n)\|^2} \equiv g(r) \qquad (16)$$

$$\begin{aligned} H_{\alpha;2}\left[M_\alpha[\,g(r)]\right] &= -\sigma_1(\alpha_{11}^0)^{-1} V_{\alpha;1}(R_0, \beta_n) g_0 + (\alpha_{22}^3)^{-1} R_3^{2\alpha+1} V_{\alpha;3}(R_3, \beta_n) g_3^* - \\ &- \beta_n^2 g_n - \sum_{m=1}^{2} k_m^2 \int_{R_{m-1}}^{R_m} g_m(r) V_{\alpha;m}(r, \beta_n)\sigma_m dr - k_3^2 \int_{R_2}^{R_3} g_3(r) V_{\alpha;3}(r, \beta_n)\sigma_3 r^{2\alpha-1} dr + \\ &+ \sum_{k=1}^{2} \frac{a_k^2 \sigma_k}{c_1 k}\left[(\alpha_{12}^k V'_{\alpha;k+1}(R_k, \beta_n) + \beta_{12}^k V_{\alpha;k+1}(R_k, \beta_n)) f_{2k} - \right. \\ &\left. -(\alpha_{22}^k V'_{\alpha;k+1}(R_k, \beta_n) + \beta_{22}^k V_{\alpha;k+1}(R_k, \beta_n) f_{1k} \right] \end{aligned} \qquad (17)$$

При $a_1 = a_2 = a_3 = 1$ в припущенні, що $\max\{q_1^2; q_2^2; q_3^2\} = q_3^2$, покладемо $k_3^2 = 0, \quad k_2^2 = q_3^2 - q_2^2 \geq 0, \quad k_1^2 = q_3^2 - q_1^2 \geq 0,$

$$M_\alpha = \sum_{k=1}^{2} \theta(r - R_{k-1})\theta(R_k - r)\frac{d}{dr^2} + \theta(r - R_2)\theta(R_3 - r) B_\alpha,$$

$$g(r) = \sum_{k=1}^{3} \theta(r - R_{k-1})\theta(R_k - r) g_k(r), \quad q^2 = \sum_{k=1}^{3} \theta(r - R_{k-1})\theta(R_k - r) q_k^2.$$

Застосуємо до рівняння

$$(M_\alpha - q^2)\mathrm{v}(r) = -g(r), \quad \mathrm{v}(r) = \sum_{k=1}^{3} \theta(r - R_{k-1})\theta(R_k - r) \qquad (18)$$

інтегральний оператор $H_{\alpha;2}$ за правилом (15). Внаслідок тотожності (17) отримуємо алгебраїчне рівняння

$$(\beta_n^2 + q_3^2)\mathrm{v}_n = g_n + F_n \qquad (19)$$

У рівності (19) прийнято позначення:

$$\begin{aligned} F_n &= -\sigma_1(\alpha_{11}^0)^{-1} V_{\alpha;1}(R_0, \beta_n) g_0 + (\alpha_{22}^3)^{-1} R_3^{2\alpha+1} V_{\alpha;3}(R_3, \beta_n) g_3^* + \\ &+ \sum_{k=1}^{2} \frac{\sigma_k}{c_{1k}} [(\alpha_{12}^k V'_{\alpha;k+1}(R_k, \beta_n) + \beta_{12}^k V_{\alpha;k+1}(R_k, \beta_n)) f_{2k} - \\ &- [(\alpha_{22}^k V'_{\alpha;k+1}(R_k, \beta_n) + \beta_{22}^k V_{\alpha;k+1}(R_k, \beta_n)) f_{1k}]; \end{aligned}$$

$$\mathrm{v}_n = H_{\alpha;2}[\mathrm{v}(r)] \equiv \int_{R_0}^{R_1} \mathrm{v}_1(r)V_{\alpha;1}(r,\beta_n)\sigma_1 dr + \int_{R_1}^{R_2} \mathrm{v}_2(r)V_{\alpha;2}(r,\beta_n)\sigma_2 dr +$$

$$+ \int_{R_2}^{R_3} \mathrm{v}_3(r)V_{\alpha;3}(r,\beta_n)r^{2\alpha-1}dr; \quad g_n = H_{\alpha;2}[g(r)].$$

З алгебраїчного рівняння (19) одержуємо:

$$\mathrm{v}_n = \frac{g_n}{\beta_n^2 + q_3^2} + \frac{F_n}{\beta_n^2 + q_3^2} \qquad (20)$$

У результаті застосування до функції v_n, визначеної формулою (20), оператора $H_{\alpha;2}^{-1}$ за правилом (16) маємо єдиний розв'язок крайової задачі (1)-(3):

$$\mathrm{v}_j(r) = \sum_{m=1}^{3} \int_{R_{m-1}}^{R_m} \left(\sum_{n=1}^{\infty} \frac{V_{\alpha;j}(r,\beta_n)V_{\alpha;m}(\rho,\beta_n)}{(\beta_n^2 + q_3^2)\|V_\alpha(r,\beta_n)\|^2} \right) \sigma_m \varphi_m(\rho) d\rho +$$

$$+ \left(-\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sigma_1 V_{\alpha;1}(R_0,\beta_n)V_{\alpha;j}(r,\beta_n)}{\alpha_{11}^0(\beta_n^2 + q_3^2)\|V_\alpha(r,\beta_n)\|^2} \right) g_0 + \left(\sum_{n=1}^{\infty} \frac{R_3^{2\alpha+1}V_{\alpha;3}(R_3,\beta_n)}{\alpha_{22}^3(\beta_n^2 + q_3^2)} \frac{V_{\alpha;j}(r,\beta_n)}{\|V_\alpha(r,\beta_n)\|^2} \right) g_3^* +$$

$$+ \sum_{k=1}^{2} \left\{ \left(-\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sigma_k(}{c_{1k}} \frac{\alpha_{22}^k V'_{\alpha;k+1}(R_k,\beta_n) + \beta_{22}^k V_{\alpha;k+1}(R_k,\beta_n))V_{\alpha;j}(r,\beta_n)}{(\beta_n^2 + q_3^2)\|V_\alpha(r,\beta_n)\|^2} \right) f_{1k} + \right.$$

$$\left. + \left(\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sigma_k}{c_{1k}} \frac{[(\alpha_{12}^k V'_{\alpha;k+1}(R_k,\beta_n) + \beta_{12}^k V_{\alpha;k+1}(R_k,\beta_n)]}{(\beta_n^2 + q_3^2)\|V_\alpha(r,\beta_n)\|^2} V_{\alpha;j}(r,\beta_n) \right) f_{2k} \right\};$$

$$\varphi_1 = \varphi_2 = 1, \quad \varphi_3(r) = r^{2\alpha-1}, \quad j = 1,2,3 \qquad (21)$$

Порівнюючи внаслідок єдиності розв'язки крайової задачі (1)-(3), визначені за формулами (12) та (21), отримуємо зображення сум поліпараметричних функціональних рядів:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{V_{\alpha;j}(r,\beta_n)V_{\alpha;m}(\rho,\beta_n)}{(\beta_n^2 + q_3^2)\|V_\alpha(r,\beta_n)\|^2} = \frac{1}{\sigma_m} \mathrm{H}_{\alpha;jm}(r,\rho,q); \quad j,m = \overline{1,3}; \qquad (22)$$

$$-\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sigma_1 V_{\alpha;1}(R_0,\beta_n)V_{\alpha;j}(\rho,\beta_n)}{\alpha_{11}^0(\beta_n^2 + q_3^2)\|V_\alpha(r,\beta_n)\|^2} = W_{\alpha;1j}(r,q); \quad j = \overline{1,3}; \qquad (23)$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{R_3^{2\alpha+1}}{\alpha_{22}^3} \frac{V_{\alpha;3}(R_3,\beta_n)V_{\alpha;j}(\rho,\beta_n)}{(\beta_n^2 + q_3^2)\|V_\alpha(r,\beta_n)\|^2} = W_{\alpha;3j}(r,q); \quad j = \overline{1,3}; \qquad (24)$$

$$-\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sigma_k(\alpha_{22}^k V'_{\alpha;k+1}(R_k,\beta_n) + \beta_{22}^k V_{\alpha;k+1}(R_k,\beta_n))}{c_{1k}(\beta_n^2 + q_3^2)\|V_\alpha(r,\beta_n)\|^2} V_{\alpha;j}(r,\beta_n) = R_{\alpha;1k}^{(j)}(r,q); \qquad (25)$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sigma_k(\alpha_{12}^k V'_{\alpha;k+1}(R_k,\beta_n) + \beta_{12}^k V_{\alpha;k+1}(R_k,\beta_n))}{c_{1k}(\beta_n^2 + q_3^2)\|V_\alpha(r,\beta_n)\|^2} V_{\alpha;j}(r,\beta_n) = R_{\alpha;2k}^{(j)}(r,q), k = 1,2 \qquad (26)$$

Функції $W_{\alpha;1j}(r,q)$ та $W_{\alpha;3j}(r,q)$ визначені формулами (9), функції $\mathrm{H}_{\alpha;jm}(r,\rho,q)$ визначені формулами (10), а функції $R_{\alpha;mk}^{(j)}(r,q)$ $(m,k = 1,2;\ j = 1,2,3)$ визначені формулами (11).

Оскільки праві частини рівностей (22)-(26) не залежать від нерівностей $(q_3^2 - q_m^2 \geq 0, m = 1,2)$, то можна вважати $q_1^2 = q_2^2 = q_3^2 \equiv q^2 \geq 0.$

Polyparametric family of the functional series due to the system of the special Bessel functions and trigonometric functions system was summarized by means of the comparison of the boder task solution within the three – dementional segment for the separate system of the Bessel and Furrier modificated differential equation, constructed by the Coshier function method from one side and the hybrid integral transformation of the Furrier – Furrier (Kontorovich – Lebedyev) 2-nd gender method from the other side.

Література

1. Степанов В.В. Курс дифференциальных уравнений.- М.: Физматгиз, 1959.-468 с.
2. Ленюк М.П. Исследование основных краевых задач для диссипативного волнового уравнения Бесселя.- Киев, 1983.- 62с.- (Препринт / АН УССР. Ин-т математики; 83.3).
3. Мороз В.В., Ленюк М.П. Скінченні гібридні інтегральні перетворення.-Київ, 1997.-42 с.- (Препринт / НАН України. Ін-т математики; 97.7).

Одержано 12.03.01 р.