УДК 517.443

М.Ленюк, докт.фіз.-мат.наук; Б.Шелестовський, канд. фіз.-мат.наук
Тернопільський державний технічний університет імені Івана Пулюя

ОБЧИСЛЕННЯ НЕВЛАСНИХ ІНТЕГРАЛІВ МЕТОДОМ ГІБРИДНОГО ІНТЕГРАЛЬНОГО ПЕРЕТВОРЕННЯ ТИПУ (КОНТОРОВИЧА-ЛЄБЄДЄВА)-ФУР'Є-ФУР'Є НА ПОЛЯРНІЙ ВІСІ $r \geq R_0 > 0$

Методом порівняння розв'язків крайової задачі для системи модифікованих диференціальних рівнянь Бесселя та Фур'є другого порядку обчислено поліпараметричну сім'ю невласних інтегралів, у конструкції підінтегральних функцій яких беруть участь спеціальні функції Бесселя і тригонометричні функції.

Розглянемо задачу про конструкцію обмеженого на множині

$$I_2^+ = \{r: \quad r \in (R_0, R_1) \cup (R_1, R_2) \cup (R_2, \infty); \quad R_0 > 0\}$$

розв'язку сепаратної системи модифікованих диференціальних рівнянь Бесселя та Фур'є другого порядку

$$(B_\alpha - q_1^2)u_1(r) = -f_1(r), \quad r \in (R_0, R_1) \tag{1}$$

$$(\frac{d^2}{dr^2} - q_m^2)u_m(r) = -f_m(r), \quad r \in (R_{m-1}, R_m); m = 2,3; R_3 = \infty$$

з крайовими умовами

$$(\alpha_{11}^0 \frac{d}{dr} + \beta_{11}^0)u_1\Big|_{r=R_0} = g_0, \quad \frac{du_3}{dr}\Big|_{r=\infty} = 0, \quad |\alpha_{11}^0| + |\beta_{11}^0| \neq 0 \tag{2}$$

та умовами спряження

$$\left[(\alpha_{j1}^k \frac{d}{dr} + \beta_{j1}^k)u_k(r) - (\alpha_{j2}^k \frac{d}{dr} + \beta_{j2}^k)u_{k+1}(r)\right]\Big|_{r=R_k} = 0; \quad j,k = 1,2 \tag{3}$$

У рівностях (1)-(3) $\alpha_{jm}^k \geq 0, \beta_{jm}^k \geq 0 \quad c_{jk} = \alpha_{2j}^k \beta_{1j}^k - \alpha_{1j}^k \beta_{2j}^k, c_{1k} \cdot c_{2k} > 0,$

$$B_\alpha = r^2 \frac{d^2}{dr^2} + (2\alpha + 1)r \frac{d}{dr} + \alpha^2 - \lambda^2 r^2, \lambda \in (0, \infty), 2\alpha + 1 \geq 0,$$

$q_1 \geq 0, q_2 \geq 0, q_3 > 0;$

B_α − диференціальний оператор Бесселя з виродженням при старшій похідній [1].

Фундаментальну систему розв'язків для рівняння Бесселя $(B_\alpha - q_1^2)\text{v} = 0$ утворюють модифіковані функції Бесселя $I_{q_1,\alpha}(\lambda r)$ та $K_{q_1,\alpha}(\lambda r)$ [2], а фундаментальну систему розв'язків для рівняння Фур'є $(\frac{d^2}{dr^2} - q^2)\text{v} = 0$ утворюють функції $\text{v}_1 = \exp(qr)$ і $\text{v}_2 = \exp(-qr)$ або їх лінійні комбінації $chqr$ та $shqr$ [3].

Наявність фундаментальної системи розв'язків дозволяє будувати розв'язок крайової задачі (1)-(3) методом функцій Коші [4]:

$$u_1(r) = A_1 I_{\nu,\alpha}(\lambda r) + B_1 K_{\nu,\alpha}(\lambda r) + \int_{R_0}^{R_1} \varepsilon_1(r,\rho) f_1(\rho) \rho^{2\alpha-1} d\rho, \nu = q_1 > 0$$

$$u_2(r)=A_2chq_2r+B_2shq_2r+\int_{R_1}^{R_2}\varepsilon_2(r,\rho)f_2(\rho)d\rho \tag{4}$$

$$u_3(r)=B_3e^{-q_3(r-R_2)}+\int_{R_2}^{\infty}\varepsilon_3(r,\rho)f_3(\rho)d\rho$$

Тут беруть участь функції Коші:

$$\varepsilon_1(r,\rho)=\frac{\lambda^{2\alpha}}{\Delta_{\nu,\alpha;1}(\lambda R_0,\lambda R_1)}\begin{cases}\psi^0_{\nu,\alpha;11}(\lambda R_0,\lambda r)\psi^1_{\nu,\alpha;11}(\lambda R_1,\lambda\rho), R_0<r<\rho<R_1\\ \psi^0_{\nu,\alpha;11}(\lambda R_0,\lambda\rho)\psi^1_{\nu,\alpha;11}(\lambda R_1,\lambda r), R_0<\rho<r<R_1\end{cases}; \tag{5}$$

$$\varepsilon_2(r,\rho)=-\frac{1}{q_2\Delta_{11}(q_2R_1,q_2R_2)}\begin{cases}\Phi^1_{12}(q_2R_1,q_2r)\Phi^2_{11}(q_2R_2,q_2\rho), R_1<r<\rho<R_2\\ \Phi^1_{12}(q_2R_1,q_2\rho)\Phi^2_{11}(q_2R_2,q_2r), R_1<\rho<r<R_2\end{cases}; \tag{6}$$

$$\varepsilon_2(r,\rho)=\frac{1}{q_3(\alpha^2_{12}q_3-\beta^2_{12})}\begin{cases}e^{-q_3(\rho-R_2)}\Phi^2_{12}(q_3R_2,q_3r), R_2<r<\rho<\infty\\ e^{-q_3(r-R_2)}\Phi^2_{12}(q_3R_2,q_3\rho), R_2<\rho<r<\infty\end{cases}; \tag{7}$$

У рівностях (5)-(7) прийняті позначення:

$$U^{m1}_{\nu,\alpha;jk}(\lambda R_m)=(\alpha^m_{jk}\frac{\nu-\alpha}{R_m}+\beta^m_{jk})I_{\nu,\alpha}(\lambda R_m)+\alpha^m_{jk}\lambda^2R_mI_{\nu+1,\alpha+1}(\lambda R_m),$$

$$U^{m2}_{\nu,\alpha;jk}(\lambda R_m)=(\alpha^m_{jk}\frac{\nu-\alpha}{R_m}+\beta^m_{jk})K_{\nu,\alpha}(\lambda R_m)-\alpha^m_{jk}\lambda^2R_mK_{\nu+1,\alpha+1}(\lambda R_m),$$

$$V^{m1}_{jk}(q_sR_m)=\alpha^m_{jk}q_sshq_sR_m+\beta^m_{jk}chq_sR_m,$$

$$V^{m2}_{jk}(q_sR_m)=\alpha^m_{jk}q_schq_sR_m+\beta^m_{jk}shq_sR_m,$$

$$\psi^m_{\nu,\alpha;jk}(\lambda R_m,\lambda x)=U^{m1}_{\nu,\alpha;jk}(\lambda R_m)K_{\nu,\alpha}(\lambda x)-U^{m2}_{\nu,\alpha;jk}(\lambda R_m)I_{\nu,\alpha}(\lambda x);$$

$$\Phi^m_{jk}(q_sR_m,q_sr)=V^{m2}_{jk}(q_sR_m)chq_sr-V^{m1}_{jk}(q_sR_m)shq_sr;$$

$$\Delta_{\nu,\alpha;j}(\lambda R_0,\lambda R_1)=U^{01}_{\nu,\alpha;11}(\lambda R_0)U^{12}_{\nu,\alpha;j1}(\lambda R_1)-U^{02}_{\nu,\alpha;11}(\lambda R_0)U^{11}_{\nu,\alpha;j1}(\lambda R_1);$$

$$\Delta_{jk}(q_2R_1,q_2R_2)=V^{11}_{j2}(q_2R_1)V^{22}_{k1}(q_2R_2)-V^{12}_{j2}(q_2R_1)V^{21}_{k1}(q_2R_2);\ j,k=1,2.$$

Для визначення сталих $A_j\,(j=1,2)$ та $B_k\,(k=1,2,3)$ крайові умови (2) і умови спряження (3) дають алгебраїчну систему:

$$\begin{aligned}&U^{01}_{\nu,\alpha;11}(\lambda R_0)A_1+U^{02}_{\nu,\alpha;11}(\lambda R_0)B_1=g_0\\ &U^{11}_{\nu,\alpha;j1}(\lambda R_1)A_1+U^{12}_{\nu,\alpha;j1}(\lambda R_1)B_1-V^{11}_{j2}(q_2R_1)A_2-V^{12}_{j2}(q_2R_1)B_2=\delta_{j2}G_{12}\\ &V^{21}_{j1}(q_2R_2)A_2+V^{22}_{j1}(q_2R_2)B_2+(\alpha^2_{j2}q_3-\beta^2_{j2})B_3=\delta_{j2}G_{23};\ j=1,2.\end{aligned} \tag{8}$$

Тут δ_{jk} - символ Кронекера, а функції G_{12}, G_{23} відповідно дорівнюють:

$$G_{12}=\frac{c_{11}}{R_1^{2\alpha+1}}\int_{R_0}^{R_1}\frac{\psi^0_{\nu,\alpha;11}(\lambda R_0,\lambda\rho)}{\Delta_{\nu,\alpha;1}(\lambda R_0,\lambda R_1)}f_1(\rho)\rho^{2\alpha-1}d\rho+c_{21}\int_{R_1}^{R_2}\frac{\Phi^2_{11}(q_2R_2,q_2\rho)}{\Delta_{11}(q_2R_1,q_2R_2)}f_2(\rho)d\rho,$$

$$G_{23}=-c_{12}\int_{R_1}^{R_2}\frac{\Phi^1_{12}(q_2R_1,q_2\rho)}{\Delta_{11}(q_2R_1,q_2R_2)}g_2(\rho)d\rho-c_{22}\int_{R_2}^{\infty}\frac{e^{-q_3(\rho-R_2)}}{\alpha^2_{12}q_3-\beta^2_{12}}f_3(\rho)d\rho,$$

Припустимо, що виконана умова однозначної розв'язності крайової задачі (1)-(3): визначник алгебраїчної системи (8)

$$\Delta_\alpha(q) \equiv (\alpha_{22}^2 q_3 - \beta_{22}^2) A_{\alpha,1}(q) - (\alpha_{12}^2 q_3 - \beta_{12}^2) A_{\alpha;2}(q) \neq 0, \tag{9}$$

$$A_{\alpha;j}(q) = \Delta_{1j}(q_2 R_1, q_2 R_2) \Delta_{\nu,\alpha;2}(\lambda R_0, \lambda R_1) - \Delta_{2j}(q_2 R_1, q_2 R_2) \Delta_{\nu,\alpha;1}(\lambda R_0, \lambda R_1);\ j = 1,2.$$

У результаті однозначної розв'язності алгебраїчної системи (8), підстановки обчислених значень A_j та B_k у формули (4) одержуємо єдиний розв'язок крайової задачі (1)-(3):

$$\begin{aligned} u_j(r) &= W_{\alpha;1j}(r,q) g_0 + \int_{R_0}^{R_1} \mathrm{H}_{\alpha;j1}(r,\rho,q) f_1(\rho) \rho^{2\alpha-1} d\rho + \\ &+ \int_{R_1}^{R_2} \mathrm{H}_{\alpha;j2}(r,\rho,q) f_2(\rho) d\rho + \int_{R_2}^{\infty} \mathrm{H}_{\alpha;j3}(r,\rho,q) f_3(\rho) d\rho;\ j = \overline{1,3}. \end{aligned} \tag{10}$$

У рівностях (10) беруть участь функції впливу

$$\mathrm{H}_{\alpha,11}(r,\rho,q) = \frac{\lambda^{2\alpha}}{\Delta_\alpha(q)} \begin{cases} \psi_{\nu,\alpha;11}^0(\lambda R_0, \lambda r)[B_1(q)\psi_{\nu,\alpha;21}^1(\lambda R_1, \lambda\rho) - \\ \psi_{\nu,\alpha;11}^0(\lambda R_0, \lambda\rho)[B_1(q)\psi_{\nu,\alpha;21}^1(\lambda R_1, \lambda r) - \end{cases}$$

$$- B_2(q)\psi_{\nu,\alpha;11}^1(\lambda R_1, \lambda\rho)], R_0 < r < \rho < R_1$$

$$- B_2(q)\psi_{\nu,\alpha;11}^1(\lambda R_1, \lambda r)], R_0 < \rho < r < R_1;$$

$$B_j(q) = (\alpha_{22}^2 q_3 - \beta_{22}^2) \Delta_{j1}(q_2 R_1, q_2 R_2) - (\alpha_{12}^2 q_3 - \beta_{12}^2) \Delta_{j2}(q_2 R_1, q_2 R_2);\ j = 1,2;$$

$$\mathrm{H}_{\alpha;12}(r,\rho,q) = \frac{c_{21}}{\Delta_\alpha(q)} \psi_{\nu,\alpha;11}^0(\lambda R_0, \lambda r)[(\alpha_{22}^2 q_3 - \beta_{22}^2)\Phi_{11}^2(q_2 R_2, q_2\rho) -$$

$$- (\alpha_{12}^2 q_3 - \beta_{12}^2)\Phi_{21}^2(q_2 R_2, q_2\rho)];$$

$$\mathrm{H}_{\alpha;13}(r,\rho,q) = \frac{c_{21} c_{22} q_2}{\Delta_\alpha(q)} \psi_{\nu,\alpha;11}^0(\lambda R_0, \lambda r) \exp[-q_3(\rho - R_2)],$$

$$\mathrm{H}_{\alpha;21}(r,\rho,q) = \frac{c_{11}}{R_1^{2\alpha+1}} \frac{\psi_{\nu,\alpha;11}^0(\lambda R_0, \lambda\rho)}{\Delta_\alpha(q)} [(\alpha_{22}^2 q_3 - \beta_{22}^2)\Phi_{11}^2(q_2 R_2, q_2 r) -$$

$$- (\alpha_{12}^2 q_3 - \beta_{12}^2)\Phi_{21}^2(q_2 R_2, q_2 r)];$$

$$\mathrm{H}_{\alpha;22}(r,\rho,q) = \frac{1}{q_2 \Delta_\alpha(q)} \begin{cases} [\Delta_{\nu,\alpha;1}\Phi_{22}^1(q_2 R_1, q_2 r) - \Delta_{\nu,\alpha;2}\Phi_{12}^1(q_2 R_1, q_2 r)] \times \\ [\Delta_{\nu,\alpha;1}\Phi_{22}^1(q_2 R_1, q_2\rho) - \Delta_{\nu,\alpha;2}\Phi_{12}^1(q_2 R_1, q_2\rho)] \times \end{cases}$$

$$\times[(\alpha_{22}^2 q_3 - \beta_{22}^2)\Phi_{11}^2(q_2 R_2, q_2\rho) - (\alpha_{12}^2 q_3 - \beta_{12}^2)\Phi_{21}^2(q_2 R_2, q_2\rho)], R_1 < r < \rho < R_2$$

$$\times[(\alpha_{22}^2 q_3 - \beta_{22}^2)\Phi_{11}^2(q_2 R_2, q_2 r) - (\alpha_{12}^2 q_3 - \beta_{12}^2)\Phi_{21}^2(q_2 R_2, q_2 r)], R_1 < \rho < r < R_2;$$

$$\begin{aligned} \mathrm{H}_{\alpha,23}(r,\rho,q) &= \frac{c_{22}}{\Delta_\alpha(q)} [\Delta_{\nu,\alpha;1}(\lambda R_0, \lambda R_1)\Phi_{22}^1(q_2 R_1, q_2 r) - \\ &- \Delta_{\nu,\alpha;2}(\lambda R_0, \lambda R_1)\Phi_{12}^1(q_2 R_1, q_2 r)] e^{-q_3(\rho - R_2)}; \end{aligned} \tag{11}$$

$$\mathrm{H}_{\alpha,31}(r,\rho,q) = \frac{c_{11} c_{12} q_2}{R_1^{2\alpha+1} \Delta_\alpha(q)} \psi_{\nu,\alpha;11}^0(\lambda R_0, \lambda\rho) \exp[-q_3(r - R_2)],$$

$$\mathrm{H}_{\alpha;32}(r,\rho,q)=\frac{c_{12}}{\Delta_\alpha(q)}e^{-q_3(r-R_2)}[\Delta_{\nu,\alpha;1}(\lambda R_0,\lambda R_1)\Phi^1_{22}(q_2R_1,q_2\rho)-$$
$$-\Delta_{\nu,\alpha;2}(\lambda R_0,\lambda R_1)\Phi^1_{12}(q_2R_1,q_2\rho)];$$

$$\mathrm{H}_{\alpha;33}(r,\rho,q)=\frac{1}{q_3\Delta_\alpha(q)}\begin{cases}e^{-q_3(\rho-R_2)}[A_{\alpha,1}(q)\Phi^2_{22}(q_3R_2,q_3r)-\\ e^{-q_3(r-R_2)}[A_{\alpha,1}(q)\Phi^2_{22}(q_3R_2,q_3\rho)-\end{cases}$$
$$-A_{\alpha;2}(q)\Phi^2_{12}(q_3R_2,q_3r)],R_2<r<\rho<\infty$$
$$-A_{\alpha;2}(q)\Phi^2_{12}(q_3R_2,q_3\rho)],R_2<\rho<r<\infty,$$

породжені неоднорідністю системи (1), і функції Гріна

$$W_{\alpha;11}(r,q)=\frac{1}{\Delta_\alpha(q)}[B_2(q)\psi^1_{\nu,\alpha;11}(\lambda R_1,\lambda r)-B_1(q)\psi^1_{\nu,\alpha;21}(\lambda R_1,\lambda r)],$$
$$W_{\alpha;12}(r,q)=\frac{c_{11}}{\lambda^{2\alpha}R_1^{2\alpha+1}}\frac{1}{\Delta_\alpha(q)}[(\alpha^2_{12}q_3-\beta^2_{12})\Phi^2_{21}(q_2R_2,q_2r)-$$
$$-(\alpha^2_{22}q_3-\beta^2_{22})\Phi^2_{11}(q_2R_2,q_2r)];$$
$$W_{\alpha;13}(r,q)=-\frac{c_{11}c_{12}q_2}{\lambda^{2\alpha}R_1^{2\alpha+1}\Delta_\alpha(q)}e^{-q_3(r-R_2)},\tag{12}$$

породжені крайовою умовою в точці $r=R_0$.

Побудуємо розв'язок крайової задачі (1)-(3) методом гібридного інтегрального перетворення типу (Конторовича – Лєбєдєва)-Фур'є-Фур'є, породженого на множині I_2^+ гібридним диференціальним оператором

$$M_\alpha=\theta(r-R_0)\theta(R_1-r)B_\alpha+\theta(r-R_1)\theta(R_2-r)\frac{d^2}{dr^2}+\theta(r-R_2)\frac{d^2}{dr^2}.$$

Визначимо величини та функції:

$$\sigma_1=\frac{c_{11}c_{12}}{c_{11}c_{22}}\frac{1}{R_1^{2\alpha+1}},\sigma_2=\frac{c_{12}}{c_{22}},\sigma_3=1,b_j=(\beta^2+k_j^2)^{\frac{1}{2}},k_j^2\ge 0;$$
$$\sigma_\alpha=\sigma_1r^{2\alpha-1}\theta(r-R_0)\theta(R_1-r)+\sigma_2\theta(r-R_1)\theta(R_2-r)+\sigma_3\theta(r-R_2);$$
$$V_\alpha(r,\beta)=\sum_{k=1}^{2}\theta(r-R_{k-1})\theta(R_k-r)V_{\alpha;k}(r,\beta)+\theta(r-R_2)V_{\alpha;3}(r,\beta);$$
$$\Omega_{\alpha;2}(\beta)=\beta b_3^{-1}(\beta)([w_{\alpha;1}(\beta)]^2+[w_{\alpha;2}(\beta)]^2)^{-1};$$
$$V_{\alpha;1}(r,\beta)=c_{21}c_{22}b_2b_3[X^{01}_{\alpha;11}(\lambda R_0,b_1)D_\alpha(\lambda r,b_1)-X^{02}_{\alpha;11}(\lambda R_0,b_1)C_\alpha(\lambda r,b_1)];$$
$$V_{\alpha;2}(r,\beta)=c_{22}b_3[(\delta_{\alpha;1}(\beta)\mathrm{v}^{12}_{22}(b_2R_1)-\delta_{\alpha;2}(\beta)\mathrm{v}^{12}_{12}(b_2R_1))\cos b_2r-$$
$$-(\delta_{\alpha;1}(\beta)\mathrm{v}^{11}_{22}(b_2R_1)-\delta_{\alpha;2}(\beta)\mathrm{v}^{11}_{12}(b_2R_1))\sin b_2r],\tag{13}$$
$$V_{\alpha;3}(r,\beta)=w_{\alpha;2}(\beta)\cos b_3(r-R_2)-w_{\alpha;1}(\beta)\sin b_3(r-R_2);$$

$\theta(x)$ - одинична функція Хевісайда.

У рівностях (13) прийняті позначення:

$$I_{ib_1,\alpha}(\lambda r)=C_\alpha(\lambda r,b_1)-iD_\alpha(\lambda r,b_1);\ K_{ib_1,\alpha}(\lambda r)=\pi D_\alpha(\lambda r,b_1)(sh\pi b_1)^{-1};$$
$$\mathrm{v}^{m1}_{jk}(b_2R_m)=-\alpha^m_{jk}b_2\sin b_2R_m+\beta^m_{jk}\cos b_2R_m,$$

$$\mathrm{v}_{\mathrm{jk}}^{\mathrm{m}2}(b_2R_2)=\alpha_{jk}^{m}b_2\cos b_2R_m+\beta_{jk}^{m}\sin b_2R_m,$$

$$X_{\alpha,j1}^{m1}(\lambda R_m,b_1)=(\alpha_{j1}^{m}\frac{d}{dr}+\beta_{j1}^{m})C_\alpha(\lambda r,b_1)\Big|_{r=R_m};m=0,1;$$

$$X_{\alpha,j1}^{m2}(\lambda R_m,b_1)=(\alpha_{j1}^{m}\frac{d}{dr}+\beta_{j1}^{m})D_\alpha(\lambda r,b_1)\Big|_{r=R_m};\ j=1,2; \tag{14}$$

$$\delta_{\alpha,j}(\beta)=X_{\alpha;11}^{01}(\lambda R_0,b_1)X_{\alpha;j1}^{12}(\lambda R_1,b_1)-X_{\alpha;11}^{02}(\lambda R_0,b_1)X_{\alpha;j1}^{11}(\lambda R_1,b_1);$$

$$\delta_{jk}(b_2R_1,b_2R_2)=\mathrm{v}_{\mathrm{j}2}^{11}(b_2R_1)\mathrm{v}_{\mathrm{k}1}^{22}(b_2R_2)-\mathrm{v}_{\mathrm{j}2}^{12}(b_2R_1)\mathrm{v}_{\mathrm{k}1}^{21}(b_2R_2);\ j,k=1,2;$$

$$A_{\alpha;j}(\beta)=\delta_{\alpha;2}(\beta)\delta_{1j}(b_2R_1,b_2R_2)-\delta_{\alpha;1}(\beta)\delta_{2j}(b_2R_1,b_2R_2);$$

$$w_{\alpha;1}(\beta)=\beta_{22}^2A_{\alpha;1}(\beta)-\beta_{12}^2A_{\alpha;2}(\beta);\quad \omega_{\alpha;2}(\beta)=b_3(\alpha_{22}^2A_{\alpha;1}(\beta)-\alpha_{12}^2A_{\alpha;2}(\beta)).$$

Наявність вагової функції $\sigma_\alpha(r)$, спектральної функції $V_\alpha(r,\beta)$ та спектральної густини $\Omega_{\alpha;2}(\beta)$ дозволяє запровадити гібридне інтегральне перетворення (пряме $H_{\alpha;2}$ і обернене $H_{\alpha;2}^{-1}$) типу (Конторовича-Лєбєдєва)-Фур'є-Фур'є, породженого на множині I_2^+ оператором M_α;

$$H_{\alpha;2}[g(r)]=\int_{R_0}^{\infty}g(r)V_\alpha(r,\beta)\sigma_\alpha(r)dr\equiv\tilde{g}(\beta) \tag{15}$$

$$H_{\alpha;2}^{-1}[\tilde{g}(\beta)]=\frac{2}{\pi}\int_0^{\infty}\tilde{g}(\beta)V_\alpha(r,\beta)\Omega_{\alpha;2}(\beta)d\beta\equiv g(r) \tag{16}$$

При цьому для гібридного диференціального оператора M_α властива основна тотожність інтегрального перетворення:

$$\begin{aligned}H_{\alpha;2}[M_\alpha[g(r)]]&=-\beta^2\tilde{g}(\beta)-\sigma_1R_0^{2\alpha+1}(\alpha_{11}^0)^{-1}V_{\alpha;1}(R_0,\beta)\times\\&\times(\alpha_{11}^0\frac{dg_1}{dr}+\beta_{11}^0g_1(r))\Big|_{r=R_0}-k_1^2\int_{R_0}^{R_1}g_1(r)V_{\alpha;1}(r,\beta)\sigma_1r^{2\alpha-1}dr-\\&-k_2^2\int_{R_1}^{R_2}g_2(r)V_{\alpha;2}(r,\beta)\sigma_2dr-k_3^2\int_{R_2}^{\infty}g_3(r)V_{\alpha;3}(r,\beta)\sigma_3dr\end{aligned} \tag{17}$$

Нехай $\max\{q_1^2;q_2^2;q_3^2\}=q_1^2$. Вважатемо $k_1^2=q_1^2-q_1^2=0,\ k_2=q_1{}^2-q_2{}^2\geq 0,$ $k_3^2=q_1^2-q_3^2\geq 0$ (в протилежному випадку q_1^2 і $q_j^2\,(j=2,3)$ міняються місцями).

Безпосередньо перевіряється, що єдиний розв'язок крайової задачі (1)-(3), побудований методом гібридного інтегрального перетворення, запровадженого формулами (15), (16), має структуру:

$$
\begin{aligned}
u_j(r) = &\int_{R_0}^{R_1}\left(\frac{2}{\pi}\int_0^\infty \frac{V_{\alpha;j}(r,\beta)V_{\alpha;1}(\rho,\beta)}{(\beta^2+q_1^2)}\Omega_{\alpha;2}(\beta)d\beta\right) f_1(\rho)\rho^{2\alpha-1}\sigma_1 d\rho + \\
&+\int_{R_1}^{R_2}\left(\frac{2}{\pi}\int_0^\infty \frac{V_{\alpha;j}(r,\beta)V_{\alpha;2}(\rho,\beta)}{\beta^2+q_1^2}\Omega_{\alpha;2}(\beta)d\beta\right) f_2(\rho)\sigma_2 d\rho + \\
&+\int_{R_2}^{\infty}\left(\frac{2}{\pi}\int_0^\infty \frac{V_{\alpha;j}(r,\beta)V_{\alpha;3}(\rho,\beta)}{\beta^2+q_1^2}\Omega_{\alpha;2}(\beta)d\beta\right) f_3(\rho)d\rho - \\
&-\frac{2}{\pi}\int_0^\infty \frac{\sigma_1 R_0^{2\alpha+1}V_{\alpha;1}(R_0,\beta)}{\alpha_{11}^0(\beta^2+q_1^2)}V_{\alpha;j}(r,\beta)\Omega_{\alpha;2}(\beta)d\beta\cdot g_0;\ j=1,2,3
\end{aligned}
\tag{18}
$$

Порівнюючи розв'язки (10) і (18) внаслідок єдиності, маємо такі формули обчислення невласних інтегралів від спеціальних функцій математичної фізики:

$$
\frac{2}{\pi}\int_0^\infty \frac{V_{\alpha;j}(r,\beta)V_{\alpha;k}(\rho,\beta)}{\beta^2+q_1^2}\Omega_{\alpha;2}(\beta)d\beta = \frac{1}{\sigma_k}\mathrm{H}_{\alpha;jk}(r,\rho,q);\ j,k=1,2,3 \tag{19}
$$

$$
-\frac{2}{\pi}\int_0^\infty \frac{\sigma_1 R_0^{2\alpha+1}V_{\alpha;1}(R_0,\beta)}{\alpha_{11}^0(\beta^2+q_1^2)}V_{\alpha;j}(r,\beta)\Omega_{\alpha;2}(\beta)d\beta = W_{\alpha;1j}(r,q) \tag{20}
$$

Функції $\mathrm{H}_{\alpha;jk}(r,\rho,q)$ обчислюються за формулами (11), а функції $W_{\alpha;1j}(r,q)$ - за формулами (12).

Зауваження: Оскільки праві частини в (19), (20) не залежать від нерівності $(q^2-q_j^2)\geq 0$, де $q^2=\max\{q_1^2;q_2^2;q_3^2\}$, то можна вважати $q_1^2=q_2^2=q_3^2\equiv q^2>0.$

Polyparametric family of the unproper integrals in the construction of the subintegral functions in which the special Bessel functions and trigonometric functions take place were calculated by means of the comparison of the boder task solutions for the system of the modificated differential equations of Bessel and Furrier 2-nd gender method.

Література

1. Ленюк М.П., Міхалевська Г.І. Гібридні інтегральні перетворення типу Конторовича-Лєбєдєва.- Київ,1996.-64 с.- (Препринт/НАН України. Ін-тматематики;96.16).
2. Ленюк М.П. Исследование основных краевых задач для диссипативного волнового уравнения Бесселя. -Киев,1983.-62 с.-(Препринт / АН УССР. Ин-т математики; 83.3).
3. Степанов В.В. Курс дифференциальных уравнений.-М.:Физматгиз, 1959.-468с.
4. Ленюк М.П., Літовченко В.А. Обчислення невласних інтегралів методом гібридних інтегральних перетворень. Том II.- Київ: Ін-т математики НАН України, 1996.-283с.

Одержано 11.03.01 р.