УДК. 517:519.6

М.Бойчук, канд. фіз.-мат. наук
Чернівецький національний університет імені Юрія Федьковича;
Н.Шмуригіна
Чернівецький факультет національного технічного університету “Харківський політехнічний інститут”

МОДЕЛЮВАННЯ ОДНОПРОДУКТОВОЇ ЕКОНОМІКИ ЗРОСТАННЯ ТА ДОСЛІДЖЕННЯ МОДЕЛІ ЕКОНОМІКИ ЗРОСТАННЯ З ЛАГАМИ

У праці подано дослідження однопродуктової моделі макроекономіки зростання і моделі економіки з лагами та наведено алгоритм аналітичного дослідження моделей при неперервній кусково-лінійній виробничій функції.

Для розробки комп’ютерних технологій треба мати алгоритми, які реалізовувалися б на ЕОМ. Для нелінійних моделей ця проблема актуальна. При цьому виникає ще проблема існування єдиних розв’язків задач оптимального керування та визначення областей досягнення керувань. Такими задачами є моделі макроекономіки зростання.

1. Моделювання однопродуктової економіки зростання

Розгляньмо модель Рамсея, що моделює зростання в агрегованій замкнутій економіці [1, с.243, 250] :

$$\begin{aligned}&\int_0^T (1-s(t))\, f(k(t)) e^{-\delta t} dt \to \max,\\ &\dot{k}(t) = s(t) f(k(t)) - \lambda k(t),\ \ 0 \le s(t) \le 1,\ \ 0 \le t \le T, \qquad (1)\\ &k(0) = k_0 > 0,\ \ k(T) \ge k_T > 0,\end{aligned}$$

де $f(\cdot)-$питома макровиробнича функція з властивостями, поданими у [1, с.237] : $f(k) \ge 0 \quad \forall k \ge 0;$ $\quad f'(k) > 0,\ f''(k) < 0 \ \ \forall k > 0;$ $\lim\limits_{k\to\infty} f'(k) = \infty;$ $\quad s(t, t \in [0,T])-$ норма накопичення капіталу; $k(t, t \in [0,T])-$ капіталооснащеність (фондооснащеність); $\delta > 0-$ норма дисконтинування; $\lambda > 0-$ сума норми амортизації капіталу та темпу зростання чисельності робочої сили. Причому $f(\cdot)$- це невідома функція при $k \ge 0.$ Тому (1) є задачею математичного моделювання.

При відомій $f(\cdot)$ розв’язком моделі (1) є пара функцій $(s_{op}(t), k_{op}(t), t \in [0,T]),$ що максимізує функціонал споживання, і така, що $s_{op}-$кусково-неперервна на $[0,T],$ а $k_{op}-$ неперервна і кусково-диференційовна на $[0,T]$ із скінченним числом точок, де не існують похідні.

Для дослідження моделі (1) використовуються достатні умови оптимальності [2, с.113; 382-383], за якими потрібно :

1. Максимізувати по k та s функцію

$$R(t,k,s) = \frac{\partial \varphi(t,k)}{\partial k}\left[s f(k) - \lambda k\right] + e^{-\delta t}(1-s) f(k) + \frac{\partial \varphi(t,k)}{\partial t};$$

2. Мінімізувати по $k(T)$ функцію
$$\Phi(T,k(T)) = \varphi(T,k(T)) \quad \text{при } k(T) \ge k_T;$$
3. Побудувати крайові траєкторії (ліву та праву);
4. Обчислити точки перемикання.

З максимізації функції $R(t,k,s)$ по s, необхідною умовою якої є $\frac{\partial}{\partial s} R(t,k,s) = 0,$ одержуємо диференціальне рівняння
$$\frac{\partial}{\partial k}\varphi(t,k) = e^{-\delta t}, \ t \in [0,T], \ k \ge 0,$$
частинним розв'язком якого є
$$\varphi(t,k) = e^{-\delta t}k. \tag{2}$$
Після використання явного виразу φ залишилось максимізувати по k функцію
$$\tilde{R}(k) = f(k) - (\lambda + \delta)k.$$
Одержуємо рівняння
$$f'(k) - (\lambda + \delta) = 0, \ k > 0$$
для знаходження магістрального (рівноважного) значення k_{ma}.

Розгляньмо частинний випадок неперервної кусково-лінійної функції $f(k \ge 0)$
$$f(k) = \begin{cases} a_1 k + b_1, & k \in [k_1, k_2), \\ a_2 k + b_2, & k \in [k_2, k_3), \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ a_N k + b_N, & k \in [k_N, k_{N+1}], \end{cases}$$
де $\{k_i\}_{i=1}^{N+1}$ – спостережувані значення за капіталооснащеністю. У цьому випадку алгоритм знаходження k_{ma} такий :

1) пошук послідовних проміжків (k_i, k_{i+1}) та (k_{i+1}, k_{i+2}), $i = 1,2,...,N-1,$ на яких виконуються нерівності
$$\begin{aligned} &a_i - (\lambda + \delta) \ge 0, \\ &a_{i+1} - (\lambda + \delta) < 0; \end{aligned} \tag{3}$$
2) якщо існує таке $i_0 \in \{1,2,...,N-1\},$ для якого виконуються нерівності (3), то за магістральне значення k_{ma} треба взяти k_{i_0+1}, а відповідно магістраль виглядає так:
$$k_{mag}(t) = k_{i_0+1}, \quad t \in [0,T];$$
3) якщо нема такого i_0 серед $\{1,2,...,N-1\},$ для якого виконуються нерівності (3), то потрібно зменшити довжину проміжку (k_i, k_{i+1}), $i = 1,2,...,N.$

З властивостей функції f випливає, що $\tilde{R}''(k_{ma}) = f''(k_{ma}) < 0.$ А це означає, що $k = k_{ma}$ – точка максимуму функції $\tilde{R}(k \ge 0).$

З рівняння руху капіталу моделі (1) за визначеною магістраллю k_{mag} знайдемо відповідне їй керування :
$$s_{mag}(t) = \frac{\lambda k_{mag}(t)}{f(k_{mag}(t))}, \quad t \in [0,T]. \tag{4}$$
Причому $s_{mag}(t) \ge 0$ і $s_{mag}(t) \le 1$ для всіх $t \in [0,T],$ оскільки $f(k_{mag}) \ge 0$ для $\forall k \ge 0$ та
$$\frac{\lambda k_{mag}}{f(k_{mag})} = \frac{\lambda k_{mag}}{f(k_0) + (\lambda + \delta)(k_{mag} - k_0)} \le \frac{\lambda k_{mag}}{(\lambda + \delta)k_{mag}} \le \frac{\lambda}{\lambda + \delta} \le 1.$$
Мінімізація функції
$$\Phi(T,k(T)) = e^{-\delta T}k(T) \quad \text{при } k(T) \ge k_T$$

дає крайову умову

$$k(T) = k_T. \tag{5}$$

Якщо виконуються крайові умови

$$k_{mag}(0) = k_0, \quad k_{mag}(T) = k_T, \tag{6}$$

то за достатніми умовами оптимальності [2, с.113] пара функцій $(s_{mag}(t), k_{mag}(t), t \in [0, T])$ є розв’язком задачі (1).

Нехай хоча б одна з крайових умов (6) не виконується. Тоді потрібно побудувати ліву та праву крайові траєкторії.

Для побудови лівої траєкторії $k_l(t), t \in [0, \tau_l]$ необхідно розв’язати таку задачу на швидкодію :

$$\begin{aligned} &\tau_l = \int_0^{\tau_l} dt \to \min_{0 \le s_l(t) \le 1}, \\ &\dot{k}_l(t) = s_l(t) f(k_l(t)) - \lambda k_l(t), \ t \in [0, \tau_l], \\ &k_l(0) = k_0, \quad k_l(\tau_l) = k_{mag}(\tau_l), \end{aligned} \tag{7}$$

де τ_l – ліва точка перемикання керування;

а для правої траєкторії $k_p(t), t \in [\tau_p, T]$ –

$$\begin{aligned} &T - \tau_p = \int_{\tau_p}^{T} dt \to \min_{0 \le s_p(t) \le 1}, \\ &\dot{k}_p(t) = s_p(t) f(k_p(t)) - \lambda k_p(t), \ t \in [\tau_p, T], \\ &k_p(\tau_p) = k_{mag}(\tau_p), \quad k_p(T) = k_T, \end{aligned} \tag{8}$$

де τ_p – права точка перемикання керування.

Для задачі (7) випишемо рівняння Беллмана [3, с.97-99]

$$-\frac{d\tau_l}{dk_l} \lambda k_l + \min_{0 \le s_l \le 1} \left\{ \frac{d\tau_l}{dk_l} s_l f(k_l) \right\} = -1, \tag{9}$$

розв’язком якого є :

1) $s_l = 0$ при $\dfrac{d\tau_l}{dk_l} \ge 0;$

2) $s_l = 1$ при $\dfrac{d\tau_l}{dk_l} < 0.$

Тобто за принципом Беллмана керування s_l для задачі на швидкодію може набирати межових значень відрізка [0,1].

При $s_l = 0$ значення τ_l знаходимо з розв’язку задачі

$$\frac{d\tau_l}{dk_l} = \frac{1}{\lambda k_l}, \quad \tau_l = 0 \ \textit{при} \ k_l(0) = k_0,$$

$$\tau_l = \frac{1}{\lambda} \ln \frac{k_{mag}(0)}{k_0}. \tag{10}$$

З іншого боку, при $s_l = 0$ з рівняння руху капіталу моделі (1) та початкової умови

$$\begin{aligned} &\dot{k}_l(t) = -\lambda k_l(t), \\ &k_l(0) = k_0 \end{aligned} \tag{11}$$

знаходимо ліву крайову траєкторію

$$k_l(t) = k_0 e^{-\lambda t}, \tag{12}$$

що при $t \in [0, \tau_l)$ є спадною, а тому можна знайти τ_l

$$\tau_l = \frac{1}{\lambda} \ln \frac{k_0}{k_{mag}(0)}. \tag{13}$$

Це можливо при $k_0 > k_{mag}(0)$.

З порівняння виразів (10) і (13) випливає, що вони відрізняються знаком. А це свідчить про те, що необхідно додатково досліджувати з використанням рівняння Беллмана.

При $s_l = 1$ з рівняння Беллмана та початкової умови

$$\frac{d\tau_l}{dk_l}(f(k_l) - \lambda k_l) = -1,$$
$$\tau_l = 0 \quad при \;\; k_l(0) = k_0$$

знаходимо

$$\tau_l = -\int_{k_0}^{k_{ma}} \frac{dk_l}{f(k_l) - \lambda k_l}. \tag{14}$$

У випадку неперервної кусково-лінійної функції $f(k_l, k_l \geq 0)$ з (14) одержимо

$$\tau_l = \sum_{m=j_0}^{i_0} \left\{ \begin{array}{ll} -\dfrac{1}{a_m - \lambda} \ln \dfrac{(a_m - \lambda)k_{m+1} + b_m}{(a_m - \lambda)k_m + b_m}, & a_m \neq \lambda \\ -\dfrac{1}{b_m}(k_{m+1} - k_m), & a_m = \lambda \end{array} \right\},$$

при $m = j_0$ береться $k_{j_0} = k_0$, взагалі $k_0 \in (k_{j_0}, k_{j_0+1})$.

Для побудови лівої крайової траєкторії при $s_l = 1$ треба розв'язати наступну задачу Коші :

$$\begin{aligned} &\dot{k}_l(t) = f(k_l(t)) - \lambda k_l(t), \\ &k_l(0) = k_0. \end{aligned} \tag{15}$$

З максимуму в точці $k = k_{ma}$ випливає, що при $k_0 < k < k_{ma}$ виконується нерівність

$$f(k) - f(k_0) > (\lambda + \delta)(k - k_0),$$

звідки

$$f(k) - \lambda k > (f(k_0) - \lambda k_0) + \delta(k - k_0) > 0,$$

а тому

$$\dot{k}_l(t) > 0, \quad t \in [0, T]$$

і, відповідно, $k_l(t)$ зростає на [0,T].

У випадку неперервної кусково-лінійної функції f можна легко проінтегрувати (15) і побудувати ліву крайову траєкторію.

Перейдемо до задачі (8), для якої випишемо рівняння Беллмана

$$-\frac{d\tau_p}{dk_p}\lambda k_p + \min_{0 \leq s_p \leq 1}\left\{\frac{d\tau_p}{dk_p} s_p f(k_p)\right\} = -1,$$

розв'язком якого є :

1) $s_p = 0$ при $\dfrac{d\tau_p}{dk_p} \geq 0;$

2) $s_p = 1$ при $\dfrac{d\tau_p}{dk_p} < 0.$

При $s_p = 0$ значення τ_p знаходимо з розв'язку задачі

$$\frac{d\tau_p}{dk_p} = \frac{1}{\lambda k_p}, \quad \tau_p = T \ \ при \ \ k_p(T) = k_T,$$

$$\tau_p = \frac{1}{\lambda}\ln\frac{k_{mag}(T)}{k_T} + T. \tag{16}$$

З іншого боку, при $s_p = 0$ з рівняння руху капіталу моделі (1) та початкової умови

$$\dot{k}_p(t) = -\lambda k_p(t),$$
$$k_p(T) = k_T$$

знаходимо праву крайову траєкторію

$$k_p(t) = k_T e^{-\lambda(t-T)},$$

що при $t \in (\tau_p, T]$ є спадною, а тому можна знайти τ_p :

$$\tau_p = T - \frac{1}{\lambda}\ln\frac{k_{mag}(T)}{k_T}. \tag{17}$$

Це можливо при $k_{mag}(T) > k_T$.

При $s_p = 1$ з рівняння Беллмана та початкової умови

$$\frac{d\tau_p}{dk_p}(f(k_p) - \lambda k_p) = -1,$$
$$\tau_p = T \quad при \ \ k_p(T) = k_T$$

знаходимо

$$\tau_p = T - \int_{k_{ma}}^{k_T} \frac{dk_p}{f(k_p) - \lambda k_p}. \tag{18}$$

У випадку неперервної кусково-лінійної функції $f(k_p, k_p \geq 0)$ з (18) одержимо

$$\tau_p = \sum_{m=i_0}^{l_0} \left\{ \begin{array}{ll} -\dfrac{1}{a_m - \lambda}\ln\dfrac{(a_m - \lambda)k_{m+1} + b_m}{(a_m - \lambda)k_m + b_m} + T, & a_m \neq \lambda \\ -\dfrac{1}{b_m}(k_{m+1} - k_m) + T, & a_m = \lambda \end{array} \right\},$$

при $m = i_0$ беремо $k_{i_0} = k_{mag}$ і нехай $k_T \in (k_{l_0}, k_{l_0 - 1})$.

Для побудови правої крайової траєкторії при $s_p = 1$ треба розв'язати наступну задачу Коші :

$$\begin{aligned} &\dot{k}_p(t) = f(k_p(t)) - \lambda k_p(t), \\ &k_p(T) = k_T. \end{aligned} \tag{19}$$

З максимуму в точці $k = k_{ma}$ випливає, що при $k_{ma} < k < k_T$ виконується нерівність

$$f(k) - f(k_{ma}) > (\lambda + \delta)(k - k_{ma}),$$

звідки

$$f(k) - \lambda k > (f(k_{ma}) - \lambda k_{ma}) + \delta(k - k_{ma}) > 0,$$

а тому

$$\dot{k}_p(t) > 0, \quad t \in [0, T]$$

і, відповідно, $k_p(t)$ зростає на [0,T].

У випадку неперервної кусково-лінійної функції f можна легко проінтегрувати (19) і побудувати праву крайову траєкторію.

Зауваження 1. Ця методика справедлива і для керування, що змінюється в межах $0 < s_0 \le s \le s_1 < 1$.

Для випадку $k_{ma} < k < k_0$ маємо: $sf(k) - \lambda k < 0$, звідки $s < \dfrac{\lambda k}{f(k)}$, а тому $s_0 \le \dfrac{\lambda k_{ma}}{f(k_0)}$.

Для випадку $k_{ma} < k < k_T$ маємо: $sf(k) - \lambda k > 0$, звідки $s > \dfrac{\lambda k}{f(k)}$, а тому $s_1 \ge \dfrac{\lambda k_T}{f(k_{ma})}$.

Отже, область досяжності керування : $s_0 \le \dfrac{\lambda k_{ma}}{f(k_0)}$, $s_1 \ge \dfrac{\lambda k_T}{f(k_{ma})}$.

Зауваження 2. Ця методика справедлива і для моделі Солоу :

$$\int_0^T e^{-\delta t} c(t)dt \to \max_{0 \le c(t) \le f(k)},$$

$$\dot{k}(t) = f(k(t)) - \lambda k(t) - c(t), \quad 0 \le t \le T,$$

$$k(0) = k_0 > 0, \; k(T) \ge k_T > 0.$$

Зауваження 3. Аналогічно досліджується модель Солоу, при якій керування змінюється $0 < c_0 f(k) \le c \le c_1 f(k) < f(k)$.

Для випадку $k_0 < k < k_{ma}$ траєкторія руху капіталу зростає: $f(k) - \lambda k - c > 0$, звідки $c < f(k) - \lambda k$, а тому $c_0 \le \dfrac{f(k_0) - \lambda k_{ma}}{f(k_{ma})}$.

Для випадку $k_T < k < k_{ma}$ траєкторія руху капіталу спадає: $f(k) - \lambda k - c < 0$, звідки $c > f(k) - \lambda k$, а тому $c_1 \ge \dfrac{f(k_{ma}) - \lambda k_T}{f(k_T)}$.

Отже, область досяжності керування : $c_0 \le \dfrac{f(k_0) - \lambda k_{ma}}{f(k_{ma})}$, $c_1 \ge \dfrac{f(k_{ma}) - \lambda k_T}{f(k_T)}$.

2. Дослідження моделі однопродуктової економіки зростання з лагами

Розгляньмо рівняння руху капіталу в агрегованій замкнутій економіці :

$$\dot{k}(t) = s(t) f(k(t-\tau)) - \lambda k(t), \tag{1}$$

де τ – лага.

Розв’язок цієї моделі апроксимується системою [4]

$$\begin{aligned}
&\dot{y}_0(t) = s(t) f(y_m(t)) - \lambda y_o(t),\\
&\frac{\tau}{m}\dot{y}_1(t) + y_1(t) = y_0(t),\\
&\frac{\tau}{m}\dot{y}_2(t) + y_2(t) = y_1(t),\\
&\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\\
&\frac{\tau}{m}\dot{y}_m(t) + y_m(t) = y_{m-1}(t),
\end{aligned} \tag{2}$$

де $y_j(t) = k(t - j\frac{\tau}{m}),\ j = 0,1,...,m;\ \tau -$ лага; $m -$ кількість апроксимацій; відома передісторія зміни капіталооснащеності $k(t) = \varphi(t),\ -\tau \le t \le 0.$ Причому

$$\left| y_j(t) - k(t - j\frac{\tau}{m}) \right| \xrightarrow[m\to\infty]{} 0 \quad \forall j \in \{0,1,...,m\}. \tag{3}$$

Виражаючи $y_m(t)$ через $y_0(t),$ отримаємо

$$y_m(t) = \sum_{k=0}^{m-1}\left(\frac{m}{\tau}\right)^k \frac{t^k}{k!}\varphi\left(-\frac{m-k}{m}\tau\right)e^{-\frac{m}{\tau}t} + \left(\frac{m}{\tau}\right)^m e^{-\frac{m}{\tau}t}\int_0^t\left(\frac{t}{\sqrt[m-1]{(m-1)!}} - \frac{z}{\sqrt[m-1]{(m-1)!}}\right)^{m-1} e^{\frac{m}{\tau}z} y_0(z)dz.$$

Розгляньмо задачу керування

$$\begin{aligned}
&\dot{y}_0(t) = s(t)\, f(q(t) + \int_0^t r(t,z)y_0(z)dz) - \lambda y_0(t), \quad 0 \le s(t) \le 1,\\
&y_0(0) = k_0, \quad y_0(T) \ge k_T,\\
&\int_0^T \big(1 - s(t)\big) f\left(q(t) + \int_o^t r(t,z)y_0(z)dz\right)e^{-\delta t}dt \to \max,
\end{aligned} \tag{4}$$

де $q(t) = \sum_{k=0}^{m-1}\left(\frac{m}{\tau}\right)^k \frac{t^k}{k!}\varphi\left(-\frac{m-k}{m}\tau\right)e^{-\frac{m}{\tau}t};\quad r(t,z) = \left(\frac{m}{\tau}\right)^m e^{-(\frac{m}{\tau}t - z)}\left(\frac{t}{\sqrt[m-1]{(m-1)!}} - \frac{z}{\sqrt[m-1]{(m-1)!}}\right)^{m-1}.$

Для дослідження моделі (4) потрібно:

1) знайти екстремум функцій

$$\max_{y_0, s} R(t, y_0, s),$$

$$\varPhi(T, y_0(T)) \to \min_{y_0(T) \ge k_T}$$

та визначити з них магістраль і кінцевий стан системи;

2) обчислити крайові траєкторії та відповідні їм керування;

3) обчислити точки перемикання керувань.

Тут

$$\begin{aligned}
R(t, y_0, s) = &\left\{ sf\left(q(t) + \int_0^t r(t,z)y_0(z)dz\right) - \lambda y_0\right\}\frac{\partial\varphi(t, y_0)}{\partial y_0} +\\
&+ (1-s)\, f\left(q(t) + \int_0^t r(t,z)y_0(z)dz\right)e^{-\delta t} + \frac{\partial\varphi(t, y_0)}{\partial t},
\end{aligned}$$

$$\varPhi(T, y_0(T)) = \varphi(T, y_0(T)), \tag{5}$$

$\varphi(t, y_0) -$ неперервна кусково-диференційовна функція при $y_0 > 0.$

Побудуємо магістраль та відповідне їй керування. Необхідною умовою максимуму функції $R(t, y_0, s)$ по s є умова $\frac{\partial R(t, y_0, s)}{\partial s} = 0,$ звідки одержимо рівняння для визначення функції $\varphi(t, y_0)$:

$$\frac{\partial\varphi}{\partial y_0} - e^{-\delta t} = 0, \quad t \in [0, T], \ \ y_0 \ge 0.$$

Проінтегрувавши його по $y_0,$ виберемо функцію $\varphi(t, y_0) = e^{-\delta t}y_0,$ після чого залишилося оптимізувати

$$e^{-\delta t}\max_{y_0}\left\{ f\left(q(t) + \int_0^t r(t,z)y_0(z)dz\right) - (\lambda + \delta)y_0\right\}.$$

Необхідною та достатньою умовою максимуму за Гато [5, с.387-388] є

$$f'\left(q(t)+\int_0^t r(t,z)y_0(z)dz\right)\cdot\left(\int_0^t r(t,z)dz\right)-(\lambda+\delta)=0,$$

$$f''\left(q(t)+\int_0^t r(t,z)y_0(z)dz\right)\cdot\left(\int_0^t r(t,z)dz\right)^2<0,$$

звідки можна знайти магістральне значення $y_{0mag}(t)$ при кожному значенні $t\in[0,T]$.

У випадку неперервної кусково-лінійної функції $f(y_m\geq 0)$

$$f(y_m)=\begin{cases}a_1y_m+b_1, & y_m\in[k_1,k_2),\\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots & \\ a_{N-1}y_m+b_{N-1}, & y_m\in[k_{N-1},k_N],\end{cases} \tag{6}$$

де $y_m=q(t)+\int_0^t r(t,z)y_0(z)dz;$ алгоритм знаходження y_{0ma} такий : пошук послідовних проміжків (k_{i_0},k_{i_0+1}) та (k_{i_0+1},k_{i_0+2}), для яких при кожному $t\in[0,T]$ виконуються нерівності :

$$a_{i_0}\int_0^t r(t,z)dz-(\lambda+\delta)\geq 0,$$

$$a_{i_0+1}\int_0^t r(t,z)dz-(\lambda+\delta)<0.$$

Тоді за магістральне значення y_{0mag} треба взяти k_{i_0+1} при кожному $t\in[0,T]$, а відповідно магістраль виглядає так:

$$y_{0mag}(t)=\{k_{i_0+1},\quad t\in[0,T]\}.$$

За визначеною магістраллю знайдемо відповідне їй керування. Оскільки

$$\dot{y}_0(t)=s(t)\,f\left(q(t)+\int_0^t r(t,z)y_0(z)dz\right)-\lambda y_0(t)\ \text{при кожному}\ t\in\{0,1,..,T\},$$

то

$$y_0(t+1)=y_0(t)+s(t)\,f\left(q(t)+\int_0^t r(t,z)y_0(z)dz\right)-\lambda y_0(t)\quad \text{при кожному}$$

$t\in\{0,1,..,T-1\}$,

звідки

$$s(t)=\frac{y_0(t+1)-y_0(t)+\lambda y_0(t)}{f\left(q(t)+\int_0^t r(t,z)y_0(z)dz\right)}\ \text{для}\ t\in\{0,1,...,T-1\}.$$

Отже, магістральне значення керування дорівнює

$$s_{mag}(t)=\frac{y_{0mag}(t+1)+(\lambda-1)y_{0mag}(t)}{f\left(q(t)+\int_0^t r(t,z)y_{0mag}(z)dz\right)}\ \text{для}\ t\in\{0,1,...,T-1\}. \tag{7}$$

Мінімізація функції

$$\Phi(T,y_0(T))=e^{-\delta T}y_0(T)\quad \textit{при}\ \ y_0(T)\geq k_T$$

дає крайову умову

$$y_0(T)=k_T.$$

Якщо виконуються крайові умови

$$y_{0mag}(0)=k_0,\quad y_{0mag}(T)=k_T, \tag{8}$$

то за достатніми умовами оптимальності пара функцій $(s_{mag}(t), y_{0mag}(t))$ є розв'язком задачі (4).

Нехай хоча б одна з крайових умов (8) не виконується. Тоді побудуємо крайові траєкторії.

Для побудови лівої траєкторії $y_{0l}(t), t \in [0, \tau_l]$ необхідно розв'язати таку задачу на швидкодію :

$$\int_0^{\tau_l} dt \to \min_{0 \le s_l(t) \le 1},$$

$$\dot{y}_{0l}(t) = s_l(t) f(q(t) + \int_0^t r(t,z) y_{0l}(z) dz) - \lambda y_{0l}(t), \ \ t \in [0, \tau_l], \tag{9}$$

$$y_{0l}(0) = y_0^0, \quad y_{0l}(\tau_l) = y_{0mag}(\tau_l).$$

Розв'язком рівняння Беллмана для задачі (9)

$$-\frac{d\tau_l}{dk_l} \lambda \, y_{0l} + \min_{0 \le s_l \le 1} \left\{ \frac{d\tau_l}{dy_{0l}} s_l f(q(t) + \int_0^t r(t,z) y_{0l}(z) dz) \right\} = -1$$

є :

1) $s_l = 0$ при $\dfrac{d\tau_l}{dy_{0l}} \ge 0;$

2) $s_l = 1$ при $\dfrac{d\tau_l}{dy_{0l}} < 0.$

При $s_l = 0$ з рівняння руху моделі (4) та початкової умови

$$\begin{aligned} &\dot{y}_{0l}(t) = -\lambda y_{0l}(t), \\ &y_{0l}(0) = y_0^0 \end{aligned} \tag{10}$$

знаходимо ліву крайову траєкторію

$$y_{0l}(t) = y_0^0 e^{-\lambda t},$$

яка при $t \in [0, \tau_l)$ є спадною, а тому $y_0^0 > y_{0mag}(0).$

Для побудови лівої крайової траєкторії при $s_l = 1$ треба розв'язати таку задачу Коші:

$$\begin{aligned} &\dot{y}_{0l}(t) = f(q(t) + \int_0^t r(t,z) y_{0l}(z) dz) - \lambda y_{0l}(t), \\ &y_{0l}(0) = y_0^0. \end{aligned} \tag{11}$$

З максимуму в точці $y_0 = y_{0mag}(t)$ випливає, що при $y_0^0 < y_0 < y_{0mag}$ виконується нерівність

$$f(q(t) + \int_0^t r(t,z) y_0(z) dz) - f(q(t) + \int_0^t r(t,z) y_0^0 dz) - (\lambda + \delta)(y_0 - y_0^0) > 0,$$

звідки

$$f(q(t) + \int_0^t r(t,z) y_0(z) dz) - \lambda y_0 > 0,$$

а тому

$$\dot{y}_{0l}(t) > 0, \quad t \in [0, T]$$

і, відповідно, $y_{0l}(t)$ зростає при $y_0(0) < y_{0mag}(0).$

Для неперервної кусково-лінійної функції (6) легко виписати розв'язок (11) в аналітичному вигляді.

Для побудови правої траєкторії $y_{0p}(t), t \in [\tau_p, T]$ необхідно розв'язати таку задачу на швидкодію :

$$\int_{\tau_p}^{T} dt \to \min_{0 \le s_p(t) \le 1},$$

$$\dot{y}_{0p}(t) = s_p(t) f(q(t) + \int_0^t r(t,z) y_{0p}(z) dz) - \lambda y_{0p}(t), \ \ t \in [\tau_p, T], \qquad (12)$$

$$y_{0p}(\tau_p) = y_{0mag}(\tau_p), \quad y_{0p}(T) = k_T.$$

Розв'язком рівняння Беллмана для задачі (12)

$$-\frac{d\tau_p}{dk_p} \lambda\, y_{0p} + \min_{0 \le s_p \le 1} \left\{ \frac{d\tau_p}{dy_{0p}} s_p f(q(t) + \int_0^t r(t,z) y_{0p}(z) dz) \right\} = -1$$

є :

1) $s_p = 0$ при $\dfrac{d\tau_p}{dy_{0p}} \ge 0;$

2) $s_p = 1$ при $\dfrac{d\tau_p}{dy_{0p}} < 0.$

При $s_p = 0$ з рівняння руху моделі (4) та початкової умови

$$\dot{y}_{0p}(t) = -\lambda y_{0p}(t),$$

$$y_{0p}(0) = k_T$$

знаходиться права крайова траєкторія

$$y_{0p}(t) = k_T e^{-\lambda(t-T)},$$

яка при $t \in (\tau_p, T]$ є спадною, а тому $k_T < y_{0mag}(T).$

Для побудови правої крайової траєкторії при $s_p = 1$ треба розв'язати наступну задачу Коші :

$$\begin{aligned} &\dot{y}_{0p}(t) = f(q(t) + \int_0^t r(t,z) y_{0p}(z) dz) - \lambda y_{0p}(t), \\ &y_{0p}(T) = k_T. \end{aligned} \qquad (13)$$

З максимуму в точці $y_0 = y_{0mag}(t)$ випливає, що при $y_{0mag} < k_T$ виконується нерівність

$$f(q(t) + \int_0^t r(t,z) y_0(z) dz) - f(q(t) + \int_0^t r(t,z) y_{0mag}(z) dz) > (\lambda + \delta)(y_0 - y_{0mag}),$$

звідки

$$f(q(t) + \int_0^t r(t,z) y_0(z) dz) - \lambda y_0 > 0, ,$$

а тому

$$\dot{y}_{0l}(t) > 0, \quad t \in [0,T]$$

і, відповідно, $y_{0l}(t)$ зростає на $[0,T]$.

У випадку неперервної кусково-лінійної функції f можна проінтегрувати (13) і побудувати праву крайову траєкторію.

<u>Теорема</u>. Однопродуктова модель макроекономіки зростання та модель економіки з лагами при кусково-лінійній неперервній виробничій функції має оптимальний розв'язок.

The research of oneproductive model of macroeconomics grow and economics model with deflexion argument is obtained in the article; the algorithm of analytical research of models at continuous piece-linear productive function is described.

Література

1. Пономаренко О.І., Перестюк М.О., Бурим В.М. Основи математичної економіки.- К.: Інформтехніка, 1995.- 320с.
2. Основы теории оптимального управления под ред. В.Ф.Кротова.- М.: Высшая школа, 1990.- 430с.
3. Чураков Е.П. Оптимальные и адаптивные системы.- М.: Энергоатомиздат, 1987.- 256с.
4. Піддубна Л.А., Черевко І.М. Алгоритм апроксимації диференціально-різницевих рівнянь і моделювання процесів електродинаміки // Вісник Київського університету. Серія фізико-математичних наук.- 1998.- №2.-138с.
5. Треногин В.Л. Функциональный анализ.- М.: Наука, 1980.-495с.

Одержано 11.03.01 р.