УДК 539.3
Н.Поліщук[1], канд. фіз.-мат. наук; Н.Тимошенко[2], канд. фіз.-мат. наук
[1]*Інститут прикладних проблем механіки і математики ім. Я.С.Підстригача НАН України, м. Львів;*
[2]*Національний університет «Львівська політехніка»*

ОПТИМІЗАЦІЯ НАПРУЖЕНО-ДЕФОРМОВАНОГО СТАНУ ТРАНСВЕРСАЛЬНО-ІЗОТРОПНИХ ПОРОЖНИСТИХ ЦИЛІНДРИЧНИХ ТІЛ ІЗ ЗАЛИШКОВИМИ ДЕФОРМАЦІЯМИ ЗА ДОПОМОГОЮ НАГРІВАННЯ

Розглядається трансверсально-ізотропне порожнисте циліндричне тіло із залишковими деформаціями $\hat{e}^{(зал.)}$, яке знаходиться під дією нестаціонарного локального нагрівання, зумовленого теплообміном із зовнішнім середовищем. За допомогою варіаційного числення, а саме мінімізації функціоналу енергії пружної деформації, використовуючи метод множників Лагранжа, визначається оптимальний напружено-деформований стан. Квазістатична постановка задачі обумовлює використання ключових функцій: вектора переміщення, функції температури тіла і температури зовнішнього середовища, тензора непружної деформації.

Умовні позначення

$\hat{e} = \left\{e_{ij}\right\} \left(i, j = r, \theta, z\right)$ – тензор повної малої деформації;

$\hat{e}^{(пл.)} = \left\{e_{ij}^{(пл.)}\right\}$ – тензор непружної деформації;

$\hat{\sigma} = \left\{\sigma_{ij}\right\}$ – тензор напружень;

$\hat{b} = \left\{b_{kl}\right\} \left(k, l = \overline{1,4}\right)$ – тензор констант пружної жорсткості;

$\hat{c} = \left\{c_{kl}\right\}$ – тензор модулів пружної податливості;

$\hat{\beta} = \left\{\beta_{mn}\right\} \left(m, n = 1,3\right)$ – тензор коефіцієнтів теплового розширення;

$t = t\left(r, \theta, z, \tau\right)$ – функція температури тіла;

$\hat{\lambda} = \left\{\lambda_{mn}\right\}$ – тензор теплопровідності;

$a_z^{\pm}$ – коефіцієнти тепловіддачі з торцевих поверхонь;

t_c^{+}, t_c^{-} – температура зовнішнього середовища на зовнішній та внутрішній поверхнях порожнистого трансверсально-ізотропного тіла.

За своєю спрямованістю стаття належить до одного із актуальних напрямків сучасної механіки деформівного твердого тіла, а саме оптимізації теплових і механічних полів у термопружних трансверсально-ізотропних циліндричних порожнистих тілах із наявними в них залишковими напруженнями. Розв’язання цієї проблеми дасть можливість зміцнити елементи конструкцій. У літературі відомі дослідження, що описують визначення режимів нагрівання, які викликають оптимальний напружено-деформований стан. Загальним питанням та методам оптимізації напружено-деформованого стану ізотропних деформівних систем при нагріванні присвячена велика кількість праць, зокрема [1, 3]. Подальші дослідження для анізотропних циліндричних тіл зроблені в роботах [4, 6]. Врахування впливу залишкових деформацій на оптимальний напружено-деформований стан для анізотропних циліндричних тіл здійснено в роботах [7, 9]. У літературі практично немає досліджень оптимізації напружено-деформованого стану трансверсально-ізотропних порожнистих циліндричних тіл із залишковими деформаціями при температурному навантаженні.

Розглядається кругове порожнисте трансверсально-ізотропне тіло з залишковими деформаціями $e_{ij}^{(зал..)}\left(i, j = r, \theta, z\right)$, віднесене до циліндричної системи координат

(r,θ,z). Приймається, що напрямки координатних ліній у кожній точці тіла співпадають з осями пружної і теплової симетрії. Тіло знаходиться під дією нестаціонарного локального нагрівання, зумовленого теплообміном із зовнішнім середовищем. Початкова температура тіла постійна і дорівнює T_0. Відбувається конвективний теплообмін між тілом, що досліджується, і зовнішнім середовищем, температура якого $t_c \equiv t_c(r,\theta,z,\tau)$, де τ–час, r_1 і R_1 відповідно внутрішній і зовнішній радіуси порожнистого циліндричного транверсально-ізотропного тіла. Позначимо

$$\begin{aligned} t_c^-(\theta,z,\tau) &= t_c(r_1,\theta,z,\tau), \\ t_c^+(\theta,z,\tau) &= t_c(R_1,\theta,z,\tau). \end{aligned} \tag{1}$$

Відбувається конвективний теплообмін досліджуваного тіла з зовнішнім середовищем з поверхні $S_0 = S_1 \cup S_2 \cup S_3^{\pm}$, де S_1, S_2 – внутрішня і зовнішня поверхні, $S_3^{\pm}$– торцеві поверхні:

$$\begin{gathered} S_1 = \begin{Bmatrix} r: & r = r_1 \\ \theta: & 0 \le \theta \le 2\pi \\ z: & -z_0 \le z \le z_0 \end{Bmatrix}, \quad S_2 = \begin{Bmatrix} r: & r = R_1 \\ \theta: & 0 \le \theta \le 2\pi \\ z: & -z_0 \le z \le z_0 \end{Bmatrix}, \\ S_3^- = \begin{Bmatrix} r: & r_1 \le r \le R_1 \\ \theta: & 0 \le \theta \le 2\pi \\ z: & z = -z_0 \end{Bmatrix}, \quad S_3^+ = \begin{Bmatrix} r: & r_1 \le r \le R_1 \\ \theta: & 0 \le \theta \le 2\pi \\ z: & z = +z_0 \end{Bmatrix}. \end{gathered} \tag{2}$$

Температурне поле $t = T - T_0$ в області тіла задовільняє рівняння теплопровідності

$$f \equiv \Delta_1 t - c_v \frac{\partial t}{\partial \tau} = 0\,, \tag{3}$$

де Δ_1– диференціальний оператор вигляду

$$\Delta_1 \equiv \lambda_{11}\left(\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r} + \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2}{\partial \theta^2}\right) + \lambda_{33}\frac{\partial^2}{\partial z^2}\,, \tag{4}$$

$\lambda_{11}, \lambda_{33}$– відмінні від нуля компоненти тензора теплопровідності, c_v– об’ємна теплоємність. Теплові граничні умови на поверхні S мають вигляд:

$$\begin{aligned} Q_1 &= \lambda_{11}\frac{\partial t}{\partial r} + a_s^-\left[t - t_c(\theta,z,\tau)\right] = 0, \text{ на } S_1, \\ Q_2 &= \lambda_{11}\frac{\partial t}{\partial r} + a_s^+\left[t - t_c(\theta,z,\tau)\right] = 0, \text{ на } S_2, \\ Q_{3,4} &= \lambda_{33}\frac{\partial t}{\partial z} + a_z^{\pm}\left[t - t_c^{\pm}(r,\theta,\tau)\right] = 0, \text{ на } S_3^+, S_3^-, \end{aligned} \tag{5}$$

де $a_z^{\pm}$– коефіцієнти тепловіддачі з крайових поверхонь S_3^+, S_3^-; $a_s^{\mp}$– коефіцієнти тепловіддачі з поверхонь S_1, S_2 відповідно. Початкова умова для функції t запишеться

$$t = 0, \text{ для } \tau = 0\,. \tag{6}$$

Потрібно визначити таку множину температурних полів $\{t\}$, викликаних температурою зовнішнього середовища t_c, які б зумовили оптимальний розподіл непружних деформацій $\hat{e}^{(пл.)}$. Реалізація знайдених оптимальних множин приведе до оптимально низького рівня залишкових напружень, що є в тілі, або зовсім зніме їх. Тим самим приведе до зміцнення конструкції, що досліджується.

За ключові функції рівнянь термопружності і теплопровідності вибираємо вектор переміщення $\bar{u} = \{u_i\}$, $(i = r,\theta,z)$, функцію температури $t = t(r,\theta,z,\tau)$, тензор непружної деформації $\hat{e}^{(пл.)}$.

У квазістатичній постановці система співвідношень лінійної термопружності для визначення напружено-деформованого стану складається з:

рівнянь рівноваги:

$$
\begin{aligned}
&F_1 \equiv \frac{\partial \sigma_r}{\partial r} + \frac{1}{r}\frac{\partial \sigma_{r\theta}}{\partial \theta} + \frac{\partial \sigma_z}{\partial z} + \frac{\sigma_r - \sigma_\theta}{r} = 0,\\
&F_2 \equiv \frac{\partial \sigma_{r\theta}}{\partial r} + \frac{1}{r}\frac{\partial \sigma_\theta}{\partial \theta} + \frac{\partial \sigma_{\theta z}}{\partial z} + \frac{2\sigma_{r\theta}}{r} = 0,\\
&F_3 \equiv \frac{\partial \sigma_{rz}}{\partial r} + \frac{1}{r}\frac{\partial \sigma_{\theta z}}{\partial \theta} + \frac{\partial \sigma_z}{\partial z} + \frac{\sigma_{rz}}{r} = 0;
\end{aligned}
\tag{7}
$$

рівнянь стану:

$$
\begin{aligned}
&\sigma_{rr} \equiv \sigma_r = b_{11}e_r + b_{12}e_\theta + b_{13}e_z - \alpha_{11}t - e_r^{(пл.)},\\
&\sigma_{\theta\theta} \equiv \sigma_\theta = b_{12}e_r + b_{11}e_\theta + b_{13}e_z - \alpha_{11}t - e_\theta^{(пл.)},\\
&\sigma_{zz} \equiv \sigma_z = b_{13}\left(e_r + e_\theta\right) + b_{33}e_z - \alpha_{33}t - e_z^{(пл.)},\\
&\sigma_{r\theta} = 2\left(b_{11} - b_{12}\right)e_{r\theta} - e_{r\theta}^{(пл.)},\\
&\sigma_{\theta z} = b_{44}\, e_{\theta z} - e_{\theta z}^{(пл.)},\\
&\sigma_{rz} = b_{44}\, e_{rz} - e_{rz}^{(пл.)},
\end{aligned}
\tag{8}
$$

або

$$
\begin{aligned}
&e_{rr} \equiv e_r = c_{11}\sigma_r + c_{12}\sigma_\theta + c_{13}\sigma_z + \beta_{11}t + e_r^{(зал.)},\\
&e_{\theta\theta} \equiv e_\theta = c_{21}\sigma_r + c_{22}\sigma_\theta + c_{13}\sigma_z + \beta_{11}t + e_\theta^{(зал.)},\\
&e_{zz} \equiv e_z = c_{13}\left(\sigma_r + \sigma_\theta\right) + c_{33}\sigma_z + \beta_{33}t + e_z^{(зал.)},\\
&e_{r\theta} = 2\left(c_{11} - c_{12}\right)\sigma_{r\theta} + e_{r\theta}^{(зал.)},\\
&e_{\theta z} = c_{44}\,\sigma_{\theta z} + e_{\theta z}^{(зал.)},\\
&e_{rz} = c_{44}\,\sigma_{rz} + e_{rz}^{(зал.)},
\end{aligned}
\tag{9}
$$

де $\hat{\sigma} = \left\{\sigma_{ij}\right\}$ $\left(i,\, j = r, \theta, z\right)$ – тензор напружень, $\hat{e} = \left\{e_{ij}\right\}$ – тензор повної малої деформації, $\hat{e}^{(зал.)} = \left\{e_{ij}^{(зал.)}\right\}$ – тензор залишкової деформації, $\hat{b} = \left\{b_{kl}\right\}$ $\left(k, l = 1,2,3,4\right)$ – тензор констант пружної жорсткості трансверсально-ізотропного тіла, $\hat{\beta} = \left\{\beta_{mn}\right\}$ $\left(m, n = 1,3\right)$ – тензор коефіцієнтів теплового розширення, компоненти якого задовільняють умови симетрії

$$\beta_{mn} = \beta_{nm},$$

$\hat{c} = \left\{c_{kl}\right\}$ $\left(k, l = 1,2,3,4\right)$ – тензор модулів пружної податливості, компоненти якого задовільняють умови пружної симетрії

$$c_{kl} = c_{lk}.$$

Тензор $\hat{a} = \left\{\alpha_{mn}\right\} = \left\{b_{mnkl} \cdot \beta_{kl}\right\}$;

співвідношення Коші:

$$
\begin{aligned}
&e_r = \frac{\partial u_r}{\partial r}, \quad e_{\theta z} = \frac{\partial u_\theta}{\partial z} + \frac{1}{r}\frac{\partial u_z}{\partial \theta},\\
&e_\theta = \frac{1}{r}\frac{\partial u_\theta}{\partial \theta} + \frac{u_r}{r}, \quad e_{rz} = \frac{\partial u_z}{\partial r} + \frac{\partial u_r}{\partial z},\\
&e_z = \frac{\partial u_z}{\partial z}, \quad e_{r\theta} = \frac{1}{r}\frac{\partial u_r}{\partial \theta} + \frac{\partial u_\theta}{\partial r} - \frac{u_\theta}{r},
\end{aligned}
\tag{10}
$$

а також механічні граничні умови, які відповідають заданню вектора переміщення $\bar{u}_0$ на поверхні S_0, тобто

$$\bar{u} = \bar{u}_0 . \tag{11}$$

Розв'язування задачі зводиться до постановки і розв'язування наступної варіаційної задачі. За критерій оптимізації приймається функціонал енергії пружної деформації, який має вигляд:

$$K = \frac{1}{2}\int_0^{\tau_0}\int_{(V)}\left\{ c_{11}\left(\sigma_r^2 + \sigma_\theta^2\right) + 2\left[c_{12}\,\sigma_\theta\sigma_r + c_{13}\sigma_z\left(\sigma_r + \sigma_\theta\right)\right] + \right. \\ \left. + c_{33}\sigma_z^2 + c_{44}\left(\sigma_{\theta z}^2 + \sigma_{rz}^2\right) + 2\left(c_{11} - c_{12}\right)\sigma_{r\theta}^2 \right\} dVd\tau , \tag{12}$$

де $(V) = \{r_1 \le r \le R_1, -z_0 \le z \le z_0, 0 \le \theta \le 2\pi\}$.

А також у задачі вводяться додаткові обмеження на функції t_c^- і t_c^+, а саме:

$$Q_{2n} \equiv \int_0^{\tau_0}\int_{(S_1)} t_c^-\left(\theta, z, \tau\right)\tau^n dSd\tau - A_n^- = 0 , \tag{13}$$

$$Q_{3n} \equiv \int_0^{\tau_0}\int_{(S_2)} t_c^+\left(\theta, z, \tau\right)\tau^n dSd\tau - A_n^+ = 0 . \tag{14}$$

Вважається, що в'язі (13)-(14) не суперечать системі вихідних рівнянь (3), (7)-(10).

Далі ставиться наступна варіаційна задача: знайти екстремалі функціоналу K на множині функцій керування t, t_c, $\bar{u}$, $\hat{e}^{(пл.)}$, які задовільняють в'язям (7), (13), (14). Ця задача зводиться до знаходження екстремалей наступного функціоналу:

$$K^* = K + \sum_{i=1}^{3}\int_0^{\tau_0}\int_{(V)}\left[\lambda_i\left(r, \theta, z\right)F_i + \varsigma\left(r, \theta, z, \tau\right)\cdot f\right]dVd\tau + \\ + \sum_{k=1}^{n}\eta_k\left(Q_{2k} + Q_{3k}\right), \tag{15}$$

де $i = \overline{1,3}$, $k = \overline{1,N}$; η_k, λ_i, ς – множники Лагранжа; K, Q_{2k}, Q_{3k} – функціонали, що визначаються виразами (12)-(14) відповідно; $F_i = 0$ – рівняння рівноваги (7), $f = 0$ – рівняння теплопровідності (3).

Запишемо необхідну умову екстремуму функціоналу (15) – рівність нулю його першої варіації.

$$\delta K^* = \delta K + \sum_{i=1}^{3}\int_0^{\tau_0}\int_{(V)}\left(F_i\delta\lambda_i + \lambda_i\delta F_i + f\delta\varsigma + \varsigma\delta f\right)dVd\tau + \\ + \sum_{k=1}^{N}\left[\eta_k\left(\delta Q_{2k} + \delta Q_{3k}\right) + \left(Q_{2k} + Q_{3k}\right)\delta\eta_k\right] = 0 , \tag{16}$$

де

$$\delta K = \frac{1}{2}\int_0^{\tau_0}\int_{(V)}\left\{\left(2c_{11}\sigma_r + 2c_{12}\sigma_\theta + c_{13}\sigma_z\right)\delta\sigma_r + \left(2c_{11}\sigma_\theta + 2c_{12}\sigma_r + \right.\right. \\ \left. + c_{13}\sigma_z\right)\delta\sigma_z + \left[c_{13}\left(\sigma_r + \sigma_\theta\right) + 2c_{33}\sigma_z\right]\delta\sigma_z + 2c_{44}\sigma_{\theta z}\delta\sigma_{\theta z} + \\ \left. + 2c_{44}\sigma_{rz}\delta\sigma_{rz} + 4\left(c_{11} - c_{12}\right)\sigma_{r\theta}\delta\sigma_{r\theta}\right\} dVd\tau , \tag{17}$$

$$\delta F_1 \equiv \frac{\partial \delta\sigma_r}{\partial r} + \frac{1}{r}\frac{\partial \delta\sigma_{r\theta}}{\partial \theta} + \frac{\partial \delta\sigma_z}{\partial z} + \frac{\partial\sigma_r - \delta\sigma_\theta}{r} = 0,$$

$$\delta F_2 \equiv \frac{\partial \delta\sigma_{r\theta}}{\partial r} + \frac{1}{r}\frac{\partial \delta\sigma_\theta}{\partial \theta} + \frac{\partial \delta\sigma_{\theta z}}{\partial z} + \frac{2\delta\sigma_{r\theta}}{r} = 0, \qquad (18)$$

$$\delta F_3 \equiv \frac{\partial \delta\sigma_{rz}}{\partial r} + \frac{1}{r}\frac{\partial \delta\sigma_{\theta z}}{\partial \theta} + \frac{\partial \delta\sigma_z}{\partial z} + \frac{\delta\sigma_{rz}}{r} = 0,$$

$$\delta Q_{2n} \equiv \int_0^{\tau_0}\int_{(S_1)} \delta t_c^-(\theta, z, \tau)\,\tau^n ds d\tau,$$

$$\delta Q_{3n} \equiv \int_0^{\tau_0}\int_{(S_2)} \delta t_c^+(\theta, z, \tau)\,\tau^n ds d\tau. \qquad (19)$$

Задача роз’язується у переміщеннях. Тому (17), з врахуванням (8), (10), запишеться:

$$\delta K = \frac{1}{2}\int_0^{\tau_0}\int_{(V)} \{(2c_{11}\sigma_r + 2c_{12}\sigma_\theta + c_{13}\sigma_z)\left[b_{11}\frac{\partial \delta u_r}{\partial r} + b_{12}\left(\frac{1}{r}\frac{\partial \delta u_\theta}{\partial \theta} + \right.\right.$$
$$\left.\left. + \frac{\delta u_r}{r}\right) + b_{13}\frac{\partial \delta u_r}{\partial z} - \alpha_{11}\delta t - \delta e_r^{(пл.)}\right] + (2c_{11}\sigma_\theta + 2c_{12}\sigma_r + c_{13}\sigma_z)\times$$
$$\times\left[b_{12}\frac{\partial \delta u_r}{\partial r} + b_{11}\left(\frac{1}{r}\frac{\partial \delta u_\theta}{\partial \theta} + \frac{\delta u_r}{r}\right) + b_{13}\frac{\partial \delta u_z}{\partial z} - \alpha_{11}\delta t - \delta e_\theta^{(пл.)}\right] +$$
$$+ [c_{13}(\sigma_r + \sigma_\theta) + 2c_{33}\sigma_z]\cdot\left[b_{13}\left(\frac{\partial \delta u_r}{\partial r} + \frac{1}{r}\frac{\partial \delta u_\theta}{\partial \theta} + \frac{\delta u_r}{r}\right) + \right.$$
$$\left. + b_{33}\frac{\partial \delta u_z}{\partial z} - \alpha_{33}\delta t - \delta e_z^{(пл.)}\right] + 2c_{44}b_{44}\sigma_{\theta z}\left(\frac{\partial \delta u_\theta}{\partial z} + \frac{1}{r}\frac{\partial \delta u_z}{\partial \theta} - \right.$$
$$\left. - \delta e_{\theta z}^{(пл.)}\right) + 2c_{44}b_{44}\sigma_{rz}\left(\frac{\partial \delta u_z}{\partial r} + \frac{\partial \delta u_r}{\partial z} - \delta e_{rz}^{(пл.)}\right) + 8(c_{11} - c_{12})\times \qquad (20)$$
$$\times(b_{11} - b_{12})\sigma_{r\theta}\left(\frac{1}{r}\frac{\partial \delta u_r}{\partial \theta} + \frac{\partial \delta u_\theta}{\partial r} - \frac{\delta u_\theta}{r} - \delta e_{r\theta}^{(пл.)}\right)\} dV d\tau.$$

З необхідної умови екстремуму функціоналу (16), враховуючи перетворення (17)-(20), запишемо систему рівнянь Ейлера і систему граничних умов на шукані оптимальні функції: u_r, u_θ, u_z, t, $e_r^{(пл.)}$, $e_\theta^{(пл.)}$, $e_z^{(пл.)}$, $e_{r\theta}^{(пл.)}$, $e_{rz}^{(пл.)}$, $e_{\theta z}^{(пл.)}$

$$\left[P_1\frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r}P_2 + R_7 b_{44}\frac{\partial^2}{\partial z^2} + 2R_8(b_{11} - b_{12})\frac{1}{r^2}\frac{\partial^2}{\partial \theta^2}\right]u_r + \left[P_2\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial \theta} + \right.$$
$$\left. + 2R_8(b_{11} - b_{12})\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial \theta}\left(\frac{\partial}{\partial r} - \frac{1}{r}\right)\right]u_\theta + \left(P_3\frac{\partial}{\partial z} + R_7 b_{44}\frac{\partial^2}{\partial z\partial r}\right)u_z + P_4 t -$$
$$- \left(R_1\frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r}R_4\right)e_r^{(пл.)} - \left(R_3\frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r}R_6\right)e_z^{(пл.)} - R_7\frac{\partial e_{rz}^{(пл.)}}{\partial z} - \frac{1}{R}R_8\frac{\partial e_{r\theta}^{(пл.)}}{\partial \theta} +$$
$$+ \left[b_{11}\frac{\partial^2}{\partial r^2} - b_{12}\left(\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r} - \frac{1}{r^2}\right) + \frac{2(b_{11} - b_{12})}{r^2}\frac{\partial^2}{\partial \theta^2} + b_{13}\frac{\partial^2}{\partial z^2}\right]\lambda_1 + [(2b_{11} - b_{12})\times$$
$$\times\left(\frac{1}{r}\frac{\partial^2}{\partial r\partial \theta} - \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial \theta}\right) - (5b_{11} - 4b_{12})\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial \theta}\Big]\lambda_2 + \Big[(b_{44} + b_{13})\frac{\partial^2}{\partial z\partial r} -$$

$$-\left(b_{13}+b_{44}\right)\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial z}\Bigg]\lambda_3=0,$$

$$\left[P_5\frac{1}{r}\frac{\partial^2}{\partial\theta\partial r}+P_6\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial\theta}+2\left(b_{11}-b_{12}\right)R_8\left(\frac{\partial}{\partial r}-\frac{1}{r}\right)\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial\theta}\right]u_r+\left[P_6\frac{1}{r^2}\frac{\partial^2}{\partial\theta^2}+\right.$$

$$\left.+R_7\,b_{44}\frac{\partial^2}{\partial z^2}+2\left(b_{11}-b_{12}\right)R_8\left(\frac{\partial^2}{\partial r^2}-\frac{1}{r^2}\right)\right]u_\theta+\frac{1}{r}\left(P_7\frac{\partial^2}{\partial\theta\partial z}+R_7b_{44}\frac{\partial^2}{\partial z\partial\theta}\right)u_z+$$

$$+P_8\frac{1}{r}\frac{\partial t}{\partial\theta}-R_9\frac{1}{r}\frac{\partial e_r^{(пл.)}}{\partial\theta}-R_{10}\frac{1}{r}\frac{\partial e_\theta^{(пл.)}}{\partial\theta}-R_{11}\frac{1}{r}\frac{\partial e_z^{(пл.)}}{\partial\theta}-R_7\frac{\partial e_{\theta z}^{(пл.)}}{\partial z}-R_8\times$$

$$\times\left(\frac{\partial}{\partial r}-\frac{1}{r}\right)e_{r\theta}^{(пл.)}+\left(\frac{4b_{11}-5b_{12}}{r^2}\frac{\partial}{\partial\theta}+\frac{2b_{12}}{r}\frac{\partial^2}{\partial\theta\partial r}+\frac{b_{13}}{r}\frac{\partial^2}{\partial\theta\partial z}\right)\lambda_1+$$

$$+[4\left(b_{11}-b_{12}\right)\frac{\partial^2}{\partial r^2}-2\left(b_{11}-b_{12}\right)\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}+b_{11}\frac{1}{r^2}\frac{\partial^2}{\partial\theta^2}+b_{44}\frac{\partial^2}{\partial z^2}-\frac{2\left(b_{11}-b_{12}\right)}{r^2}]\lambda_2+$$

$$+\left(b_{44}+b_{13}\right)\frac{1}{r}\frac{\partial^2\lambda_3}{\partial\theta\partial z}=0,$$

$$\left(P_9\frac{\partial^2}{\partial z\partial r}+\frac{1}{r}P_{10}\frac{\partial}{\partial z}+R_7b_{44}\frac{\partial^2}{\partial r\partial z}\right)u_r+\left(P_{10}\frac{1}{r}\frac{\partial^2}{\partial z\partial\theta}+R_7b_{44}\frac{1}{r}\frac{\partial^2}{\partial\theta\partial z}\right)u_\theta+$$

$$+\left(P_{11}\frac{\partial^2}{\partial z^2}+R_7b_{44}\frac{1}{r^2}\frac{\partial^2}{\partial\theta^2}+R_7b_{44}\frac{\partial^2}{\partial r^2}\right)u_z+P_{12}\frac{\partial t}{\partial z}-R_{15}\frac{\partial e_r^{(пл.)}}{\partial z}-$$

$$-R_{16}\frac{\partial e_\theta^{(пл.)}}{\partial z}-R_{17}\frac{\partial e_z^{(пл.)}}{\partial z}-R_7\frac{1}{r}\frac{\partial e_{\theta z}^{(пл.)}}{\partial z}-R_7\frac{1}{r}\frac{\partial e_{rz}^{(пл.)}}{\partial r}+\left(b_{13}\frac{\partial^2}{\partial z\partial r}+\right.$$

$$\left.+b_{33}\frac{\partial^2}{\partial z^2}\right)\lambda_1+\left(b_{13}+b_{44}\right)\frac{1}{r}\frac{\partial^2\lambda_2}{\partial\theta\partial z}+\left[b_{44}\left(\frac{\partial^2}{\partial r^2}-\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}+\frac{1}{r^2}\right)+b_{33}\frac{\partial^2}{\partial z^2}\right]\lambda_3=0,$$

$$\left(B_4\frac{\partial}{\partial r}+B_5\frac{1}{r}\right)u_r+B_5\frac{1}{r}\frac{\partial u_\theta}{\partial\theta}+B_6\frac{\partial u_z}{\partial z}-B_7t+\left(\alpha_{11}\frac{\partial}{\partial r}+\alpha_{33}\frac{\partial}{\partial z}\right)\lambda_1+$$

$$+\alpha_{11}\frac{1}{r}\frac{\partial\lambda_2}{\partial\theta}+\alpha_{33}\frac{\partial\lambda_3}{\partial z}+\left[\lambda_{11}\left(\frac{\partial^2}{\partial r^2}-\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}+\frac{1}{r^2}\frac{\partial^2}{\partial\theta^2}\right)+\lambda_{33}\frac{\partial^2}{\partial z^2}+c_\nu\frac{\partial}{\partial\tau}\right]\varsigma=0,$$

$$\left(R_1\frac{\partial}{\partial r}+R_2\frac{1}{r}\right)u_r+R_2\frac{1}{r}\frac{\partial u_\theta}{\partial\theta}+R_{15}\frac{\partial u_z}{\partial z}+R_{12}t+2c_{11}e_r^{(пл.)}+$$

$$+2c_{11}e_\theta^{(пл.)}+c_{13}e_z^{(пл.)}+\left(\frac{\partial}{\partial r}-\frac{1}{r}\right)\lambda_1=0,$$

$$\left(R_1\frac{1}{r}-R_4\frac{\partial}{\partial r}\right)u_r+R_1\frac{1}{r}\frac{\partial u_\theta}{\partial\theta}+R_{16}\frac{\partial u_z}{\partial z}-R_{12}t+2c_{11}\left(e_r^{(пл.)}+\right.$$

$$\left.+e_\theta^{(пл.)}\right)+c_{13}e_z^{(пл.)}+\frac{1}{r}\lambda_1+\frac{1}{r}\frac{\partial\lambda_2}{\partial\theta}=0,$$

$$R_{11}\left[\left(\frac{\partial}{\partial r}+\frac{1}{r}\right)u_r+\frac{1}{r}\frac{\partial u_\theta}{\partial\theta}\right]+R_3\frac{\partial u_z}{\partial z}-R_{14}t+c_{13}\left(e_r^{(пл.)}+e_\theta^{(пл.)}\right)+$$

$$+2\,c_{33}e_z^{(пл.)}+\frac{\partial\lambda_1}{\partial z}+\frac{\partial\lambda_3}{\partial z}=0,$$

$$R_8'\left[\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial\theta}u_r+\left(\frac{\partial}{\partial r}-\frac{1}{r}\right)u_\theta\right]+e_{r\theta}^{(пл.)}+\frac{\partial\lambda_2}{\partial r}=0,$$

$$R_7\left[b_{44}\left(\frac{\partial u_z}{\partial r}+\frac{\partial u_r}{\partial z}\right)-e_{rz}^{(пл.)}\right]+\frac{1}{r}\frac{\partial\lambda_1}{\partial\theta}+\left(\frac{\partial}{\partial r}-\frac{1}{r}\right)\lambda_3=0,$$

$$R_7\left[b_{44}\left(\frac{\partial u_\theta}{\partial z}+\frac{1}{r}\frac{\partial u_z}{\partial\theta}\right)-e_{\theta z}^{(пл.)}\right]+\frac{\partial\lambda_2}{\partial z}+\frac{1}{r}\frac{\partial\lambda_3}{\partial\theta}=0,$$

де $R_1=-2c_{11}b_{11}-2b_{12}c_{12}-b_{12}c_{13}$, $R_8'=2(b_{11}-b_{12})R_8$,

$R_2=-2c_{12}b_{11}-2b_{12}c_{11}-b_{11}c_{13}$, $R_9=-2b_{12}c_{11}-2b_{11}c_{12}-b_{13}c_{13}$,

$R_3=-c_{13}b_{11}-b_{12}c_{13}-2b_{11}c_{33}$, $R_{10}=-2b_{12}c_{12}-2b_{11}c_{11}-b_{13}c_{13}$,

$R_4=2(c_{11}b_{12}+b_{11}c_{12})+b_{13}c_{13}$, $R_{11}=-b_{12}c_{13}-b_{11}c_{13}-2b_{13}c_{33}$,

$R_5=2(c_{12}b_{12}+b_{11}c_{11})+b_{13}c_{13}$, $R_{12}=-2\alpha_{11}(c_{11}+c_{12})-c_{13}\alpha_{33}$,

$R_6=c_{12}b_{12}+b_{11}c_{13}+2b_{13}c_{33}$, $R_{13}=R_{12}$,

$R_7=-2c_{44}b_{44}$, $R_{14}=-2(c_{13}\alpha_{11}+c_{33}\alpha_{33})$,

$R_8=-8(c_{11}-c_{12})(b_{11}-b_{12})$, $R_{15}=-2b_{13}(c_{12}+c_{11})-b_{33}c_{13}$,

$R_{16}=R_{15}$, $R_{17}=-2(b_{13}c_{13}+b_{33}c_{33})$,

$$P_1=\left[(R_1b_{11}+R_2b_{12}+R_3b_{13})\frac{\partial}{\partial r}+\frac{1}{r}(R_4b_{11}+R_5b_{12}+R_6b_{13})\right],$$

$$P_2=\left[(R_1b_{12}+R_2b_{11}+R_3b_{13})\frac{\partial}{\partial r}+\frac{1}{r}(R_4b_{12}+R_5b_{11}+R_6b_{13})\right],$$

$$P_3=\left[b_{13}(R_1+R_2+R_3)\frac{\partial}{\partial r}+\frac{1}{r}b_{13}(R_4+R_5+R_6)\right],$$

$$P_4=-\left\{[(R_1+R_2)\alpha_{11}+R_3\alpha_{33}]\frac{\partial}{\partial r}+\frac{1}{r}[(R_4+R_5)\alpha_{11}+R_6\alpha_{33}]\right\},$$

$P_5=R_9b_{11}+R_{10}b_{12}+R_{11}b_{13}$, $B_1=R_5b_{12}+R_4b_{11}+R_6b_{13}$,

$P_6=R_9b_{12}+R_{10}b_{11}+R_{11}b_{13}$, $B_2=R_9b_{12}+R_{10}b_{11}+R_{11}b_{13}$,

$P_7=b_{13}(R_9+R_{10})+R_{11}b_{33}$, $B_3=R_5b_{12}+R_{16}b_{11}+R_{17}b_{13}$,

$P_8=-[\alpha_{11}(R_9+R_{10})+R_{11}\alpha_{33}]$, $B_4=R_{12}b_{11}+R_{13}b_{12}+R_{14}b_{13}$,

$P_9=R_{15}b_{11}+R_{16}b_{12}+R_{17}b_{13}$, $B_5=R_{12}b_{12}+R_{13}b_{11}+R_{14}b_{13}$,

$P_{10}=(R_{15}+R_{16})b_{12}+R_{17}b_{13}$, $B_6=(R_{12}+R_{13})b_{13}+R_{14}b_{33}$,

$P_{11}=(R_{15}+R_{16}+R_{17})b_{13}$, $B_7=(R_{12}+R_{13})\alpha_{11}+R_{14}\alpha_{33}$,

$P_{12}=-[(R_{15}+R_{16})\alpha_{11}+R_{17}\alpha_{33}]$,

і граничні умови мають наступний вигляд:

$$\int_0^{2\pi}\int_{-z_0}^{z_0}\left\{(R_5b_{11}+R_4b_{12}+R_6b_{13})\frac{\partial u_r}{\partial r}+\frac{B_1}{r}\left(\frac{\partial u_\theta}{\partial\theta}+u_r\right)+\right.$$

$$\left.+[(R_5+R_4)b_{13}+R_6b_{33}]\frac{\partial u_z}{\partial z}-[\alpha_{11}(R_5+R_4)+\alpha_{33}R_6]t\right\}dzd\theta\Big|_{r_1}^{R_1}=0,$$

$$
-\int_{-z_0}^{z_0}\int_{r_1}^{R_1}\left\{\left(R_9 b_{11}+R_{10}b_{12}+R_{11}b_{13}\right)\frac{\partial u_r}{\partial r}+\frac{B_2}{r}\left(\frac{\partial u_\theta}{\partial\theta}+u_r\right)+\right.
$$

$$
\left.+\left[\left(R_9+R_{10}\right)b_{13}+R_{11}b_{33}\right]\frac{\partial u_z}{\partial z}-\left[\alpha_{11}\left(R_9+R_{10}\right)+\alpha_{33}R_{11}\right]t\right\}drdz\Big|_0^{2\pi}=0,
$$

$$
-\int_0^{2\pi}\int_{r_1}^{R_1}R_7 b_{44}\left(\frac{\partial u_\theta}{\partial z}+\frac{1}{r}\frac{\partial u_z}{\partial\theta}\right)dzd\theta\Big|_{-z_0}^{z_0}=0,
$$

$$
-\int_0^{2\pi}\int_{r_1}^{R_1}R_7 b_{44}\left(\frac{\partial u_z}{\partial r}+\frac{\partial u_r}{\partial z}\right)drd\theta\Big|_{-z_0}^{z_0}=0,
$$

$$
-\int_{-z_0}^{z_0}\int_{r_1}^{R_1}\frac{2R_8}{r}\left(b_{11}-b_{12}\right)\left(\frac{1}{r}\frac{\partial u_r}{\partial\theta}+\frac{\partial u_\theta}{\partial r}-\frac{u_\theta}{r}\right)drdz\Big|_0^{2\pi}=0,
$$

$$
-\int_0^{2\pi}\int_{-z_0}^{z_0}2R_8\left(b_{11}-b_{12}\right)\left(\frac{1}{r}\frac{\partial u_r}{\partial\theta}+\frac{\partial u_\theta}{\partial r}-\frac{u_\theta}{r}\right)drd\theta\Big|_{r_1}^{R_1}=0,
$$

$$
-\int_0^{2\pi}\int_{r_1}^{R_1}\{\left(R_{15}b_{11}+R_{16}b_{12}+R_{17}b_{13}\right)\frac{\partial u_r}{\partial r}+\frac{B_3}{r}\left(\frac{\partial u_\theta}{\partial\theta}+u_r\right)+\left[\left(R_{15}+R_{16}\right)b_{13}+\right.
$$

$$
\left.+R_{17}b_{33}\right]\frac{\partial u_z}{\partial z}-\left[\left(R_{15}+R_{16}\right)\alpha_{11}+R_{17}\alpha_{33}\right]t\}\,drd\theta\Big|_{-z_0}^{z_0}=0,
$$

$$
-\int_{-z_0}^{z_0}\int_{r_1}^{R_1}R_7 b_{44}\left(\frac{\partial u_\theta}{\partial z}+\frac{1}{r}\frac{\partial u_z}{\partial\theta}\right)drdz\Big|_0^{2\pi}=0,
$$

$$
-\int_0^{2\pi}\int_{-z_0}^{z_0}R_7 b_{44}\left(\frac{\partial u_z}{\partial r}+\frac{\partial u_r}{\partial z}\right)dzd\theta\Big|_{r_1}^{R_1}=0. \qquad (23)
$$

Системи співвідношень (21)-(23) визначають оптимальний розподіл непружної деформації $e_{ij}^{(пл.)}$, функції температури тіла t, компонентів вектора переміщення u_r, u_θ, u_z, температури зовнішнього середовища t_c^+, t_c^-. А за формулами (8) визначається оптимальний напружено-деформований стан.

Висновки

В статті запропоновано математичну постановку і методику розв'язування задачі оптимізації напружено-деформованого стану трансверсально-ізотропних порожнистих кругових циліндричних тіл із залишковими деформаціями, які знаходяться під дією температурного навантаження. Відповідно до запропонованої методики, формулюються умови на розподіл температури і непружних деформацій. Сформульовано систему диференціальних рівнянь і граничних умов на функцію температури, компоненти вектора переміщення, тензора непружної деформації, за яких забезпечується оптимальний пружно-деформований стан.

Запропонований підхід та методика розв'язування задачі оптимізації пружно-деформованого стану трансверсально-ізотропних циліндричних порожнистих тіл можуть бути використані для розв'язання споріднених задач для тіл з іншою геометричною конфігурацією.

We propose a mathematical statement and procedure for solution of the problem on optimization of the *stress-strain state of transversally-isotropic shallow circular cylindrical bodies with residual strains under thermal loading. The procedure includes two parts, i.e. solution of the external problem giving the possibility to formulate the conditions for distribution of temperature and nonelastic strains, which provide optimal stress-strain state. At the second stage the results obtained and used to construct the rational heating regimes. It is necessary to conduct number research of the gained results, to analyze the contribution of anizotropic in comparizon to analogycal results for isotropic shallow cylindrical bodies with nonelastic strains in the future.*

Література

1. Бурак Я.И. Критерии оптимизации напряженного состояния термоупругих тел // Мат. методы и физ.-мех. поля. – 1986. – Вып. 24. – С. 49-52.
2. Григолюк Э.И., Бурак Я.И., Подстригач Я.С. Об одной экстремальной задаче термоупругости для бесконечной цилиндрической оболочки // ДАН СССР. – 1967. – 174. – № 3. – С. 534-537.
3. Григолюк Э.И., Подстригач Я.С., Бурак Я.И. Оптимизация нагрева оболочек и пластин. – Киев: Наук. думка, 1979. – 364 с.
4. Григоренко Я.М. Изотропные и анизотропные слоистые оболочки вращения переменной жесткости. – Киев: Наук. думка, 1973. – 228 с.
5. Лехницкий С.Г. Теория упругости анизотропного тела. – М.: Наука, 1977. – 415 с.
6. Подстригач Я.С., Пелех Б.Л., Сиренко И.Г. Экстремальные задачи термоупругости для ортотропных слоистых цилиндрических оболочек // Тепловые напряжения в элементах конструкций – 1973. – Вып. 13. – С. 67-70.
7. Поліщук Н.І. Оптимізація термопружного стану кругових порожнистих анізотропних циліндричних тіл з залишковими деформаціями при нагріві в умовах теплообміну з зовнішнім середовищем. Автореф. дис. ... канд. фіз.-мат. наук. – Львів, 1994. – 14 с.
8. Поліщук Н.І. Варіаційні рівняння задачі оптимізації напружено-деформованого стану анізотропних порожнистих циліндричних тіл з залишковими деформаціями // Мат. методи і фіз.-мех. поля – 1999. –Т. 42, № 3. – С. 140-143.
9. Поліщук Н., Гаєвська Л. Оптимізація осесиметричного нагріву ортотропних циліндричних тіл в умовах теплообміну із зовнішнім середовищем // Машинознавство, № 3. – 2003. – С. 18-20.

Одержано 05.04.2005 р.