УДК 536.2

Б. Окрепкий, канд.фіз.-мат.наук; М. Шелестовська, канд.техн.наук
Тернопільський державний економічний університет

ОСЕСИМЕТРИЧНА ТЕМПЕРАТУРНА ЗАДАЧА ДЛЯ СИСТЕМИ ТІЛ ЦИЛІНДР-ПІВПРОСТІР ПРИ НЕІДЕАЛЬНОМУ ТЕПЛОВОМУ КОНТАКТІ

Побудовано розв'язок осесиметричної температурної задачі для системи тіл циліндр-півпростір при неідеальному тепловому контакті між циліндром та півпростором. Одержано формули для визначення температурних полів при різних варіантах температурних умов на бічних поверхнях циліндра і півпростору. Досліджено вплив контактної провідності на розподіл температури в зоні контакту.

Вступ. Проблема визначення контактних деформацій і напружень з врахуванням температурних полів є важливою для дослідження міцності деталей машин і елементів конструкцій у місцях їхньої взаємодії, при розрахунку конструкцій на пружній основі з метою раціонального використання матеріалу конструкції і несучої здатності основи. В багатьох працях досліджується вплив температурних факторів на характер контактної взаємодії тіл [1-4]. Проте недостатньо вивченим є вплив умов неідеального теплового контакту тіл на величину і характер розподілу температури і полів напружень та деформацій, що зумовлені температурними полем.

Метою даної роботи є дослідження стаціонарних полів у циліндрі і півпросторі при неідеальному тепловому контакті та різних умовах теплообміну.

Постановка задачі. Нехай круговий циліндр радіуса R і довжиною L знаходиться в неідеальному тепловому контакті з півпростором. Матеріали тіл є ізотропними. На вільному торці циліндра задана постійна температура T_0. Розглядаються три випадки температурних умов на бічній поверхні циліндра та границі півпростору:

1. Бічна поверхня циліндра теплоізольована, а границя півпростору підтримується при нульовій температурі.
2. Бічні поверхні циліндра і півпростору теплоізольовані .
3. Бічні поверхні циліндра і півпростору підтримуються при нульовій температурі.

Введемо циліндричну систему координат r, θ, z, центр якої лежить на поверхні півпростору, а вісь Oz спрямована вздовж осі циліндра. Всі величини, які позначені індексом “1”, відносяться до півпростору, без індексів – до циліндра.

Граничні умови для температури у першому випадку мають вигляд:

$$\lambda_z \frac{\partial T}{\partial z} = \lambda_z^1 \frac{\partial T^1}{\partial z^1}, \quad \lambda_z \frac{\partial T}{\partial z} = h_0\left(T^1 - T\right) \quad \left(0 \le r \le R, \ \ z = 0\right), \tag{1}$$

$$T^1 = 0 \quad \left(R \le r < \infty, \ z = 0\right), \tag{2}$$

$$T = T_0 \quad \left(0 \le r \le R, \ z = L\right), \tag{3}$$

$$\frac{\partial T}{\partial r} = 0 \quad \left(r = R, \ 0 \le z \le L\right). \tag{4}$$

В другому випадку умови (1), (3) і (4) залишаються без зміни, а замість (2) маємо

$$\frac{\partial T^1}{\partial z} = 0 \quad \left(R \le r \le \infty, \ z = 0\right). \tag{5}$$

У третьому випадку умови (1)–(3) залишаються без зміни, а замість (4) одержимо

$$T = 0 \quad \left(r = R,\ 0 \le z \le L\right). \tag{6}$$

Тут λ_z, λ_z^1 - коефіцієнти теплопровідності в напрямку осі Oz, h_0 - контактна провідність.

Розв'язування крайових задач для рівняння теплопровідності

Відомо, що в осесиметричному випадку температурне поле T для ізотропного тіла визначається із рівняння

$$\nabla^2 T = 0. \tag{7}$$

За допомогою методу Фур'є загальний розв'язок рівняння (7) для циліндра зобразиться так:

$$T(r,z) = A_0 + B_0 z + D_0\left(r^2 - 2z^2\right) + \sum_{k=1}^{\infty} J_0(\beta_k r)\left(A_k sh\beta_k z + B_k ch\beta_k z\right) + \sum_{k=1}^{\infty} I_0(\gamma_k r)\left(C_k \sin\gamma_k z + D_k \cos\gamma_k z\right), \tag{8}$$

де A_k, B_k, C_k, D_k - довільні постійні; $J_0(\beta_k r)$ - функція Бесселя першого роду дійсного аргументу; $I_0(\beta_k r)$ - функція Бесселя першого роду уявного аргументу; β_k, γ_k - власні значення, які визначаються із граничних умов.

Для знаходження температури в півпросторі вводимо трансформанту Ганкеля функції $T^1(r,z)$ нульового порядку

$$\overline{T}^1(\xi,z) = \int_0^\infty r T^1(r,z) J_0(\xi r) dr, \tag{9}$$

за допомогою якої із рівняння (7) знаходимо вираз для $T^1(\rho,\varsigma)$ через довільну функцію $\varphi_1(\eta)$:

$$T^1(\rho,\varsigma) = \int_0^\infty \varphi_1(\eta) e^{-\eta\varsigma} J_0(\eta\rho) d\eta, \tag{10}$$

де $\rho = \dfrac{r}{R}$, $\varsigma = \dfrac{z}{R}$.

Розглянемо перший випадок температурних умов (1)–(4). Вони будуть задовольнятись, якщо покласти $D_0 = 0$, $D_k = 0$, $C_k = 0$ $(k = 1,2,\ldots)$. Із умови (4) одержуємо, що $\beta_k = \dfrac{\mu_k}{R}$, де μ_k - корені рівняння $J_1(\mu) = 0$.

Гранична умова (3), з врахуванням ортогональності функції Бесселя, приводить до деяких співвідношень між постійними A_n і B_n, в результаті чого, температурне поле в циліндрі виражається через одну нескінченну систему постійних $C_k^{(1)}$ за формулою

$$T(\rho,\varsigma) = T_0\left\{1 + C_0^{(1)}\frac{\lambda_z^1}{\lambda_z}(\varsigma - l) - \frac{\lambda_z^1}{\lambda_z}\sum_{k=1}^{\infty} C_k^{(1)} J_0(\mu_k\rho)\frac{sh\mu_k(l-\varsigma)}{ch\mu_k l}\right\},\quad l = \frac{L}{R}. \tag{11}$$

Задовольнивши першій умові (1) і умові (2), одержимо парні інтегральні рівняння відносно функції $\varphi_1(\eta)$:

$$\int_0^\infty \eta\varphi_1(\eta) J_0(\eta\rho) d\eta = T_0\left(C_0^{(1)} + \sum_{k=1}^{\infty}\mu_k C_k^{(1)} J_0(\mu_k\rho)\right) \quad (\rho < 1) \tag{12}$$

$$\int_0^\infty \varphi_1(\eta) J_0(\eta\rho) d\eta = 0 \quad (\rho > 1), \tag{13}$$

розв'язок яких має вигляд

$$\varphi_1(\eta) = \frac{2}{\pi} T_0 \left[C_0^{(1)} \frac{1}{\eta} \left(\frac{\sin\eta}{\eta} - \cos\eta \right) + \sum_{k=1}^{\infty} \mu_k C_k^{(1)} \int_0^1 \sin\eta\, y \sin\mu_k y dy \right]. \quad (14)$$

Друга умова (1), з врахуванням (10) і (11), запишеться так:

$$\int_0^{\infty} \varphi_1(\eta) J_0(\eta\rho) d\eta = T_0 \left\{ 1 - \left(\frac{\lambda_z^1}{\lambda_z} l - \frac{\lambda_z^1}{h_0 R} \right) C_0^{(1)} - \sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{\lambda_z^1}{\lambda_z} th\mu_k l - \frac{\lambda_z^1}{h_0 R} \mu_k \right) C_k^{(1)} J_0(\mu_k \rho) \right\}, \quad (15)$$

$(\rho < 1)$.

Підставивши (14) в рівняння (15) маємо:

$$\frac{2}{\pi} T_0 C_0^{(1)} \int_0^{\infty} \frac{J_0(\eta\rho)}{\eta} \left(\frac{\sin\eta}{\eta} - \cos\eta \right) d\eta + \frac{2}{\pi} T_0 \sum_{k=1}^{\infty} \mu_k C_k^{(1)} \int_0^{\infty} J_0(\eta\rho) d\eta \int_0^1 \sin\eta\, y \sin\mu_k y dy =$$
$$= T_0 \left\{ 1 - \left(\frac{\lambda_z^1}{\lambda_z} l - \frac{\lambda_z^1}{h_0 R} \right) C_0^{(1)} - \sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{\lambda_z^1}{\lambda_z} th\mu_k l - \frac{\lambda_z^1}{h_0 R} \mu_k \right) C_k^{(1)} J_0(\mu_k \rho) \right\} \quad (\rho < 1). \quad (16)$$

Помноживши обидві частини рівності (16) на ρ та $\rho J_0(\mu_n \rho)$ і проінтегрувавши в межах від 0 до 1, з врахуванням ортогональності функцій Бесселя, одержимо нескінченну систему лінійних алгебраїчних рівнянь відносно невідомих $C_k^{(1)}$:

$$\alpha_k^{(1)} C_k^{(1)} + \sum_{n=0}^{\infty} \alpha_{k,n}^{(1)} C_n^{(1)} = \gamma_k^{(1)} \quad (k = 0, 1, \ldots), \quad (17)$$

де

$$\alpha_0^{(1)} = \frac{1}{2} \left(\frac{\lambda_z^1}{\lambda_z} l - \frac{\lambda_z^1}{h_0 R} \right) + \frac{2}{3\pi},$$

$$\alpha_{0,n}^{(1)} = \frac{2}{\pi} \int_0^1 \rho\, d\rho \int_0^{\infty} J_0(\eta\rho) d\eta \int_0^1 \sin\eta\, y \sin\mu_k y dy = \frac{2}{\pi \mu_k} \left(\frac{\sin\mu_k}{\mu_k} - \cos\mu_k \right), \quad (18)$$

$$\gamma_0^{(1)} = \frac{1}{2}; \quad \alpha_k^{(1)} = \frac{2}{\pi} \int_0^1 \rho J_0(\mu_k \rho) d\rho \int_0^{\infty} \frac{J_0(\eta\rho)}{\eta} \left(\frac{\sin\eta}{\eta} - \cos\eta \right) d\eta = \frac{2}{\pi \mu_k^2} \left(\frac{\sin\mu_k}{\mu_k} - \cos\mu_k \right),$$

$$\alpha_{k,n} = \frac{2}{\pi} \mu_n \int_0^1 \rho J_0(\mu_k \rho) d\rho \int_0^{\infty} J_0(\eta\rho) d\eta \int_0^1 \sin\eta\, y \sin\mu_k y dy =$$
$$= \frac{2}{\pi} \mu_n \frac{\mu_n \sin\mu_k \cos\mu_n - \mu_k \sin\mu_n \cos\mu_k}{\mu_k^2 - \mu_n^2},$$

$$\alpha_{k,n}^{(1)} = \begin{cases} \alpha_{k,n}, & k \neq n, \\ \alpha_{k,n} + \left(\frac{\lambda_z^1}{\lambda_z} th\mu_n l - \frac{\lambda_z^1}{h_0 R} \mu_n \right) \frac{J_0^2(\mu_n)}{2}, & k = n, \end{cases}$$

$$\gamma_k^{(1)} = 0 \quad (k = 1, 2, \ldots).$$

В другому випадку температурних умов розв'язок будується аналогічно. В кінцевому результаті задачу зводимо до визначення деяких постійних $C_k^{(2)}$ із нескінченної системи рівнянь виду (17).

Температурне поле в циліндрі визначається за формулою (16) шляхом заміни постійних $C_0^{(1)}$ і $C_k^{(1)}$ відповідно на $C_0^{(2)}\dfrac{\lambda_z}{\lambda_z^1}$ і $C_k^{(2)}\dfrac{\lambda_z}{\lambda_z^1}cth\mu_k l$, а в півпросторі – за формулою (10) через функцію $\varphi_2(\eta)$, де

$$\varphi_2(\eta)=T_0\left(1-C_0^{(2)}\right)\frac{sin\,\eta}{\eta}-\frac{2}{\pi}T_0\sum_{k=1}^{\infty}C_k^{(2)}\int_0^1 cos\,\eta\, y\,cos\,\mu_k\, y dy\,. \qquad (19)$$

В третьому випадку температурних умов задача значно ускладнюється. Температурне поле вдається знайти через дві нескінченні системи постійних $C_n^{(3)}$ і $C_n^{(4)}$, які визначаються із двох взаємозв'язаних нескінченних систем алгебраїчних рівнянь. Після знаходження постійних $C_n^{(3)}$ і $C_n^{(4)}$ температурне поле в півпросторі зображається формулою (10) через деяку функцію $\varphi_3(\eta)$, а функція $\varphi_3(\eta)$ визначається згідно з формулою (14) при заміні $C_n^{(1)}$ на $C_n^{(3)}$. Вираз для температурного поля в циліндрі не приводиться через громіздкість.

Визначивши необхідну кількість постійних $C_n^{(i)}$ можна знайти температурні поля і градієнт, а також термопружні потенціали і напруження від них в будь-якій точці циліндра і півпростору.

Якщо контактна провідність $h_0^1=h_0R=\infty$, то одержимо розв'язок задачі [3].

Розглянуто числовий приклад. Так як системи рівнянь є квазірегулярними при будь-яких співвідношеннях теплофізичних характеристичних тіл, то розв'язок їх знаходимо методом редукції із усічених систем. При цьому розв'язували систему 30-ти лінійних алгебраїчних рівнянь з 30-ма невідомими. На рис.1 наведено графіки розподілу температури вздовж безрозмірної координати ρ при $\lambda_z^1/\lambda_z=0{,}1$ та різних значеннях контактної провідності $h_0^1=h_0R$.

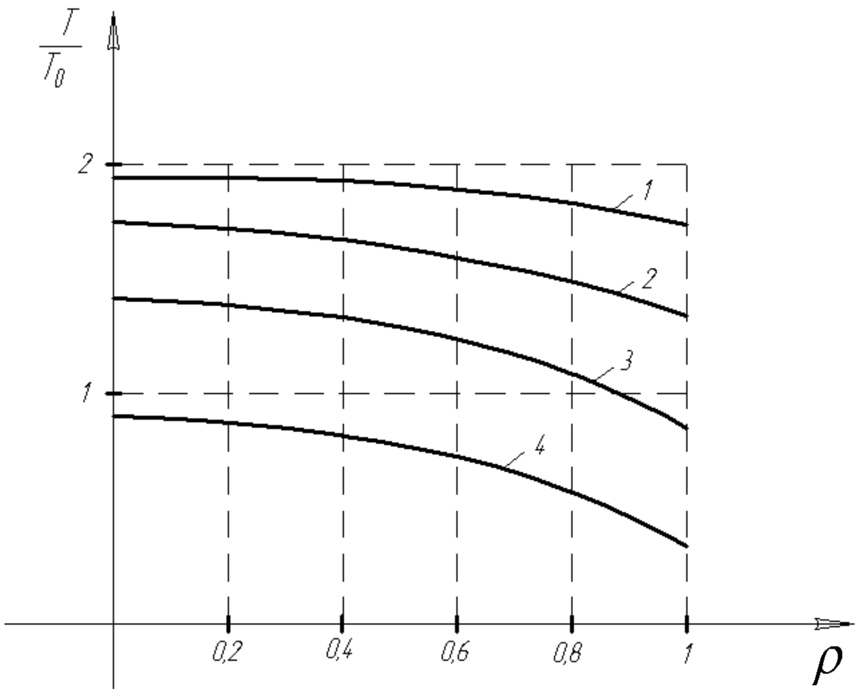

Рис. 1. Графіки розподілу температури в зоні контакту, крива 1 - $h_0^1=0{,}1$; 2 - $h_0^1=1$; 3 - $h_0^1=5$; 4 - $h_0^1=\infty$

Висновок. Застосовуючи інтегральне перетворення Ганкеля та метод Фур'є розв'язок температурних задач зведено до визначення деяких постійних із нескінченної системи лінійних алгебраїчних рівнянь, через які знаходяться температурні поля і градієнти в будь-якій точці циліндра і півпростору. Числовий приклад показує, що контактна провідність h_0^1 значно впливає на розподіл температурних полів і градієнтів в зоні контакту системи тіл циліндр – півпростір.

The solution of the axes-symmetric temperature task for the body system cylinder-semispace under non-ideal heat contact between cylinder and semispace have been built. Formula for determination temperature fields under different temperature conditions on the border surfaced of the cylinder and semispace have been obtained. The influence of the contact conductivity on the temperature distribution in the contact area has been investigated.

Література

1. Коваленко А.Д. Основы термоупругости. - Киев: Наук. думка, 1970. – 304 с.
2. Грилицкий Д.В., Кизыма Я.И. Осесимметричные контактные задачи теории упругости и термоупругости. – Львов: Изд-во при Львов. ун-те, 1981. – 135 с.
3. Кизыма Я.М., Окрепкий Б.С. Осесимметричная температурная задача для системы тел цилиндр-полупространство // Прикладная механика. – 1975. – Т.11, вып.12. – С. 37-44.
4. Гриліцький Д.В. Термопружні контактні задачі в трибології. – К.: ІЗМА, 1996. – 204 с.

Одержано 25.02.2005 р.