М.Михайлишин, канд.фіз.-мат.наук; В.Михайлишин
Тернопільський державний технічний університет імені Івана Пулюя

РОЗРАХУНКОВА СИСТЕМА РІВНЯНЬ ТЕПЛОПРОВІДНОСТІ ЧАСТКОВО НАПЛАВЛЕНИХ ТОНКИХ КРУГЛИХ ДИСКІВ

Отримано розрахункову систему рівнянь і необхідні умови спряження та крайові умови, які дозволяють знаходити числовий розв'язок задач нестаціонарної теплопровідності тонких кільцевих дисків, частково наплавлених по прилеглій до зовнішнього контуру області верхньої сторони диска відмінним від основного металу диска матеріалом.

В сучасному машинобудуванні широко використовуються методи термічної обробки деталей шляхом електроіндукційного нагрівання струмами високої частоти. Серед них значне місце займають методи зміцнення робочих поверхонь деталей за допомогою наплавлення на них шару іншого матеріалу. Математичне моделювання таких процесів зустрічає цілий ряд труднощів і перша з них пов'язана з тим, що в результаті таких технологічних процесів утворюються конструктивні елементи неоднорідної структури. З точки зору теплопровідності, це призводить до того, що необхідно враховувати геометричні особливості утвореної конструкції і відмінність теплофізичних характеристик основного і наплавлюючого матеріалів.

В роботі [1] запропоновано числовий метод розв'язування осесиметричних задач теплопровідності тонких однорідних оболонок обертання, в якому використовується схема Кранка-Ніколсона дискретизації за часом та метод дискретної ортогоналізації Годунова для розв'язування крайової задачі за просторовою координатою. В якості розрахункової системи рівнянь використовуються наближені рівняння, які отримані в припущенні про лінійний розподіл температури по товщині і конвективний теплообмін із зовнішнім середовищем на лицьових поверхнях оболонки [2]. Для того, щоб використати цей числовий метод для вивчення процесів теплопровідності в тонких частково наплавлених круглих пластинах, в даній роботі отримано розрахункову систему рівнянь, крайові умови та умови неперервності для інтегральних характеристик температури.

Розглянемо тонкий кільцевий диск товщиною $2\delta_0$ і радіусами внутрішнього і зовнішнього контурів R_0 і R_2 відповідно. Віднесемо диск до циліндричної системи координат r, φ, z з початком на осі симетрії на серединній площині диска, так що матеріал диска займає область $R_0 \le r \le R_2$, $-\delta_0 \le z \le \delta_0$, $0 \le \varphi \le 2\pi$.

На верхній поверхні диска $z = \delta_0$ наплавлено ділянку $R_1 \le r \le R_2$ деяким відмінним від основного металу матеріалом товщиною $2h$. В результаті в цій області утворюється біметалічний диск. Надалі вважаємо, що в процесі нагрівання і охолодження має місце осьова симетрія і температурне поле будемо шукати в припущенні, що за товщиною диску температура розподіляється за лінійним законом.

Розглянемо спочатку частину диска з основного металу. На поверхнях $z = \pm\delta_0$ припускаємо конвективний теплообмін з зовнішнім середовищем. Відповідна система рівнянь для визначення температурного поля має вигляд [1,2,3]

$$\begin{aligned} &\Lambda_0 \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial T}{\partial r}\right) - \left(\alpha_+ T + \alpha_- T^*\right) + p_+ = C_0 \frac{\partial T}{\partial \tau} - W_t, \\ &\Lambda_0 \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial T^*}{\partial r}\right) - \frac{3}{\delta_0^2}\Lambda_0 T^* - 3\left(\alpha_- T + \alpha_+ T^* - p_-\right) = C_0 \frac{\partial T^*}{\partial \tau} - W_t^*, \end{aligned} \qquad (1)$$

де

$$\Lambda_0 = 2\delta_0\lambda_0,\ \ C_0 = 2\delta_0 C_{v_0},\ \ \alpha_\pm = \alpha_z^+ \pm \alpha_z^-,$$
$$p_\pm = \alpha_z^+ t_c^+ \pm \alpha_z^- t_c^-,\ \ t = T + \frac{z}{\delta_0}T^*,\ \ -\delta_0 \le z \le \delta_0. \tag{2}$$

$$T = \frac{1}{2\delta_0}\int_{-\delta_0}^{\delta_0} t dz,\ \ T^* = \frac{3}{2\delta_0^2}\int_{-\delta_0}^{\delta_0} tz dz, \tag{3}$$

$$W_t = \int_{-\delta_0}^{\delta_0} w_t dz;\ \ W_t^* = \frac{3}{\delta_0}\int_{-\delta_0}^{\delta_0} w_t z dz. \tag{4}$$

Тут λ_0 - коефіцієнт теплопровідності основного металу; C_{v_0} - теплоємність основного металу при постійному об'ємі; $\alpha_z^\pm$ - коефіцієнти тепловіддачі з поверхонь $z = \pm\delta_0$, $t_c^\pm$ - температура зовнішнього середовища зі сторони поверхонь $z = \pm\delta_0$.

Аналогічна система рівнянь для біметалічної частини диска така [3]

$$\frac{1}{r}\left[\Lambda_1 \frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial T}{\partial r}\right) + \Lambda_1^* \frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial T^*}{\partial r}\right)\right] - \alpha_+ T - \alpha_- T^* + p_+ = C^*\frac{\partial T^*}{\partial \tau} + C\frac{\partial T}{\partial \tau} - W_t,$$
$$\frac{1}{r}\left[3\Lambda_l^* \frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial T}{\partial r}\right) + \Lambda_1^{**} \frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial T^*}{\partial r}\right)\right] - \frac{3}{\delta^2}\Lambda_1 T^* - 3\left(\alpha_- T + \alpha_+ T^* + p_-\right) = \tag{5}$$
$$= 3C^*\frac{\partial T}{\partial \tau} + C^{**}\frac{\partial T^*}{\partial \tau} - W_t^*.$$

Тут введено позначення

$$\Lambda_1 = 2\delta\lambda_0 + (\lambda_н - \lambda_0)(\delta - \zeta_1),$$
$$\Lambda_1^* = \frac{1}{2\delta}(\lambda_н - \lambda_0)(\delta^2 - \zeta_1^2), \tag{6}$$
$$\Lambda_1^{**} = \frac{3}{\delta^2}\left[\frac{2}{3}\delta^3\lambda_0 + \frac{1}{3}(\lambda_н - \lambda_0)(\delta^3 - \zeta_1^3)\right],$$

$$C = 2\delta C_{v_0} + \left(C_{v_н} - C_{v_0}\right)(\delta - z_1),$$
$$C^* = \frac{1}{2\delta}\left(C_{v_н} - C_{v_0}\right)\left(\delta^2 - \zeta_1^2\right), \tag{7}$$
$$C^{**} = \frac{3}{\delta^2}\left[\frac{2}{3}\delta^3 C_{v_0} + \frac{1}{3}\left(C_{v_н} - C_{v_0}\right)\left(\delta^3 - \zeta_1^3\right)\right],$$

$$\delta = \delta_0 + h,\ \ \zeta_1 = \delta - 2h = \delta_0 - h. \tag{8}$$

Величини T, T^*, W_t, W_t^* обчислюються за формулами (3), (4), якщо замінити в них δ_0 на δ і розподіл температури за товщиною визначається формулою

$$t = T + \frac{\zeta}{\delta}T^*,\ \ -\delta \le \zeta \le \delta. \tag{9}$$

Координата ζ, як і координата z, відраховується вздовж товщини диска, причому початок відліку прийнятий на серединній площині пакета. Рівняння (5) отримані в припущенні, що між шарами основного і наплавленого металів існує ідеальний тепловий контакт і на поверхнях $\zeta = \pm\delta$ має місце конвективний теплообмін, причому коефіцієнт тепловіддачі з поверхні наплавленого шару може відрізнятися від аналогічного коефіцієнта для основного металу. Це означає, що величини $\alpha_\pm$ і $p_\pm$ в системах (1) і (5) можуть відрізнятися між собою. Через $\lambda_н$ і $C_{v_н}$

позначено відповідно коефіцієнт теплопровідності і теплоємність при постійному об'ємі для матеріалу наплавлення.

Перехід від координати ζ в формулі (9) до координати z, яка використовується в представленні (2), здійснюється за формулою

$$\zeta = z + \delta_0 - \delta = z - h, \tag{10}$$

так що розподіл (9) температури за товщиною пакета можна записати у вигляді

$$t = T - \frac{h}{\delta}T^* + \frac{z}{\delta}T^*. \tag{11}$$

Очевидно, що при підході до перерізу $r = R_1$ зліва і справа (див. рис. 1) величини T і T^* приймають різні значення. Тому надалі позначимо їх при $r = R_1$ зліва - індексом - "-", а при $r = R_1$ справа - "+". Знайдемо теплові умови на ці величини в перерізі, де контактує біметалічна і ненаплавлена частина диска, тобто при $r = R_1$. Будемо вважати, що в області $-\delta_0 \le z \le \delta_0$ при $r = R_1$ має місце неперервність температури і сумарна кількість тепла, яка протікає через цю частину перерізу, справа дорівнює кількості тепла, що протікає через переріз зліва. На боковій поверхні $\delta_0 \le z \le \delta + h$ при $r = R_1$ здійснюється конвективний теплообмін з зовнішнім середовищем.

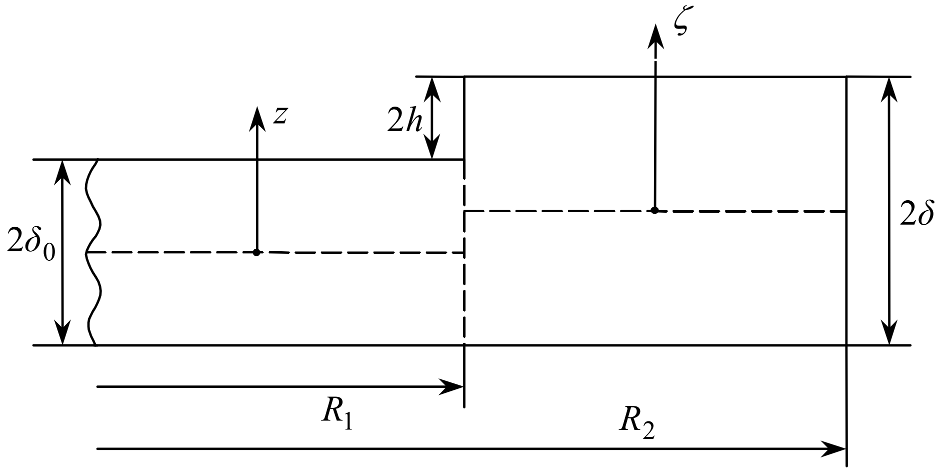

Рис.1. Схематичне зображення наплавленої ділянки диска

З умови неперервності температури знайдемо

$$T^+ - \frac{h}{\delta}T^{*+} = T^-, \quad T^{*+} = \frac{\delta}{\delta_0}T^{*+}. \tag{12}$$

Обчислимо повну кількість тепла, яка протікає через поперечний переріз $r = R_1$, за одиницю часу зліва

$$q_0^- = -\int_{-\delta_0}^{\delta_0} \lambda_0 \frac{\partial t}{\partial r} dz = -\int_{-\delta_0}^{\delta_0} \lambda_0 \left(\frac{\partial T^-}{\partial r} + \frac{z}{\delta_0}\frac{\partial T^{*-}}{\partial r} \right) dz = -2\delta_0\lambda_0 \left(\frac{\partial T}{\partial r} \right)^- . \tag{13}$$

Повна кількість тепла, що протікає за одиницю часу через таку ж частину перерізу справа, буде

$$q_0^+ = -\int_{-\delta_0}^{\delta_0} \lambda_0 \left(\frac{\partial T^+}{\partial r} - \frac{h}{\delta}\frac{\partial T^{*+}}{\partial r} + \frac{z}{\delta}\frac{\partial T^{*+}}{\partial r} \right) dz = -2\delta_0\lambda_0 \left[\left(\frac{\partial T}{\partial r} \right)^+ - \frac{h}{\delta}\left(\frac{\partial T^*}{\partial r} \right)^+ \right]. \tag{14}$$

Отже, з умови $q_0^+ = q_0^-$ знайдемо

$$\left(\frac{\partial T}{\partial r}\right)^+ - \frac{h}{\delta}\left(\frac{\partial T^*}{\partial r}\right)^+ = \left(\frac{\partial T}{\partial r}\right)^- . \tag{15}$$

Обчислимо тепер кількість тепла, яке протікає за одиницю часу через поверхню $\delta_0 \le z \le \delta + h = 2\delta - \delta_0$ при $r = R_1$ справа

$$q_н^+ = -\int\limits_{\delta_0}^{2\delta-\delta_0} \lambda_н \left(\frac{\partial T^+}{\partial r} - \frac{h}{\delta}\frac{\partial T^{*+}}{\partial r} + \frac{z}{\delta}\frac{\partial T^{*+}}{\partial r}\right) dz = -2\lambda_н(\delta - \delta_0)\left[\left(\frac{\partial T}{\partial r}\right)^+ + \frac{\delta_0}{\delta}\left(\frac{\partial T^*}{\partial r}\right)^+\right]. \tag{16}$$

На цій же частині бічної поверхні наплавлення справедливий конвективний теплообмін. Якщо коефіцієнт тепловіддачі з цієї поверхні α^+, то ця умова запишеться так

$$\frac{\partial t}{\partial r} = \frac{\alpha^+}{\lambda_н}(t - t_c) = h^+(t - t_c),$$

або

$$\frac{\partial T^+}{\partial r} - \frac{h}{\delta}\frac{\partial T^{*+}}{\partial r} + \frac{z}{\delta}\frac{\partial T^{*+}}{\partial r} = \frac{\alpha^+}{\lambda_н}\left[T^* - \frac{h}{\delta}T^{*+} + \frac{z}{\delta}T^{*+} - t_c\right]. \tag{17}$$

Значить, загальна кількість тепла, яка протікає за одиницю часу через цю поверхню, з врахуванням (17), буде

$$q_н^+ = -\int\limits_{\delta_0}^{2\delta-\delta_0} \lambda_н \frac{\alpha^+}{\lambda_н}\left[T^+ - \frac{h}{\delta}T^{*+} + \frac{z}{\delta}T^{*+} - t_c\right] dz = -2\alpha^+(\delta - \delta_0)\left(T_1^+ - t_c + \frac{\delta_0}{\delta}T^{*+}\right). \tag{18}$$

Прирівнюючи (16) і (18), знайдемо таке рівняння

$$\left(\frac{\partial T}{\partial r}\right)^+ + \frac{\delta_0}{\delta}\left(\frac{\partial T^*}{\partial r}\right)^+ = h^+\left(T_1^+ - t_c + \frac{\delta_0}{\delta}T^{*+}\right). \tag{19}$$

Розв’яжемо рівняння (15), (19) відносно $\left(\frac{\partial T}{\partial r}\right)^+$ і $\left(\frac{\partial T^*}{\partial r}\right)^+$. В результаті отримаємо

$$\begin{aligned} \left(\frac{\partial T}{\partial r}\right)^+ &= \frac{\delta_0}{\delta}\left(\frac{\partial T}{\partial r}\right)^- + \frac{\delta - \delta_0}{\delta}h^+\left(T^- - t_c + \frac{\delta_0}{\delta}T^{*-}\right), \\ \left(\frac{\partial T^*}{\partial r}\right)^+ &= h^+\left(T^- - t_c + \frac{\delta}{\delta_0}T^{*-}\right) - \left(\frac{\partial T}{\partial r}\right)^- . \end{aligned} \tag{20}$$

Якщо переписати рівняння (12) таким чином

$$T^+ = T^- + \frac{h}{\delta_0}T^{*-}, \quad T^{*+} = \frac{\delta}{\delta_0}T^{*-}, \tag{21}$$

то бачимо, що рівняння (20) і (21) дозволяють визначити значення шуканих функцій T, T^* і їхніх похідних по r на лінії $r = R_1$ справа, через їхні значення на цій же лінії зліва.

Вважаємо, що на внутрішньому і зовнішньому контурах пластин справедливий конвективний теплообмін із зовнішнім середовищем, причому коефіцієнт тепловіддачі рівний α_0 для основного металу і $\alpha_н$ для наплавленого шару. Отже, для ненаплавленої пластини

$$\lambda_0 \frac{\partial t}{\partial r} = \alpha_0 (t - t_c) \quad \text{при} \quad r = R_0, \quad \delta_0 \le z \le \delta_0; \tag{22}$$

$$\lambda_0 \frac{\partial t}{\partial r} = -\alpha_0 (t - t_c) \quad \text{при} \quad r = R_2, \quad -\delta_0 \le z \le \delta_0. \tag{23}$$

Якщо ж права кромка вже наплавлена, то потрібно додатково до (23) записати ще таке співвідношення

$$\lambda_н \frac{\partial t}{\partial r} = -\alpha_н (t - t_c) \quad \text{при} \quad r = R_2, \quad \delta_0 \le z \le 2\delta - \delta_0. \tag{24}$$

Приймаємо надалі, що температура зовнішнього середовища не залежить від координати $z(\zeta)$. Домножимо ліву і праву частину рівності (22) на dz і проінтегруємо по товщині. В результаті, враховуючи (3), знайдемо

$$\lambda_0 \frac{\partial T}{\partial r} = \alpha_0 (T - t_c), \quad r = R_0. \tag{25}$$

Якщо ж домножити ліву і праву частини (22) на zdz і проінтегрувати по товщині, то отримаємо

$$\lambda_0 \frac{\partial T^*}{\partial r} = \alpha_0 T^*, \quad r = R_0. \tag{26}$$

Отже, умова (22) еквівалентна двом умовам (25) і (26).

Аналогічно умова (23) для ненаплавленої пластинки перетвориться в такі умови:

$$\lambda_0 \frac{\partial T}{\partial r} = -\alpha_0 (T - t_c), \quad \lambda_0 \frac{\partial T^*}{\partial r} = -\alpha_0 T^* \quad \text{при} \quad r = R_2. \tag{27}$$

Для знаходження умови конвективного теплообміну для біметалічного краю потрібно скористатися залежністю (9). Тоді формули (23) і (24) можна переписати так

$$\lambda_0 \left(\frac{\partial T}{\partial r} + \frac{\zeta}{\delta} \frac{\partial T^*}{\partial r} \right) = -\alpha_0 \left(T + \frac{\zeta}{\delta} T^* - t_c \right), \quad -\delta \le \zeta \le 2\delta_0 - \delta,$$

$$\lambda_н \left(\frac{\partial T}{\partial r} + \frac{\zeta}{\delta} \frac{\partial T^*}{\partial r} \right) = -\alpha_н \left(T + \frac{\zeta}{\delta} T^* - t_c \right), \quad 2\delta_0 - \delta \le \zeta \le \delta.$$

Домноживши ліву і праву частини на $d\zeta$ і $\zeta d\zeta$ і проінтегрувавши по товщині пакету, отримаємо такі два рівняння:

$$a_{i1} T + a_{i2} T^* + a_{i3} \frac{\partial T}{\partial r} + a_{i4} \frac{\partial T^*}{\partial r} = a_{i1} t_c, \quad i = 1,2, \tag{28}$$

де

$$a_{11} = \alpha_0 \delta_0 + \alpha_н (\delta - \delta_0), \quad a_{13} = \lambda_0 \delta_0 + \lambda_н (\delta - \delta_0),$$

$$a_{12} = \frac{\delta_0}{\delta} (\delta - \delta_0)(\alpha_н - \alpha_0), \quad a_{14} = \frac{\delta_0}{\delta} (\delta - \delta_0)(\lambda_н - \lambda_0),$$

$$a_{21} = \delta_0 (\delta - \delta_0)(\alpha_н - \alpha_0), \quad a_{23} = \delta_0 (\delta - \delta_0)(\lambda_н - \lambda_0), \tag{29}$$

$$a_{22} = \frac{1}{\delta} \left\{ \alpha_0 \delta_0 \left[\left(\delta - \delta_0 \right)^2 + \frac{1}{3} \delta_0^2 \right] + \alpha_н \left(\delta - \delta_0 \right) \left[\frac{1}{3} \left(\delta - \delta_0 \right)^2 + \delta_0^2 \right] \right\},$$

$$a_{24} = \frac{1}{\delta}\left\{\lambda_0\delta_0\left[\left(\delta-\delta_0\right)^2+\frac{1}{3}\delta_0^2\right]+\lambda_н\left(\delta-\delta_0\right)\left[\frac{1}{3}\left(\delta-\delta_0\right)^2+\delta_0^2\right]\right\}.$$

Можна отримати наближену умову конвективного теплообміну для біметалічного краю, якщо припустити, що

$$\frac{\alpha_0}{\lambda_0} \approx \frac{\alpha_н}{\lambda_н} \approx h_s, \tag{30}$$

де h_s - деякий усереднений відносний коефіцієнт тепловіддачі з бічної поверхні біметалічної пластинки. Тоді умови (23), (24) запишуться так:

$$\frac{\partial t}{\partial r} = -h_s(t-t_s) \quad \text{при} \quad r = R_2, \quad -\delta_0 \le z \le 2\delta-\delta_0. \tag{31}$$

Якщо проінтегрувати цю умову по товщині, згідно з правилами введення величин T і T^* для біметалічної частини, то знайдемо

$$\frac{\partial T}{\partial r} = -h_s(T-t_c), \quad \frac{\partial T^*}{\partial r} = -h_sT^* \quad \text{при } r = R_2. \tag{32}$$

Приведемо рівняння (1) і (5) до систем диференціальних рівнянь першого порядку за радіальною координатою. Для цього позначимо

$$T=\theta_1; \quad T^*=\theta_2; \quad \frac{\partial T}{\partial r}=\theta_3; \quad \frac{\partial T^*}{\partial r}=\theta_4. \tag{33}$$

Тоді система (1) запишеться так

$$\begin{aligned}
&\frac{\partial\theta_1}{\partial r}=\theta_3,\\
&\frac{\partial\theta_2}{\partial r}=\theta_4,\\
&\frac{\partial\theta_3}{\partial r}=-\frac{1}{r}\theta_3+\frac{1}{\Lambda_0}\left(\alpha_+\theta_1+\alpha_-\theta_2-p_++C_0\frac{\partial\theta_1}{\partial\tau}-W_t\right),\\
&\frac{\partial\theta_4}{\partial r}=-\frac{1}{r}\theta_4+\frac{1}{\Lambda_0}\left[\frac{3}{\delta_0^2}\Lambda_0\theta_2+3\left(\alpha_-\theta_1+\alpha_+\theta_2-p_-\right)+C_0\frac{\partial\theta_2}{\partial\tau}-W_t^*\right].
\end{aligned} \tag{34}$$

Введемо позначення:

$$\begin{aligned}
&y_1=\alpha_+T+\alpha_-T^*-p_++C^*\frac{\partial T^*}{\partial\tau}-W_t,\\
&y_2=\frac{3}{\delta^2}\Lambda_1T^*+3(\alpha_-T+\alpha_+T^*-p_-)+3C^*\frac{\partial T}{\partial\tau}+C^{**}\frac{\partial T^*}{\partial\tau}-W_t^*.
\end{aligned} \tag{35}$$

Розв’яжемо систему (5) відносно $\frac{\partial^2T}{\partial r^2}$ і $\frac{\partial^2T^*}{\partial r^2}$. Знайдемо

$$\begin{aligned}
&\frac{\partial^2T}{\partial r^2}+\frac{1}{r}\frac{\partial T}{\partial r}=\frac{\Lambda_1^{**}y_1-\Lambda_1^*y_2}{\Lambda_1\Lambda_1^{**}-3(\Lambda_1^*)^2},\\
&\frac{\partial^2T^*}{\partial r^2}+\frac{1}{r}\frac{\partial T^*}{\partial r}=\frac{\Lambda_1y_2-3\Lambda_1^*y_1}{\Lambda_1\Lambda_1^{**}-3(\Lambda_1^*)^2}.
\end{aligned} \tag{36}$$

Отже, система (5) запишеться в такому вигляді

$$\begin{aligned}
&\frac{\partial\theta_1}{\partial r} = \theta_3, \\
&\frac{\partial\theta_2}{\partial r} = \theta_4, \\
&\frac{\partial\theta_3}{\partial r} = -\frac{1}{r}\theta_3 + \frac{1}{\Lambda_1\Lambda_1^{**} - 3(\Lambda_1^*)^2}\left(\Lambda_1^{**} y_1 - \Lambda_1^* y_2\right), \\
&\frac{\partial\theta_4}{\partial r} = -\frac{1}{r}\theta_4 + \frac{1}{\Lambda_1\Lambda_1^{**} - 3(\Lambda_1^*)^2}\left(\Lambda_1 y_2 - 3\Lambda_1^* y_1\right),
\end{aligned} \tag{37}$$

де

$$\begin{aligned}
&y_1 = \alpha_+\theta_1 + \alpha_-\theta_2 - p_+ + C^*\frac{\partial\theta_2}{\partial\tau} + C\frac{\partial\theta_1}{\partial\tau} - W_t, \\
&y_2 = \frac{3}{\delta^2}\Lambda_1\theta_2 + 3(\alpha_-\theta_1 + \alpha_+\theta_2 - p_-) + 3C^*\frac{\partial\theta_1}{\partial\tau} + C^{**}\frac{\partial\theta_2}{\partial\tau} - W_t^*.
\end{aligned} \tag{38}$$

Функції θ_j, $j = \overline{1,4}$ повинні задовільняти таким граничним умовам

$$\theta_3 = \frac{\alpha_0}{\lambda_0}(\theta_1 - t_c), \quad \theta_4 = \frac{\alpha_0}{\lambda_0}\theta_2 \quad \text{при} \quad r = R_0, \tag{39}$$

$$a_{i1}\theta_1 + a_{i2}\theta_2 + a_{i3}\theta_3 + a_{i4}\theta_4 = a_{i1}t_c, \quad i = 1{,}2, \quad \text{при } r = R_2, \tag{40}$$

умовам на контурі $r = R_1$

$$\theta_1^+ = \theta_1^- + \frac{h}{\delta_0}\theta_2^-, \quad \theta_2^+ = \frac{\delta}{\delta_0}\theta_2^-,$$

$$\theta_3^+ = \frac{\delta_0}{\delta}\theta_3^- + \frac{\delta - \delta_0}{\delta}h_s\left(\theta_1^- + \frac{\delta}{\delta_0}\theta_2^- - t_c\right) \tag{41}$$

та початковим умовам при $\tau = 0$

$$\theta_j = \theta_{j0}, \ j = \overline{1,4}\ . \tag{42}$$

Висновки

В лінійному наближенні для розподілу температури за товщиною приведено повну систему рівнянь теплопровідності частково наплавлених кільцевих пластин, отримано умови на інтегральні характеристики температури для перерізу, в якому спрягається ненаплавлена та наплена частини пластини, і записано крайову умову конвективного теплообміну із зовнішним середовищем для біметалічного краю. Повна система рівнянь і всі сформульовані умови можуть бути використані для чисельного розв'язування задачі за допомогою запропонованого в роботі [1] методу. При цьому важливо, що додаткові умови (41) на контурі $r = R_1$ легко реалізуються в методі дискретної ортогоналізації [4].

The considered system of equations is derived and the necessary conditions of continuaty and boundary conditions are given. These equations allow to calculate the numerical solution of nonstationary heat conductivity problems of thin round disks, which are partly welded on the surface of upper side of the disk close to the external line with the help of material different to the main one of the disk.

Література

1. Михайлишин М. Про один числовий метод розв'язування осесиметричних задач теплопровідності тонких оболонок обертання. //Вісник Тернопільського державного технічного університету. –1999, Том 4, число 1.-С. 10-15.
2. Подстригач Я.С., Швец Р.Н. Термоупругость тонких оболочек. –К.: Наукова думка, 1978.-344 с.
3. Подстригач Я.С., Ломакин В.А., Коляно Ю.М. Термоупругость тел неоднородной структуры. –М.: Наука, 1984.-368 с.
4. Мяченков В.И., Григорьев И.В. Расчет составных оболочечных конструкций на ЭВМ. Справочник. –М.: Машиностроение, 1981.-212 с.

Одержано 11.04.2005 р.