УДК 519.63
І. Баран, канд. техн. наук
Тернопільський державний технічний університет імені Івана Пулюя

АЛГОРИТМИ МЕТОДУ СКІНЧЕННИХ ЕЛЕМЕНТІВ ДЛЯ РОЗВ'ЯЗУВАННЯ ЗАДАЧ З УМОВАМИ СПРЯЖЕННЯ

У роботі розглянуто задачі, що описуються еліптичним рівнянням в полярній системі координат з умовами спряження неідеального контакту. На основі методу скінченних елементів (МСЕ) побудовані обчислювальні схеми підвищеного порядку точності їх дискретизації. Наведено результати розв'язку модельних прикладів.

Вступ. Реальні технічні системи є, як правило, багатокомпонентними конструкціями. Складові частини контактують між собою через тонкі включення, які мають інші, по відношенню до основних складових, фізико-механічні властивості. Враховуючи складність розглядуваних конструкцій та режимів зовнішнього впливу, дослідження різноманітних фізико-механічних процесів в таких системах зустрічає значні труднощі і на сьогодні можливе лише за допомогою сучасних обчислювальних методів та засобів комп'ютерного моделювання. На даний час одним із найкращих методів для розв'язування задач такого класу є МСЕ.

Короткий аналіз останніх досліджень і публікацій. Побудові обчислювальних схем МСЕ для отримання розв'язку задач з умовами спряження як ідеального, так і неідеального контакту присвячені серед інших роботи [1, 2]. Питання застосування МСЕ для задачі, записаної в декартовій системі координат, розглядалося автором в роботі [3]. З використанням розроблених алгоритмів МСЕ автором створено автоматизовану систему DIFUS [4] для розрахунку дифузійних процесів у багатокомпонентних середовищах.

Постановка задачі. Підземне сховище для зберігання промислових відходів можна моделювати двома аксіальними анізотропними циліндрами, з'єднаними між собою тонким включенням. При цьому виникають задачі стаціонарної дифузії тепла для складених кільцевих циліндрів. Задачі такого типу зводяться до розв'язування еліптичного рівняння з умовами спряження неідеального контакту.

Розглянемо випадок, коли розв'язок не залежить від осьової координати *z*. Тоді на області $G = G_1 \cup G_2$ в полярній системі координат рівняння набуде вигляду

$$-\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left\{r\left(\bar{k}_{11}\frac{\partial u}{\partial r}+\frac{\bar{k}_{12}}{r}\frac{\partial u}{\partial \varphi}\right)\right\}-\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial \varphi}\left(\bar{k}_{21}\frac{\partial u}{\partial r}+\frac{\bar{k}_{22}}{r}\frac{\partial u}{\partial \varphi}\right)=f,\ (r,\varphi)\in G, \tag{1}$$

де $\bar{k}_{ij}=\bar{k}_{ji}(r,\varphi)$ - неперервні на кожній із областей $\bar{G}_l$, мають неперервні обмежені перші часткові похідні на G_l $(i,j,l=1,2)$; $f\big|_{G_l}=f(r,\varphi)\big|_{G_l}\in C(G_l)$, $|f|<\infty$; $\bar{G}_1=\{(r,\varphi):$ $0<l_1\le r\le l_0,\ l_2\le\varphi\le L_2\}$, $\bar{G}_2=\{(r,\varphi):\ l_0\le r\le L_1,\ l_2\le\varphi\le L_2\}$, $\bar{G}=\bar{G}_1\cup\bar{G}_2$, $L_2-l_2\le 2\pi$. Області $\bar{G}$ в прямокутній декартовій системі координат $(x=r\cos\varphi,\quad y=r\sin\varphi)$ відповідає складене кільце при $L_2-l_2=2\pi$ або складений кільцевий сектор при $L_2-l_2<2\pi$. Кільцевому відрізку γ в полярній системі координат відповідає прямолінійний відрізок $\gamma_0=\{(r,\varphi): r=l_0,\ l_2\le\varphi\le L_2\}$. Для складеного кільця $\bar{G}$ його границя $\Gamma=\Gamma_1\cup\Gamma_2$ складається з двох кіл $\Gamma_1=\{(r,\varphi): r=l_1,\ \ l_2\le\varphi\le L_2=l_2+2\pi\}$ і $\Gamma_2=\{(r,\varphi): r=L_1,\ l_2\le\varphi\le L_2=l_2+2\pi\}$, а для складеного кільцевого сектора $\bar{G}$ –

$\Gamma = \bigcup_{i=1}^{4} \Gamma_i$ $(\Gamma_1 = \{(r,\varphi): r = l_1,\ l_2 \le \varphi \le L_2\},\ \Gamma_2 = \{(r,\varphi): r = L_1,\ l_2 \le \varphi \le L_2\},\ \Gamma_3 = \{(r,\varphi):$ $0 < l_1 \le r \le L_1,\ \varphi = l_2\},\ \Gamma_4 = \{(r,\varphi): 0 < l_1 \le r \le L_1,\ \varphi = L_2\}),\ L_2 - l_2 < 2\pi$ [1].

На включенні γ_0 області $\overline{G}$ задані неоднорідні умови спряження неідеального контакту у вигляді

$$R_1 \left\{ \overline{k}_{11} \frac{\partial u}{\partial r} + \frac{\overline{k}_{12}}{r} \frac{\partial u}{\partial \varphi} \right\}^- + R_2 \left\{ \overline{k}_{11} \frac{\partial u}{\partial r} + \frac{\overline{k}_{12}}{r} \frac{\partial u}{\partial \varphi} \right\}^+ = [u] + \delta,\ (r,\varphi) \in \gamma_0, \tag{2}$$

$$\left[\overline{k}_{11} \frac{\partial u}{\partial r} + \frac{\overline{k}_{12}}{r} \frac{\partial u}{\partial \varphi} \right] = \beta_1 (\nu u^+ + \chi u^-) + \alpha_1,\ (r,\varphi) \in \gamma_0, \tag{3}$$

де $[\psi] = \psi^+ - \psi^-,\ \psi^+ = \{\psi\}^+ = \psi(r,\varphi)$ при $(r,\varphi) \in \gamma_0 \cap \partial G_2,\ \psi^- = \{\psi\}^- = \psi(r,\varphi)$ при $(r,\varphi) \in \gamma_0 \cap \partial G_1,\ \gamma_0 = \partial G_1 \cap \partial G_2;\ R_1, R_2, \beta_1, \nu, \chi = const \ge 0,\ R_1 + R_2 > 0,\ \nu + \chi = 1;\ \delta, \alpha_1 \in C(\gamma_0)$. При $R_1,\ R_2$ одночасно нерівних нулю, приймемо $\nu = R_1/(R_1 + R_2),\ \chi = R_2/(R_1 + R_2)$.

Крайові умови на ділянках $\Gamma_1,\ \Gamma_2$ задамо у вигляді

$$u = g_1(r,\varphi),\quad (r,\varphi) \in \Gamma_1, \tag{4}$$

$$\overline{k}_{11} \frac{\partial u}{\partial r} + \frac{\overline{k}_{12}}{r} \frac{\partial u}{\partial \varphi} = -\overline{\alpha}_1 u + \overline{\beta}_1,\ (r,\varphi) \in \Gamma_2, \tag{5}$$

де $\overline{\alpha}_1 = const > 0,\ \overline{\beta}_1 \in L_2(\Gamma_2)$.

Розглядаючи задачу на складеному кільці $(l_2 = 0,\ L_2 = 2\pi)$, будемо шукати 2π-періодичний розв'язок $u_1(r,\varphi)$, що задовольняє співвідношення (1)-(5) і умови

$$u(r,0) = u(r,2\pi),\quad r \in [l_1, L_1], \tag{6}$$

$$\left\{ \overline{k}_{21} \frac{\partial u}{\partial r} + \frac{\overline{k}_{22}}{r} \frac{\partial u}{\partial \varphi} \right\}\Bigg|_{\varphi=0} = \left\{ \overline{k}_{21} \frac{\partial u}{\partial r} + \frac{\overline{k}_{22}}{r} \frac{\partial u}{\partial \varphi} \right\}\Bigg|_{\varphi=2\pi},\ r \in [l_1, L_1]. \tag{7}$$

Якщо розглядається задача на складеному сегменті $(L_2 - l_2 < 2\pi)$, то на ділянках $\Gamma_3,\ \Gamma_4$ задамо такі крайові умови:

$$u = g_2(r,\varphi),\quad (r,\varphi) \in \Gamma_3, \tag{8}$$

$$\overline{k}_{21} \frac{\partial u}{\partial r} + \frac{\overline{k}_{22}}{r} \frac{\partial u}{\partial \varphi} = -\overline{\alpha}_2 u + \overline{\beta}_2,\ (r,\varphi) \in \Gamma_4, \tag{9}$$

де $\overline{\alpha}_2 = const > 0,\ \overline{\beta}_2 \in L_2(\Gamma_2)$.

Таким чином, незалежний від координати z дифузійний процес у складеному кільцевому циліндрі описується крайовою задачею (1)-(9) (задача 1), а у складеному кільцевому секторі – крайовою задачею (1)-(5), (8), (9) (задача 2) для еліптичного рівняння, записаного в полярній системі координат з умовами спряження неідеального контакту.

Використовуючи методику, викладену в роботі [1], та результати, отримані автором в роботах [5, 6], для задачі 1 будуємо відповідну їй варіаційну задачу, яка полягає у відшуканні функції $u_1(r,\varphi) \in H_1$, що надає мінімум функціоналу енергії

$$\Phi_1(v)=\iint_G\left\{r\bar{k}_{11}\left(\frac{\partial v}{\partial r}\right)^2+2\bar{k}_{12}\frac{\partial v}{\partial r}\frac{\partial v}{\partial \varphi}+\frac{\bar{k}_{22}}{r}\left(\frac{\partial v}{\partial \varphi}\right)^2\right\}drd\varphi+\int_0^{2\pi}\frac{l_0\left([v]\big|_{r=l_0}\right)^2}{R_1+R_2}d\varphi+$$
$$+\beta_1\int_0^{2\pi}l_0(\nu v^+ +\chi v^-)^2d\varphi+\int_0^{2\pi}\bar{\alpha}_1L_1(v\big|_{r=L_1})^2d\varphi-2\iint_G rfvdrd\varphi-2\int_0^{2\pi}\frac{R_2\alpha_1-\delta}{R_1+R_2}l_0[v]d\varphi+$$
$$+2\int_0^{2\pi}l_0\alpha_1v^+d\varphi-2\int_0^{2\pi}\bar{\beta}_1L_1\,v\big|_{r=L_1}d\varphi,\quad \forall v(r,\varphi)\in H_1, \qquad (10)$$

де $H_1=\{v(r,\varphi)\big|_{G_l}\in W_2^1(G_l):l=1,2;\ v\big|_{\Gamma_1}=g_1(r,\varphi),\ v(r,0)=v(r,2\pi),\ r\in[l_1,L_1]\}$. Тут $W_2^1(G_l)$ - простір функцій С.Л. Соболєва, визначених на областях G_l.

Задача в слабкій постановці полягає у відшуканні функції $u_1(r,\varphi)\in H_1$, що задовольняє $\forall v(r,\varphi)\in H_{10}$ рівняння

$$\iint_G\left\{r\bar{k}_{11}\frac{\partial u_1}{\partial r}\frac{\partial v}{\partial r}+\bar{k}_{12}\left(\frac{\partial u_1}{\partial r}\frac{\partial v}{\partial \varphi}+\frac{\partial u_1}{\partial \varphi}\frac{\partial v}{\partial r}\right)+\frac{\bar{k}_{22}}{r}\frac{\partial u_1}{\partial \varphi}\frac{\partial v}{\partial \varphi}\right\}drd\varphi+\int_0^{2\pi}\frac{l_0\,[u_1][v]\big|_{r=l_0}}{R_1+R_2}d\varphi+$$
$$+\beta l_0\int_0^{2\pi}(\nu u_1^+ +\chi u_1^-)(\nu v^+ +\chi v^-)d\varphi+\int_0^{2\pi}\bar{\alpha}_1L_1u_1\,v\big|_{r=L_1}d\varphi=$$
$$=\iint_G rfvdrd\varphi+\int_0^{2\pi}\frac{R_2\alpha_1-\delta}{R_1+R_2}l_0\,[v]\big|_{r=l_0}d\varphi-\int_0^{2\pi}l_0\alpha_1v^+d\varphi+\int_0^{2\pi}\bar{\beta}_1L_1\,v\big|_{r=L_1}d\varphi, \qquad (11)$$

де $H_{10}=\{v(r,\varphi)\big|_{G_l}\in W_2^1(G_l):l=1,2;\ v\big|_{\Gamma_1}=0,\ v(r,0)=v(r,2\pi),\ r\in[l_1,L_1]\}$.

Аналогічно, варіаційна задача для задачі 2 полягає у відшуканні функції $u_2(r,\varphi)\in H_2$, яка $\forall v(r,\varphi)\in H_2$ надає мінімум функціоналу енергії

$$\Phi_2(v)=\iint_G\left\{r\bar{k}_{11}\left(\frac{\partial v}{\partial r}\right)^2+2\bar{k}_{12}\frac{\partial v}{\partial r}\frac{\partial v}{\partial \varphi}+\frac{\bar{k}_{22}}{r}\left(\frac{\partial v}{\partial \varphi}\right)^2\right\}drd\varphi+\int_{l_2}^{L_2}\frac{l_0\left([v]\big|_{r=l_0}\right)^2}{R_1+R_2}d\varphi+$$
$$+\beta_1\int_{l_2}^{L_2}l_0(\nu v^+ +\chi v^-)^2d\varphi+\int_{l_2}^{L_2}\bar{\alpha}_1L_1(v\big|_{r=L_1})^2d\varphi+\int_{l_1}^{L_1}\bar{\alpha}_2(v\big|_{\varphi=L_2})^2dr-2\iint_G rfvdrd\varphi-$$
$$-2\int_{l_2}^{L_2}\frac{R_2\alpha_1-\delta}{R_1+R_2}l_0[v]d\varphi+2\int_{l_2}^{L_2}l_0\alpha_1v^+d\varphi-2\int_{l_2}^{L_2}\bar{\beta}_1L_1\,v\big|_{r=L_1}d\varphi-2\int_{l_1}^{L_1}\bar{\beta}_2\,v\big|_{\varphi=L_2}dr, \qquad (12)$$

де $H_2=\{v(r,\varphi)\big|_{G_l}\in W_2^1(G_l):l=1,2;\ v\big|_{\Gamma_1}=g_1(r,\varphi),\ v\big|_{\Gamma_3}=g_2(r,\varphi)\}$.

Задача в слабкій постановці полягає у відшуканні функції $u_2(r,\varphi)\in H_2$, що задовольняє $\forall v(r,\varphi)\in H_{20}=\{v(r,\varphi)\big|_{G_l}\in W_2^1(G_l):l=1,2;\ v\big|_{\Gamma_1\cup\Gamma_3}=0\}$ рівняння

$$\iint_G\left\{r\bar{k}_{11}\frac{\partial u_2}{\partial r}\frac{\partial v}{\partial r}+\bar{k}_{12}\left(\frac{\partial u_2}{\partial r}\frac{\partial v}{\partial \varphi}+\frac{\partial u_2}{\partial \varphi}\frac{\partial v}{\partial r}\right)+\frac{\bar{k}_{22}}{r}\frac{\partial u_2}{\partial \varphi}\frac{\partial v}{\partial \varphi}\right\}drd\varphi+\int_{l_2}^{L_2}\frac{l_0\,[u_2][v]\big|_{r=l_0}}{R_1+R_2}d\varphi+$$
$$+\beta l_0\int_{l_2}^{L_2}(\nu u_2^+ +\chi u_2^-)(\nu v^+ +\chi v^-)d\varphi+\int_{l_2}^{L_2}\bar{\alpha}_1L_1u_2\,v\big|_{r=L_1}d\varphi+\int_{l_1}^{L_1}\bar{\alpha}_2u_2\,v\big|_{\varphi=L_2}dr=\iint_G rfvdrd\varphi+$$
$$+\int_{l_2}^{L_2}\frac{R_2\alpha_1-\delta}{R_1+R_2}l_0\,[v]\big|_{r=l_0}d\varphi-\int_{l_2}^{L_2}l_0\alpha_1v^+d\varphi+\int_{l_2}^{L_2}\bar{\beta}_1L_1\,v\big|_{r=L_1}d\varphi+\int_{l_1}^{L_1}\bar{\beta}_2\,v\big|_{\varphi=L_2}dr. \qquad (13)$$

Використовуючи результати роботи [1], легко встановити справедливість наступних тверджень.

Теорема. Задачі (10), (11) ((12), (13)) – еквівалентні. Їх розв'язок $u_m(r,\varphi)$ існує і є єдиним в H_m. Якщо $u_m(r,\varphi)\big|_{\overline{G}_l} \in C^1(\overline{G}_l)\cap C^2(G_l)$ $(l=1,2;\ m=1,2)$, то $u_m(r,\varphi)$ є класичним розв'язком задачі m.

Визначення. Розв'язки $u_1(r,\varphi)\in H_1$ і $u_2(r,\varphi)\in H_2$ відповідно задач (10), (11) ((12), (13)) називаються узагальненими розв'язками, а самі ці задачі - узагальненими задачами крайових задач 1 і 2 відповідно.

Задачі (10), (11) ((12), (13)) зручно розв'язувати за допомогою МСЕ. Для цього розіб'ємо області $\overline{G}_j$ на N_j скінченних трикутних елементів $\overline{e}_i^j$ $(i=\overline{1,N_j};\ j=1,2)$. Для знаходження наближеного узагальненого розв'язку задачі m використаємо простори $H_{km}^N \subset H_m$ скінченно-елементних функцій $v_k^N(r,\varphi)$. Позначимо $\overline{H}_k^N$ простір неперервних на областях $\overline{G}_1$, $\overline{G}_2$ функцій $v_k^N(r,\varphi)$, що є повними поліномами степеня k змінних r,φ на кожному з трикутників розбиття $\overline{e}_i^j$ області $\overline{G}$. Тоді наближений узагальнений розв'язок $u_{km}^N(r,\varphi)$ крайової задачі m (m=1,2) будемо шукати в підмножині $H_{km}^N \subset H_m$. Тут H_{k1}^N - множина функцій $v_k^N(r,\varphi)\in \overline{H}_k^N$, які набувають відомого значення, що задається в крайовій умові першого роду на Γ_1, та задовольняють умови періодичності, H_{k2}^N - множина функцій $v_k^N(r,\varphi)\in \overline{H}_k^N$, які набувають відомих значень, що задаються в крайових умовах першого роду на Γ_1, Γ_3. Виходячи з варіаційної задачі (10) або (12) (аналогічно задачі в слабкій постановці (11) або (13)), числовий наближений узагальнений розв'язок отримуємо як розв'язок системи лінійних алгебраїчних рівнянь з симетричною додатно визначеною розрідженою матрицею.

Якщо класичний розв'язок $u_m(r,\varphi)$ задачі m (m =1,2) має на областях G_l $(l=1,2)$ обмежені неперервні часткові похідні до (k+1)-го порядку включно, то згідно з [1] для наближеного узагальненого розв'язку $u_{km}^N(r,\varphi)\in H_{km}^N$ цієї задачі справедлива оцінка

$$\left\| u_m - u_{mk}^N \right\|_{W_2^1} \le \frac{c_m h^k}{f(\theta)}, \tag{14}$$

де $c_m = const > 0$, h - довжина найбільшої сторони всіх трикутників розбиття; k – степінь поліномів МСЕ; при k=1 $f(\theta)=\cos(\theta)$, θ – половина величини найбільшого кута; при k=2,3 $f(\theta)=\sin(\theta)$, θ – величина найменшого кута всіх трикутників розбиття; $\|\psi\|_{W_2^1}^2 = \iint\limits_G \{\psi^2 + (\frac{\partial\psi}{\partial r})^2 + (\frac{\partial\psi}{\partial\varphi})^2\} dr d\varphi.$

Результати розв'язання модельних прикладів. В області $G = G_1 \cup G_2$ (рис. 1, а) визначена крайова задача 1, де

$$\overline{k}_{11} = \begin{cases} 0.5,\ (r,\varphi)\in \overline{G}_1, \\ 0.75,\ (r,\varphi)\in \overline{G}_2, \end{cases} \quad \overline{k}_{12} = \overline{k}_{21} = \begin{cases} 0.75,\ (r,\varphi)\in \overline{G}_1, \\ 1.25,\ (r,\varphi)\in \overline{G}_2, \end{cases} \quad \overline{k}_{22} = \begin{cases} 1.5,\ (r,\varphi)\in \overline{G}_1, \\ 2.25,\ (r,\varphi)\in \overline{G}_2, \end{cases}$$

$$f(r,\varphi) = \begin{cases} (1.5\sin\varphi - 0.5r)/r^2,\ (r,\varphi)\in G_1, \\ (2.25\sin\varphi - 1.5r)/r^2,\ (r,\varphi)\in G_2. \end{cases}$$

Параметри умов спряження (2), (3) наступні: $R_1 = 1;\ R_2 = 0.5;\ \beta_1 = 3;$ $\alpha_1 = 0.25\cos\varphi - 3\sin\varphi - 9.$

Параметри крайових умов (4), (5) такі: $g_1 = \sin\varphi + 1$; $\overline{\alpha}_1 = 1$; $\overline{\beta}_1 = \sin\varphi + 7.5 + 5\cos\varphi / 12$.

За цих даних класичний розв'язок модельного прикладу має вигляд

$$u(r,\varphi) = \begin{cases} r + \sin\varphi, & (r,\varphi) \in G_1, \\ 2r + \sin\varphi, & (r,\varphi) \in G_2. \end{cases}$$

Задачу розв'язано за допомогою системи DIFUS. Область розбивалася на елементи з трьома та шістьма вузловими точками з подвійною нумерацією вузлів на включенні, тобто для апроксимації використовувалися кусково-лінійні та кусково-квадратичні функції МСЕ. Застосування різних видів апроксимації суттєво не впливало на точність наближеного розв'язку. При використанні кусково-квадратичних функцій область $\overline{G}$ з розрізом γ_0 розбивалась на 96 трикутних елементів. Порядок матриці МСЕ n=234. Півширина стрічки ненульових елементів матриці після перенумерації вузлів з використанням профільної схеми m=22. Відносна похибка $\delta = \left|(u - u_k^N)/u\right| \cdot 100\%$ отриманого наближеного числового розв'язку знаходилась в наступних межах: $(3.6\cdot10^{-7} < \Delta < 2.0\cdot10^{-2})$ %. В табл. 1 наведено деякі результати розрахунку.

Таблиця 1

Результати розрахунку крайової задачі 1

Номер вузла	r-координата вузла	φ-координата вузла	Точний розв'язок	Наближений розв'язок	Відносна похибка
6	1.0833	3π/2	0.833333	0.832616	$8.6\cdot10^{-2}$
22	1	π/2	2	2	$3.6\cdot10^{-7}$
55	1.6667	2π	1.666667	1.666667	$4.7\cdot10^{-7}$
124	2	3π/2	2.707107	2.706555	$2.0\cdot10^{-2}$
127	2	3π/2	4.707107	4.706171	$2.0\cdot10^{-2}$
191	2.9167	7π/4	5.126227	5.126266	$7.7\cdot10^{-4}$
206	2.75	π	5.5	5.497855	$3.9\cdot10^{-4}$
229	3	π/2	7	7	$2.7\cdot10^{-6}$

В області $G = G_1 \cup G_2$ (рис. 1, б) визначена крайова задача 2, де

$$\overline{k}_{11} = \begin{cases} 2, & (r,\varphi) \in \overline{G}_1, \\ 1.5, & (r,\varphi) \in \overline{G}_2, \end{cases} \quad \overline{k}_{12} = \overline{k}_{21} = \begin{cases} 1, & (r,\varphi) \in \overline{G}_1, \\ 0.75, & (r,\varphi) \in \overline{G}_2, \end{cases} \quad \overline{k}_{22} = \begin{cases} 0.75, & (r,\varphi) \in \overline{G}_1, \\ 0.5, & (r,\varphi) \in \overline{G}_2, \end{cases}$$

$$f(r,\varphi) = \begin{cases} -(8r + 2\varphi + 2)/r, & (r,\varphi) \in G_1, \\ -(12r + 3\varphi + 3)/r, & (r,\varphi) \in G_2. \end{cases}$$

Змішані крайові умови мають вигляд

$$u = 1 + \varphi,\ (r,\varphi) \in \Gamma_1,\ \overline{k}_{11}\frac{\partial u}{\partial r} + \frac{\overline{k}_{12}}{r}\frac{\partial u}{\partial \varphi} = -\overline{\alpha}_1 u + \overline{\beta}_1,\ (r,\varphi) \in \Gamma_2,$$

$$u = r^2,\ (r,\varphi) \in \Gamma_3^1,\ u = 2r^2,\ (r,\varphi) \in \Gamma_3^2,$$

$$\overline{k}_{21}\frac{\partial u}{\partial r} + \frac{\overline{k}_{22}}{r}\frac{\partial u}{\partial \varphi} = -\overline{\alpha}_2 u + \overline{\beta}_2,\ (r,\varphi) \in \Gamma_4^1,\ \ u = 2r^2 + 2\pi r,\ (r,\varphi) \in \Gamma_4^2,$$

де $\overline{\alpha}_1 = 1$; $\overline{\beta}_1 = 37.5 + 9\varphi$; $\overline{\alpha}_2 = 70$; $\overline{\beta}_2 = 70r^2 + 2r + 70\pi r + 0.75 + \pi$.

Параметри умов спряження (2), (3) такі: $R_1 = 0.5$; $R_2 = 1$; $\delta = 14 + 2\varphi$; $\beta_1 = 3$; $\alpha_1 = -7\varphi - 11.5$.

За цих даних класичний розв'язок модельного прикладу має вигляд:

$$u(r,\varphi)=\begin{cases} r^2+r\varphi,\ (r,\varphi)\in G_1, \\ 2r^2+2r\varphi,\ (r,\varphi)\in G_2. \end{cases}$$

При використанні кусково-квадратичних розривних функцій область $\overline{G}$ з розрізом γ_0 розбивалась на 216 трикутних елементів з n=518 вузлами розбиття, m =18. Межі відносної похибки: $(8.9\cdot10^{-7}<\Delta<6.6\cdot10^{-2})$ % - для $v_2^N\in H_2^N$. В табл. 2 наведено деякі результати розрахунку.

Таблиця 2

Результати розрахунку крайової задачі 2

Номер вузла	r-координата вузла	φ-координата вузла	Точний розв'язок	Наближений розв'язок	Відносна похибка
16	1.0278	π/6	1.5944704	1.5944615	$5.6\cdot10^{-4}$
204	1.8333	π	9.1206981	9.1146328	$6.6\cdot10^{-2}$
247	2	5π/6	9.2359877	9.2368799	$9.6\cdot10^{-3}$
247	2	5π/6	18.471975	18.471035	$5.1\cdot10^{-3}$
268	2	π/6	5.0471976	5.0470098	$3.7\cdot10^{-3}$
272	2	π/6	10.094395	10.094663	$2.6\cdot10^{-3}$
278	2.1111	π	22.128084	22.128085	$8.9\cdot10^{-7}$
499	2.9722	2π/3	30.118227	30.120221	$6.6\cdot10^{-3}$

Висновки. Для розв'язування задач, що описуються еліптичним рівнянням в полярній системі координат з умовами спряження неідеального контакту, зручно використовувати побудовані на основі МСЕ високоточні обчислювальні алгоритми. З використанням розробленого на основі цих алгоритмів програмного забезпечення розв'язано модельні приклади. Теоретичні результати підтверджені експериментальними розрахунками.

The problems for the elliptical equation in polar coordinates with conjugate conditions are considired. Computing algorithms of the increased accuracy order of sampling for the problems under considiration basing on the finite elements method are constructed. The results of a solution of the models examples are indicated.

Література

1. Дейнека В.С., Сергиенко И.В. Модели и методы решения задач в неоднородных средах. – Киев: Наук. думка, 2001. – 606 с.
2. Дейнека В.С., Сергиенко И.В., Скопецкий В.В. Математические модели и методы расчета задач с разрывными решениями. – Киев: Наук. думка, 1995. – 262 с.
3. Баран І. Розрахунок стаціонарних температурних полів у неоднорідних середовищах // Вісник Тернопільського державного технічного університету імені Івана Пулюя. – Тернопіль, 2003. – Том 8, №2. – С. 111-117.
4. Дейнека В.С., Баран І.О. Автоматизована система DIFUS для розрахунку процесів дифузії в неоднорідних середовищах // Вимірювальна та обчислювальна техніка в технологічних процесах. – 2002. – №2. – С. 111-115.
5. Баран І.О. Високоточні обчислювальні алгоритми та система автоматизованого розрахунку дифузійних процесів в багатокомпонентних середовищах: Дис...канд. техн. наук: 01.05.02. Тернопіль, ТДТУ, 2003.
6. Дейнека В.С., Баран И.О. Высокоточные вычислительные алгоритмы для эллиптического уравнения в полярной системе координат с условиями сопряжения // Компьютерная математика: Сб. науч. тр. – Киев, 2003, №1. – С. 141-150.

Одержано 11.03.2005 р.