УДК 518.61.001.573

А. Бомба, канд.фіз.-мат.наук; І. Присяжнюк; Ю. Климюк
Рівненський державний гуманітарний університет

ЧИСЕЛЬНО-АСИМПТОТИЧНЕ НАБЛИЖЕННЯ РОЗВ'ЯЗКІВ ОДНОГО КЛАСУ ПРОСТОРОВИХ ЗАДАЧ КОНВЕКТИВНО-ДИФУЗІЙНОГО ПЕРЕНОСУ В ПЛОСКИХ ФІЛЬТРАЦІЙНИХ ПЛАСТАХ

Побудовано алгоритм асимптотичного наближення розв'язків сингулярно збурених просторових задач конвективно-дифузійного переносу в плоскому горизонтальному пористому пласті – криволінійному паралелепіпеді, обмеженому поверхнями течії та еквіпотенціальними поверхнями. Наведено результати числових розрахунків.

Вступ. У роботах [1-3] та ін. авторів, ґрунтуючись на відомій публікації Вішика В.Й., Люстерника Л.А. [4], розроблено асимптотичний метод розв'язання типових крайових та змішаних задач для сингулярно збурених параболічних та еліптичних рівнянь у прямокутних областях (прямокутник, півсмуга тощо) з урахуванням різного рівня гладкості початкової і граничних умов та їх узгодженості у кутових точках. Разом з тим аналіз та дослідження робіт [2], [5-6] показує, що найбільш ефективною методикою розв'язання двомірних задач для рівнянь конвективної дифузії при фільтрації підземних вод є перетворення цих рівнянь до нових незалежних змінних – координат області комплексного потенціалу. З використанням цієї методики сумісно з аналітичними і чисельно-аналітичними методами були отримані точні або наближенні аналітичні розв'язки найбільш типових двомірних задач стаціонарної і нестаціонарної дифузії, і, зокрема, конвективного переносу, що виникають при дослідженні процесів забруднення або засолення підземних вод і родючих земель. В роботах [7-9] ця методика була використана разом з асимптотичним методом Вішика-Люстерника при побудові розв'язків деяких двомірних задач типу "конвекція-дифузія" при фільтрації в пористому середовищі. Актуальною є проблема застосування такої методики переходу до області комплексного потенціалу і разом з нею асимптотичного методу до розв'язання просторових сингулярно збурених задач типу "фільтрація-конвекція-дифузія" [10]. У даній роботі йдеться про чисельно-асимптотичне наближення просторових задач конвективно-дифузійного переносу при плоскій фільтрації у випадку переважання процесу конвективного переносу над дифузійним.

Постановка задачі. Розглянемо модельну задачу конвективної дифузії для області $G = G_z \times (0,\infty)$, $G_z = G_{\tilde{z}} \times (0,T)$, де $G_{\tilde{z}}$ ($\tilde{z} = x + iy$) – однозв'язна чотирикутна криволінійна область (пористий пласт), обмежена чотирма гладкими ортогональними між собою в точках перетину кривими $AB=\{\tilde{z}=x+iy: f_1(x,y)=0\}$, $BC=\{\tilde{z}: f_2(x,y)=0\}$, $CD=\{\tilde{z}: f_3(x,y)=0\}$, $DA=\{\tilde{z}: f_4(x,y)=0\}$ (рис. 1а):

$$\vec{v} = -\chi \; grad \; h \, , \; div \, T \, \vec{v} = 0 \, , u_x = v_x c - D\frac{\partial c}{\partial x} \, , \; u_y = v_y c - D\frac{\partial c}{\partial y} \, , \; u_z = -D\frac{\partial c}{\partial z} \, ,$$

$$\frac{\partial u_x}{\partial x} + \frac{\partial u_y}{\partial y} + \frac{\partial u_z}{\partial z} + \sigma \frac{\partial c}{\partial t} = 0 \, , \; (x,y,z,t) \in G \, , \; 0 \le z \le T \, , \; 0 < t < \infty \, , \quad (1)$$

$$c\Big|_{ABB^*A^*} = c_*(M,t), \; c\Big|_{CDD^*C^*} = c^*(M,t), \; c\Big|_{ADD^*A^*} = c_{**}(M,t), \; c\Big|_{BCC^*B^*} = c^{**}(M,t),$$

$$c\Big|_{ABCD} = c_{**}^{*}(M,t), \; c\Big|_{A^*B^*C^*D^*} = c_{*}^{**}(M,t), c(M,0) = c_0^0(M), \quad (2)$$

$$\Delta\varphi = 0 \, , \; \varphi\Big|_{ABB^*A^*} = \varphi_* \, , \; \varphi\Big|_{CDD^*C^*} = \varphi^* \, , \; \frac{d\varphi}{dn}\Big|_{ADD^*A^* \cup A^*D^*C^*B^* \cup B^*C^*CB \cup ADCB} = 0 \, , \quad (3)$$

де $c = c(x,y,z,t)$ – концентрація розчинної речовини у точці (x,y,z) в момент часу t, n – зовнішня нормаль до відповідної поверхні, T – потужність проникного пласту, $h = h(x,y)$ – напір в точці $\tilde{z} = x + iy$, ε – коефіцієнт конвективної дифузії, χ – коефіцієнт фільтрації, M – біжуча тачка відповідної поверхні, ε ($\varepsilon > 0$) – малий параметр (він характеризує переваги одних складових процесу над іншими), φ, v_x, v_y – відповідно потенціал та компоненти його швидкості (швидкості фільтрації в пористому середовищі G_z), $\sqrt{v_x^2(x,y) + v_y^2(x,y)} > v_* >> \varepsilon$, $c_*(M,t)$, $c^*(M,t)$, $c_0^0(M)$, $c_{**}(M,t)$, $c^{**}(M,t)$, $c_{**}^*(M,t)$, $c_*^{**}(M,t)$ – достатньо гладкі функції і узгоджені між собою на ребрах (гранях) області G.

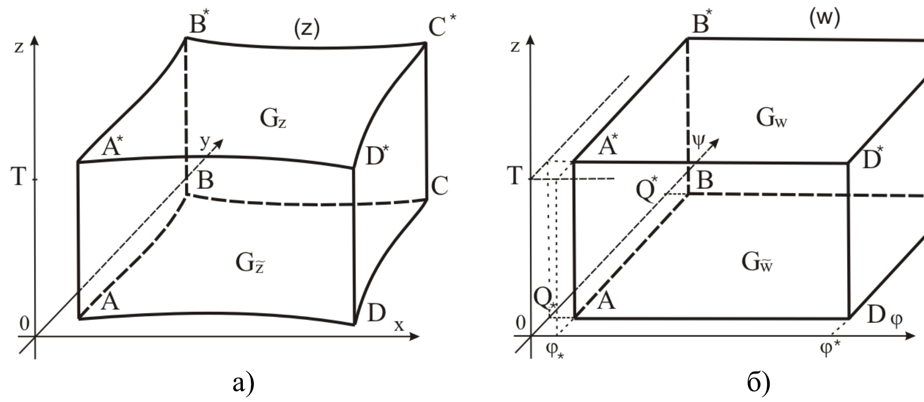


Рис. 1. Плоский фон для просторової “конвекції-дифузії” (просторова фізична область G_z (а) та відповідна область комплексного потенціалу G_w (б))

Нехай задача (3) шляхом конформного відображення [10] $G_z \mapsto G_w$ (або $G_w \mapsto G_z$), де $G_w = G_{\tilde{w}} \times (0,T)$, $G_{\tilde{w}} = \{\tilde{w} = \varphi + i\psi : \ \varphi_* < \varphi < \varphi^*, \ \ Q_* < \psi < Q^*\}$ – відповідна $G_{\tilde{z}}$ область комплексного потенціалу (рис. 1б), $\psi = \psi(x,y)$ – функція течії (комплексно спряжена до $\varphi = \varphi(x,y)$), є розв’язаною, зокрема, знайдено поле швидкості $(v_x(x,y), v_y(x,y))$. Параметр $Q^z = T \cdot Q = T \cdot \int\limits_{AB} -v_y dx + v_x dy$ (потік через довільний поперечний переріз G_z) знаходиться в процесі розв’язку даної задачі (див., напр., [10]). Тоді, здійснивши заміну змінних $x = x(\varphi,\psi)$, $y = y(\varphi,\psi)$, $z = z$, $t = t$ у рівнянні (1) та умовах (2), приходимо до відповідної “дифузійної задачі” для області G_w:

$$\varepsilon\left(q^2(\varphi,\psi)\frac{\partial^2 c}{\partial\varphi^2} + q^2(\varphi,\psi)\frac{\partial^2 c}{\partial\psi^2} + \frac{\partial^2 c}{\partial z^2}\right) - \frac{q^2(\varphi,\psi)}{T}\frac{\partial c}{\partial\varphi} = \frac{\partial c}{\partial t}, \tag{4}$$

$$c(\varphi_*,\psi,z,t) = c_*(\psi,z,t),\ c(\varphi^*,\psi,z,t) = c^*(\psi,z,t),\ c(\varphi,Q_*,z,t) = c_{**}(\varphi,z,t),$$
$$c(\varphi,Q^*,z,t) = c^{**}(\varphi,z,t),\ c(\varphi,\psi,0,t) = c_{**}^*(\varphi,\psi,t),\ c(\varphi,\psi,T,t) = c_*^{**}(\varphi,\psi,t),$$
$$c(\varphi,\psi,z,0) = c_0^0(\varphi,\psi,z), \tag{5}$$

де $\vec{q} = T \cdot \vec{v}$ – фільтраційна витрата, $Q = Q^* - Q_*$.

Асимптотика розв'язку. Розв'язок c поставленої задачі (4), (5) з точністю $O(\varepsilon^{n+1})$ шукаємо у вигляді такого асимптотичного ряду [3], [6], [7]:

$$c(\varphi,\psi,z,t)=c_0(\varphi,\psi,z,t)+\sum_{i=1}^{n}\varepsilon^i c_i(\varphi,\psi,z,t)+\sum_{i=0}^{n+1}\varepsilon^i \Pi_i(\xi,\psi,z,t)+\sum_{i=0}^{n+1}\varepsilon^{i/2}P_i(\varphi,\eta,z,t)+$$

$$+\sum_{i=0}^{n+1}\varepsilon^{i/2}\Gamma_i(\varphi,\mu,z,t)+\sum_{i=0}^{n+1}\varepsilon^{i/2}F_i(\varphi,\psi,\gamma,t)+\sum_{i=0}^{n+1}\varepsilon^{i/2}H_i(\varphi,\psi,\alpha,t)+R_n(\varphi,\psi,z,t,\varepsilon), \quad (6)$$

де R_n – залишковий член, $c_i(\varphi,\psi,z,t)$, ($i=\overline{0,n}$) – члени регулярної частини асимптотики, зокрема: c_0 – розв'язок відповідної виродженої задачі (конвективного переносу), $c_1,...,c_n$ – поправки, що враховують "вклад" дифузії всюди в даній області (за винятком деякої її приграничної зони). $\Pi_i(\xi,\psi,z,t)$, ($i=\overline{0,n+1}$) – функції типу пограншару в околі $\varphi=\varphi^*$ (поправки на виході фільтраційного потоку із області G_z), $P_i(\varphi,\eta,z,t)$, $\Gamma_i(\varphi,\mu,z,t)$, $F_i(\varphi,\psi,\gamma,t)$, $H_i(\varphi,\mu,\alpha,t)$ ($i=\overline{0,n+1}$) – функції типу пограншару відповідно в околах $\psi=Q_*$, $\psi=Q^*$, $z=0$, $z=T$, що враховують вплив бічних джерел забруднень, $\xi=(\varphi^*-\varphi)\cdot\varepsilon^{-1}$, $\eta=(\psi-Q_*)\varepsilon^{-1/2}$, $\mu=(Q^*-\psi)\cdot\varepsilon^{-1/2}$, $\gamma=z\cdot\varepsilon^{-1/2}$, $\alpha=(T-z)\cdot\varepsilon^{-1/2}$ – відповідні регуляризуючі перетворення (розтяги).

Аналогічно до [5–10], після підстановки (6) в (4) – (5) та застосування стандартної "процедури прирівнювання", для знаходження функцій c_i ($i=\overline{0,n}$) приходимо до таких задач:

$$\begin{cases}\dfrac{q^2(\varphi,\psi)}{T}\cdot c_{i\varphi}(\varphi,\psi,z,t)+c_{it}(\varphi,\psi,z,t)=g_i(\varphi,\psi,z,t),\\ c_i(\varphi,\psi,z,0)=h_i(\varphi,\psi,z), c_i(\varphi_*,\psi,z,t)=b_i(\psi,z,t),\end{cases} \quad (7)$$

$g_0(\varphi,\psi,t)=0$, $h_0(\varphi,\psi,z)=c_0^0(\varphi,\psi,z)$, $b_0(\psi,z,t)=c_*(\psi,z,t)$, $h_i(\varphi,\psi,z)=0$, $b_i(\psi,z,t)=0$, $g_i(\varphi,\psi,z,t)=q^2(\varphi,\psi)\left(c_{i-1\varphi\varphi}+c_{i-1\psi\psi}\right)+c_{i-1zz}$, $i=\overline{1,n}$.

У результаті їх розв'язання [6], [7] маємо:

$$c_0(\varphi,\psi,z,t)=\begin{cases}c_*(\psi,z,t-f(\varphi,\psi)),\ t\ge f(\varphi,\psi),\\ c_0^0(f^{-1}(f(\varphi,\psi)-t,\psi),\psi,z,t),t<f(\varphi,\psi),\end{cases}$$

$$c_i(\varphi,\psi,z,t)=\begin{cases}\int_{\varphi_*}^{\varphi}Tq^{-2}(\tilde\varphi,\psi)\cdot g_i(\tilde\varphi,\psi,z,f(\tilde\varphi,\psi)+t-f(\varphi,\psi))d\tilde\varphi,\ t\ge f(\varphi,\psi),\\ \int_0^t g_i(f^{-1}(\tilde t+f(\varphi,\psi)-t,\psi),\psi,z,\tilde t)d\tilde t,\ t<f(\varphi,\psi),\end{cases}$$

де $i=\overline{1,n}$, $f(\varphi,\tilde\psi)=T\int_{\varphi_*}^{\varphi}q^{-2}(s,\tilde\psi)ds$ – час проходження виділеної частинки вздовж відповідної лінії течії (як перетину деяких двох поверхонь $\psi(x,y,z)=\tilde{\tilde\psi}$, $Q_*\le\tilde{\tilde\psi}\le Q^*$, $z(x,y,z)=\tilde z$, $0\le\tilde z\le T$), від еквіпотенціальної поверхні $s=\varphi_*$ до еквіпотенціальної поверхні $s=\varphi$, f^{-1} – функція обернена до функції f стосовно змінної φ (зазначимо, що така функція існує, оскільки підінтегральна функція q^{-2} – неперервно диференційована, обмежена, додатньо визначена).

Функція $\Pi=\sum_{i=0}^{n+1}\Pi_i\,\varepsilon^i$, призначена для усунення нев'язки, внесеної побудованою регулярною частиною $c=\sum_{i=0}^{n}c_i\,\varepsilon^i$, в околі ділянки $\varphi=\varphi^*$ (виходу фільтраційної течії). Тобто повинна виконуватись умова: $\left.(c+\Pi)\right|_{\varphi=\varphi^*}=c^*+O\left(\varepsilon^{n+1}\right)$. Для знаходження цієї функції маємо задачі [5]:

$$q^2(\varphi^*,\psi)\Pi_{i\xi\xi}(\xi,\psi,z,t)+\frac{q^2(\varphi^*,\psi)}{T}\Pi_{i\xi}(\xi,\psi,z,t)=d_i(\xi,\psi,z,t),$$

$$\Pi_i\to 0,\ при\ \xi\to\infty,\ \ \Pi_i\left(0,\psi,z,t\right)=p_i\left(\psi,z,t\right),\ i=\overline{0,n+1},$$

де $d_0(\xi,\psi,z,t)=0$, $d_1(\xi,\psi,z,t)=\Pi_{0t}(\xi,\psi,z,t)$, $d_2(\xi,\psi,z,t)=f_1(\psi,z,t)e^{\frac{-\xi}{T}}+f_2(\psi,z,t)\xi e^{\frac{-\xi}{T}}$, $f_1(\psi,z,t)=\dfrac{-\partial c^*(\varphi^*,\psi,z,t)}{\partial t}-q^2(\varphi^*,\psi)\dfrac{\partial^2\Pi_0}{\partial\psi^2}-\dfrac{\partial^2\Pi_0}{\partial z^2}$, $f_2(\psi,z,t)=2q^{-1}(\varphi^*,\psi)q'(\varphi^*,\psi)\dfrac{\partial\Pi_0}{\partial t}-$ $-Tq^{-2}(\varphi^*,\psi)\dfrac{\partial^2\Pi_0}{\partial t^2}$, $p_0(\psi,z,t)=c^*\left(\psi,z,t\right)-c_0\left(\varphi^*,\psi,z,t\right)$, $p_j(\psi,z,t)=-c_j\left(\varphi^*,\psi,z,t\right)$, $j=\overline{1,n}$, $p_{n+1}(\psi,z,t)=0$, $d_i(\xi,\psi,z,t)=\Pi_{(i-1)t}-\sum_{j=1}^{i}V_j\Pi_{(i-j)_{\xi\xi}}-T^{-1}\sum_{j=1}^{i}V_j\Pi_{(i-j)_{\xi}}-$ $-\sum_{j=0}^{i-2}V_j\Pi_{(i-j-2)_{\psi\psi}}-\Pi_{(i-2)zz}$ ($i=\overline{3,n+1}$), V_j – коефіцієнти при ε^j ряду Тейлора функції $q^2(\varphi^*-\varepsilon\xi,\psi)$.

Аналогічно до [5-10], в результаті розв'язання даних задач маємо:

$$\Pi_0\left(\xi,\psi,z,t\right)=\left(c^*\left(\psi,z,t\right)-c_0\left(\varphi^*,\psi,z,t\right)\right)\cdot e^{\frac{-\xi}{T}},$$

$$\Pi_1\left(\xi,\psi,z,t\right)=-c_1\left(\varphi^*,\psi,z,t\right)\cdot e^{\frac{-\xi}{T}}-\frac{T\xi}{q^2(\varphi^*,\psi)}\frac{\partial\Pi_0}{\partial t},$$

$$\Pi_2\left(\xi,\psi,z,t\right)=-c_2\left(\varphi^*,\psi,z,t\right)\cdot e^{\frac{-\xi}{T}}-T^2\xi e^{\frac{-\xi}{T}}\left(f_1+f_2\right)-2^{-1}Tf_2\xi^2e^{\frac{-\xi}{T}},$$

$$\Pi_i\left(\xi,\psi,z,t\right)=p_i(\psi,z,t)e^{-\frac{\xi}{T}}+\sum_{j=1}^{i+1}s_{i,j}\left(\psi,z,t\right)\xi^je^{-\frac{\xi}{T}},\ i=\overline{3,n+1},$$

де всі $s_{i,j}$ виражаються через "складові" d_j.

Функції типу пограншару $P\left(\varphi,\eta,z,t\right)=\sum_{i=0}^{n+1}P_i\,\varepsilon^{i/2}$, $\Gamma\left(\varphi,\mu,z,t\right)=\sum_{i=0}^{n+1}\Gamma_i\,\varepsilon^{i/2}$ призначені для усунення нев'язок в околах $\psi=Q_*$, $\psi=Q^*$ відповідно. Для знаходження $P_i\left(\varphi,\eta,z,t\right)$ в результаті проведення стандартної процедури "прирівнювання" [7] приходимо до таких задач:

$$\begin{cases}q^2(\varphi,Q_*)P_{0\eta\eta}-T^{-1}q^2(\varphi,Q_*)P_{0\varphi}=P_{0t},\\ P_0(\varphi,Q_*,z,t)=c_{**}(\varphi,z,t)-c_0(\varphi,Q_*,z,t),\ P_0(\varphi,\eta,z,t)\underset{\eta\to\infty}{\to}0,\end{cases}$$

$$\begin{cases}q^2(\varphi,Q_*)P_{i\eta\eta}+T^{-1}q^2(\varphi,Q_*)P_{i\varphi}=P_{it}-M_i(\varphi,\eta,z,t),i=\overline{1,n+1},\\ P_i(\varphi,\eta,z,t)\underset{\eta\to\infty}{\to}0,\ P_i(\varphi,Q_*,z,t)=\begin{cases}0,\ якщо\ i\ непарне,\\ -c_{i-i/2}(\varphi,Q_*,z,t),\ якщо\ i\ парне.\end{cases}\end{cases}$$

Тут $M_i(\varphi,\eta,z,t)=\sum_{j=0}^{i}V_{*j}P_{(i-j)_{\eta\eta}}+\sum_{j=0}^{i}T^{-1}V_{*j}P_{(i-j)_{\varphi}}+I(i,2)\sum_{j=0}^{i-2}V_{*j}P_{(i-2-j)_{\varphi\varphi}}+I(i,2)P_{(i-2)_{zz}}$, де V_{*j} – коефіцієнти при $\varepsilon^{j/2}$ розкладу функції $q^2(\varphi,\sqrt{\varepsilon}\eta+Q_*)$ в ряд Тейлора в околі $\psi=Q_*$,

$$I(a,b)=\begin{cases}1 \ \text{якщо}\ a\ge b,\\ 0\ \text{якщо}\ a<b.\end{cases}$$

Задачі для знаходження функцій $\Gamma_i\left(\varphi,\mu,z,t\right)=\sum_{i=0}^{n+1}\Gamma_i\,\varepsilon^{i/2}$, $\mathrm{F}\left(\varphi,\psi,\gamma,t\right)=\sum_{i=0}^{n+1}F_i\,\varepsilon^{i/2}$,

$H\left(\varphi,\psi,\alpha,t\right)=\sum_{i=0}^{n+1}H_i\,\varepsilon^{i/2}$ (останні дві призначені для усунення нев'язок в околах $z=0$, $z=T$ відповідно) отримуємо аналогічно:

$$\begin{cases}F_{0\gamma\gamma}-T^{-1}q^2(\varphi,\psi)F_{0\varphi}=F_{0t},\\ F_0(\varphi,\psi,0,t)=\overset{*}{c}_{**}(\varphi,\psi,t)-c_0(\varphi,\psi,0,t),\ F_0(\varphi,\psi,\gamma,t)\underset{\gamma\to\infty}{\to}0,\end{cases}$$

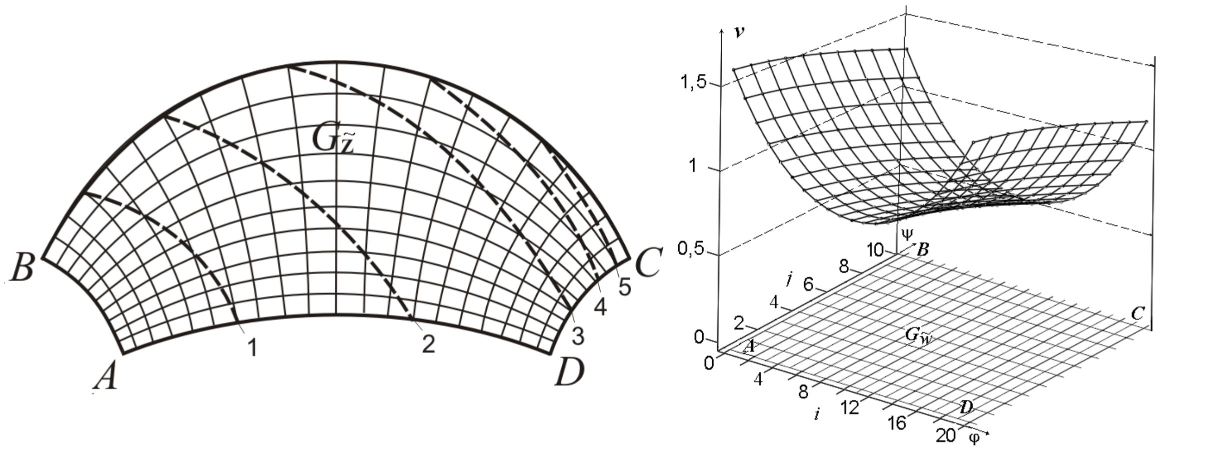
$$\begin{cases}F_{i\gamma\gamma}-T^{-1}q^2(\varphi,\psi)F_{i\varphi}=F_{it}-I(i,2)q^2(\varphi,\psi)\left(F_{i-2\varphi\varphi}+F_{i-2\psi\psi}\right),\ i=\overline{1,n+1},\\ F_i(\varphi,\psi,\gamma,t)\underset{\gamma\to\infty}{\to}0, F_0(\varphi,\psi,0,t)=\begin{cases}0,\ \text{якщо}\ i\ \text{непарне},\\ -c_{i-i/2}(\varphi,\psi,0,t),\ \text{якщо}\ i\ \text{парне},\end{cases}\end{cases}$$

$$\begin{cases}H_{0\gamma\gamma}-T^{-1}q^2(\varphi,\psi)H_{0\varphi}=H_{0t},\\ H_0(\varphi,\psi,T,t)=\overset{**}{c}_{*}(\varphi,\psi,t)-c_0(\varphi,\psi,T,t),\ F_0(\varphi,\psi,\alpha,t)\underset{\alpha\to\infty}{\to}0,\end{cases}$$

$$\begin{cases}H_{i\gamma\gamma}-T^{-1}q^2(\varphi,\psi)H_{i\varphi}=H_{it}-I(i,2)q^2(\varphi,\psi)\left(H_{i-2\varphi\varphi}+H_{i-2\psi\psi}\right),\ i=\overline{1,n+1},\\ H_i(\varphi,\psi,\alpha,t)\underset{\alpha\to\infty}{\to}0, H_i(\varphi,\psi,T,t)=\begin{cases}0,\ \text{якщо}\ i\ \text{непарне},\\ -c_{i-i/2}(\varphi,\psi,T,t),\ \text{якщо}\ i\ \text{парне}.\end{cases}\end{cases}$$

Чисельні розрахунки. Наведемо результати розрахунку просторового процесу типу "конвекція-дифузія" на ідеальному плоско паралельному фільтраційному фоні, породженому двома особливими точками $z_1=0$ та $z_2=4$ (відповідно витік та втік однакових інтенсивностей $Q_0=2\pi$), комплексний потенціал якого – $w=(Q_0/2\pi)\cdot\ln((z-z_1)/(z-z_2))$, при $\varphi_*=-1.5$, $\varphi^*=1.5$, $AD=\left\{z:\psi(x,y)=7\pi/6\right\}$, $BC=\left\{z:\psi(x,y)=3\pi/2\right\}$.

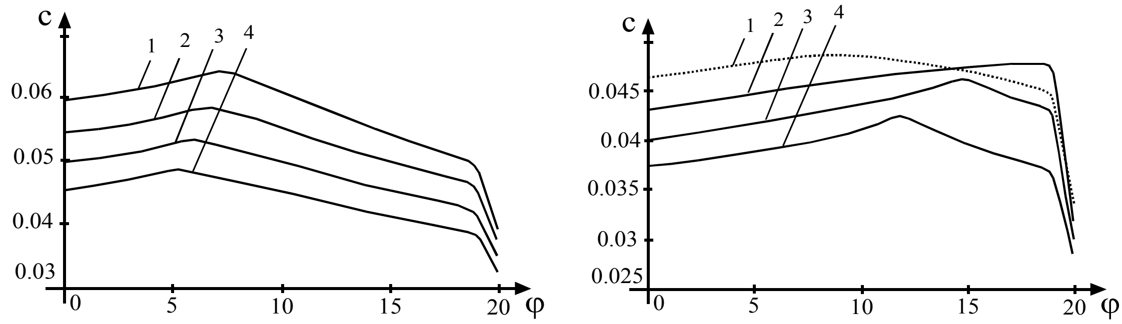
На рис.2 а), б) зображено рівномірну сітку області комплексного потенціалу $G_{\tilde{w}}$ та відповідну динамічну сітку в $G_{\tilde{z}}$: $\varphi(x,y)=\overline{\varphi}_i\overset{df}{=}\varphi_*+((\varphi^*-\varphi_*)\cdot i)/20$, $\psi(x,y)=\overline{\psi}_j\overset{df}{=}(Q_*\cdot j)/10$, $i=\overline{0,20}$, $j=\overline{0,10}$, величину швидкості фільтрації $v=\left((dz/dw)\overline{(dz/dw)}\right)^{-1/2}$ у вузлах (φ_i,ψ_j) та лінії фронту конвективного переносу $f(\varphi,\psi)=t_k$, $k=\overline{1,5}$ при $t_1=0.5579$, $t_2=1.6349$, $t_3=3.2639$, $t_4=4.9997$, $t_5=6.2778$ (криві 1-5 відповідно).



а) б)

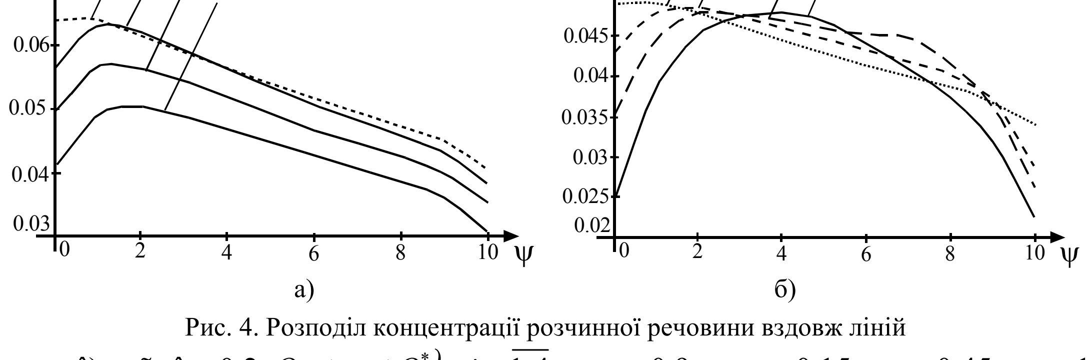
Рис. 2. Лінії фронту (а) та величина швидкості (б)

Розподіл концентрації $c(\varphi,\psi,z,t)$ розчинної речовини при $\varepsilon = 0.01$, $T = 1$, $c_0^0(\varphi,\psi,z) = ((\varphi+1.5)^2+\psi^2+z^2)^{-1}$, $c_*(\psi,z,t) = (2\cdot t+\psi^2+z^2)^{-1}$, $c^*(\psi,z,t) = (2\cdot t +$ $+9+\psi^2+z^2)^{-1}$, $c_{**}(\varphi,z,t) = \left((\varphi+1.5)^2+z^2+2\cdot t+(7\pi/6)^2\right)^{-1}$, $c^{**}(\varphi,z,t) = \left((\varphi+1.5)^2 +\right.$ $\left.+z^2+2\cdot t+(3\pi/2)^2\right)^{-1}$, $c_{**}^*(\varphi,\psi,t) = \left((\varphi+1.5)^2+\psi^2+2\cdot t\right)^{-1}$, $c_*^{**}(\varphi,\psi,t) = \left((\varphi+1.5)^2 +\right.$ $\left.+\psi^2+2\cdot t+1\right)^{-1}$ вздовж характерних ліній течії та горизонтальних та вертикальних еквіпотенціальних ліній зображено на рис.3-5.



а) б)

Рис. 3. Розподіл концентрації розчинної речовини вздовж ліній
$\left\{(\varphi,\psi_i,\hat{z}) = \tilde{\psi} : \hat{z} = 0.2,\ \varphi_* \le \varphi \le \varphi^*\right\}$, $i=\overline{1,4}$, $\psi_1 = 3.875$, $\psi_2 = 4.084$, $\psi_3 = 4.294$, $\psi_4 = 4.503$ в моменти часу $t = 0.85$ (а) та $t = 3.264$ (б)



а) б)

Рис. 4. Розподіл концентрації розчинної речовини вздовж ліній
$\left\{(\varphi_i,\psi,\hat{z}) = \tilde{\varphi} : \hat{z} = 0.2,\ Q_* \le \psi \le Q^*\right\}$, $i=\overline{1,4}$, $\varphi_1 = -0.9$, $\varphi_2 = -0.15$, $\varphi_3 = 0.45$, $\varphi_4 = 1.2$ в моменти часу $t = 0.85$ (а) та $t = 3.264$ (б)

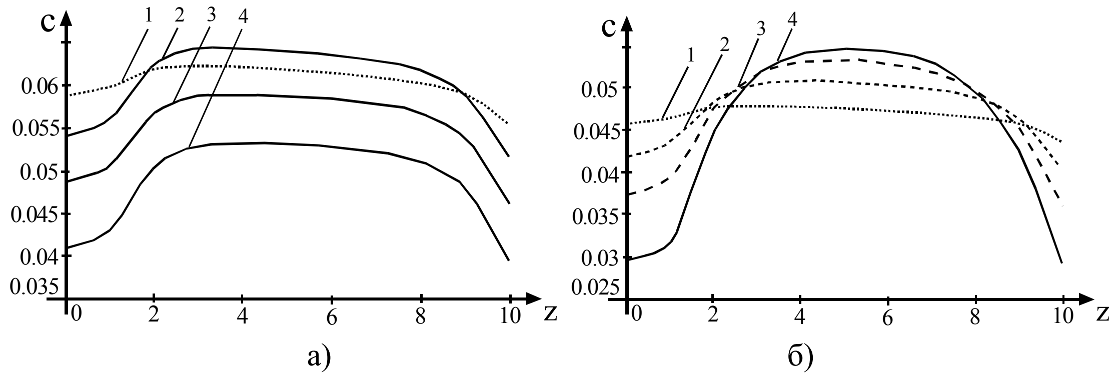


Рис. 5. Розподіл концентрації розчинної речовини вздовж ліній

$\{(\varphi_i, \hat{\psi}, z) = \tilde{\varphi} : \hat{\psi} = 3.875,\ 0 \le z \le T\}$, $i = \overline{1,4}$, $\varphi_1 = -0.9$, $\varphi_2 = -0.15$, $\varphi_3 = 0.45$, $\varphi_4 = 1.2$

в моменти часу $t = 0.85$ (а) та $t = 3.264$ (б)

Висновки і зауваження. Конструкція побудованого розв'язку (6) дає можливість "просторовість" задачі звести до області збурень, а також автономно доповнювати (збурювати) основну його частину відповідними "дифузійними поправками" і поправками в околах виходу фільтраційної течії та граничних поверхонь течії, тобто проводити обчислення в діалоговому автономному режимі.

Якщо початкова та граничні умови недостатньо узгодженні або недостатньо гладкі, то тут можливою є процедура згладження негладкостей розв'язків вироджених задач вздовж характеристик, що виходять із кутових (ребрових) точок області $G_w \times (0,\infty)$ [5], та побудова кутових функцій [1].

Перспективою є поширення запропонованої методики на відповідні нелінійні задачі.

The algorithm of asymptotic approximation of the decisions of singular indignant dimensional problem of convectional-diffusion migration in flat horizontal porous ledge – curvilinear, bounded by surface of current and equipotential surface is constructed. The results of numerical researches are given.

Література

1. Васильева А.Б., Бутузов В.Ф. Асимптотические методы в теории сингулярных возмущений.- М.: Высшая школа, 1980.- 208 с.
2. Бомба А.Я. Про асимптотичний метод розв'язання однієї задачі масопереносу при фільтрації в пористому середовищі // Укр. мат. журн., 1982.- Т.4, №4.-С. 493-496.
3. Bobisud L.E. Parabolic Equations wits a Small Paramer and discontinuons Data. // Jornal of mathematical analysis and opplications.- 1969-Vol. 26-P. 208-220.
4. Вишик М.И., Люстерник Л.Я. Регулярное вырождение и пограничный слой для линейных дифференциальных уравнений с малым параметром. // Успехи математических наук, 1957.- 12, вып. 5.- С. 3-122.
5. Бомба А.Я. Асимптотический метод решения одной сингулярно возмущённой задачи массопереноса. -К.: Киевский ун-т, 1986. - Деп. в УкрНИИНТИ, №286-Ук86.
6. Бомба А.Я. Чисельно-асимптотичне наближення розв'язків сингулярно-збурених нелінійних крайових задач типу "фільтрація-дифузія" за умов взаємовпливу градієнтів потенціалу та коефіцієнта фільтрації // Волинський математичний вісник.- 2002.- Вип. 9.- С.12-21.
7. Присяжнюк. І.М. Асимптотичний метод розв'язування сингулярно збурених крайових задач типу "конвекція-дифузія" у многозвязних областях// Волинський математичний вісник. Серія прикладна математика. - 2003. - Вип. 1. - С. 118-128.
8. Бомба А.Я., Пригорницкий Д.А., Присяжнюк И.М. Решение задач типа "конвекция-фильтрация" в многосвязных областях // Компьютерная математика. - 2004. - №1. - С. 152-159.
9. Бомба А.Я., Скопецький В.В., Присяжнюк И.М. Решение задач типа "конвекция-фильтрация" в многосвязных областях // Компьютерная математика. - 2004. - №2. - С. 99-104.
10. Бомба А.Я. Просторові сингулярно збурені крайові задачі типу "конвекція-дифузія" // Волинський математичний вісник. Серія прикладна математика.- 2003.- Вип. 1.- С. 27-35.

Одержано 22.03.2005 р.