МАТЕМАТИЧНЕ МОДЕЛЮВАННЯ.
МАТЕМАТИКА. ФІЗИКА

УДК 517.52/524: 517.58/589

М. Ленюк[1], докт. фіз.-мат. наук; М. Шелестовська[2], канд. тех. наук
[1]*Тернопільський державний технічний університет імені Івана Пулюя*
[2]*Тернопільська академія народного господарства*

ПІДСУМОВУВАННЯ ФУНКЦІОНАЛЬНИХ РЯДІВ МЕТОДОМ ГІБРИДНОГО ІНТЕГРАЛЬНОГО ПЕРЕТВОРЕННЯ ТИПУ ГАНКЕЛЯ 2-ГО РОДУ - (КОНТОРОВИЧА-ЛЄБЄДЄВА) 2-ГО РОДУ - ГАНКЕЛЯ 2-ГО РОДУ

Методом порівняння розв'язків, побудованих на сегменті з двома точками спряження для сепаратної системи модифікованих диференціальних рівнянь Бесселя з різним порядком виродження в коефіцієнтах методом функцій Коші і методом відповідного скінченного гібридного інтегрального перетворення, підсумовано сім'ю поліпараметричних функціональних рядів.

Підсумовування функціональних рядів за функціями Бесселя $J_{\nu,\alpha}(br)$ та $N_{\nu,\alpha}(br)$ на кусково-однорідному інтервалі здійснено в роботах [1,2]. Підсумовування функціональних рядів за спеціальними функціями Бесселя $C_\alpha(\lambda r,b)$ та $D_\alpha(\lambda r,b)$ здійснено в роботах [3,4].

В даній статті здійснено підсумовування функціональних рядів за суперпозицією функцій Бесселя $J_{\nu,\alpha}$, $N_{\nu,\alpha}$, C_α та D_α на інтервалі полярної вісі з двома точками спряження.

Розглянемо крайову задачу про побудову на множині

$$I_{22} = \{r : r \in (R_0, R_1) \cup (R_1, R_2) \cup (R_2, R_3); R_0 > 0, R_3 < \infty\}$$

розв'язку системи модифікованих диференціальних рівнянь Бесселя

$$\begin{aligned} &\left(B_{\nu_1,\alpha_1} - q_1^2\right) u_1(r) = -g_1(r), \quad r \in (R_0, R_1), R_0 > 0 \\ &\left(B_{\alpha_2} - q_2^2\right) u_2(r) = -g_2(r), \quad r \in (R_1, R_2) \\ &\left(B_{\nu_2,\alpha_3} - q_3^2\right) u_3(r) = -g_3(r), \quad r \in (R_2, R_3), R_3 < \infty \end{aligned} \tag{1}$$

за крайовими умовами

$$(\alpha_{11}^0 \tfrac{d}{dr} + \beta_{11}^0) u_1(r)\Big|_{r=R_0} = g_0, \quad (\alpha_{22}^3 \tfrac{d}{dr} + \beta_{22}^3) u_3(r)\Big|_{r=R_3} = g_R \tag{2}$$

і умовами спряження

$$[(\alpha_{j1}^k \tfrac{d}{dr} + \beta_{j1}^k) u_k(r) - (\alpha_{j2}^k \tfrac{d}{dr} + \beta_{j2}^k) u_{k+1}(r)]\Big|_{r=R_k} = \omega_{jk}; \quad j,k = 1,2. \tag{3}$$

У рівностях (1)-(3) $q_j > 0$, $c_{1k} \cdot c_{2k} > 0$, $c_{jk} = \alpha_{2j}^k \beta_{1j}^k - \alpha_{1j}^k \beta_{2j}^k$,

$$B_{\nu,\alpha} = \tfrac{d^2}{dr^2} + (2\alpha+1) r^{-1} \tfrac{d}{dr} - (\nu^2 - \alpha^2) r^{-2}, \ \nu \ge \alpha \ge -1/2;$$

$$B_\alpha = r^2 \tfrac{d^2}{dr^2} + (2\alpha+1) r \tfrac{d}{dr} + \alpha^2 - \lambda^2 r^2 + (2\alpha+1) r \tfrac{d}{dr} + \alpha^2 - \lambda^2 r^2,$$

$\alpha > -1/2, \quad \lambda \in (0,\infty); \quad B_{\nu,\alpha}, B_\alpha -$ диференціальні оператори Бесселя.

Фундаментальну систему розв'язків для рівняння Бесселя $(B_{\nu,\alpha} - q^2)v = 0$ утворюють функції уявного аргумента $I_{\nu,\alpha}(qr)$ та $K_{\nu,\alpha}(qr)$ [5], а для рівняння Бесселя $(B_\alpha - q^2)v = 0$ - модифіковані функції Бесселя 1-го роду $I_{q,\alpha}(\lambda r)$ та 2-го роду $K_{q,\alpha}(\lambda r)$ [6].

Наявність фундаментальної системи розв'язків дає можливість будувати загальний розв'язок крайової задачі (1)-(3) методом функцій Коші [7,8]:

$$u_1(r) = A_1 I_{\nu_1,\alpha_1}(q_1 r) + B_1 K_{\nu_1,\alpha_1}(q_1 r) + \int_{R_0}^{R_1} \varepsilon_1(r,\rho,q) g_1(\rho) \rho^{2\alpha_1+1} d\rho,$$

$$u_2(r) = A_2 I_{q_2,\alpha_2}(\lambda r) + B_2 K_{q_2,\alpha_2}(\lambda r) + \int_{R_1}^{R_2} \varepsilon_2(r,\rho) g_2(\rho) \rho^{2\alpha_2-1} d\rho \tag{4}$$

$$u_3(r) = A_3 I_{\nu_2,\alpha_3}(q_3 r) + B_3 K_{\nu_2,\alpha_3}(q_3 r) + \int_{R_2}^{R_3} E_3(r,\rho) g_3(\rho) \rho^{2\alpha_3+1} d\rho.$$

У рівностях (4) функції $E_j(r,\rho)$ - функції Коші [7,8]:

$$E_j(r,\rho)\Big|_{r=\rho+0} - E_j(r,\rho)\Big|_{r=\rho-0} = 0$$

$$\frac{d}{dr} E_j(r,\rho)\Big|_{r=\rho+0} - \frac{d}{dr} E_j(r,\rho)\Big|_{r=\rho-0} = -[\varphi_j(\rho)]^{-1}, \tag{5}$$

$$\varphi_1(r) = r^{(2\alpha_1+1)},\ \varphi_2(r) = \rho^{2\alpha_2-1},\ \varphi_3(r) = \rho^{(2\alpha_3+1)}.$$

Визначимо функції:

$$U^{m1}_{\nu,\alpha;jk}(qR_m, qr) = (\alpha^m_{jk} \frac{\nu-\alpha}{R_m} + \beta^m_{jk}) I_{\nu,\alpha}(qR_m) + \alpha^m_{jk} q^2 R_m I_{\nu+1,\alpha+1}(qR_m),$$

$$U^{m2}_{\nu,\alpha;jk}(qR_m, qr) = (\alpha^m_{jk} \frac{\nu-\alpha}{R_m} + \beta^m_{jk}) K_{\nu,\alpha}(qR_m) - \alpha^m_{jk} q^2 R_m K_{\nu+1,\alpha+1}(qR_m),$$

$$\Psi^{m*}_{\nu,\alpha;jk}(qR_m, qr) = U^{m1}_{\nu,\alpha;jk}(qR_m) K_{\nu,\alpha}(qr) - U^{m2}_{\nu,\alpha;jk}(qR_m) I_{\nu,\alpha}(qr),$$

$$\Delta_{\nu_1,\alpha_1;j1}(q_1R_0, q_1R_1) =$$

$$= U^{01}_{\nu_1,\alpha_1;11}(q_1R_0) U^{12}_{\nu_1,\alpha_1;j1}(q_1R_1) - U^{02}_{\nu_1,\alpha_1;11}(q_1R_0) U^{11}_{\nu_1,\alpha_1;j1}(q_1R_1),$$

$$\Delta_{q_2,\alpha_2;jk}(\lambda R_1, \lambda R_2) = U^{11}_{q_2,\alpha_2;j2}(\lambda R_1) U^{22}_{q_2,\alpha_2;k1}(\lambda R_2) - U^{12}_{q_2,\alpha_2;j2}(\lambda R_1) U^{21}_{q_2,\alpha_2;k1}(\lambda R_2),$$

$$\Delta_{\nu_2,\alpha_3;j2}(q_3R_2, q_3R_3) = U^{21}_{\nu_2,\alpha_3;j2}(q_3R_2) U^{32}_{\nu_2,\alpha_3;22}(q_3R_3) - U^{22}_{\nu_2,\alpha_3;j2}(q_3R_2) U^{31}_{\nu_2,\alpha_3;22}(q_3R_3).$$

Інші величини загальноприйняті [4].

Безпосередньо перевіряється, що за функції Коші можна взяти функції:

$$E_1(r,\rho) = \frac{q_1^{2\alpha_1}}{\Delta_{\nu_1,\alpha_1;11}(q_1R_0, q_1R_1)} \times$$

$$\times \begin{cases} \Psi^{0*}_{\nu_1,\alpha_1;11}(q_1R_0, q_1r) \Psi^{1*}_{\nu_1,\alpha_1;11}(q_1R_1, q_1\rho),\ R_0 < r < \rho < R_1 \\ \Psi^{0*}_{\nu_1,\alpha_1;11}(q_1R_0, q_1\rho) \Psi^{1*}_{\nu_1,\alpha_1;11}(q_1R_1, q_1r),\ R_0 < \rho < r < R_1 \end{cases}, \tag{6}$$

$$E_2(r,\rho) = \frac{\lambda^{2\alpha_2}}{\Delta_{q_2,\alpha_2;11}(\lambda R_1, \lambda R_2)} \begin{cases} \Psi^{1*}_{q_2,\alpha_2;12}(\lambda R_1, \lambda r) \Psi^{2*}_{q_2,\alpha_2;11}(\lambda R_2, \lambda\rho),\ R_1 < r < \rho < R_2 \\ \Psi^{1*}_{q_2,\alpha_2;12}(\lambda R_1, \lambda\rho) \Psi^{2*}_{q_2,\alpha_2;11}(\lambda R_2, \lambda r),\ R_1 < \rho < r < R_2 \end{cases}, \tag{7}$$

$$E_3(r,\rho)=\frac{q_3^{2\alpha_3}}{\Delta_{\nu_2,\alpha_3;12}(q_3R_2,q_3R_3)}\times$$

$$\times\begin{cases}\Psi^{2*}_{\nu_2,\alpha_3;12}(q_3R_2,q_3r)\Psi^{3*}_{\nu_2,\alpha_3,22}(q_3R_3,q_3\rho),\ R_2<r<\rho<R_3\\ \Psi^{2*}_{\nu_2,\alpha_3;12}(q_3R_2,q_3\rho)\Psi^{3*}_{\nu_2,\alpha_3,22}(q_3R_3,q_3r),\ R_2<\rho<r<R_3\end{cases}. \qquad (8)$$

Крайові умови (2) і умови спряження (3) для визначення величин A_j та $B_j(j=\overline{1,3})$ дають алгебраїчну систему рівнянь:

$$U^{01}_{\nu_1,\alpha_1;11}(q_1R_0)A_1+U^{02}_{\nu_1,\alpha_1;11}(q_1R_0)B_1=g_0$$

$$U^{11}_{\nu_1,\alpha_1;j1}(q_1R_1)A_1+U^{12}_{\nu_1,\alpha_1;j1}(q_1R_1)B_1-U^{11}_{q_2,\alpha_2;j2}(\lambda R_1)A_2-U^{12}_{q_2,\alpha_2;j2}(\lambda R_1)B_2=$$

$$=\delta_{j1}\omega_{11}+\delta_{j2}(\omega_{21}+G_{12}),\quad j=1,2,$$

$$U^{21}_{q_2,\alpha_2;j1}(\lambda R_2)A_2+U^{22}_{q_2,\alpha_2;j1}(\lambda R_2)A_2-U^{21}_{\nu_2,\alpha_3,j2}(q_3R_2)A_3-U^{22}_{\nu_2,\alpha_3;j2}(q_3R_2)B_3=$$

$$=\delta_{j1}\omega_{12}+\delta_{j2}(\omega_{22}+G_{23}), \qquad (9)$$

$$U^{31}_{\nu_2,\alpha_3;22}(q_3R_3)A_3+U^{32}_{\nu_2,\alpha_3;22}(q_3R_3)B_3=g_R.$$

У системі (9) беруть участь символ Кронекера δ_{jk} та функції

$$G_{12}=\frac{c_{11}}{R_1^{2\alpha_1+1}}\int_{R_0}^{R_1}\frac{\Psi^{0*}_{\nu_1,\alpha_1;11}(q_1R_1,q_1\rho)}{\Delta_{\nu_1,\alpha_1}(q_1R_0,q_1R_1)}g_1(\rho)\rho^{2\alpha_1+1}d\rho-$$

$$-\frac{c_{21}}{R_1^{2\alpha_2+1}}\int_{R_1}^{R_2}\frac{\Psi^{2*}_{q_2,\alpha_2;11}(\lambda R_2,\lambda\rho)}{\Delta_{q_2,\alpha_2;12}(\lambda R_1,\lambda R_2)}g_2(\rho)\rho^{2\alpha_2-1}d\rho,$$

$$G_{23}=\frac{c_{12}}{R_2^{2\alpha_2+1}}\int_{R_1}^{R_2}\frac{\Psi^{1*}_{q_2,\alpha_2;12}(\lambda R_1,\lambda\rho)}{\Delta_{q_2,\alpha_2;11}(\lambda R_1,\lambda R_2)}g_2(\rho)\rho^{2\alpha_2-1}d\rho-$$

$$-\frac{c_{22}}{R_2^{2\alpha_3+1}}\int_{R_2}^{R_3}\frac{\Psi^{3*}_{\nu_2,\alpha_3;22}(q_3R_3,q_3\rho)}{\Delta_{\nu_2,\alpha_3;12}(q_3R_2,q_3R_3)}g_3(\rho)\rho^{2\alpha_3+1}d\rho.$$

Введемо до розгляду функції:

$$A_{(\nu,\alpha);j}(q)=\Delta_{\nu_2,\alpha_3;22}(q_3R_2,q_3R_3)\Delta_{q_2,\alpha_2;j1}(\lambda R_1,\lambda R_2)-$$

$$-\Delta_{\nu_2,\alpha_3;12}(q_3R_2,q_3R_3)\Delta_{q_2,\alpha_2;j2}(\lambda R_1,\lambda R_2),\ j=1,2,$$

$$B_{(\nu,\alpha);j}(q)=\Delta_{\nu_1,\alpha_1;11}(q_1R_0,q_1R_1)\Delta_{q_2,\alpha_2;2j}(\lambda R_1,\lambda R_2)-$$

$$-\Delta_{\nu_1,\alpha_1;21}(q_1R_0,q_1R_1)\Delta_{q_2,\alpha_2;1j}(\lambda R_1,\lambda R_2), \qquad (10)$$

$$\Theta_{(\nu,\alpha);1}(r,q)=\Delta_{\nu_1,\alpha_1;11}(q_1R_0,q_1R_1)\Psi^{1*}_{q_2,\alpha_2;22}(\lambda_2R_1,\lambda_2r)-$$

$$-\Delta_{\nu_1,\alpha_1;21}(q_1R_0,q_1R_1)\Psi^{1*}_{q_2,\alpha_2;12}(\lambda_2R_1,\lambda_2r),\quad(\nu,\alpha)=(\nu_1,\alpha_1;\nu_2,\alpha_2;\nu_3,\alpha_3),$$

$$\Theta_{(\nu,\alpha);2}(r,q)=\Delta_{\nu_2,\alpha_3;22}(q_3R_2,q_3R_3)\Psi^{2*}_{q_2,\alpha_2;11}(\lambda R_2,\lambda r)-$$

$$-\Delta_{\nu_2,\alpha_3;12}(q_3R_2,q_3R_3)\Psi^{2*}_{q_2,\alpha_2;21}(\lambda R_2,\lambda r).$$

Припустимо, що виконана умова однозначної розв'язності даної крайової задачі: визначник алгебраїчної системи (9) відмінний від нуля

$$\Delta_{(\nu,\alpha)}(q)\equiv\Delta_{\nu_1,\alpha_1;11}(q_1R_0,q_1R_1)A_{(\nu,\alpha);2}(q)-\Delta_{\nu_1,\alpha_1;21}(q_1R_0,q_1R_1)A_{(\nu,\alpha);1}(q)=$$
$$=\Delta_{\nu_2,\alpha_3;22}(q_3R_2,q_3R_3)B_{(\nu,\alpha);1}(q)-\Delta_{\nu_2,\alpha_3;12}(q_3R_2,q_3R_3)B_{(\nu,\alpha);2}(q)\neq 0. \qquad (11)$$

Визначимо: 1) породжені крайовою умовою в точці $r=R_0$ функції Гріна

$$W_{(\nu,\alpha);11}(r,q)=\frac{1}{\Delta_{(\nu,\alpha)}(q)}\Big[A_{(\nu,\alpha);1}(q)\Psi^{1*}_{\nu_1,\alpha_1;21}(q_1R_1,q_1r)-$$
$$-A_{(\nu,\alpha);2}(q)\Psi^{1*}_{\nu_1,\alpha_1;11}(q_1R_1,q_1r)\Big],$$
$$W_{(\nu,\alpha);12}(r,q)=-\frac{c_{11}}{q_1^{2\alpha_1}R_1^{2\alpha_1+1}}\frac{1}{\Delta_{(\nu,\alpha)}(q)}\Theta_{(\nu,\alpha);2}(r,q), \qquad (12)$$
$$W_{(\nu,\alpha);13}(r,q)=\frac{c_{11}}{q_1^{2\alpha_1}R_1^{2\alpha_1+1}}\cdot\frac{c_{12}}{\lambda^{2\alpha_2}R_2^{2\alpha_2+1}}\frac{1}{\Delta_{(\nu,\alpha)}(q)}\Psi^{3*}_{\nu_2,\alpha_3;22}(q_3R_3,q_3r);$$

2) породжені крайовою умовою в точці $r=R_3$ функції Гріна

$$W_{(\nu,\alpha);31}(r,q)=\frac{c_{21}}{\lambda^{2\alpha_2}R_1^{2\alpha_2+1}}\cdot\frac{c_{22}}{q_3^{2\alpha_3}R_2^{2\alpha_3+1}}\frac{1}{\Delta_{(\nu,\alpha)}(q)}\Psi^{0*}_{\nu_1,\alpha_1;11}(q_1R_0,q_1r),$$
$$W_{(\nu,\alpha);32}(r,q)=\frac{c_{22}}{q_3^{2\alpha_3}R_2^{2\alpha_3+1}}\frac{1}{\Delta_{(\nu,\alpha)}(q)}\Theta_{(\nu,\alpha);1}(r,q), \qquad (13)$$
$$W_{(\nu,\alpha);33}(r,q)=\frac{1}{\Delta_{(\nu,\alpha)}(q)}\Big[B_{(\nu,\alpha);1}(q)\Psi^{2*}_{\nu_2,\alpha_3;22}(q_3R_2,q_3r)-$$
$$-B_{(\nu,\alpha);2}(q)\Psi^{2*}_{\nu_2,\alpha_3;12}(q_3R_2,q_3r)\Big];$$

3) породжені неоднорідністю умов спряження функції Гріна

$$R^1_{(\nu,\alpha);11}(r,q)=\frac{A_{(\nu,\alpha);2}(q)}{\Delta_{(\nu,\alpha)}(q)}\Psi^{0*}_{\nu_1,\alpha_1;11}(q_1R_0,q_1r);$$
$$R^1_{(\nu,\alpha);21}(r,q)=-\frac{A_{(\nu,\alpha);1}(q)}{\Delta_{(\nu,\alpha)}(q)}\Psi^{0*}_{\nu_1,\alpha_1;11}(q_1R_0,q_1r),$$
$$R^1_{(\nu,\alpha);12}(r,q)=\frac{c_{21}}{\lambda^{2\alpha_2}R_1^{2\alpha_2+1}}\frac{\Delta_{\nu_2,\alpha_3;22}(q_3R_2,q_3R_3)}{\Delta_{(\nu,\alpha)}(q)}\Psi^{0*}_{\nu_1,\alpha_1;11}(q_1R_0,q_1r),$$
$$R^1_{(\nu,\alpha);22}(r,q)=-\frac{c_{21}}{\lambda^{2\alpha_2}R_1^{2\alpha_2+1}}\frac{\Delta_{\nu_2,\alpha_3;12}(q_3R_2,q_3R_3)}{\Delta_{(\nu,\alpha)}(q)}\Psi^{0*}_{\nu_1,\alpha_1;11}(q_1R_0,q_1r),$$
$$R^2_{(\nu,\alpha);11}(r,q)=-\frac{\Delta_{\nu_1,\alpha_1;21}}{\Delta_{(\nu,\alpha)}(q)}\Theta_{(\nu,\alpha);2}(r,q);\quad R^2_{(\nu,\alpha);21}(r,q)=\frac{\Delta_{\nu_1,\alpha_1;11}}{\Delta_{(\nu,\alpha)}(q)}\Theta_{(\nu,\alpha);2}(r,q),$$
$$R^2_{(\nu,\alpha);12}(r,q)=\frac{\Delta_{\nu_2,\alpha_3;22}}{\Delta_{(\nu,\alpha)}(q)}\Theta_{(\nu,\alpha);1}(r,q);\quad R^2_{(\nu,\alpha);22}(r,q)=-\frac{\Delta_{\nu_2,\alpha_3;12}}{\Delta_{(\nu,\alpha)}(q)}\Theta_{(\nu,\alpha);1}(r,q), \qquad (14)$$
$$R^3_{(\nu,\alpha);11}(r,q)=-\frac{c_{12}}{\lambda^{2\alpha_2}R_2^{2\alpha_2+1}}\frac{\Delta_{\nu_1,\alpha_1;21}(q_1R_0,q_1R_1)}{\Delta_{(\nu,\alpha)}(q)}\Psi^{3*}_{\nu_2,\alpha_3;22}(q_3R_3,q_3r),$$
$$R^3_{(\nu,\alpha);21}(r,q)=-\frac{c_{12}}{\lambda^{2\alpha_2}R_2^{2\alpha_2+1}}\frac{\Delta_{\nu_1,\alpha_1;11}(q_1R_0,q_1R_1)}{\Delta_{(\nu,\alpha)}(q)}\Psi^{3*}_{\nu_2,\alpha_3;22}(q_3R_3,q_3r)$$

$$R^3_{(\nu,\alpha);12} = -\frac{B_{(\nu,\alpha);2}(q)}{\Delta_{(\nu,\alpha)}(q)}\Psi^{3*}_{\nu_2,\alpha_3;22}(q_3R_3,q_3r),\ R^3_{(\nu,\alpha);22} = \frac{B_{(\nu,\alpha);1}(q)}{\Delta_{(\nu,\alpha)}(q)}\Psi^{3*}_{\nu_2,\alpha_3;22}(q_3R_3,q_3r);$$

4) породжені неоднорідністю системи функції впливу

$$H_{(\nu,\alpha);11}(r,\rho,q) = -q_1^{2\alpha_1}\begin{cases}\Psi^{0*}_{\nu_1,\alpha_1;11}(q_1R_0,q_1r)W_{(\nu,\alpha);11}(\rho,q), & R_0 < r < \rho < R_1\\ \Psi^{0*}_{\nu_1,\alpha_1;11}(q_1R_0,q_1\rho)W_{(\nu,\alpha);11}(r,q), & R_0 < \rho < r < R_1\end{cases},$$

$$H_{(\nu,\alpha);12}(r,\rho,q) = \frac{c_{21}}{R_1^{2\alpha_2+1}}\frac{1}{\Delta_{(\nu,\alpha)}(q)}\Psi^{0*}_{\nu_1,\alpha_1;11}(q_1R_0,q_1r)\Theta_{(\nu,\alpha);2}(\rho,q),$$

$$H_{(\nu,\alpha);13}(r,\rho,q) = \frac{c_{21}c_{22}}{\lambda^{2\alpha_2}R_1^{2\alpha_2+1}R_2^{2\alpha_3+1}}\Psi^{0*}_{\nu_1,\alpha_1;11}(q_1R_0,q_1r)\Psi^{3*}_{\nu_2,\alpha_3;22}(q_3R_3,q_3\rho),$$

$$H_{(\nu,\alpha);21}(r,\rho,q) = \frac{c_{11}}{R_1^{2\alpha_1+1}}\frac{1}{\Delta_{(\nu,\alpha)}(q)}\Psi^{0*}_{\nu_1,\alpha_1;11}(q_1R_0,q_1\rho)\Theta_{(\nu,\alpha);2}(r,q), \quad (15)$$

$$H_{(\nu,\alpha);22}(r,\rho,q) = \frac{\lambda^{2\alpha_2}}{\Delta_{(\nu,\alpha)}(q)}\begin{cases}\Theta_{(\nu,\alpha);1}(r,q)\Theta_{(\nu,\alpha);2}(\rho,q), & R_1 < r < \rho < R_2\\ \Theta_{(\nu,\alpha);1}(\rho,q)\Theta_{(\nu,\alpha);2}(r,q), & R_1 < \rho < r < R_2\end{cases},$$

$$H_{(\nu,\alpha);23}(r,\rho,q) = \frac{c_{22}}{R_2^{2\alpha_3+1}}\frac{1}{\Delta_{(\nu,\alpha)}(q)}\Theta_{(\nu,\alpha);1}(r,q)\Psi^{3*}_{\nu_2,\alpha_3;22}(q_3R_3,q_3\rho),$$

$$H_{(\nu,\alpha);31}(r,\rho,q) = \frac{c_{11}c_{12}}{R_1^{2\alpha_1+1}\lambda^{2\alpha_2}R_2^{2\alpha_2+1}}\frac{1}{\Delta_{(\nu,\alpha)}(q)}\times$$
$$\times\Psi^{0*}_{\nu_1,\alpha_1;11}(q_1R_0,q_1\rho)\Psi^{3*}_{\nu_2,\alpha_3;22}(q_3R_3,q_3r),$$

$$H_{\nu,(\alpha);32}(r,\rho,q) = \frac{c_{12}}{R_2^{2\alpha_2+1}}\frac{1}{\Delta_{(\nu,\alpha)}(q)}\Theta_{(\nu,\alpha);1}(\rho,q)\Psi^{3*}_{\nu_2,\alpha_3;22}(q_3R_3,q_3r),$$

$$H_{\nu,(\alpha);33}(r,\rho,q) = q_3^{2\alpha_3}\begin{cases}\Psi^{3*}_{\nu_2,\alpha_3;22}(q_3R_3,q_3\rho)W_{(\nu,\alpha);33}(r,q), & R_2 < r < \rho < R_3\\ \Psi^{3*}_{\nu_2,\alpha_3;22}(q_3R_3,q_3r)W_{(\nu,\alpha);33}(r,q), & R_2 < \rho < r < R_3\end{cases}.$$

У результаті однозначної розв'язності алгебраїчної системи (9) і підстановки одержаних значень A_j та $B_j(j=\overline{1,3})$ у формули (4) маємо єдиний розв'язок крайової задачі (1)-(3):

$$u_j(r) = W_{(\nu,\alpha);1j}(r,q)g_0 + W_{(\nu,\alpha);3j}(r,q)g_R + \sum_{i,k=1}^{2}R^j_{(\nu,\alpha);ik}(r,q)\omega_{ik} +$$
$$+\int_{R_0}^{R_1}H_{(\nu,\alpha);j1}(r,\rho,q)g_1(\rho)\rho^{2\alpha_1+1}d\rho + \int_{R_1}^{R_2}H_{(\nu,\alpha);j2}(r,\rho,q)g_2(\rho)\rho^{2\alpha_2-1}d\rho +$$
$$+\int_{R_2}^{R_3}H_{(\nu,\alpha);j3}(r,\rho,q)g_3(\rho)\rho^{2\alpha_3+1}d\rho, \quad j=\overline{1,3}. \quad (16)$$

Побудуємо розв'язок крайової задачі (1)-(3) методом інтегрального перетворення, породженого на множині I_{22} гібридним диференціальним оператором (ГДО)

$$M_{(\nu,\alpha)} = \Theta(r-R_0)\Theta(R_1-r)B_{\nu_1,\alpha_1} + \Theta(r-R_1)\Theta(R_2-r)B_{\alpha_2} +$$
$$+\Theta(r-R_2)\Theta(R_3-r)B_{\nu_2,\alpha_3}, \quad (17)$$

де $\Theta(x)$ - функція Хевісайда [8].

Гібридний диференціальний оператор $M_{(\nu,\alpha)}$ самоспряжений і на множині I_{22} не має особливої точки. Тому спектр його дійсний і дискретний.

Для побудови власних елементів оператора $M_{(\nu,\alpha)}$ (спектра і відповідної йому спектральної вектор-функції) розглянемо спектральну задачу Штурма-Ліувілля: побудувати ненульовий розв'язок сепаратної системи диференціальних рівнянь Бесселя для звичайних функцій

$$\begin{aligned} &(B_{\nu_1,\alpha_1}+b_1^2)V_{(\nu,\alpha);1}(r,\beta)=0, \quad r\in(R_0,R_1) \\ &(B_{\alpha_2}+b_2^2)V_{(\nu,\alpha);2}(r,\beta)=0, \quad r\in(R_1,R_2), \\ &(B_{\nu_2,\alpha_3}+b_3^2)V_{(\nu,\alpha);3}(r,\beta)=0, \quad r\in(R_2,R_3) \end{aligned} \tag{18}$$

за крайовими умовами

$$(\alpha_{11}^0 \tfrac{d}{dr}+\beta_{11}^0)V_{(\nu,\alpha);1}(r,\beta)\Big|_{r=R_0}=0, \quad (\alpha_{22}^3 \tfrac{d}{dr}+\beta_{22}^3)V_{(\nu,\alpha);3}(r,\beta)\Big|_{r=R_3}=0 \tag{19}$$

і умовами спряження

$$[(\alpha_{j1}^k \tfrac{d}{dr}+\beta_{j1}^k)V_{(\nu,\alpha);k}(r,\beta)-(\alpha_{j2}^k \tfrac{d}{dr}+\beta_{j2}^k)V_{(\nu,\alpha);k+1}(r,\beta)]\Big|_{r=R_k}=0, \quad j,k=1,2 \tag{20}$$

$b_m=(\beta^2+k_m^2)^{1/2}, \quad k_m^2\geq 0, \quad m=\overline{1,3}$.

Фундаментальну систему розв'язків для рівняння Бесселя $(B_{\nu,\alpha}+b^2)v=0$ утворюють функції Бесселя $J_{\nu,\alpha}(br)$ і $N_{\nu,\alpha}(br)$ [5], а для рівняння Бесселя $(B_\alpha+b^2)v=0$ - функції $C_\alpha(\lambda r,b)$ і $D_\alpha(\lambda r,b)$ [6].

Якщо покласти

$$\begin{aligned} &V_{(\nu,\alpha);1}(r,\beta)=A_1 J_{\nu_1,\alpha_1}(b_1 r)+B_1 N_{\nu_1,\alpha_1}(b_1 r) \\ &V_{(\nu,\alpha);2}(r,\beta)=A_2 C_{\alpha_2}(\lambda r,b_2)+B_2 D_{\alpha_2}(\lambda r,b_2) \\ &V_{(\nu,\alpha);3}(r,\beta)=A_3 J_{\nu_2,\alpha_3}(b_3 r)+B_3 N_{\nu_2,\alpha_3}(b_3 r), \end{aligned} \tag{21}$$

то крайові умови (19) і умови спряження (20) дають однорідну алгебраїчну систему:

$$\begin{gathered} u_{\nu_1,\alpha_1;11}^{01}(b_1R_0)A_1+u_{\nu_1,\alpha_1;11}^{02}(b_1R_0)B_1=0 \\ u_{\nu_1,\alpha_1;j1}^{11}(b_1R_1)A_1+u_{\nu_1,\alpha_1;j1}^{12}(b_1R_1)B_1-X_{\alpha_2;j2}^{11}(\lambda R_1,b_2)A_2-X_{\alpha_2;j2}^{12}(\lambda R_1,b_2)B_2=0, \; j=1,2, \\ X_{\alpha_2;j1}^{21}(\lambda R_2,b_2)A_2+X_{\alpha_2;j1}^{22}(\lambda R_2,b_2)B_2-u_{\nu_2,\alpha_3;j2}^{21}(b_3R_2)A_3-u_{\nu_2,\alpha_3;j2}^{22}(b_3R_2)B_3=0 \\ u_{\nu_2,\alpha_3;22}^{31}(b_3R_3)A_3+u_{\nu_2,\alpha_3;22}^{32}(b_3R_3)B_3=0. \end{gathered} \tag{22}$$

Визначимо функції:

$$\begin{gathered} \delta_{\nu_1,\alpha_1;j1}(\beta)=u_{\nu_1,\alpha_1;11}^{01}(b_1R_0)u_{\nu_1,\alpha_1;j1}^{12}(b_1R_1)-u_{\nu_1,\alpha_1;11}^{02}(b_1R_0)u_{\nu_1,\alpha_1;j1}^{11}(b_1R_1), \\ \delta_{\alpha_2;jk}(\beta)=X_{\alpha_2;j2}^{11}(\lambda R_1,b_2)X_{\alpha_2;k1}^{22}(\lambda R_2,b_2)-X_{\alpha_2;j2}^{12}(\lambda R_1,b_2)X_{\alpha_2;k1}^{21}(\lambda R_2,b_2), \\ \delta_{\nu_2,\alpha_3;j2}(\beta)=u_{\nu_2,\alpha_3;j2}^{21}(b_3R_2)u_{\nu_2,\alpha_3;22}^{32}(b_3R_3)-u_{\nu_2,\alpha_3;j2}^{22}(b_3R_2)u_{\nu_2,\alpha_3;22}^{31}(b_3R_3), \\ a_{(\nu,\alpha);j}(\beta)=\delta_{\nu_2,\alpha_3;22}(\beta)\delta_{\alpha_2;j1}(\beta)-\delta_{\nu_2,\alpha_3;12}(\beta)\delta_{\alpha_2;j2}(\beta), \quad j=1,2. \end{gathered}$$

Всі інші величини та функції загальноприйняті [4].

Алгебраїчна система (22) має ненульовий розв'язок тоді і тільки тоді, коли визначник системи

$$\delta_{(\nu,\alpha)}(\beta)\equiv a_{(\nu,\alpha);2}(\beta)\delta_{\nu_1,\alpha_1;11}(\beta)-a_{(\nu,\alpha);1}(\beta)\delta_{\nu_1,\alpha_1;21}(\beta)=0 \tag{23}$$

Корені β_n трансцендентного рівняння (23) утворюють дискретний спектр ГДО $M_{(\nu,\alpha)}$ [9]: дійсні, прості, симетричні відносно $\beta=0$; їх модулі складають монотонно зростаючу послідовність з єдиною граничною точкою $\beta=\infty$.

У результаті розв'язання алгебраїчної системи (22) при $\beta=\beta_n$ знаходимо, що спектральному параметру β_n відповідає спектральна вектор-функція

$$V_{(\nu,\alpha)}(r,\beta_n)=\{V_{(\nu,\alpha);1}(r,\beta_n);\; V_{(\nu,\alpha);2}(r,\beta_n);\; V_{(\nu,\alpha);3}(r,\beta_n)\},$$

компоненти $V_{(\nu,\alpha);j}(r,\beta_n)$ якої обчислюються за правилами:

$$V_{(\nu,\alpha);1}(r,\beta_n)=q_{1n}q_{2n}\Psi^0_{\nu_1,\alpha_1;11}(b_{1n}R_0,b_{1n}r),\quad b_{mn}=(\beta_n^2+k_m^2)^{1/2},\ m=\overline{1,3};$$

$$V_{(\nu,\alpha);2}(r,\beta_n)=q_{2n}[\delta_{\nu_1,\alpha_1;11}(\beta_n)\Psi^1_{\alpha_2;22}(\lambda R_1,\lambda r,b_{2n})-\delta_{\nu_1,\alpha_1;21}(\beta_n)\Psi^1_{\alpha_2;12}(\lambda R_1,\lambda r,b_{2n})],\tag{24}$$

$$V_{(\nu,\alpha);3}(r,\beta_n)=d_{(\nu,\alpha);2}(\beta_n)\Psi^2_{\nu_2,\alpha_3;12}(b_{3n}R_2,b_{3n}r)-\Psi^2_{\nu_2,\alpha_3;22}(b_{3n}R_2,b_{3n}r)d_{(\nu,\alpha);1}(\beta_n).$$

У рівностях (24) беруть участь функції:

$$q_{1n}=\frac{c_{21}shb_{2n}\pi}{\pi\lambda^{2\alpha_2}R_1^{2\alpha_2+1}},\ q_{2n}=\frac{2}{\pi}\frac{c_{22}}{b_{3n}^{2\alpha_3}R_2^{2\alpha_3+1}},$$

$$d_{(\nu,\alpha);j}(\beta_n)=\delta_{\nu_1,\alpha_1;11}(\beta_n)\delta_{\alpha_2;2j}(\beta_n)-\delta_{\nu_1,\alpha_1;21}(\beta_n)\delta_{\alpha_2;1j}(\beta_n)$$

$$\Psi^1_{\alpha_2;j2}(\lambda R_1,\lambda r,b_{2n})=X^{11}_{\alpha_2;j2}(\lambda R_1,b_{2n})D_{\alpha_2}(\lambda r,b_{2n})-X^{12}_{\alpha_2;j2}(\lambda R_1,b_{2n})C_{\alpha_2}(\lambda r,b_{2n}),$$

$$\Psi^2_{\nu_2,\alpha_3;j2}(b_{3n}R_2,b_{3n}r)=u^{21}_{\nu_2,\alpha_3;j2}(b_{3n}R_2)N_{\nu_2,\alpha_3}(b_{3n}r)-u^{22}_{\nu_2,\alpha_3;j2}(b_{3n}R_2)J_{\nu_2,\alpha_3}(b_{3n}r).$$

Згідно з роботою [9] маємо твердження.

Теорема (про зображення). Будь-яка вектор-функція $g(r)$ з області визначення оператора $M_{(\nu,\alpha)}$ зображається обсолютно і рівномірно збіжним рядом Фур'є за системою власних вектор-функцій $\{V_{(\nu,\alpha)}(r,\beta_n)\}_{n=1}^{\infty}$:

$$g(r)=\sum_{n=1}^{\infty}\int_{R_0}^{R_3}g(\rho)V_{(\nu,\alpha)}(\rho,\beta_n)\sigma(\rho)d\rho\frac{V_{(\nu,\alpha)}(r,\beta_n)}{||V_{(\nu,\alpha)}(r,\beta_n)||^2}.\tag{25}$$

У рівності (25) бере участь вектор-функція $g(r)=\sum_{k=1}^{3}\Theta(r-R_{k-1})\Theta(R_k-r)g_k(r)$, власна вектор функція $V_{(\nu,\alpha)}(r,\beta_n)=\sum_{k=1}^{3}\Theta(r-R_{k-1})\Theta(R_k-r)\,V_{(\nu,\alpha);k}(r,\beta_n)$ з квадратом норми

$$||V_{(\nu,\alpha)}(r,\beta_n)||^2=\int_{R_0}^{R_3}[V_{(\nu,\alpha)}(r,\beta_n)]^2\sigma(r)dr\equiv\int_{R_0}^{R_1}[V_{(\nu,\alpha);1}(r,\beta_n)]^2\sigma_1r^{2\alpha_1+1}dr+$$

$$+\int_{R_1}^{R_2}[V_{(\nu,\alpha);2}(r,\beta_n)]^2\sigma_2r^{2\alpha_2-1}dr+\int_{R_2}^{R_3}[V_{(\nu,\alpha);3}(r,\beta_n)]^2\sigma_3r^{2\alpha_3+1}dr$$

і вагова функція

$$\sigma(r)=\Theta(r-R_0)\Theta(R_1-r)\sigma_1r^{2\alpha_1+1}+\Theta(r-R_1)\Theta(R_2-r)\sigma_2r^{2\alpha_2-1}+\Theta(r-R_2)\Theta(R_3-r)\sigma_3r^{2\alpha_3+1},$$

$$\sigma_1=\frac{c_{11}}{c_{21}}\frac{c_{12}}{c_{22}}\frac{R_1^{2(\alpha_2-\alpha_1)}}{R_2^{2(\alpha_2-\alpha_3)}},\quad\sigma_2=\frac{c_{12}}{c_{22}}\frac{R_2^{2\alpha_3+1}}{R_2^{2\alpha_2+1}},\quad\sigma_3=1.$$

Ряд Фур'є (25) визначає пряме $H_{(\nu,\alpha);2}$ і обернене $H^{-1}_{(\nu,\alpha);2}$ скінченне гібридне інтегральне перетворення типу Ганкеля 2-го роду - (Конторовича - Лєбєдєва) 2-го роду – Ганкеля 2-го роду:

$$H_{(\nu,\alpha);2}[g(r)]=\int_{R_0}^{R_3}g(r)V_{(\nu,\alpha)}(r,\beta_n)\sigma(r)dr\equiv\tilde{g}_n=\sum_{k=1}^{3}\tilde{g}_{nk}\tag{26}$$

$$H^{-1}_{(\nu,\alpha);2}[\tilde{g}_n]=\sum_{n=1}^{\infty}\tilde{g}_n\frac{V_{(\nu,\alpha)}(r,\beta_n)}{||V_{(\nu,\alpha)}(r,\beta_n)||^2}\equiv g(r).\tag{27}$$

Побудований методом запровадженого формулами (26), (27) інтегрального пертворення за відомою логічною схемою [4] єдиний розв'язок крайової задачі (1)-(3) має структуру:

$$u_j(r)=\sum_{m=1}^{3}\int_{R_{m-1}}^{R_m}\left(\sum_{n=1}^{\infty}\frac{V_{(\nu,\alpha);j}V_{(\nu,\alpha);m}(\rho,\beta_n)}{(\beta_n^2+q^2)\|V_{(\nu,\alpha)}(r,\beta_n)\|^2}\right)g_m(\rho)\sigma_m\varphi_m(\rho)d\rho+$$

$$+\sum_{k=1}^{2}c_{1k}^{-1}\sigma_k R_k^{2\alpha_k+1}\left[\sum_{n=1}^{\infty}\frac{Z_{(\nu,\alpha);12}^{k}(\beta_n)V_{(\nu,\alpha);j}(r,\beta_n)}{(\beta_n^2+q^2)\|V_{(\nu,\alpha)}(r,\beta_n)\|^2}\omega_{2k}-\right. \tag{28}$$

$$\left.-\sum_{n=1}^{\infty}\frac{Z_{(\nu,\alpha);22}^{k}(\beta_n)V_{(\nu,\alpha);j}(r,\beta_n)}{(\beta_n^2+q^2)\|V_{(\nu,\alpha)}(r,\beta_n)\|^2}\omega_{1k}\right]-\sigma_1 R_0^{2\alpha_1+1}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{V_{(\nu,\alpha);1}(R_0,\beta_n)V_{(\nu,\alpha);j}(r,\beta_n)}{\alpha_{11}^{0}(\beta_n^2+q^2)\|V_{(\nu,\alpha)}(r,\beta_n)\|^2}g_0+$$

$$+R_3^{2\alpha_3+1}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{V_{(\nu,\alpha);3}(R_3,\beta_n)V_{(\nu,\alpha);j}(r,\beta_n)}{\alpha_{22}^{3}(\beta_n^2+q^2)\|V_{(\nu,\alpha)}(r,\beta_n)\|^2}g_R,\quad j=\overline{1,3}$$

$$\varphi_1=\rho^{2\alpha_1+1},\ \varphi_2=\rho^{2\alpha_2-1},\ \varphi_3=\rho^{2\alpha_3+1},\ Z_{(\nu,\alpha);i2}^{k}(\beta_n)=\left(\alpha_{i2}^{k}\,{}^{d}\!/_{dr}+\beta_{i2}^{k}\right)V_{(\nu,\alpha);k+1}(r,\beta_n)\Big|_{r=R_k}.$$

Порівнюючи розв'язки (16) і (28) в силу єдиності, маємо формули підсумовування поліпараметричних функціональних рядів:

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{V_{(\nu,\alpha);j}(r,\beta_n)V_{(\nu,\alpha);k}(r,\beta_n)}{(\beta_n^2+q^2)\|V_{(\nu,\alpha)}(r,\beta_n)\|^2}=\frac{1}{\sigma_k}H_{(\nu,\alpha);jk}(r,\rho,q);\quad j,k=\overline{1,3} \tag{29}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{Z_{(\nu,\alpha);12}^{k}(\beta_n)V_{(\nu,\alpha);j}(r,\beta_n)}{(\beta_n^2+q^2)\|V_{(\nu,\alpha)}(r,\beta_n)\|^2}=\frac{c_{1k}}{\sigma_k R_k^{2\alpha_k+1}}R_{(\nu,\alpha);2k}^{j}(r,q);\quad k=1,2 \tag{30}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{Z_{(\nu,\alpha);22}^{k}(\beta_n)V_{(\nu,\alpha);j}(r,\beta_n)}{(\beta_n^2+q^2)\|V_{(\nu,\alpha)}(r,\beta_n)\|^2}=\frac{c_{1k}}{\sigma_k R_k^{2\alpha_k+1}}R_{(\nu,\alpha);1k}^{j}(r,q);\quad k=1,2 \tag{31}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{V_{(\nu,\alpha);1}(R_0,\beta_n)V_{(\nu,\alpha);j}(r,\beta_n)}{\alpha_{11}^{0}(\beta_n^2+q^2)\|V_{(\nu,\alpha)}(r,\beta_n)\|^2}=-\frac{1}{\sigma_1 R_0^{2\alpha_1+1}}W_{(\nu,\alpha);1j}(r,q);\quad j=\overline{1,3} \tag{32}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{V_{(\nu,\alpha);3}(R_3,\beta_n)V_{(\nu,\alpha);j}(r,\beta_n)}{\alpha_{22}^{3}(\beta_n^2+q^2)\|V_{(\nu,\alpha)}(r,\beta_n)\|^2}=\frac{1}{R_3^{2\alpha_3+1}}W_{(\nu,\alpha);3j}(r,q);\quad j=\overline{1,3} \tag{33}$$

Основна теорема. Якщо вектор-функція $f(r)=\{B_{\nu_1,\alpha_1}[g_1(r)];B_{\alpha_2}[g_2(r)];$ $B_{\nu_2,\alpha_3}[g_3(r)]\}$ неперервна на множині I_{22}, а вектор-функція $g(r)$ задовольняє крайові умови (2) та умови спряження (3) і виконується умова (11) однозначної розв'язності крайової задачі (1)-(3), то справджуються формули (29)-(33) підсумовування поліпараметричних функціональних рядів за власними елементами ГДО $M_{(\nu,\alpha)}$, визначеного рівністю (17).

Висновок: Результати роботи поповнюють довідкову математичну літературу і можуть бути використані при підсумовуванні функціональних рядів за власними елементами ГДО, які появляються при моделюванні фізико-технічних процесів в неоднорідних середовищах.

The family of polyparametrical functional sequences has been summarized using the method of comparison of solutions built on the two-coupling points segment for the separate systems of modificated differential Bessel equations with different order of degeneration in coefficients by means of Koshier functions method and by the method of corresponding finite hybrid integral transformation.

Література

1. Блажієвський А.М., Ленюк М.П. Зображення поліпараметричних функціональних рядів методом скінченних гібридних інтегральних перетворень (Фур'є, Бесселя, Лежандра). Том І. – Київ: Ін-т математики НАН України, 1999.- 167 с.
2. Блажієвський А.М., Ленюк М.П. Зображення поліпараметричних функціональних рядів методом скінченних гібридних інтегральних перетворень (Фур'є, Бесселя, Лежандра). Том ІІ. – Київ: Ін-т математики НАН України, 2000.- 186 с.
3. Блажієвський А.М., Ленюк М.П. Зображення поліпараметричних функціональних рядів методом скінченних гібридних інтегральних перетворень (Фур'є, Бесселя, Лежандра). Том ІІІ. – Чернівці: Прут, 2002. – 264 с.
4. Ленюк М.П. Підсумовування поліпараметричних функціональних рядів методом скінченних гібридних інтегральних перетворень (Фур'є, Бесселя, Лежандра, Конторовича-Лєбєдєва). Том IV. – Чернівці: Прут, 2003. – 318 с.
5. Ленюк М.П. Исследование основных краевых задач для диссипативного волнового уравнения Бесселя. – Киев, 1983. – 61 с. – (Препринт/АН УССР.-Ин-т математики; 83.3)
6. Ленюк М.П., Міхалевська Г.І. Інтегральні перетворення типу Конторовича-Лєбєдєва. – Чернівці: Прут, 2002. – 280 с.
7. Степанов В.В. Курс дифференциальних уравнений. – М.: Физматгиз, 1959. – 468 с.
8. Шилов Г.Е. Математический анализ. Второй специальный курс. – М.: Наука, 1965. –328 с.
9. Комаров Г.М., Ленюк М.П., Мороз В.В. Скінченні гібридні інтегральні перетворення, породжені диференціальними рівняннями другого порядку. – Чернівці: Прут, 2001.– 228 с.

Одержано 02.07.2004 р.