

УДК 539.375: 620.178.7: 620.172.2: 624.07

В. Бойко¹, канд.техн.наук; Я. Іваницький¹, докт.техн.наук;

О. Обухівський², канд.техн.наук

¹Фізико-механічний інститут ім. Г.В.Карпенка НАН України, Львів

²Тернопільський державний технічний університет імені Івана Пулюя

ТРИТОЧКОВИЙ УДАРНИЙ ЗГИН БАЛКОВОГО ЗРАЗКА З НЕСИМЕТРИЧНОЮ ТРІЩИНОЮ

Розглянуто випадок ударного згину балкового зразка з несиметрично розміщеною тріщиною (позацетровий згин). Подані аналітичні вирази для динамічних коефіцієнтів інтенсивності напружень(ДКІН). З цієї метою пружна задача зведена до задачі на власні значення. У формули для ДКІН входять параметри, що є безрозмірними власними векторами задачі на власні значення, частоти власних коливань зразка з тріщиною, параметри апроксимації запису діаграми навантаження „сила-час” кусково-ламаною кривою, значення КІН для кожної з мод власних коливань зразка та при дії одиничної сили.

Власні вектори та коливання визначаються чисельно методом Ланцоша для найбільш характерних розмірів балкового зразка та тріщини, що використовуються при випробуваннях. На основі одержаних результатів методом найменших квадратів знайдено аналітичні формули для безрозмірних власних векторів та частот. Як і для випадку симетрично розміщеної тріщини вищезазначені параметри залежать від відносних розмірів зразка, відносної глибини тріщини та коефіцієнта Пуассона.

Статичний КІН та КІН для мод власних коливань обчислювали методом скінчених елементів. Отримані результати представлені у вигляді простих формул. Проведена апробація одержаних результатів.

Вступ

Для оцінки величини динамічної в'язкості руйнування найбільш перспективними є ударні випробування циліндричних і балкових зразків з вихідною втомною тріщиною. У ранніх роботах динамічні коефіцієнти інтенсивності напружень(ДКІН) обчислювали, вважаючи, що ріст тріщини ініціює максимальне ударне навантаження. Тому можна застосовувати формули для визначення статичних коефіцієнтів інтенсивності напружень (квазістатичний підхід). Але дослідження [1, 2] показали, що таке припущення є некоректним, тому що для точної оцінки коефіцієнта динамічної в'язкості руйнування необхідно врахувати ефекти інерції. Однак точні розв'язки для визначення динамічних коефіцієнтів інтенсивності напружень у тілах з тріщинами отримані тільки для деяких задач безмежних тіл. Для наближеного розв'язку таких задач з успіхом застосовували сучасні числові методи, зокрема методи скінчених різниць, скінчених та граничних елементів.

Залежність ДКІН від часу визначають експериментально двома способами. Перший спосіб – це наклеювання в околі вершини тріщини малобазного перетворювача. Проте необхідність наклеювання перетворювачів на кожний зразок і їх тарування є недоліком. Другий спосіб – це використання методів фотопружності. Цей метод вимагає високошвидкісного фотографування, тобто складної реєструючої апаратури із трудомісткою процедурою дешифрування одержаних кінокадрів. Цей метод застосовують при еталонних експериментах. Складність теоретичних методів визначення ДКІН залежить від закладених у них моделей. Однак найбільш складні моделі описують лише частину динамічних ефектів і вимагають введення у розрахунок характеристик, що визначаються прямими експериментальними методами. У даний момент найбільшого поширення набули комбіновані числово-експериментальні підходи. Так у роботах [3,4] запропонована методика обробки діаграм “навантаження-час”, одержаних при ударних дослідженнях балкових зразків на одно- та триточковий ударний згин. Залежність від часу ДКІН для них визначається за допомогою метода скінчених елементів (МСЕ) та модального аналізу [5,6]. Цей підхід започаткований у роботі [7] та розвинутий авторами [3,8], успішно поєднує простоту, що властива спрощеним моделям і точність, що характерна для методу скінчених елементів. Близькі

до вищезазначених методів випробовування балкових зразків запропоновано методи у роботах [9-14]. Ударний розтяг суцільного циліндричного зразка, послабленого зовнішньою кільцевою тріщиною, досліджено у роботі [15]. У роботі [16] представлено прості формули для визначення КІН при ударному крученні суцільного циліндричного зразка. Як і у роботах [15, 16], у роботі [17] одержано прості формули для визначення ДКІН при ударному розтязі пустотілого циліндричного зразка, що послаблений внутрішньою та зовнішньою кільцевими тріщинами.

На даний момент відома робота [18], присвячена вивченню статичного згину балкового зразка, ослабленого несиметрично розміщеною тріщиною. Але нам невідомі дослідження триточкового ударного згину балкового зразка, ослабленого тріщиною, що знаходиться не у серединному перерізі зразка. У даній роботі подані прості формули для визначення ДКІН для балкових зразків з несиметричною тріщиною.

Постановка та розв'язування задачі

Нехай на балковий зразок заданих розмірів з несиметрично розміщеною тріщиною діє навантаження зі сторони ударника $F(t)$ та реакції опор $R_1(t)$ та $R_2(t)$ (рис.1).

ДКІН знаходимо за допомогою напіваналітичного методу скінченних елементів [3, 4, 13-17]. З цією метою розіб'ємо поверхню зразка на скінченні елементи (рис.2). Тоді скінченноелементне рівняння руху пружного тіла при дії зосередженої сили має такий вигляд [5]

$$[M][\ddot{\bar{u}}] + [K][\bar{u}] = \{0, \dots, 0, F(t), 0, \dots, 0\}^T, \quad (1)$$

де $[K]$ і $[M]$ - матриці жорсткості і мас [5]; $[\bar{u}]$ - вектор переміщень ($\bar{u} = \{u_x, u_y\}$) індекс "Т" означає транспонування.

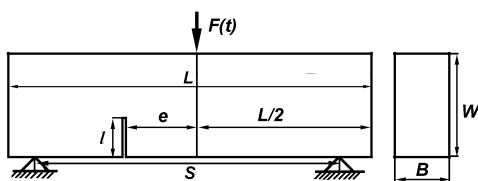


Рис.1. Схема навантаження зразка

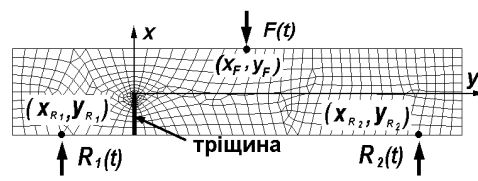


Рис.2. Розбиття зразка на скінченні елементи

Подамо напружено-деформований стан у зразку сумою двох напружено-деформованих станів: напружено деформований стан при безопорному ударному згині зразка з тріщиною та напружено-деформований стан зразка, що згинається під дією рівномірно розподіленого навантаження, зрівноваженого реакціями опор $R_1(t)$ та $R_2(t)$ (рис.3)

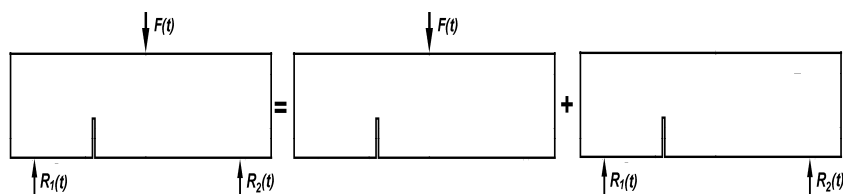


Рис. 3. Розклад триточкового ударного згину зразка на дві складові

Аналогічно як і у [3, 4, 8 13-17] для випадку безопорного ударного згину розв'язок рівняння (1) можна подати у вигляді

$$\bar{u}(x, y) = \sum_{i=1}^n \frac{\bar{u}_{0i}(x, y) \langle \bar{n} \bar{u}_{0i}(x_F, y_F) \rangle}{\omega_i} \int_0^{\tau} F(t) \sin \omega_i(t - \tau) d\tau, \quad (2)$$

де ω_i нетривіальні частоти власних коливань зразка з тріщиною; $\bar{u}_{0i}(x, y)$ та $\bar{u}_{0i}(x_F, y_F)$ - відповідні їм компоненти вектора переміщень, розглядуваної точки і точки прикладання сили; $\langle \rangle$ - скалярний добуток. Вони знаходяться із наступної задачі на власні значення [5]

$$\begin{aligned} [K] \bar{u} &= \omega^2 [M] \bar{u} \\ u_i^T [M] u_j &= \delta_{ij} \quad (\delta_{ij} - \text{символ Кронекера}) \end{aligned} \quad (3)$$

Враховуючи, що ДКІН пропорційний переміщенням на поверхні тріщини, за аналогією з (2) у випадку безпорного ударного згину зразка можна записати

$$K_{jI}(t) = \sum_{i=1}^n \frac{K_{ji} \langle \bar{n} \bar{u}_{0i}(x_F, y_F) \rangle}{\omega_i} \int_0^t F(\tau) \sin \omega_i(t - \tau) d\tau, \quad j = I, II \quad (4)$$

де K_{ji} - коефіцієнт інтенсивності напружень при i -й нормованій моді вільних коливань.

Значення сили $F(t)$ находимо за допомогою експериментальних досліджень. Діаграму навантаження "сила-час" визначаємо за допомогою спеціальної апаратури [12]. Запис діаграми навантаження "сила-час" апроксимуємо кусково-ламаною лінією $P(t)$ (рис.4).

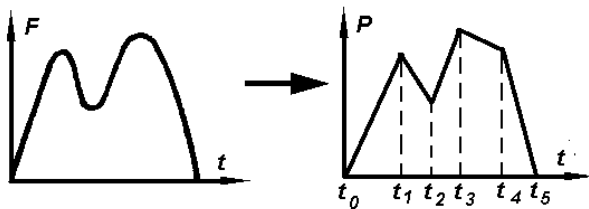


Рис. 4. Схема апроксимації діаграми навантаження

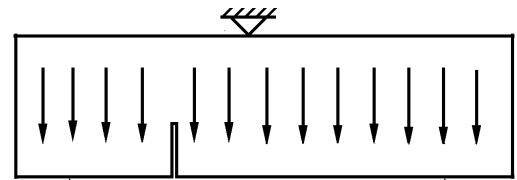


Рис. 5. Схема статичного навантаження зразка

Аналітично ламану криву $P(t)$ подамо у вигляді:

$$F(t) \approx P(t) = \sum_{i=1}^N (k_i - k_{i-1}) (t - t_{i-1}) H(t - t_{i-1}), \quad (5)$$

де t_i - моменти часу, що відповідають точкам злому лінії $P(t)(t_0 = 0)$, N - число цих точок, k_i - кутові коефіцієнти, $H(t)$ - функція Гевісайда.

Після нескладних перетворень вираз для ДКІН при згині односточкового зразка має вигляд:

$$\begin{aligned} K_{II}(t) &= K_{II S}^{(1)} P(t) - K_{II S}^{(1)} \sum_{i=1}^N (k_i - k_{i-1}) H(t - t_{i-1}) \sum_{m=1}^{n_j} (\eta_{1m} / \omega_m) \sin \omega_m(t - t_{i-1}), \\ K_{III}(t) &= K_{III S}^{(1)} P(t) - K_{III S}^{(1)} \sum_{i=1}^N (k_i - k_{i-1}) H(t - t_{i-1}) \sum_{m=1}^{n_j} (\eta_{2m} / \omega_m) \sin \omega_m(t - t_{i-1}) \end{aligned} \quad (6)$$

де $K_{II S}^{(1)}, K_{III S}^{(1)}$ - статичні коефіцієнти інтенсивності напружень при безпорному згині зразка одиничною силою, що прикладена до зразка за силовою схемою, поданою на рис.1.; $\eta_{jm} = u_{0x}(x_F, y_F) K_{jm} / (\omega_m^2 K_{jS}^{(1)}) (j = 1, 2)$. Як і у роботі [3] можна показати, що $\sum_{m=1}^{n_j} \eta_{jm} \rightarrow 1 (j = 1, 2)$. Зауважимо, що ці співвідношення дають можливість визначати консервативну оцінку похибки обрізання рядів у рівняннях (6).

При обчисленні статичного КІН у зразку, навантаженого за схемою односточкового статичного згину, об'ємне навантаження замінювалось рівномірно

розподіленим по верхній і нижній поверхнях зразка (рис. 5)

Зразок розбивався на чотирикутні восьмивузлові та трикутні шестивузлові скінченні елементи. Для знаходження коефіцієнта інтенсивності напружень (КІН) сингулярність напружень біля вершини тріщини моделюється оточенням вершини тріщини шестивузловими трикутними елементами із зсунутими на четверть серединними вузлами (рис. 5). КІН визначають за формулами

$$K_I = \frac{2G}{k+1} \sqrt{\frac{\pi}{2l}} [4u_y(B_2) - u_y(C_2) - 4u_y(B_1) + u_y(C_2)],$$

$$K_{II} = \frac{2G}{k+1} \sqrt{\frac{\pi}{2l}} [4u_x(B_2) - u_x(C_2) - 4u_x(B_1) + u_x(C_2)],$$
(7)

де G – модуль зсуву; $k = (3 - \nu)(1 + \nu)$ для плоского напруженого стану та $k = 3 - 4\nu$ для плоскої деформації; u_x та u_y компоненти вектора переміщень в околі вершини тріщини (рис. 7).

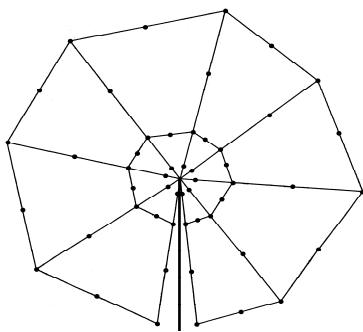


Рис. 6. Видяг сітки скінченних елементів біля вершини тріщини

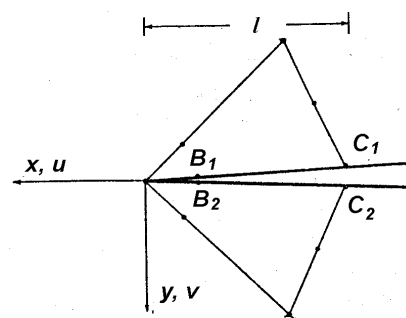


Рис. 7. Схема розміщення вузлів для елементів, що оточують вершину тріщини

Якість моделювання поверхні зразка оцінювалась обчисленням тестової задачі методом скінченних елементів (МСЕ) [18].

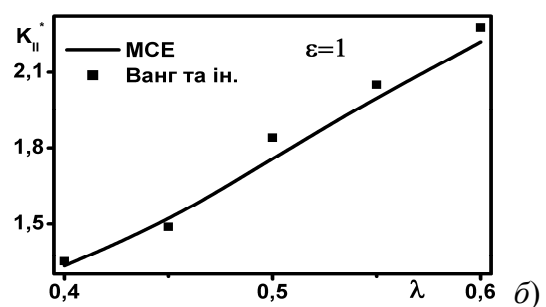
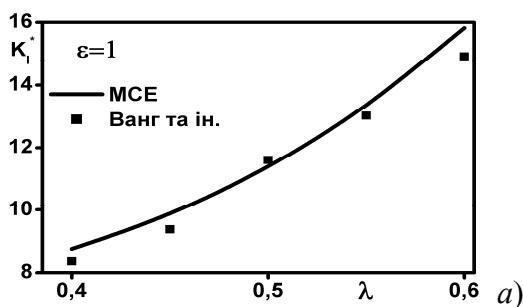


Рис. 8. Порівняння результатів тестової задачі [18] із одержаними за формулами (7)

На рис. 8а, б $\gamma = L/W, \lambda = l/W, \epsilon = e/W$, K_I^* та K_{II}^* нормовані значення КІН. Як видно із рис. 7а, б між одержаними даними і даними роботи [18] є добра кореляція. Одержані за допомогою МСЕ результати для КІН у діапазоні зміни параметрів $4,5 \leq \gamma \leq 6,5; 0,3 \leq \lambda \leq 0,7; \epsilon = 1$ з відносною похибкою 2% описуються формулами

$$K_{IIS}^{(1)} = \frac{\gamma\sqrt{\lambda}}{\sqrt{B}} [-0,2883 + 0,2159\lambda - 2,1881\lambda^2 + \lambda\gamma(1,119 - 2,425\lambda + 2,594\lambda^2)(1,3853 - 0,0689\gamma)],$$

$$K_{IIIS}^{(1)} = \frac{\gamma\lambda\sqrt{\lambda}}{\sqrt{B}} [0,4778 - 0,1993\lambda - 0,0264\lambda^2 - \lambda\gamma(4,277 - 4,4173\lambda)(0,008 + 0,0013\gamma)]$$
(8)

Безрозмірні коефіцієнти η_i та власні частоти $\omega_i^* = \omega_i r / \sqrt{E/\rho}$ (E – модуль Юнга; ρ – густина матеріалу) не залежать від розмірів зразка. Однак вони залежать від відношення довжини зразка до його радіуса, відносної глибини тріщини та коефіцієнта Пуассона ν .

Для найбільш цікавої для експерименту області геометричних параметрів зразка $4,5 \leq \gamma \leq 6,5; 0,3 \leq \lambda \leq 0,7; \varepsilon = 1$ при $\nu=0,3$ методом блоків Ланцоша [19] знайдено кругові частоти власних коливань і відповідні їм власні вектори. Провівши числові експерименти для різних значень діаграм навантаження “сила–час” і проаналізувавши співвідношення ($\sum_{m=1}^{n_j} \eta_{jm} \rightarrow 1 (j=1,2)$) робимо висновок, що у цьому інтервалі геометричних параметрів для визначення ДКІН достатньо обмежитися чотирма модами вільних коливань. Відповідно обробивши числові результати методом найменших квадратів, для ω_i^* та η_i знайдено такі поліноміальні наближення:

$$\begin{aligned}\omega_1^* &= 0,2144 + 3,9138\lambda - 5,2338\lambda^2 - \lambda\gamma(2,1621 - 2,7529\lambda)(0,5304 - 0,0357\gamma), \\ \omega_2^* &= 0,5547 + 4,52\lambda - 5,74\lambda^2 - \lambda\gamma(0,3488 - 0,4144\lambda)(3,871 - 0,2283\gamma), \\ \omega_3^* &= 0,6033 + 5,3513\lambda - 4,9834\lambda^2 - \lambda\gamma(1,6373 - 1,4856\lambda)(0,92 - 0,0579\gamma), \\ \omega_4^* &= 0,7991 + 7,6952\lambda - 8,3694\lambda^2 - \lambda\gamma(1,6309 - 1,7427\lambda)(1,1959 - 0,0622\gamma).\end{aligned}\quad (9)$$

Відносна похибка апроксимації цих співвідношень є 2%. Для співвідношень η_{ij} ($i=1,2; j=1,2,3$) відносна похибка апроксимації не перевищує 3%, а абсолютна похибка для співвідношень η_{i4} ($i=1,2$) не більша 0,003.

$$\begin{aligned}\eta_{11} &= 1,1432 + 10,964\lambda - 14,369\lambda^2 - \lambda\gamma(1,7619 - 2,2913\lambda)(1,7107 - 0,1191\gamma), \\ \eta_{12} &= 0,2054 - 17,567\lambda + 20,507\lambda^2 + \lambda\gamma(1,2469 - 1,4764\lambda)(5,4918 - 0,7921\gamma + 0,0397\gamma^2), \\ \eta_{13} &= 0,0471 + 0,6677\lambda - 0,7738\lambda^2 - \lambda\gamma(0,1073 - 0,1183\lambda)(2,5695 - 0,2013\gamma), \\ \eta_{14} &= -8,669 + 22,57\lambda - 17,194\lambda^2 + 3,5404\lambda^2 + \gamma(0,9239 - 2,4185\lambda + \\ &\quad + 1,8756\lambda^2 - 0,4113\lambda)(3,8614 - 0,5492\gamma + 0,0271\gamma^2), \\ \eta_{21} &= 0,6914 + 3,7415\lambda - 6,2271\lambda^2 - \lambda\gamma(1,2218 - 1,7871\lambda)(0,8734 - 0,0466\gamma), \\ \eta_{22} &= 0,1288 - 2,0728\lambda + 7,5254\lambda^2 - 1,962\lambda^3 + \lambda\gamma(0,0692 - 0,293\lambda)(4,027 - 0,26\gamma), \\ \eta_{23} &= 0, \quad \eta_{24} = 0,5662 - 0,3358\lambda + 0,6129\lambda^2 - \lambda(1,2581 - 3,7227\lambda + \\ &\quad + 3,483\lambda^2)(4,1567\sqrt{\gamma} - 2,6454\gamma + 0,164\gamma^2)\end{aligned}\quad (10)$$

При дослідженні напружено-деформованого стану зразка, що згинається рівномірно розподіленим навантаженням і зрівноважується реакціями опор $R_1(t)$ та $R_2(t)$, вважаємо, що

$$R_1(t) \approx R_2(t) = R(t) = \sum_{i=1}^M (q_i - q_{i-1})(t - t_{i-1}^*)H(t - t_{i-1}^*) \quad (11)$$

де t_i^* – моменти часу, що відповідають точкам злому лінії $R(t)(t_0^* = 0)$, M – число цих точок, q_i – кутові коефіцієнти.

Як і у попередньому випадку ДКІН для такої схеми навантаження зразка можна подати у вигляді

$$K_{I2}(t) = K_{I2S}^{(1)}P(t) - K_{I2S}^{(1)} \sum_{i=1}^N (k_i - k_{i-1})H(t - t_{i-1}) \sum_{m=1}^{m_j} (\zeta_{1m}/\omega_m) \sin \omega_m (t - t_{i-1}),$$

$$K_{II2}(t) = K_{II2S}^{(1)}P(t) - K_{II2S}^{(1)} \sum_{i=1}^N (k_i - k_{i-1})H(t - t_{i-1}) \sum_{m=1}^{m_j} (\zeta_{2m}/\omega_m) \sin \omega_m (t - t_{i-1})$$
(12)

де $K_{I2S}^{(1)}, K_{II2S}^{(1)}$ – КІН при статичному згині зразка рівномірно розподіленим об’ємним навантаженням, що зрівноважується одиничними реакціями опор (рис.3); $\zeta_{jm} = [u_{0x}(x_{R_1}, y_{R_1}) + u_{0x}(x_{R_2}, y_{R_2})]K_{jm}/(\omega_m^2 K_{jS}^{(1)}) (j=1,2)$. Можна показати, що $\sum_{m=1}^{m_j} \zeta_{jm} \rightarrow 1$ ($j=1,2$). Попереднє співвідношення дає можливість визначати консервативну оцінку похибки обрізання рядів у рівняннях (12).

$K_{I2S}^{(1)}, K_{II2S}^{(1)}$ обчислювали за допомогою МСЕ. Одержані результати апроксимовані з відносною точністю 2,5% наступними співвідношеннями

$$K_{I2S}^{(1)} = \frac{\gamma\sqrt{\lambda}}{\sqrt{B}} [-0,298 + 59,68\lambda - 153,7\lambda^2 + 154\lambda^3 - \lambda\gamma(0,9724 - 2,5205\lambda + 2,549\lambda^2)(13,906 - 0,809\gamma)],$$

$$K_{II2S}^{(1)} = \frac{\gamma\lambda\sqrt{\lambda}}{\sqrt{B}} [0,7209 + 10,5\lambda - 24,7\lambda^2 + 16,94\lambda^3 - \lambda\gamma(0,917 - 2,23\lambda + 1,853\lambda^2 + 0,34\lambda^3)(4,138 - 0,277\gamma)]$$
(13)

Безрозмірні коефіцієнти ζ_{ij} знайдено за допомогою МСЕ з подальшою їх апроксимацією простими аналітичними виразами. При цьому точність апроксимації є такою ж, як і для співвідношень η_{ij} :

$$\zeta_{11} = 0,8151 - 2,0883\lambda + 2,7199\lambda^2 + \lambda\gamma(0,5478 - 0,6443\lambda)(2,4518 - 0,2488\gamma),$$

$$\zeta_{12} = 0,1208 - 0,7368\lambda + 0,668\lambda^2 + \lambda\gamma(0,0014 - 0,0228\lambda + 0,027\lambda^2)(0,796 + 4,9052\gamma - 0,829\gamma^2),$$

$$\zeta_{13} = 0,042 + 3,203\lambda - 9,592\lambda^2 + 7,39\lambda^3 - \lambda\gamma(0,8804 - 2,565\lambda + 1,958\lambda^2)(1,5423 - 0,1523\gamma),$$

$$\zeta_{14} = 10,342 + 25,972\lambda - 13,64\lambda^2 - 3,18\lambda^3 + (3,1114 - 7,839\lambda + 4,18\lambda^2 + 0,9\lambda^3) \times$$

$$\times (5,2725\sqrt{\gamma} - 2,1164\gamma + 0,0847\gamma^2),$$
(14)

$$\zeta_{21} = 0,7347 - 0,408\lambda - 0,147\lambda^2 + \lambda\gamma(0,8919 - 2,044\lambda + 1,294\lambda^2)(10,297 - 2,907\gamma + 0,1942\gamma^2),$$

$$\zeta_{22} = 0,4223 - 0,0139\gamma - 0,0067\gamma^2 - \lambda\gamma(0,1732 - 0,473\lambda + 0,257\lambda^2)(18,248 - 5,0528\gamma + 0,3542\gamma^2),$$

$$\zeta_{23} = 0, \zeta_{24} = 7,6825 - 3,0643\gamma + 0,307\gamma^2 - \gamma(0,8581\sqrt{\lambda} - 1,1867\lambda +$$

$$+ 0,6157\lambda^2)(14,427 - 5,0173\gamma + 0,4258\gamma^2)$$

Всі числові дані, за якими знайдено співвідношення (9, 10, 14), обчислені для значенні коефіцієнта Пуассона $\nu = 0,3$. Але як показали числові експерименти, запропонованими співвідношеннями з достатньою точністю можна користуватися і при коефіцієнтах Пуассона $0,27 \leq \nu \leq 0,33$.

Тепер співвідношення для обчислення ДКІН при ударному триточковому згині балкового зразка можна подати у вигляді

$$K_J(t) = K_{J1}(t) + K_{J2}(t), J = I, II$$
(15)

За одержаними формулами знайдено ДКІН для балкового сталюого зразка, що навантажується за силовою схемою, поданою на рис.1. Довжина зразка 120 мм, ширина 10 мм та висота 18 мм. Глибина тріщини 5,5 мм. Прийнято такі пружні характеристики сталі: $E=200$ ГПа, $\rho=7870$ Мг/м³, $\nu = 0,3$. Діаграма навантаження “сила–час” подана на рис. 9. З використанням апроксимації цієї діаграми кусково-ламаними лініями на основі формул (6), (12) та (15) обчислено залежність ДКІН від часу. Для

перевірки достовірності результатів обчислення проводились МСЕ. Застосовано метод Ньюмарка [6] для значення кроку по часу: $\Delta t = 5$ мкс. Значення ДКІН, одержані за формулою (10) і МСЕ при $\Delta t = 5$ мкс дуже добре корелюють між собою (рис. 10).

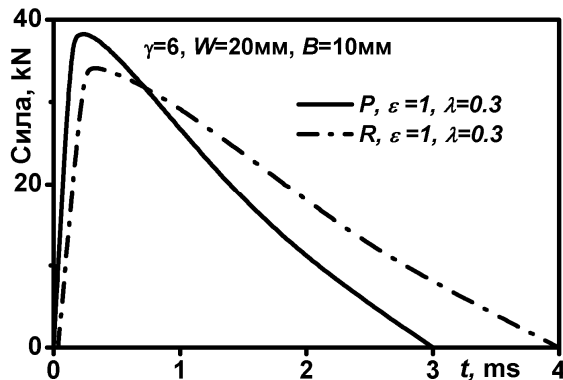


Рис. 9. Діаграма навантаження "сила-час"

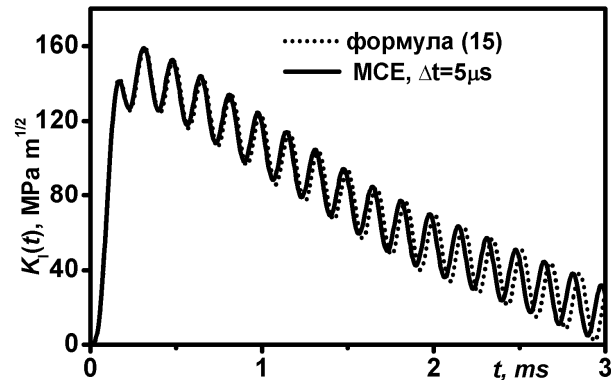


Рис. 10. Залежність ДКІН від часу

Висновки

Запропоновано змішану числово - експериментальну схему визначення ДКІН при три точковому ударному випробуванні балкових зразків. У результаті досліджень отримано прості формули з параметрами, що знаходяться на основі числового аналізу та експериментальних досліджень. Запропоновані формули дають змогу значно спростити обчислення ДКІН у порівнянні з іншими методами.

A method for determining of dynamic stress intensity factor has been proposed. This method based on the result of the solution to the boundary problem on dynamic tension of cylindrical specimen of finite dimensions, weakened by a circular crack. For problem solution a test diagram "loading – time" has been used. A simple formula for evaluation of dynamic stress intensity factor vs. specimen loading history has been obtained. The effectiveness of proposed approximation formula has been verified by experimental results.

Література

1. Kalthoff J. F., Winkler S., Beinert J. The influence of dynamic effects in impact testing// Int. J. Fracture. - 1977.-**21**. -P.528-531
2. Mall S., Kobayashi A. S., Urabe U. Dynamic photoelastic and dynamic finite element analyses of dynamic tear test specimens// Exp. Mech. -1978. -**18**. -P. 449 – 456.
3. Андрейкив А.Е., Рокач И.В. Упрощенный метод определения зависимости от времени коэффициента интенсивности напряжений при испытании балочных образцов на безопорный ударный изгиб // Физико – хим. механика материалов. -1989, № 5, -С.42-51.
4. Рокач И. В. Упрощенный метод определения зависимости от времени коэффициента интенсивности напряжений при испытаниях образцов на трехточечный ударный изгиб // Физ.-хим. механика материалов. -1990. -№3. -С.79-83.
5. Зенкевич О. Метод конечных элементов в технике. -М: Мир, 1975. - 541 с.
6. Партон В. З., Борисковский В. Г. Динамическая механика разрушения. -М.: Машиностроение, 1985. 263 с.
7. Nash G. E. An analysis of the forces and bending moments generated during the notched beam impact test // Eng. Fract. Mech. - 1969. - **5**. -P. 269-285.
8. Андрейкив А. Е., Ковчик С. Е., Ходань И. В., Бойко В. Н. К вопросу о методах определения динамической трещиностойкости конструкционных материалов // Проблемы машиностроения и автоматизации. –1997. -№5-6. –С.22-35.
9. Marur P. R., Simha K. R. Y., Nair P. S. Dynamic analysis of three point bend specimen under impact// Int. J. Fract. – 1994.-**68**. - P. 261-273.
10. Lorriot T. Specimen loading determined by displacement measurement in instrumented Charpy impact test// Eng. Fract. Mech. - 2000. - **65**. -P. 703-713.
11. Marur P. R. Dynamic analysis of one-point bend impact test// Eng. Fract. Mech. - 2000. - **67**. -P. 41-53.
12. Orynyak I. V., Krasowsky A. Ja. The modeling of elastic response of a three-point bend specimen under impact loading// Eng. Fract. Mech. - 2000. - **60**. -P. 563-575.
13. Rokach I. V. Modal approach for processing one - and three-point bend test data for DSIF-time diagram determination. Part I - Theory // Fatigue and Fract. Eng. Mat. and Struct. - 1998. -**21**. -P.1007-1014.
14. Rokach I. V. Modal approach for processing one- and three-point bend test data for DSIF-time diagram determination. Part II - Calculations and results // Fatigue and Fract. Eng. Mat. and Struct. - 1998. -**21**. - P.1015-1026.

15. Андрейків О. Є., Бойко В. М., Ковчик С. Є., Ходань І. В. Динамічний розтяг циліндричного зразка з кільцевою тріщиною// Фіз.-хім. механіка матеріалів. -2000. -№3. -С.52-60.
16. Бойко В. М. Динамічне кручення циліндричного зразка з зовнішньою кільцевою тріщиною/ Зб. наук. праць. Діагностика, довговічність та реконструкція мостів і будівельних конструкцій. Львів: Каменярь, 2001. вип.. 3. –С.30-41.
17. Андрейків О. Є., Бойко В. М., Ковчик С. Є., Ходань І. В. Динамічний розтяг порожнинного циліндричного зразка з кільцевою тріщиною// Фіз.-хім. механіка матеріалів. -2001. -№4. -С.74-80.
18. Jen Wang Ke, Lin Hsu Chi, Hua Kao (1977). In: Adv. Res. Strength and Fract. Mater. 4th Int. Conf Fract. . McGraw-Hill, New York.
19. Grimes R. G., Lewis J. G. Simon H. D. A shield block Lanczos algorithm for solving sparse symmetric generalized eigenproblems // SIAM J. Matrix Analysis Appl. -1994. -**15(1)**. -P.228-272.

Одержано 15.03.2005 р.