

# МАШИНОБУДУВАННЯ ТА АВТОМАТИЗАЦІЯ ВИРОБНИЦТВА

УДК 621.9.06. – 233.1

Ю.Данильченко, канд. техн. наук

Тернопільський державний технічний університет імені Івана Пулюя

## СТАТИКА НЕІДЕАЛЬНОГО РАДІАЛЬНО-УПОРНОГО КУЛЬКОВОГО ПІДШИПНИКА ОПОРИ ШПИНДЕЛЬНОГО ВУЗЛА

*Вироблена пружно-деформаційна модель неідеального радіально-упорного кулькового підшипника опори шпindelного вузла, що дозволяє формувати матрицю жорсткості підшипника з урахуванням неідеальності виготовлення його елементів та шпindelного вузла загалом і визначати сумарне відносне зміщення внутрішнього кільця у просторі під дією комбінованого зовнішнього навантаження.*

Одним з положень теорії контактних напруг Г.Герца є умова, що навантаження, прикладені до тіл, що дотикаються, спрямовані по прямій, що з'єднує центри кривизни поверхонь тіл і перетинає точку початкового дотику [1].

Задача знаходження точок початкового контакту тіл кочення (кульок) з доріжками кочення кілець неідеального радіально-упорного кулькового підшипника розглянута у [2]. Суть виробленої просторової моделі підшипника полягає у впровадженні поняття “приведеного” підшипника і визначенні приведеної геометричної характеристики  $2\Delta_{r33}^i$   $i$ -ї контактної групи, що відповідає умові контакту приведеної ідеальної кульки з ідеальними кільцями при їх заданому просторовому положенні. Ця характеристика фактично відповідає узагальненій похибці  $\Delta_k^i$  виготовлення та взаємного розміщення елементів підшипника в  $i$ -й контактній групі. Геометричні характеристики ідеального та реального підшипників та просторове положення внутрішнього кільця в умовах початкового контакту кульок з доріжками кочення кілець подано на рис.1.

При прикладенні до внутрішнього кільця зовнішнього навантаження деформуються кульки  $i$ , відповідно, їх центри зближуються з кільцями в напрямку дії нормальних контактних сил  $N_r$ . Величина цього зближення  $\omega_r^i$  для  $i$ -ї контактної групи визначається за залежністю [1]:

$$\omega_{1(2)}^i = c_{1(2)} \cdot \sqrt[3]{N_{1(2)}^i / d_3} \quad , \quad (1)$$

де:  $c_r$  – коефіцієнти, що враховують пружні властивості та макрогеометрію контактуючих поверхонь;  $d_3$  – діаметр кульки;  $r$  – індекс елемента підшипника,  $r = 1$  (зовнішнє кільце),  $2$  (внутрішнє кільце);  $3$  (кулька).

Потенційна енергія, нагромаджена при деформуванні  $i$ -ї кульки з кільцями:

$$\Pi^i = \sum_{r=1}^2 \Pi_r^i = \sum_{r=1}^2 \int_0^{\omega_r^i} N_r^i \cdot d\omega_r^i = \frac{2}{5} \cdot \sum_{r=1}^2 K_{Gr}^i \cdot \omega_r^{i,2,5} \quad (2)$$

Підінтегральний вираз є функцією, зворотною до (1), а через  $K_{Gr}^i$  позначено коефіцієнти Герца:

$$K_{Gr}^i = \sqrt{d_3} \cdot c_r^{-1,5} \quad (3)$$

Подамо  $i$ -у контактну групу у вигляді послідовно з'єднаних пружин, напрямок яких визначається нормальними векторами поверхонь кочення кілець  $\mathbf{n}_{12}^i$  та  $\mathbf{n}'_{22}^i$  (рис.2). Жорсткості пружин  $k_1^i$  та  $k_2^i$  відповідно. Взаєморозміщення точок контакту  $i$ -ї кульки з кільцями в просторі в умовах початкового контакту визначається вектором  $\bar{\mathbf{l}}_{\Pi}^i$ :

$$\bar{\mathbf{l}}_{\Pi}^i = -\bar{\mathbf{n}}_{12}^i \cdot \mathbf{r}_{31}^i + \bar{\mathbf{n}}_{22}^i \cdot \mathbf{r}_{32}^i, \quad (4)$$

де система подвійних нижніх індексів відповідає [2], а саме: перший - індекс елемента підшипника  $r$ , другий - індекс геометрії поверхні доріжок кочення кілець та кульки  $j$ ; для кілець:  $j = 0$  (ідеальна геометрія), 1 (реальна геометрія); для кульки:  $j = 0$  (ідеальна геометрія), 1 (реальна геометрія у точці контакту із зовнішнім кільцем), 2 (реальна геометрія у точці контакту із внутрішнім кільцем).

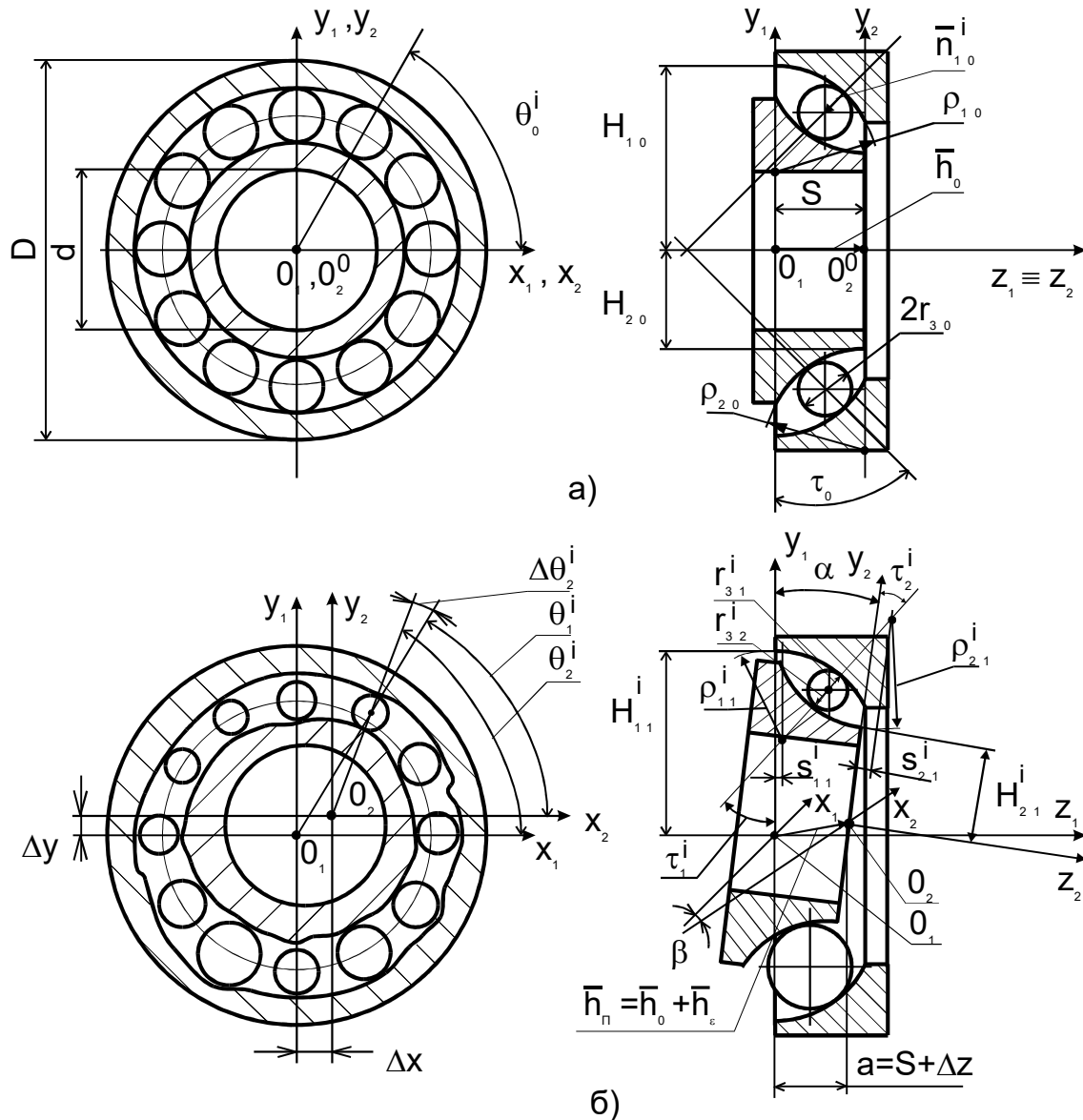


Рис.1. Геометричні характеристики радіально-упорного підшипника. а) ідеальний, б) реальний.

Внаслідок деформації розміри кульки зменшаться, кільця зблизяться кілець  $i$ , відповідно, зміниться вектор  $\bar{\mathbf{l}}_{\Pi}^i$ . Новий вектор позначимо  $\bar{\mathbf{l}}_F^i$ :

$$\bar{\mathbf{l}}_F^i = -\bar{\mathbf{n}}_{12}^i \cdot (\mathbf{r}_{31}^i - \omega_1^i) + \bar{\mathbf{n}}_{22}^i \cdot (\mathbf{r}_{32}^i - \omega_2^i) = \bar{\mathbf{l}}_{\Pi}^i - (-\bar{\mathbf{n}}_{12}^i \cdot \omega_1^i + \bar{\mathbf{n}}_{22}^i \cdot \omega_2^i) = \bar{\mathbf{l}}_{\Pi}^i - \Delta \bar{\mathbf{l}}_F^i, \quad (5)$$

де  $\Delta \bar{\mathbf{l}}_F^i = \omega_1^i + \omega_2^i$  в першому наближенні з урахуванням співвідношень нормальних векторів поверхонь кілець в точках контакту з  $i$ -ю кулькою для реального й ідеального

підшипника [2] виглядає:

$$\Delta \bar{l}_F^i = -(\omega_1^i + \omega_2^i) \cdot \bar{n}_{10}^i = -\omega^i \cdot \bar{n}_{10}^i, \quad (6)$$

де  $\omega^i$  – загальна деформація  $i$ -ї контактної групи;  $\bar{n}_{10}^i$  - нормальний вектор поверхні зовнішнього кільця ідеального підшипника в точці контакту з  $i$ -ю кулькою (рис.1а):

$$\bar{n}_{10}^i = \begin{bmatrix} -\cos\tau_0 \cdot \cos\theta_0^i \\ -\cos\tau_0 \cdot \sin\theta_0^i \\ -\sin\tau_0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad (7)$$

де  $\theta_0^i$  та  $\tau_0$  – кутове положення та кут контакту  $i$ -ї кульки ідеального підшипника.

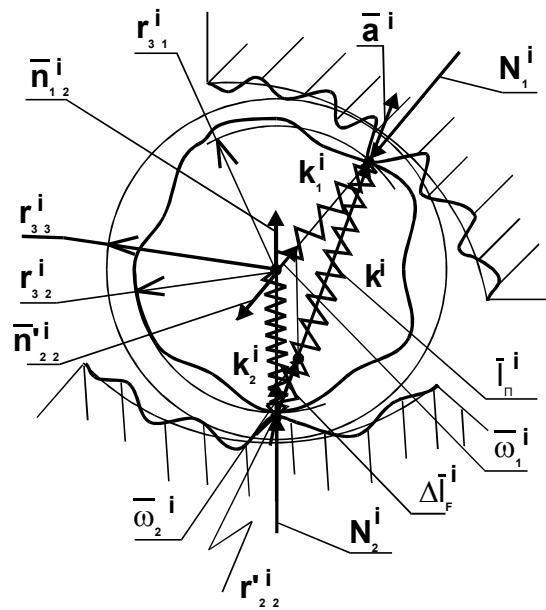


Рис.2. Пружно-деформаційна модель контактної групи.

Замінімо вказану систему пружин приведеною пружиною, розміщеною між точками контакту кульки з кільцями. Напрямок цієї пружини в умовах початкового контакту визначається вектором спрямування  $\bar{a}^i = (a_x^i, a_y^i, a_z^i, 0)^T$  (рис.2):

$$\bar{a}^i = \bar{l}_\Pi^i / |\bar{l}_\Pi^i| \quad (8)$$

Деформація  $\omega^i$  приведеної пружини в напрямку вектора  $\bar{a}^i$  визначається за залежністю [3]:

$$\omega^i = \bar{\omega}_1^i \cdot \bar{a}^i + \bar{\omega}_2^i \cdot \bar{a}^i \approx -\omega^i \cdot \bar{n}_{10}^i \cdot \bar{a}^i \quad (9)$$

Жорсткість  $k^i$  приведеної пружини визначимо з умови рівності потенційних енергій реальної та приведеної систем.

Для реальної системи потенційна енергія  $\Pi^i$  у першому наближенні з врахуванням залежностей 2, 3, 6 набере вигляду:

$$\Pi^i = \frac{2}{5} \cdot K_\Gamma^i \cdot \omega^{i2.5}, \quad (10)$$

де  $K_\Gamma^i$  – приведений коефіцієнт Герца  $i$ -ї контактної групи;

$$K_{\Gamma}^i = \sqrt{d_3} \cdot (c_1^i + c_2^i)^{-1.5} \quad (11)$$

Для приведеної системи у врахуванням залежності 9:

$$\Pi^i = \frac{1}{2} \cdot k^i \cdot \omega^{i2} = \frac{1}{2} \cdot k^i \cdot (\omega^i \cdot \bar{n}_{10}^i \cdot \bar{a}^i)^2 \quad (12)$$

Тоді з рівності залежностей 10 і 12 отримаємо:

$$k^i = \frac{4}{5} \cdot K_{\Gamma}^i \cdot \frac{\sqrt{\omega^i}}{(\bar{n}_{10}^i \cdot \bar{a}^i)^2} \quad (13)$$

Таким чином, пружно-деформаційну модель опори шпиндельного вузла можна подати у вигляді нерухомого зовнішнього кільця 1 і приєднаного до нього через систему пружин 3 внутрішнього кільця 2 (рис.3). У стані початкового контакту (відсутність деформацій) (рис.3а) внутрішнє кільце отримує мале зміщення внаслідок неідеальності виготовлення елементів підшипника та шпиндельного вузла загалом, і його положення (система  $X_2Y_2Z_2$ ) відносно зовнішнього кільця (система  $X_1Y_1Z_1$ ) буде визначатися п'ятьма величинами:  $\Delta x$ ,  $\Delta y$ ,  $a$ ,  $\alpha$ ,  $\beta$  (рис.1б). Відповідно положення центру  $O_2$  внутрішнього кільця в системі  $X_1Y_1Z_1$  визначатимуться радіус-вектором  $\mathbf{h}_{\Pi} = (\Delta x, \Delta y, a, 1)^T$  (рис.1б, 3а), а його зміщення відносно номінального стану (точки  $O_2^0$ ) - вектором  $\mathbf{h}_{\epsilon} = \mathbf{h}_{\Pi} - \mathbf{h}_0 = (\Delta x, \Delta y, \Delta z, 0)^T$ . При дії зовнішнього навантаження внутрішнє кільце отримує додаткове мале зміщення. Відповідна зміна (точка  $O_2'$ ) положення центру  $O_2$  визначатиметься вектором  $\mathbf{h}'_{\epsilon} = (\Delta x', \Delta y', \Delta z', 0)^T$  (рис.3б).

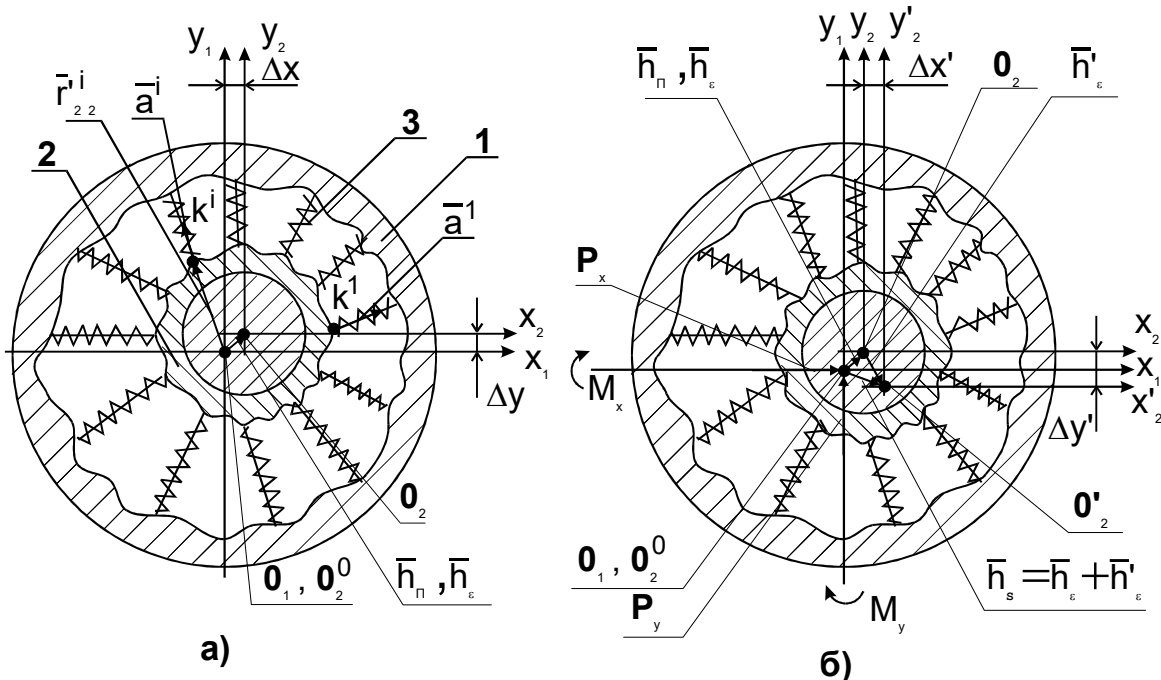


Рис.3. Пружно-деформаційна модель опори шпиндельного вузла:  
а) стан початкового контакту; б) деформівний стан.

Для визначення узагальненої похибки  $\delta' = (\Delta x', \Delta y', \Delta z', \alpha', \beta')^T$  положення внутрішнього кільця відносно початкового стану внаслідок дії зовнішнього навантаження складемо систему рівнянь статичної рівноваги [3]:

$$K \cdot \bar{\delta}^i = \bar{P} \quad , \quad (14)$$

де  $\mathbf{P}$  – вектор узагальненого зусилля,  $\mathbf{P} = (P_x, P_y, P_z, M_x, M_y)^T$ ;  $K$  – матриця жорсткості.  
Елементи  $k_{kj}$  матриці  $K$  обчислюються за залежністю [3]:

$$k_{kj} = \sum_{i=1}^N k^i \cdot R_{ki}^i \cdot R_j^i \quad ; \quad k, j = 1 \div 5 \quad , \quad (15)$$

де  $N$  – кількість контактних груп (приведених пружин жорсткістю  $k^i$ );  
 $\mathbf{R}^i = (a_x^i, a_y^i, a_z^i, m_x^i, m_y^i)^T$ ;  $\mathbf{m}^i = \mathbf{a}^i \times \mathbf{r}^i$  – момент напрямного вектора  $\mathbf{a}^i$  осі приведеної пружини;  $\mathbf{r}^i = \mathbf{r}'_{22}{}^i = (x^i, y^i, z^i, 1)^T$  – радіус-вектор точки закріплення  $i$ -ї пружини на внутрішньому кільці (рис.3а).

Складові  $\mathbf{m}^i$  визначаються за залежностями:

$$m_x^i = y^i \cdot a_z^i - z^i \cdot a_y^i \quad ; \quad m_y^i = z^i \cdot a_x^i - x^i \cdot a_z^i \quad ; \quad m_z^i = x^i \cdot a_y^i - y^i \cdot a_x^i \quad (16)$$

За фізичним змістом  $k_{kj}$  – жорсткість системи у напрямку  $k$ -ї узагальненої координати при дії  $j$ -ї компоненти узагальненої сили. Наприклад:  $k_{11} = \sum k^i a_x^i{}^2$ ;  $k_{12} = k_{21} = \sum k^i a_x^i a_y^i$  тощо. Елементи головної діагоналі матриці  $K$  є осью або кутовою жорсткістю підшипника. Так,  $k_{11}$  і  $k_{22}$  – радіальна жорсткість у напрямку осей  $X$  та  $Y$ ;  $k_{33}$  – осьова жорсткість у напрямку осі  $Z$ ;  $k_{44}$  і  $k_{55}$  – кутові жорсткості відносно осей  $X$  та  $Y$ .

Для розв'язку системи рівнянь 14 необхідно знайти співвідношення складових вектора  $\mathbf{h}'_e$  із деформацією  $\omega^i$  кульки у  $i$ -й контактній групі. Оскільки вказана деформація фактично є зміною початкової узагальненої похибки  $\Delta_k^i$  контактної групи, а власне зменшенням діаметру кульки, то для розв'язання поставленої задачі можна використати залежності [2]. У цьому випадку параметр  $(2\Delta r_{33}^i)_S$  узагальненої похибки  $i$ -ї контактної групи неідеального підшипника в умовах комбінованого зовнішнього навантаження має вигляд:

$$2 \cdot \Delta r_{33}^i{}_S = 2 \cdot \Delta r_{33}^i + 2 \cdot \Delta r'_{33}^i = a_{0S} + B_S \cdot \sin \theta_0^i + D_S \cdot \cos \theta_0^i = a_{0S} + A_S \cdot \sin(\theta_0^i + \varphi_S) \quad (17)$$

де  $2\Delta r_{33}^i = 2(r_{30} - r_{33}^i)$  – початкова узагальнена похибка контактної групи, викликана неідеальністю виготовлення елементів підшипника та шпіндельного вузла загалом, причому при наявності контакту кульки з кільцями  $2\Delta r_{33}^i = \Delta_k^i$ , а при його відсутності  $2\Delta r_{33}^i > \Delta_k^i$ , [2];  $2\Delta r'_{33}^i = \omega^i$  – зміна діаметру кульки приведенного підшипника (початкової узагальненої похибки) внаслідок дії комбінованого зовнішнього навантаження;  $B_S, D_S, a_{0S}$  – обчислюються за залежностями [2]:

$$\begin{aligned} B_S &= (\alpha + \alpha') \cdot (H_{20} + \rho_{20}) \cdot \sin \tau_0 + (\Delta y + \Delta y') \cdot \cos \tau_0 \quad ; \\ D_S &= -(\beta + \beta') \cdot (H_{20} + \rho_{20}) \cdot \sin \tau_0 + (\Delta x + \Delta x') \cdot \cos \tau_0 \quad ; \\ a_{0S} &= (\Delta z + \Delta z') \cdot \sin \tau_0 \end{aligned} \quad (17a)$$

Таким чином, залежність складових вектора  $\mathbf{h}'_e$  із деформацією  $\omega^i$  кульки в  $i$ -й контактній групі має вигляд:

$$\begin{aligned} \omega^i &= \Delta z' \cdot \sin \tau_0 + (\alpha' \cdot (H_{20} + \rho_{20}) \cdot \sin \tau_0 + \Delta y' \cdot \cos \tau_0) \cdot \sin \theta_0^i + \\ &+ (-\beta' \cdot (H_{20} + \rho_{20}) \cdot \sin \tau_0 + \Delta x' \cdot \cos \tau_0) \cdot \cos \theta_0^i \end{aligned} \quad (18)$$

Отже, з урахуванням залежностей 13 і 18 система 14 є системою нелінійних рівнянь виду  $K(\delta^i) \delta^i = \mathbf{P}$ . Крім того, за рахунок змінності числа кульок, що контактують з обома кільцями, у системі 14 виникає нелінійність другого типу. Дійсна жорсткість  $k^i$  приведеної пружини у  $i$ -й контактній групі визначається залежністю:

$$k^i = \begin{cases} k^i & \text{при } (2 \cdot \Delta r_{33}^i)_s \leq \Delta_k^i \\ 0 & \text{при } (2 \cdot \Delta r_{33}^i)_s > \Delta_k^i \end{cases} \quad (19)$$

Оскільки при початковому контакті не всі кульки контактують з кільцями, то для цих контактних груп згідно з методом [2] не визначається параметр  $2\Delta r_{33}^i$ , а відповідно, не може бути визначеним направляючий вектор  $\mathbf{a}^i$  і радіус-вектор  $\mathbf{r}'_{22}^i$  закріплення приведеної пружини. Тому безпосередньому рішенню системи 14 для неідеального підшипника, що перебуває під дією комбінованого навантаження, має передувати рішення цієї ж системи при врахуванні дії тільки осевого навантаження (попередній натяг  $Q_0$  підшипника), тобто для  $\mathbf{P} = (0, 0, Q_0, 0, 0)^T$ . Моменту контакту досі не навантаженої кульки знаходимо за методом [2] шляхом побудови прилеглих синусоїд за залежністю 17 при поступовому збільшенні сили  $Q_0$  до моменту збігу значень узагальненої похибки  $\Delta_k$  даної контактної групи з відповідним значенням  $2\Delta r_{33s}$  прилягаючої синусоїди ( $i+1$  контактна група, рис.4).

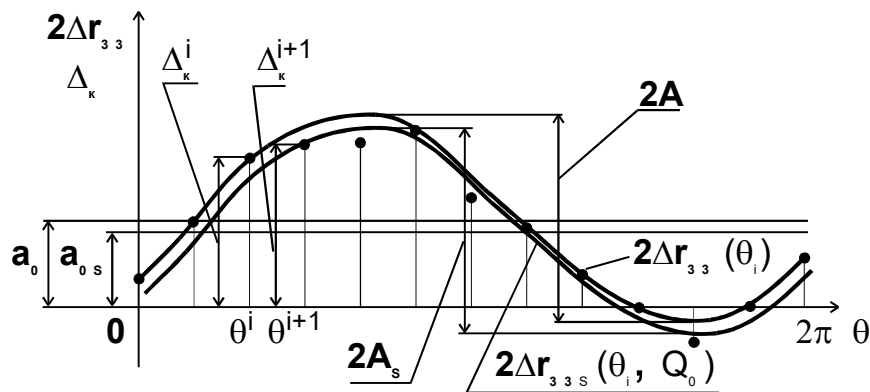


Рис.4. Знаходження моменту контакту досі не навантаженої кульки.

Загальне зміщення від номінального положення центру  $O_2$  внутрішнього кільця підшипника опори шпиндельного вузла, викликане неідеальністю виготовлення його елементів і вузла загалом та дією комбінованого зовнішнього навантаження визначається векторною сумою відповідних складових  $\mathbf{h}_e$  та  $\mathbf{h}'_e$  (рис.3б).

*Summary Elastic deformational model of non ideal radial thrust ball bearing of the spindle unit support have been developed. This model let us to form bearing stiffness matrix considering non ideal elements and the whole spindle manufacturing and determine total relative displacement of the inner ring in the 3D space under the influence of combined outer load.*

### Література

1. Журавлев В.Ф., Бальмонт В.Б. Механика шарикоподшипников гироскопов. – М.: Машиностроение, 1985. – 272 с.
2. Данильченко Ю.М. Початкове зміщення внутрішнього кільця радіально-упорного підшипника опори шпиндельного вузла. // Вісник Тернопільського державного технічного університету. Т.5, №.1, 2000. – С.35-45.
3. Решетов Д.Н., Портман В.Т. Точность металлорежущих станков. – М.: Машиностроение, 1986. – 336 с.

Одержано 22.02.2000 р.