УДК. 517.443

[1]М.Ленюк, докт.фіз.-мат.наук; [2]М.Шинкарик, канд.фіз.-мат.наук
[1]*Тернопільський державний технічний університет імені Івана Пулюя*
[2]*Тернопільська академія народного господарства*

ОБЧИСЛЕННЯ НЕВЛАСНИХ ІНТЕГРАЛІВ МЕТОДОМ ГІБРИДНОГО ІНТЕГРАЛЬНОГО ПЕРЕТВОРЕННЯ ТИПУ ЛЕЖАНДРА 1-ГО РОДУ – (КОНТОРОВИЧА - ЛЕБЕДЕВА) 2-ГО РОДУ – ВЕБЕРА

Методом порівняння розв'язків крайової задачі на спряження для модифікованих диференціальних рівнянь Бесселя та Лежандра обчислено сім'ю поліпараметричних невласних інтегралів від функцій Бесселя і приєднаних функцій Лежандра.

Вступ

В довідниковій літературі з математики знаходимо формули обчислення невласних інтегралів за спектральними елементами одного диференціального оператора (як правило, лінійного, другого порядку), фундаментальну систему розв'язків для якого утворюють спеціальні функції математичної фізики [8, 9]. У зв'язку з широким впровадженням композиційних матеріалів виникає потреба в обчисленні поліпараметричних невласних інтегралів за спектральними елементами гібридних диференціальних операторів (на різних ділянках інтервалу (a,b) діють різні диференціальні оператори). Один із методів обчислення таких інтегралів запропоновано метод гібридних інтегральних перетворень [10]. При цьому поява нового типу гібридного інтегрального перетворення дає можливість обчислити нову сім'ю невласних інтегралів. В даній роботі обчислено сім'ю невласних інтегралів методом гібридного перетворення типу Лежандра 1-го роду – (Конторовича-Лєбєдєва) 2-го роду – Вебера.

Розглянемо задачу про побудову обмеженого на множині $I_{12}^{+}=\{r: r\in(0,R_1)\cup(R_1,R_2)\cup(R_2,\infty)\}$ розв'язку сепаратної системи модифікованих диференціальних рівнянь Лежандра і Бесселя

$$
\begin{aligned}
&\left(\Lambda_{\mu}-q_1^2\right)u_1(r)=-g_1(r),\ r\in(0,R_1)\\
&\left(B_{\alpha_1}-q_2^2\right)u_2(r)=-g_2(r),\ r\in(R_1,R_2)\\
&\left(B_{\nu,\alpha_2}-q_3^2\right)u_3(r)=-g_3(r),\ r\in(R_2,\infty)
\end{aligned}
\tag{1}
$$

за умовами спряження

$$
\left[\left(\alpha_{j1}^{k}\ d/dr+\beta_{j1}^{k}\right)u_k(r)-\left(\alpha_{j2}^{k}\ d/dr+\beta_{j2}^{k}\right)u_{k+1}(r)\right]\Big|_{r=R_k}=\omega_{jk;\,j,k=1,2}
\tag{2}
$$

У рівностях (1), (2) $q_j>0,\ c_{1k}\cdot c_{2k}>0,\ c_{jk}=\alpha_{2j}^{k}\beta_{1j}^{k}-\alpha_{1j}^{k}\beta_{2j}^{k}$,

$$
\Lambda_{\mu}=\frac{d^2}{dr^2}+cthr\frac{d}{dr}+\frac{1}{4}-\frac{\mu^2}{sh^2r},\ B_{\alpha_1}=r^2\frac{d^2}{dr^2}+(2\alpha_1+1)r\frac{d}{dr}+
$$

$$
+\alpha_2^2-\lambda^2r^2,\ B_{\nu,\alpha_2}=\frac{d^2}{dr^2}+\frac{2\alpha_2+1}{r}\frac{d}{dr}-\frac{\nu^2-\alpha_2^2}{r^2};\ \mu\ge 0,\ 2\alpha_1+1>0,
$$

$\nu\ge\alpha_2\ge-\frac{1}{2}$, $\lambda\in(0,\infty)$; Λ_{μ} – диференціальний оператор Лежандра [1], B_{α_1} – диференціальний оператор Бесселя з виродженням при старшій похідній [2], B_{ν,α_2} – диференціальний оператор Бесселя з виродженням при молодших похідних [3].

Фундаментальну систему розв'язків для рівняння Лежандра $\left(\Lambda_{\mu}-q^{2}\right)\nu=0$ утворюють приєднані модифіковані функції Лежандра $\mathrm{P}^{\mu}_{-1/2+q}(chr)$ і $L^{\mu}_{-1/2+q}(chr)$ [1]; фундаментальну систему розв'язків для рівняння Бесселя $\left(B_{\alpha}-q^{2}\right)\nu=0$ утворюють модифіковані функції Бесселя $I_{q,\alpha}(\lambda r)$ і $K_{q,\alpha}(\lambda r)$ [2], а для рівняння Бесселя $\left(B_{\nu,\alpha}-q^{2}\right)\nu=0$ - модифіковані функції Бесселя $I_{\nu,\alpha}(qr)$ і $K_{\nu,\alpha}(qr)$ [3].

Наявність фундаментальної системи розв'язків дає можливість побудувати загальний розв'язок крайової задачі (1), (2) методом функцій Коші [4,5]:

$$u_1(r)=A_1\,P^{\mu}_{-1/2+q_1}(chr)+\int_0^{R_1}\varepsilon_1(r,\rho)g_1(r)sh\rho\,d\rho,$$

$$u_2(r)=A_2\,I_{q_2,\alpha_1}(\lambda r)+B_2\,K_{q_2,\alpha_1}(\lambda r)+\int_{R_1}^{R_2}\varepsilon_2(r,\rho)\,g_2(\rho)\rho^{2\alpha_1-1}d\rho \tag{3}$$

$$u_3(r)=B_3\,K_{\nu,\alpha_2}(q_3r)+\int_{R_2}^{\infty}\varepsilon_3(r,\rho)\,g_3(\rho)\rho^{2\alpha_2+1}d\rho.$$

Тут $\varepsilon_j(r,\rho)$- функції Коші [4,5]:

$$\begin{aligned}&\varepsilon_j(r,\rho)\Big|_{r=\rho+0}-\varepsilon_j(r,\rho)\Big|_{r=\rho-0}=0\\&\frac{d\varepsilon_j}{dr}(r,\rho)\Big|_{r=\rho+0}-\frac{d\varepsilon_j}{dr}\Big|_{r=\rho-0}=-\frac{1}{\varphi_j(\rho)},\end{aligned} \tag{4}$$

$$\varphi_1(\rho)=sh\rho,\ \ \varphi_2(\rho)=\rho^{+(2\alpha_1-1)},\ \ \varphi_3(\rho)=\rho^{+(2\alpha_2+1)}.$$

Визначимо функції:

$$\mathrm{Z}^{\mu,m1}_{\nu,jk}(chR_m)=\alpha^m_{jk}\,shR_m\,P^{\mu\prime}_{\nu}(chR_m)+\beta^m_{jk}\,P^{\mu}_{\nu}(chR_m),$$

$$\mathrm{Z}^{\mu,m2}_{\nu;jk}(chR_m)=\alpha^m_{jk}\,shR_m\,L^{\mu\prime}_{\nu}(chR_m)+\beta^m_{jk}\,L^{\mu}_{\nu}(chR_m),$$

$$F^{\mu,m}_{\nu,jk}(chR_m,chr)=\mathrm{Z}^{\mu,m1}_{\nu,jk}(chR_m)L^{\mu}_{\nu}(chr)-\mathrm{Z}^{\mu,m2}_{\nu,jk}(chR_m)P^{\mu}_{\nu}(chr);$$

$$U^{m1}_{\nu,\alpha;jk}(q_sR_m)=\left(\alpha^m_{jk}\frac{\nu-\alpha}{R_m}+\beta^m_{jk}\right)I_{\nu,\alpha}(q_sR_m)+\alpha^m_{jk}q_s^2R_mI_{\nu+1,\alpha+1}(q_sR_m),$$

$$U^{m2}_{\nu,\alpha;jk}(q_sR_m)=\left(\alpha^m_{jk}\frac{\nu-\alpha}{R_m}+\beta^m_{jk}\right)K_{\nu,\alpha}(q_sR_m)-\alpha^m_{jk}q_s^2R_mK_{\nu+1,\alpha+1}(q_sR_m),$$

$$\Psi^{m*}_{\nu,\alpha;jk}(q_sR_m,q_sr)=U^{m1}_{\nu,\alpha;jk}(q_sR_m)\,K_{\nu,\alpha}(q_sR_m)-U^{m2}_{\nu,\alpha;jk}(q_sR_m)\,I_{\nu,\alpha}(q_sR_m).$$

Безпосередньо перевіряється, що за функції Коші $\varepsilon_j(r,\rho)$ можна взяти функції:

$$\varepsilon_1(r,\rho)=\frac{S_{\mu}(q_1)}{Z^{\mu,11}_{-1/2+q_1;11}(chR_1)}\begin{cases}P^{\mu}_{-1/2+q_1}(chr)\,F^{\mu,1}_{-1/2+q_1;11}(chR_1,ch\rho), & 0<r<\rho<R_1\\ P^{\mu}_{-1/2+q_1}(ch\rho)\,F^{\mu,1}_{-1/2+q_1;11}(chR_1,chr), & 0<\rho<r<R_1\end{cases};$$

$$\varepsilon_2(r\rho)=\frac{\lambda^{2\alpha_1}}{\Delta_{q_2,\,\alpha_1;\,11}(\lambda R_1,\lambda R_2)}\begin{cases}\Psi^{1*}_{q_2,\,\alpha_1;\,12}(\lambda R_1,\,\lambda r)\,\Psi^{2*}_{q_2,\,\alpha_1;\,11}(\lambda R_2,\,\lambda\rho),\ R_1<r<\rho<R_2\\ \Psi^{1*}_{q_2,\alpha_1;\,12}(\lambda R_1,\,\lambda\rho)\,\Psi^{2*}_{q_2,\,\alpha_1;\,11}(\lambda R_2,\lambda r),\ R_1<\rho<r<R_2\end{cases};$$

$$\varepsilon_3(r,\rho)=-\frac{q_3^{2\alpha_2}}{U^{22}_{\nu,\alpha_2;\,12}(q_3R_2)}\begin{cases}K_{\nu,\,\alpha_2}(q_3\rho)\,\Psi^{2*}_{\nu,\,\alpha_2;\,12}(q_3R_2,\,q_3r),\ R_2<r<\rho<\infty\\ K_{\nu,\,\alpha_2}(q_3r)\,\Psi^{2*}_{\nu,\alpha_2;\,12}(q_3R_2,\,q_3\rho),\ R_2<\rho<r<\infty\end{cases};$$

$$\Delta_{q_2,\alpha_1;\,jk}(\lambda R_1,\lambda R_2)=U^{11}_{q_2,\alpha_1;\,j2}(\lambda R_1)\,U^{22}_{q_2,\,\alpha_1;\,k1}(\lambda R_2)-U^{12}_{q_2,\alpha_1;\,j2}(\lambda R_1)\,U^{21}_{q_2,\alpha_1;\,k1}(\lambda R_2);$$

$$S_\mu(q_1)=2^{-1}\cdot\pi\cdot\Gamma\left(\tfrac{1}{2}+q_1-\mu\right)\left[\Gamma\left(\tfrac{1}{2}+q_1+\mu\right)\right]^{-1}.$$

Умови спряження (2) для визначення величин $A_1,\,A_2,\,B_2,\,B_3$ дають алгебраїчну систему з чотирьох рівнянь:

$$Z^{\mu,\,11}_{-1/2+q_1;\,j1}(chR_1)\,A_1-U^{11}_{q_2,\alpha_1;\,j2}(\lambda R_1)\,A_2-U^{12}_{q_2,\,\alpha_1;\,j2}(\lambda R_1)\,B_2=\delta_{1j}\omega_{11}+\delta_{2j}(\omega_{21}+G_{12})$$

$$\begin{gathered}U^{21}_{q_2,\,\alpha_1;\,j1}(\lambda R_2)\,A_2+U^{22}_{q_2,\,\alpha_1;j1}(\lambda R_2)\,B_2-U^{22}_{\nu,\,\alpha_2;\,j2}(q_3R_2)\,B_3=\delta_{1j}\omega_{12}+\\ +\delta_{2j}(\omega_{22}+G_{23});\ j=1,2\end{gathered}\tag{5}$$

Тут беруть участь символ Кронекера δ_{jk} і функції

$$G_{12}=\frac{c_{11}}{shR_1}\int_0^{R_1}\frac{P^{\mu}_{-1/2+q_1}(ch\rho)}{Z^{\mu,11}_{-1/2+q_1;\,11}(chR_1)}\,g_1(\rho)sh\rho d\rho-\frac{c_{21}}{R_1^{2\alpha_1+1}}\int_{R_1}^{R_2}\frac{\Psi^{2*}_{q_2,\,\alpha_1;\,11}(\lambda R_2,\lambda\rho)}{\Delta_{q_2,\,\alpha_1,\,11}(\lambda R_1,\,\lambda R_2)}\,g_2(\rho)\rho^{2\alpha_1-1}d\rho,$$

$$G_{23}=\frac{c_{12}}{R_2^{2\alpha_1+1}}\int_{R_1}^{R_2}\frac{\Psi^{1*}_{q_2,\alpha_1;\,12}(\lambda R_1,\lambda\rho)}{\Delta_{q_2,\alpha_1;\,11}(\lambda R_1,\lambda R_2)}\,g_2(\rho)\rho^{2\alpha_1-1}d\rho+$$

$$+\frac{c_{22}}{R_2^{2\alpha_2+1}}\int_{R_2}^{\infty}\frac{K_{\nu,\alpha_2}(q_3\rho)}{U^{22}_{\nu,\alpha_2;\,12}(q_3R_2)}\,g_3(\rho)\rho^{2\alpha_2+1}d\rho.$$

Для того, щоб алгебраїчна система мала єдиний розв’язок, необхідно й досить, щоб визначник системи

$$\begin{gathered}\Delta^{\mu}_{\nu,\,(\alpha)}(q)\equiv A_{\nu,\,(\alpha);\,2}(q)\,Z^{\mu,11}_{-1/2+q_1;\,11}(chR_1)-A_{\nu,\,(\alpha);\,1}(q)\,Z^{11}_{-1/2+q_1;21}(chR_1)=\\ =U^{22}_{\nu,\,\alpha_2;\,22}(q_3R_2)\,B_{\mu,\alpha_1;1}(q)-U^{22}_{\nu,\alpha_2;\,12}(q_3R_2)\,B_{\mu,\,\alpha_1;2}(q)\neq 0\end{gathered}\tag{6}$$

Тут прийняті позначення:

$$A_{\nu,(\alpha);\,j}(q)=U^{22}_{\nu,\,\alpha_2;22}(q_3R_2)\,\Delta_{q_2,\alpha_1;\,j1}(\lambda R_1,\lambda R_2)-U^{22}_{\nu,\alpha_2;12}(q_3R_2)\,\Delta_{q_2,\alpha_1;\,j2}(\lambda R_1,\,\lambda R_2),$$

$$B_{\mu,\alpha_1;\,j}(q)=Z^{\mu,11}_{-1/2+q_1;\,11}(chR_1)\,\Delta_{q_2,\,\alpha_1;\,2j}(\lambda R_1,\,\lambda R_2)-Z^{\mu,\,11}_{-1/2+q_1;\,21}(chR_1)\,\Delta_{q_2,\,\alpha_1;1j}(\lambda R_1,\lambda R_2),$$

$$(\alpha)=(\alpha_1,\,\alpha_2),\ q=(q_1,\,q_2,\,q_3),\quad j=1,2.$$

Визначимо: 1) породжені неоднорідністю системи (1) функції впливу

$$H^{\mu}_{\nu,(\alpha);\,11}(r,\rho,\,q)=\frac{S_{\mu}(q_1)}{\Delta^{\mu}_{\nu,\,(\alpha)}(q)}\begin{cases}P^{\mu}_{-1/2+q_1}(chr)\left[A_{\nu,(\alpha);\,2}(q)\,F^{\mu,1}_{-1/2+q_1;\,11}(chR_1,\,ch\rho)-\right.\\ P^{\mu}_{-1/2+q_1}(ch\rho)\left[A_{\nu,(\alpha);\,2}(q)\,F^{\mu,1}_{-1/2+q_1;\,11}(chR_1,\,chr)-\right.\end{cases}$$

$$\left.-A_{\nu,(\alpha);1}(q)\,F^{\mu,1}_{-1/2+q_1;21}(chR_1,\,ch\rho)\right],\ 0<r<\rho<R_1$$

$$\left.-A_{\nu,(\alpha);1}(q)\,F^{\mu,1}_{-1/2+q_1;21}(chR_1,\,chr)\right],\ 0<\rho<r<R_1;$$

$$H^{\mu}_{\nu,(\alpha);\,12}(r,\;\rho,\;q)=\frac{c_{21}}{R_1^{2\alpha_1+1}}\;\frac{1}{\Delta^{\mu}_{\nu,\,(\alpha)}(q)}\;P^{\mu}_{-1/2+q_1}(chr)\,Q_{\nu,\,(\alpha)}(\rho,\,q),$$

$$Q_{\nu,(\alpha)}(r,\,q)=U^{22}_{\nu,\alpha_2;\,22}(q_3R_2)\Psi^{2\,*}_{q_2,\alpha_1;\,11}(\lambda R_2,\,\lambda r)-U^{22}_{\nu,\alpha_2;\,12}(q_3R_2)\Psi^{2\,*}_{q_2,\alpha_1;21}(\lambda R_2,\,\lambda r);$$

$$H^{\mu}_{\nu,(\alpha);\,13}(r,\rho,q)=-\frac{C_{21}\;C_{22}}{\lambda^{2\alpha_1}R_1^{2\alpha_1+1}R_2^{2\alpha_2+1}}\;\frac{1}{\Delta^{\mu}_{\nu,(\alpha)}(q)}\;P^{\mu}_{-1/2+q_1}(chr)\,K_{\nu,\,\alpha_2}(q_3\rho);$$

$$H^{\mu}_{\nu,(\alpha);21}(r,\rho,q)=\frac{c_{11}}{shR_1}\;\frac{1}{\Delta^{\mu}_{\nu,(\alpha)}(q)}\;P^{\mu}_{-1/2+q_1}(ch\rho)\,Q_{\nu,(\alpha)}(r,\,q),$$

$$H^{\mu}_{\nu,(\alpha);22}(r,\rho,q)=\frac{\lambda^{2\alpha_1}}{\Delta^{\mu}_{\nu,(\alpha)}(q)}\begin{cases}Q_{\mu,\alpha_1}(r,q)\,Q_{\nu,(\alpha)}(\rho,q),\ R_1<r<\rho<R_2\\ Q_{\mu,\alpha_1}(\rho,q)\,Q_{\nu,(\alpha)}(\rho,q),\ R_1<\rho<r<R_2\end{cases},$$

$$Q_{\mu,\alpha_1}(r,q)=Z^{\mu,11}_{-1/2+q_1;11}(chR_1)\;\Psi^{1*}_{q_2,\alpha_1;22}(\lambda R_1,\lambda r)-Z^{\mu,11}_{-1/2+q_1;21}(chR_1)\;\Psi^{1*}_{q_2,\alpha_1;12}(\lambda R_1,\lambda r),$$

$$H^{\mu}_{\nu,(\alpha);23}(r,\rho,q)=-\frac{c_{22}}{R_2^{2\alpha_2+1}}\;\frac{1}{\Delta^{\mu}_{\nu,(\alpha)}(q)}\;Q_{\mu,\alpha_1}(r,q)K_{\nu,\alpha_2}(q_3\,\rho); \tag{7}$$

$$H^{\mu}_{\nu,(\alpha);31}(r,\rho,q)=-\frac{c_{11}}{shR_1}\;\frac{c_{12}}{\lambda^{2\alpha_1}R_2^{2\alpha_1+1}}\;\frac{1}{\Delta^{\mu}_{\nu,(\alpha)}(q)}\;P^{\mu}_{-1/2+q}(ch\rho)\,K_{\nu,\alpha_2}(q_3\,r),$$

$$H^{\mu}_{\nu,(\alpha);32}(r,\rho,q)=-\frac{c_{12}}{R_2^{2\alpha_1+1}}\;\frac{1}{\Delta^{\mu}_{\nu,(\alpha)}(q)}\;Q_{\mu,\alpha_1}(\rho,q)\,K_{\nu,\alpha_2}(q_3\,r)$$

$$H^{\mu}_{\nu,(\alpha);33}(r,\rho,q)=\frac{q_3^{2\alpha_2}}{\Delta^{\mu}_{\nu,(\alpha)}(q)}\begin{cases}K_{\nu,\alpha_2}(q_3\,\rho)\left[B_{\mu,\alpha_1;2}(q)\,\Psi^{2*}_{\nu,\alpha_2;12}(q_3\,R_2,q_3\,r)-\right.\\ K_{\nu,\alpha_2}(q_3r)\left[B_{\mu,\alpha_1;2}(q)\,\Psi^{2*}_{\nu,\alpha_2;12}(q_3R_2,\,q_3\,\rho)-\right.\end{cases}$$

$$\begin{matrix}\left.-B_{\mu,\alpha_1;1}(q)\,\Psi^{2*}_{\nu,\alpha_2;22}(q_3\,R_2,q_3\,r)\right],\ R_2<r<\rho<\infty\\ \left.-B_{\mu,\alpha_1;1}(q)\,\Psi^{2*}_{\nu,\alpha_2;22}(q_3\,R_2,q_3\rho)\right],\ R_2<\rho<r<\infty\end{matrix};$$

2) породжені неоднорідністю умов спряження функції Гріна

$$\Re^{\mu,1}_{\nu,(\alpha);\,11}(r,q)=\frac{A_{\nu,(\alpha);2}(q)}{\Delta^{\mu}_{\nu,(\alpha)}(q)}\;P^{\mu}_{-1/2+q_1}(chr),\ \Re^{\mu,1}_{\nu,(\alpha);21}(r,q)=-\frac{A_{\nu,(\alpha);1}(q)}{\Delta^{\mu}_{\nu,(\alpha)}(q)}\;P^{\mu}_{-1/2+q_1}(chr);$$

$$\Re^{\mu,1}_{\nu,(\alpha);12}(r,q)=\frac{c_{21}}{\lambda^{2\alpha_1}R_1^{2\alpha_1+1}}\ \frac{U^{22}_{\nu,\alpha_2;22}(q_3R_2)}{\Delta^{\mu}_{\nu,(\alpha)}(q)}\ P^{\mu}_{-1/2+q_1}(chr),$$

$$\Re^{\mu,1}_{\nu,(\alpha);22}(r,q)=-\frac{c_{21}}{\lambda^{2\alpha_1}R_1^{2\alpha_1+1}}\ \frac{U^{22}_{\nu,\alpha_2;12}(q_3R_2)}{\Delta^{\mu}_{\nu,(\alpha)}(q)}\ P^{\mu}_{-1/2+q_1}(chr); \tag{8}$$

$$\Re^{\mu,2}_{\nu,(\alpha);11}(r,q)=-\frac{Z^{\mu,11}_{-1/2+q_1;21}(chR_1)}{\Delta^{\mu}_{\nu,(\alpha)}(q)}\cdot\theta_{\nu,(\alpha)}(r,q);\ \Re^{\mu,2}_{\nu,(\alpha);21}(r,q)=\frac{Z^{\mu,11}_{-1/2+q_1;11}(chR_1)}{\Delta^{\mu}_{\nu,(\alpha)}(q)}\ \theta_{\nu,(\alpha)}(r,q);$$

$$\Re^{\mu,2}_{\nu,(\alpha);12}(r,q)=\frac{U^{22}_{\nu,\alpha_2;22}(q_3R_2)}{\Delta^{\mu}_{\nu,(\alpha)}(q)}\ \theta_{\mu,\alpha_1}(r,q);\ \Re^{\mu,2}_{\nu,(\alpha);22}(r,q)=-\frac{U^{22}_{\nu,\alpha_2;12}(q_3R_2)}{\Delta^{\mu}_{\nu,(\alpha)}(q)}\ \theta_{\mu,\alpha_1}(r,q);$$

$$\Re^{\mu,3}_{\nu,(\alpha);11}(r,q)=\frac{c_{12}}{\lambda^{2\alpha_1}R_2^{2\alpha_1+1}}\ \frac{Z^{\mu,11}_{-1/2+q_1,21}(chR_1)}{\Delta^{\mu}_{\nu,(\alpha)}(q)}\cdot K_{\nu,\alpha_2}(q_3r),$$

$$\Re^{\mu,3}_{\nu,(\alpha);21}(r,q)=-\frac{c_{12}}{\lambda^{2\alpha_1}R_2^{2\alpha_1+1}}\ \frac{1}{\Delta^{\mu}_{\nu,(\alpha)}(q)}\ Z^{\mu,11}_{-1/2+q_1;11}(chR_1)\,K_{\nu,\alpha_2}(q_3r),$$

$$\Re^{\mu,3}_{\nu,(\alpha);12}(r,q)=\frac{B_{\mu,\alpha_1;2}(q)}{\Delta^{\mu}_{\nu,(\alpha)}(q)}\ K_{\nu,\alpha_2}(q_3r);\ \Re^{\mu,3}_{\nu,(\alpha);22}(r,q)=-\frac{B_{\mu,\alpha_1;1}(q)}{\Delta^{\mu}_{\nu,(\alpha)}(q)}\ K_{\nu,\alpha_2}(q_3r).$$

У результаті однозначної розв'язності алгебраїчної системи (5), підстановки одержаних значень A_1, A_2, B_2, B_3 у формули (3) маємо єдиний розв'язок крайової задачі (1), (2):

$$u_j(r)=\int_0^{R_1}H^{\mu}_{\nu,(\alpha);j1}(r,\rho,q)g_1(\rho)sh\rho d\rho+\int_{R_1}^{R_2}H^{\mu}_{\nu,(\alpha);j2}(r,\rho,q)\,g_2(\rho)\rho^{2\alpha_1-1}d\rho+$$

$$+\int_{R_2}^{\infty}H^{\mu}_{\nu,(\alpha);j3}(r,\rho,q)\,g_3(\rho)\rho^{2\alpha_2+1}d\rho+\sum_{m,k=1}^{2}\Re^{\mu,j}_{\nu,(\alpha);mk}(r,q)\,\omega_{mk};\ j=\overline{1,3} \tag{9}$$

Побудуємо розв'язок крайової задачі (1), (2) методом інтегрального перетворення, породженого на множині I^+_{12} гібридним диференціальним оператором

$$M^{\mu}_{\nu,(\alpha)}=\theta(r)\,\theta(R_1-r)\,\Lambda_{\mu}+\theta(r-R_1)\,\theta(R_2-r)B_{\alpha_1}+\theta(r-R_2)\,B_{\nu,\alpha_2}, \tag{10}$$

$\theta(x)-$ одинична функція Хевісайда [5].

Оскільки оператор $M^{\mu}_{\nu,(\alpha)}$ самоспряжений і має одну особливу точку $r=\infty$, то його спектр дійсний і неперервний, а спектральна вектор-функція

$$V^{\mu}_{\nu,(\alpha)}(r,\beta)=\left\{V^{\mu}_{\nu,(\alpha);1}(r,\beta);\ V^{\mu}_{\nu,(\alpha);2}(r,\beta);\ V^{\mu}_{\nu,(\alpha);3}(r,\beta)\right\},$$

яка відповідає спектральному параметру (власному числу) β, дійсна. При цьому функції $V^{\mu}_{\nu,(\alpha);j}(r,\beta)$ є обмеженим на множині I^+_{12} розв'язком сепаратної системи диференціальних рівнянь Лежандра і Бесселя

$$\begin{aligned}&\left(\Lambda_{\mu}+b_1^2\right)\,V^{\mu}_{\nu,(\alpha);\,1}(r,\beta)=0,\ r\in(0,R_1)\\&\left(B_{\alpha_1}+b_2^2\right)\,V^{\mu}_{\nu,(\alpha);\,2}(r,\beta)=0,\ r\in(R_1,R_2)\\&\left(B_{\nu,\alpha_2}+b_3^2\right)\,V^{\mu}_{\nu,(\alpha);\,3}(r,\beta)=0,\ r\in(R_2,\infty)\end{aligned}\tag{11}$$

за умовами спряження

$$\left.\left[\left(\alpha^k_{j1}\,{}^{d}\!/_{dr}+\beta^k_{j1}\right)\,V^{\mu}_{\nu,(\alpha);\,k}(r,\beta)-\left(\alpha^k_{j2}\,{}^{d}\!/_{dr}+\beta^k_{j2}\right)\,V^{\mu}_{\nu,(\alpha);\,k+1}(r,\beta)\right]\right|_{r=R_k}=0;\ j,k=1,2\tag{12}$$

Фундаментальну систему розв’язків для рівняння Бесселя $\left(B_{\alpha_1}+b_2^2\right)\upsilon=0$ утворюють спеціальні функції Бесселя $C_{\alpha_1}(\lambda\mathrm{r},b_2)$ та $D_{\alpha_1}(\lambda\mathrm{r},b_2)$ [2], а для рівняння Бесселя $\left(B_{\nu,\,\alpha_2}+b_3^2\right)=0$ - функції Бесселя $J_{\nu,\alpha_2}(b_3\,\mathrm{r})$ і $N_{\nu,\alpha_2}(b_3\,\mathrm{r})$, [3], $b_j=\left(\beta^2+k_j^2\right)^{1/2},\ k_j^2\geq 0,\ j=\overline{1,3}.$

Якщо покласти

$$\begin{aligned}&V^{\mu}_{\nu,(\alpha);\,1}(\mathrm{r},\beta)=A_1\,P^{\mu}_{-1/2+ib_1}(chr),\\&V^{\mu}_{\nu,(\alpha);\,2}(\mathrm{r},\beta)=A_2C_{\alpha_1}(\lambda\,\mathrm{r},\mathrm{b}_2)+B_2D_{\alpha_1}(\lambda\,\mathrm{r},\mathrm{b}_2)\\&V^{\mu}_{\nu,(\alpha);\,3}(\mathrm{r},\beta)=A_3J_{\nu,\alpha_2}(b_3\mathrm{r})+B_3N_{\nu,\alpha_2}(b_3\,\mathrm{r}),\end{aligned}\tag{13}$$

то умови спряження (12) дають алгебраїчну систему:

$$X^{11}_{\alpha_1;\,j2}(\lambda R_1,b_2)\,A_2+X^{12}_{\alpha_1;\,j2}(\lambda R_1,b_2)\,B_2=Z^{\mu,\,11}_{-1/2+ib_1;\,j1}(c\,h\,R_1)A_1;$$

$$u^{21}_{\nu,\alpha_2;\,j2}(b_3R_2)A_3+u^{22}_{\nu,\alpha_2;\,j2}(b_3R_2)\,B_3=X^{21}_{\alpha_1;\,j1}(\lambda R_2,b_2)A_2+X^{22}_{\alpha_1;\,j1}(\lambda R_2,b_2)B_2;\ j=1,2\tag{14}$$

У системі (14) беруть участь функції:

$$X^{m1}_{\alpha_1;\,jk}(\lambda R_m,b_2)=\left.\left(\alpha^m_{jk}\,{}^{d}\!/_{dr}+\beta^m_{jk}\right)C_{\alpha_1}(\lambda\,r,b_2)\right|_{r=R_m},$$

$$X^{m2}_{\alpha_1;\,jk}(\lambda R_m,b_2)=\left.\left(\alpha^m_{jk}\,{}^{d}\!/_{dr}+\beta^m_{jk}\right)D_{\alpha_1}(\lambda\,r,b_2)\right|_{r=R_m},$$

$$u^{21}_{\nu,\alpha_2;\,j2}(b_3R_2)=\left(\alpha^2_{j2}\,\frac{\nu-\alpha_2}{R_2}+\beta^2_{j2}\right)J_{\nu,\alpha_2}(b_3R_2)-\alpha^2_{j2}\,b_3^2\,R_2\,J_{\nu+1,\,\alpha_2+1}(b_3R_2),$$

$$u^{22}_{\nu,\alpha_2;\,j2}(b_3R_2)=\left(\alpha^2_{j2}\,\frac{\nu-\alpha_2}{R_2}+\beta^2_{j2}\right)N_{\nu,\alpha_2}(b_3R_2)-\alpha^2_{j2}\,b_3^2\,R_2\,N_{\nu+1,\,\alpha_2+1}(b_3\,R_2)$$

При

$$A_1=\frac{c_{21}\,sh\,\pi\,b_2}{\pi\,\lambda^{2\alpha_1}R_1^{2\alpha_1+1}}\cdot\frac{2}{\pi}\,\frac{c_{22}}{b_3^{2\alpha_2}R_2^{2\alpha_2+1}}\equiv q_{\alpha_1}(\beta)q_{\alpha_2}(\beta)$$

із системи (14) отримуємо A_2,B_2,A_3,B_3. Підставивши їх значення в рівності (13), маємо:

$$V^{\mu}_{\nu,(\alpha);\,1}(r,\beta)=q_{\alpha_1}(\beta)\,q_{\alpha_2}(\beta)\,P^{\mu}_{-1/2+ib_1}(ch\,r),$$

$$V^{\mu}_{\nu,(\alpha);\,2}(r,\beta)=q_{\alpha_2}\Big[Z^{\mu,11}_{-1/2+ib_1;\,11}(chR_1)\,\Psi^1_{q_2,\alpha_1;22}(\lambda R_1,\lambda r,b_2)-$$

$$-Z^{\mu,11}_{-1/2+ib_1;\,21}\left(ch\,R_1\right)\Psi^1_{q_2,\alpha_1;\,12}\left(\lambda\,R_1,\lambda\,r,b_2\right)\Big], \tag{15}$$

$$V^{\mu}_{\nu,(\alpha);\,3}(r,\beta)=\omega^{\mu}_{\nu,(\alpha);\,1}(\beta)\,N_{\nu,\alpha_2}(b_3r)-\omega^{\mu}_{\nu,(\alpha);\,2}(\beta)J_{\nu,\alpha_2}(b_3r).$$

У рівностях (15) прийняті позначення:

$$b_{\mu,\alpha_1;\,j}(\beta)=Z^{\mu,11}_{-1/2+i\,b_1;\,11}(chR_1)\,\delta_{\alpha_1;\,2j}(\lambda R_1,\lambda R_2,b_2)-Z^{\mu,11}_{-1/2+i\,b_1;\,21}(chR_1)\,\delta_{\alpha_1;\,1j}(\lambda R_1,\lambda R_2,b_2);$$

$$\delta_{\alpha_1;kj}(\lambda R_1,\lambda R_2,b_2)=X^{11}_{\alpha_1;k2}(\lambda R_1,b_2)\,X^{22}_{\alpha_1;\,j1}(\lambda R_2,b_2)-X^{12}_{\alpha_1;k2}(\lambda R_1,b_2)\,X^{21}_{\alpha_1;\,j1}(\lambda R_2,b_2);$$

$$\omega^{\mu}_{\nu,(\alpha);\,j}(\beta)=u^{2j}_{\nu,\alpha_2;\,12}(b_3\,R_2)\,b_{\mu,\alpha_1;\,2}(\beta)-u^{2j}_{\nu,\alpha_2;\,22}(b_3R_2)\,b_{\mu,\alpha_1;\,1}(\beta);\ j=1,2.$$

Покладемо

$$\sigma_1=\frac{c_{11}c_{12}}{c_{21}c_{22}}\frac{R_1^{2\alpha_2+1}}{shR_1}\frac{R_2^{2\alpha_2+1}}{R_2^{2\alpha_1+1}},\ \sigma_2=\frac{c_{12}}{c_{22}}\frac{R_2^{2\alpha_2+1}}{R_2^{2\alpha_1+1}}.$$

Визначимо вагову функцію

$$\sigma(r)=\sigma_1\,shr\,\theta(r)\theta(R_1-r)+\sigma_2r^{2\alpha_1-1}\theta(r-R_1)\theta(R_2-r)+\sigma_3r^{2\alpha_2+1}\theta(r-R_2)$$

спектральну вектор-функцію

$$V^{\mu}_{\nu,(\alpha)}(r,\beta)=\theta(r)\theta(R_1-r)V^{\mu}_{\nu,(\alpha);\,1}(r,\beta)+\theta(r-R_1)\theta(R_2-r)V^{\mu}_{\nu,(\alpha);\,2}(r,\beta)+\theta(r-R_2)V^{\mu}_{\nu,(\alpha);\,3}(r,\beta)$$

і спектральну щільність

$$\Omega^{\mu}_{\nu,(\alpha)}(\beta)=\beta\,b_3^{2\alpha_2}\left(\left[\omega^{\mu}_{\nu,\alpha;\,1}(\beta)\right]^2+\left[\omega^{\mu}_{\nu,\alpha;\,2}(\beta)\right]^2\right)^{-1}.$$

Наявність спектральної вектор-функції $V^{\mu}_{\nu,(\alpha)}(r,\beta)$ оператора $M^{\mu}_{\nu,(\alpha)}$, визначеного рівністю (10), вагової функції $\sigma(r)$ і спектральної щільності $\Omega^{\mu}_{\nu,(\alpha)}(\beta)$ дозволяє визначити пряме ${}^*\mathrm{H}^{\mu}_{\nu,(\alpha),\,2}$ і обернене ${}^*\mathrm{H}^{-\mu}_{\nu,(\alpha);\,2}$ гібридне інтегральне перетворення типу Лежандра 1-го роду – (Конторовича – Лєбєдева) 2-го роду – Вебера, породжене на множині I_{12}^{+} гібридним диференціальним оператором $M^{\mu}_{\nu,(\alpha)}$:

$${}^*\mathrm{H}^{\mu}_{\nu,(\alpha);\,2}[g(r)]=\int_0^\infty g(r)\ V^{\mu}_{\nu,(\alpha)}(r,\beta)\sigma(r)dr\equiv\tilde{g}(\beta) \tag{16}$$

$${}^*\mathrm{H}^{-\mu}_{\nu,(\alpha);\,2}[\tilde{g}(\beta)]=\int_0^\infty \tilde{g}(\beta)\,V^{\mu}_{\nu,(\alpha)}(r,\beta)\Omega^{\mu}_{\nu,(\alpha)}(\beta)d\beta\equiv g(r) \tag{17}$$

Математичним обгрунтуванням правил (16), (17) є твердження [6]: Якщо вектор-функція

$$f(r)=\left[\sqrt{shr}\ \theta(r)\,\theta\,(R_1-r)+\sqrt{r^{2\alpha_1-1}}\ \theta\,(r-R_1)\,\theta\,(R_2-r)+\sqrt{r^{2\alpha_1+1}}\,\theta\,(r-R_2)\right]g(r)$$

неперервна, абсолютно сумовна і має обмежену варіацію на множині $(0,\infty)$, то для будь-якого $r\in I_{12}^{+}$ справджується інтегральне зображення

$$g(r)=\int_0^\infty V^{\mu}_{\nu,(\alpha)}(r,\beta)\Omega^{\mu}_{\nu,(\alpha)}(\beta)\int_0^\infty g(\rho)\,V^{\mu}_{\nu,(\alpha)}(\rho,\beta)\sigma(\rho)d\rho\,d\beta \tag{18}$$

Побудований методом запровадженого формулами (16), (17) інтегрального перетворення за відомою логічною схемою [7] єдиний розв'язок крайової задачі (1), (2) має структуру:

$$u_j(r) = \int_0^{R_1} \left(\int_0^\infty V^\mu_{\nu,(\alpha);j}(r,\beta)\, V^\mu_{\nu,(\alpha);1}(\rho,\beta) \frac{\Omega^\mu_{\nu,(\alpha)}(\beta) d\beta}{\beta^2 + q_1^2} \right) g_1(\rho) sh\rho\, \sigma_1\, d\rho +$$

$$+ \int_{R_1}^{R_2} \left(\int_0^\infty V^\mu_{\nu,(\alpha);j}(r,\beta)\, V^\mu_{\nu,(\alpha);2}(\rho,\beta) \frac{\Omega^\mu_{\nu,(\alpha)}(\beta)}{\beta^2 + q_1^2}\, d\beta \right) g_2(\rho) \sigma_2\, \rho^{2\alpha_1 - 1} d\rho +$$

$$+ \int_{R_2}^{\infty} \left(\int_0^\infty V^\mu_{\nu,(\alpha);j}(r,\beta)\, V^\mu_{\nu,(\alpha);3}(\rho,\beta)\, \frac{\Omega^\mu_{\nu,(\alpha)}(\beta)}{\beta^2 + q_1^2}\, d\beta \right) g_3(\rho) \sigma_3\, \rho^{2\alpha_2 + 1} d\rho +$$

$$+ \sum_{k=1}^{2} \frac{a_k}{c_{1k}} \left[\left(\int_0^\infty \frac{Z^{\mu,k}_{\nu,(\alpha);12}(\beta)}{\beta^2 + q_1^2}\, V^\mu_{\nu,(\alpha);j}(r,\beta)\, \Omega^\mu_{\nu,(\alpha)}(\beta)\, d\beta \right) \omega_{2k} - \right.$$

$$\left. - \left(\int_0^\infty \frac{Z^{\mu,k}_{\nu,(\alpha);22}(\beta)}{\beta^2 + q_1^2}\, V^\mu_{\nu,(\alpha);j}(r,\beta)\, \Omega^\mu_{\nu,(\alpha)}(\beta)\, d\beta \right) \omega_{1k} \right]; \quad j = \overline{1,3} \qquad (19)$$

Тут прийняті позначення:

$$Z^{\mu,k}_{\nu,(\alpha);j2}(\beta) = \left(\alpha^k_{j2} \, {}^{d}\!/_{dr} + \beta^k_{j2} \right) V^\mu_{\nu,(\alpha);k+1}(r,\beta) \Big|_{r=R_k},$$

$$a_1 = \sigma_1\, shR_1, \quad a_2 = \sigma_2 R_2^{2\alpha_1 + 1}; \quad q_1^2 = \max\{q_1^2;\, q_2^2; q_3^2\} \left(k_j^2 = q_1^2 - q_j^2 \geq 0 \right).$$

Порівнюючи розв'язки (9) і (19) в силу єдності, одержуємо наступні формули обчислення невласних інтегралів:

$$\int_0^\infty V^\mu_{\nu,(\alpha);j}(r,\beta)\, V^\mu_{\nu,(\alpha);k}(\rho,\beta)\, \frac{\Omega^\mu_{\nu,(\alpha)}(\beta)}{\beta^2 + q_1^2}\, d\beta = \frac{1}{\sigma_k}\, H^\mu_{\nu,(\alpha);jk}(r,\rho,q); \; j,k = \overline{1,3} \qquad (20)$$

$$\int_0^\infty \frac{Z^{\mu,k}_{\nu,(\alpha);12}(\beta)}{\beta^2 + q_1^2}\, V^\mu_{\nu,(\alpha);j}(r,\beta)\, \Omega^\mu_{\nu,(\alpha)}(\beta) d\beta = \frac{c_{1k}}{a_k}\, \Re^{\mu,j}_{\nu,(\alpha);2k}(r,q), \; j = \overline{1,3} \qquad (21)$$

$$\int_0^\infty \frac{Z^{\mu,k}_{\nu,(\alpha);22}(\beta)}{\beta^2 + q_1^2}\, V^\mu_{\nu,(\alpha);j}(r,\beta)\, \Omega^\mu_{\nu,(\alpha)}(\beta)\, d\beta = -\frac{c_{1k}}{a_k}\, \Re^{\mu,j}_{\nu,(\alpha);1k}(r,\, q), \; k = 1,2 \qquad (22)$$

Зауважимо, що можна покласти $q_1^2 = q_2^2 = q_3^2 \equiv \overline{q}^2$.

Підсумком вищевикладеного є твердження.

<u>Теорема:</u> Якщо вектор-функція $f(r) = \{\Lambda_\mu[g_1(r)];\, B_{\alpha_1}[g_2(r)],\, B_{\nu,\alpha_2}[g_3(r)]\}$ неперервна на множині I_{12}^+, а вектор-функція $g(r) = \{g_1(r);\, g_2(r);\, g_3(r)\}$ задовольняє умови обмеження

$$\lim_{r \to 0} shr\left(\frac{dg_1}{dr}\, V^\mu_{\nu,(\alpha);1} - g_1\, \frac{d}{dr}\, V^\mu_{\nu,(\alpha);1} \right) = 0, \; \lim_{r \to \infty} r^{2\alpha_2 + 1}\left(\frac{dg_3}{dr}\, V^\mu_{\nu,(\alpha);3} - g_3(r) \frac{d}{dr}\, V^\mu_{\nu,(\alpha);3} \right) = 0,$$

умови спряження (2) і виконується умова (6) однозначної розв'язності крайової задачі (1), (2), то справджуються формули (20) - (22) обчислення поліпараметричної сім'ї невласних інтегралів від спеціальних функцій Бесселя та функцій Лежандра.

Зауваження: Праві та ліві частини рівностей (20) - (22) залежать від даних і параметрів задачі неперервно. Це дозволяє виділити безпосередньо із загальних структур будь – який частковий випадок (в межах даної моделі).

Висновки

Результати роботи поповнюють довідникову математичну літературу і можуть бути використані при обчисленні невласних інтегралів, що описують стаціонарний режим композиційних конструкцій, які знаходяться в полі дії стрибкоподібного навантаження, та невласних інтегралів, які виникають в результаті дослідження фізико-технічних процесів в неоднорідних середовищах.

The family of polyparametric non-personal integrals from the Bessel functions and joint Legandre functions were calculated by means of comparison of the boudary task solution on the conjugation for modificated Bessel and Legandre differential equations.

Література

1. Ленюк М.П., Шинкарик Н.И. Гибридные интегральные преобразования Лежандра. - Львов, 1989. - 60 с. – (Препринт / АН УССР. Ин-т прикладных проблем механики и математики; 89.0).
2. Ленюк М.П., Міхалевська Г.І. Інтегральні перетворення типу Конторовича – Лєбєдєва. – Чернівці: Прут, 2002. – 280 с.
3. Ленюк М.П. Исследования основных краевых задач для диссипативного волнового уравнения Бесселя. – Киев, 1983. – 61 с. – (Препринт / АН УССР. Ин-т математики; 83.3).
4. Степанов В.В. Курс дифференциальных уравнений. – М. : Физматгиз, 1959. – 468 с.
5. Шилов Г.Е. Математический анализ. Второй специальный курс. – М.: Наука, 1965. – 328 с.
6. Ленюк М.П., Янчишин М.Л. Гібридні інтегральні перетворення типу (Фур'є, Конторовича – Лєбєдєва) – Лежандра. – Чернівці: Прут, 2002. – 76 с. – (Препринт / НАН України. Ін-т прикладних проблем механіки і математики ім. Я.С. Підстригача; 01. 02).
7. Ленюк М.П., Ленюк О.М. Обчислення невласних інтегралів методом гібридного інтегрального перетворення типу (Лежандра, Лежандра, Конторовича – Лєбєдєва). – Чернівці: Прут, 2002.–48с.– (Препринт / НАН України. Ін-т прикладних проблем механіки і математики ім. Я.С. Підстригача; 02.02).
8. Градштейн И.С., Рыжик И.М. Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений. – М.: Наука, 1971. – 1108с.
9. Прудников А.П., Брыков Ю.А., Марычев О.И. Интегралы и ряды. Специальные функции. – М.: Наука, 1983. – 798с.
10. Ленюк М.П., Літовченко В.А. Обчислення невласних інтегралів методом гібридних інтегральних перетворень: В 3-х томах, Київ: Ін-т математики НАН України, 1994 (Т.1, 244с.), 1997 (Т.2, 283с.), 1999 (Т.3, 239с.).

Одержано 12.03.2003 р.