УДК 519.217.1

М.Приймак, докт.техн.наук
Тернопільський державний технічний університет імені Івана Пулюя

МАРКІВСЬКІ ПЕРІОДИЧНІ ПРОЦЕСИ

Вперше введено новий клас випадкових процесів – клас марківських періодичних процесів. Використовуючи їх, відкриваються нові можливості вивчення аналітичними, статистичними, імітаційними методами стохастичних систем, явищ, сигналів, характерною особливістю яких крім марковості є стохастична періодичність.

Вступ. В теорії і прикладних дослідженнях випадкових процесів особливе місце займають марківські процеси. Це обумовлено декількома причинами. По-перше, марківські процеси є моделями багатьох стохастичних систем, явищ, для яких в процесі еволюції характерна марковість. На описовому рівні це означає, що ”майбутнє” системи не залежить від ”минулого”, якщо фіксоване ”теперішнє”. Розкриваючи суть марковості, іноді говорять, що коли відомий ”теперішній” стан системи, то ніяка додаткова інформація про поведінку системи в минулому не впливає на наше знання ймовірнісного закону, який керує поведінкою системи в майбутньому. Другою важливою особливістю марківських процесів є те, що в загальному випадку вони повністю можуть бути задані лише двомірним розподілом, а в частинних випадках - з допомогою певних характеристик процесів.

Марківські процеси є моделями багатьох стохастичних систем, явищ, сигналів, Добре вивченим представником марківського процесу є броунівський рух. Марківськими є процес радіоактивного розпаду, розгалужені процеси (електронні помножувачі, нейтронні ланцюгові реакції, виживання прізвищ). До процесів марківського типу відносяться вхідні потоки вимог (заявок), що поступають в різноманітні системи масового обслуговування (енергосистеми, аеропорти, автоматичні телефонні станції (АТС), банки, довідкові бюро, пункти швидкої допомоги, каси по продажу квитків, ремонтні майстерні). Марківські процеси знаходять застосування в задачах оптимізації роботи ЕОМ, зокрема з метою більш ефективного використання оперативної пам’яті, робочого часу процесора, каналів зв’язку та ін.

Теорія марківських процесів веде свій початок з робіт Андрія Андрійовича Маркова, присвячених вивченню послідовностей залежних випробувань, які він започаткував в 1907 році. Загальне визначення, класифікація і основні рівняння теорії марківських процесів були дані А. М. Колмогоровим у відомій роботі “Про аналітичні методи в теорії ймовірностей” [1], вперше опублікованій на німецькій мові в 1931 році, а на російській - лише в 1938 році. Слід додати, що в коментарі, написаному до цієї роботи О.Д.Вентцелем, слушно зауважено, що назва статті на сучасній мові звучала б скоріше як “Аналітичні методи в теорії марківських процесів”. Значний вклад в подальший розвиток теорії марківських процесів внесли В.Феллер, Дж.Дуб, інші вчені.

В багаточисельній літературі, присвяченій теорії і прикладному застосуванню марківських процесів, значна увага приділяється конкретним класам цих процесів. Це насамперед однорідні марківські процеси, стрибкоподібні процеси, процеси з незалежними приростами, розгалужені процеси. Разом з тим результати попередніх досліджень багатьох реальних стохастичних систем показують, що крім марковості принциповою особливістю їх функціонування є стохастична періодичність (ритмічність). Під цим розуміється, що періодичними є певні ймовірнісні характеристики процесу, для конкретних же реалізацій, отриманих в результаті спостереження за процесом, детермінована періодичність відсутня. Саме така особливість, тобто ритмічність, має місце в роботі АТС, транспортних систем, енергосистем, багатьох інших систем масового обслуговування, одним із періодів ритмічності яких є доба, тобто $T = 24$ години.

Для всестороннього вивчення згаданих систем бажано використовувати моделі, які б крім марковості враховували згадану ритмічність. Однак автору цієї роботи не відомі літературні джерела, де б розглядався клас випадкових процесів, які одночасно враховують марковість і стохастичну періодичність.

Мета роботи. Враховуючи описану ситуацію щодо важливості дослідження марківських стохастичних систем і сигналів, характерною особливістю яких є стохастична періодичність, метою роботи є введення нового класу випадкових процесів - класу марківських періодичних процесів, формулювання для них основних рівнянь: рівняння Колмогорова-Чепмена та першого і другого рівнянь Колмогорова.

Визначення і термінологія. Існують різні означення марківського процесу, які між собою еквівалентні але по формі суттєво відрізняються. Ми будемо використовувати основні положення та позначення щодо марківських процесів, в основному дотримуючись [2,3].

В основі поняття марківського процесу лежить ідея про процеси “без наслідків”. Уявимо систему (частину), яка може знаходитися в різних станах. Можливі стани системи утворюють деяку множину X, яку називають фазовим простором. Нехай система еволюціонує в часі. Її стан в момент часу t позначимо через x_t. Якщо $x_t \in B$, $B \subset X$, то говорять, що система в момент t знаходиться в множині B. Допустимо, що еволюція системи має стохастичний характер, тобто стан системи в момент часу t, взагалі кажучи, не визначається однозначно через стан системи в попередні моменти часу s, де $s < t$, а є випадковим і описується ймовірнісним законом. Позначимо через $P(s,x;t,B)$ ймовірність події $x_t \in B$ при умові, що $x_s = x,\ s < t$. Ймовірнісну міру $P(s,x;t,B)$ називають ймовірністю переходу (іноді перехідною функцією; перехідною ймовірністю; умовною ймовірністю переходу) розглядуваної системи.

Під *системою без наслідків* розуміють систему, для якої ймовірність попадання в момент часу t в множину B при повністю відомому рухові системи до моменту часу $s\ (s < t)$ як і раніше рівна $P(s,x;t,B)$ і, таким чином, залежить тільки від стану системи в останній відомий момент часу. Іншими словами, стан деякої системи в теперішній момент часу s визначає ймовірність майбутнього розвитку процесу при $t > s$, а додаткова інформація про минулу поведінку процесу в моменти $t < s$ не впливає на цю ймовірність, не змінює її, або, як кажуть, не має жодного впливу, тобто залишається без наслідків.

Позначимо через $P(s,x;u,z;t,B)$ умовну ймовірність події $x_t \in B$ при умові, що $x_s = x, x_u = z$, $(s < u < t)$. Для систем без наслідків природно припустити, що

$$P(s,x;u,z;t,B) = P(u,z;t,B). \tag{1}$$

Останню властивість, яка характеризує поведінку стохастичних систем без наслідків, називають *властивістю відсутності наслідків або марківською властивістю*, а ймовірнісну міру $P(s,x;t,B)$ - марківською перехідною функцією (ймовірністю).

У відповідності із загальними властивостями умовних ймовірностей має місце рівність

$$P(s,x;t,B) = \int_X P(s,x;u,dz) P(s,x;u,z;t,B), \quad s < u < t.$$

Приймаючи до уваги (1), остання рівність приймає вигляд

$$P(s,x;t,B) = \int_X P(s,x;u,dz) P(u,z;t,B). \tag{2}$$

Співвідношення (2) називають рівнянням Колмогорова-Чепмена.

Якщо існує така функція $p(s,x;t,y)$, що

$$P(s,x;t,B) = \int_B p(s,x;t,y)dy$$

для всіх $s,x,t,B,\ s<t,$ причому інтегрування відбувається по деякій фіксованій мірі, наприклад, мірі Лебега, то функцію $p(s,x;t,y)$ називають *щільністю ймовірності переходу,* або *марківською перехідною щільністю.* Для щільності ймовірності переходу виконується умова, аналогічна (1), тобто

$$p(s,x;u,z;t,y) = p(u,z;t,y) \qquad (1a)$$

а також має місце співвідношення

$$p(s,x;t,y) = \int_{-\infty}^{\infty} p(s,x;u,z)p(u,z;t,y)dz\,, \qquad (2a)$$

яке в більшості випадків теж називають рівнянням Колмогорова-Чепмена, іноді узагальненим рівнянням Маркова, або функцією Смолуховського.

Властивість відсутності наслідків (1) або рівняння Колмогорова-Чепмена (2) кладуть в основу визначення процесів без наслідків, або як їх переважно називають, марківських процесів [2,3].

Означення. Випадковий процес $\{\xi(t),\ t\in I\}$ називається *марківським*, якщо для довільних двох моментів часу t_0 і t_1, $t_0<t_1$, умовний розподіл $\xi(t_1)$ при умові, що задані всі значення $\xi(t)$ при $t\le t_0$ залежить тільки від $\xi(t_0)$.

Множина X можливих значень $\xi(t)$ називається також фазовим простором, і є, як правило, довільною вимірною множиною, переважно одномірним евклідовим простором. У випадку, коли X скінченна або зліченна множина, марківський процес називається *ланцюгом Маркова*.

Для марківського процесу перехідна функція розподілу

$$F(s,x;t,y) = P(s,x;t,B),$$

де $B=(-\infty,y)$. Якщо функція $F(s,x;t,y)$ диференційована по y, то марківська перехідна щільність

$$p(s,x;t,y) = \frac{\partial}{\partial y}F(s,x;t,y).$$

Марківські періодичні процеси. Вже зазначалося, що для багатьох стохастичних систем, моделями яких є марківські процеси, характерною властивістю є стохастична періодичність. Але тут виникає природне запитання: чи можливо цю властивість врахувати з допомогою марківського процесу? В цьому зв'язку необхідно відзначити, що на даний час існують класи випадкових процесів, відмінні від харківських, в тій чи іншій мірі дозволяють враховувати їх стохастичну періодичність. Це періодично корельовано випадкові процеси [4]; процеси, періодичні по Слуцькому [3]; періодичні білі шуми з неперервним [5] і дискретним [6] аргументами; лінійні періодично корельовані [7,8] і періодичні [9,10] процеси та ін. Незважаючи на те, що ці процеси виділені із множини нестаціонарних, крім теоретичного значення вони мають і прикладне застосування. Для них розроблені різноманітні методи їх статистичного аналізу з використанням лише однієї реалізації [8,10,11], а також методи їх імітаційного моделювання [9]. Використання цих методів проілюстровано в [12] на прикладі статистичного аналізу і прогнозу енергонавантажень.

Повертаючись до марківських процесів, зауважимо, що, наскільки відомо автору, на даний час не існує такого їх підкласу, який би одночасно із марковістю дозволяв враховувати і стохастичну періодичність відповідних об'єктів. Тому щоб була можливість цю особливість (тобто стохастичну періодичність) враховувати, досліджувати її аналітичними, статистичними, імітаційними та іншими методами, дамо означення марківського періодичного процесу.

Означення. Марківський процес $\{\xi(t), t \in I\}$ називається **марківським періодичним *процесом***, якщо періодичною по сукупності часових змінних є його умовна ймовірність переходу, тобто існує таке число T, що

$$P(s, x; t, B) = P(s + T, x; t + T, B). \tag{3}$$

Очевидно, для марківського періодичного процесу його перехідна функція розподілу також буде періодичною, тобто

$$F(s, x; t, y) = F(s + T, x; t + T, y),$$

а у випадку існування щільності ймовірності переходу маємо

$$p(s, x; t, y) = p(s + T, x; t + T, y). \tag{3a}$$

Наведене означення періодичного марківського процесу є найбільш загальним. Тому постає питання, як враховується періодичність на рівні окремих класів процесів, зокрема, яким умовам задовольняють відповідні параметри, характеристики того чи іншого процесу. В цьому зв'язку нагадаємо [2,3], що марківські процеси, як правило, класифікують за властивостями їх ймовірностей переходів, які відображають інтуїтивні уявлення про характер руху системи в фазовому просторі. До найпростіших можна віднести процеси Маркова із скінченним або зліченним числом станів, тобто процеси, в яких фазовий простір X складається із скінченного або зліченного числа точок. Мають місце також стрибкоподібні процеси; дифузійні процеси; процеси з дискретним втручанням випадку; процеси з незалежними приростами; розгалужені процеси і інші. Зупинимось на дифузійних процесах, які на малих проміжках часу ведуть себе подібно до броунівському руху. Основоположними для дифузійних процесів є перше і друге рівняння Колмогорова. Розглянемо ці рівняння для випадку, коли марківський процес є періодичним.

Нехай $\{\xi(t), t \in I\}$ - дифузійний процес, тобто марківський процес, для щільності ймовірності переходу якого $p(s, x; t, y)$ виконується умова неперервності, а саме, для любого $\varepsilon > 0$, любих $s, t = s + \Delta s$ має місце співвідношення

$$\lim_{\Delta s \to 0} \frac{1}{\Delta s} \int_{|y-x|>\varepsilon} p(s, x; s + \Delta s, y) dy = 0. \tag{4}$$

Вважається також, що при цих же умовах

$$\lim_{\Delta s \to 0} \frac{1}{\Delta s} \int_{|y-x|<\varepsilon} (y - x) p(s, x; s + \Delta s, y) dy = a(s, x), \tag{5}$$

а для випадку, коли замість множника $(y - x)$ поставити $(y - x)^2$, границя

$$\lim_{\Delta s \to 0} \frac{1}{\Delta s} \int_{|y-x|<\varepsilon} (y - x)^2 p(s, x; s + \Delta s, y) dy = b(s, x), \tag{6}$$

причому збіжність в (4)-(6) рівномірна відносно x. Функції $a(s, x)$ і $b(s, x)$ називають відповідно коефіцієнтами переносу і дифузії процесу $\xi(t)$.

Приймаючи до уваги (3а), тобто періодичність щільності ймовірності переходу, легко бачити, що для марківського періодичного процесу коефіцієнти $a(s, x)$ і $b(s, x)$ є періодичними по s з цим же періодом T: $a(s, x) = a(s + T, x)$, $b(s, x) = b(s + T, x)$. Наведемо відомі рівняння Колмогорова [1-3] для марківських періодичних процесів.

Перше рівняння Колмлгорова. Якщо для щільності ймовірності переходу $p(s, x; t, y)$ марківського періодичного процесу виконуються умови (4)-(6), причому щільність розглядається як функція параметрів початкового стану s і x, то вона задовольняє рівнянню

$$\frac{\partial p(s, x; t, y)}{\partial s} = -a(s, x) \frac{\partial p(s, x; t, y)}{\partial x} - \frac{1}{2} b(s, x) \frac{\partial^2 p(s, x; t, y)}{\partial x^2},$$

коефіцієнти якого є періодичними по змінній s з тим же періодом T, тобто

$$a(s,x)=a(s+T,x),\ \ b(s,t)=b(s+T,x).$$

Друге рівняння Колмогорова. Якщо при цих же умовах, як і для першого рівняння, щільність ймовірності переходу розглядати як функцію параметрів стану t і y, то вона задовольняє рівнянню

$$\frac{\partial P(s,x;t,y)}{\partial t}=-\frac{\partial}{\partial y}\left[a(t,y)p(s,x;t,y)\right]+\frac{1}{2}\frac{\partial^2}{\partial y^2}\left[b(t,y)p(s,x;t,y)\right],$$

коефіцієнти якого є періодичними по t з періодом T, тобто

$$a(t,y)=a(t+T,y),\ \ b(t,y)=b(t+T,y).$$

Таким чином, для виділеного із класу марківських періодичних процесів періодичних процесів дифузійного типу, ми записали 1-е і 2-е рівняння Колмогорова, коефіцієнти якого є періодичними по часовій змінні. Це, очевидно, вносить певні особливості в процес дослідження цих рівнянь, знаходження їх розв'язків. Цікавим є, наприклад, питання вивчення цих рівнянь при умові розкладу їх періодичних коефіцієнтів в ряди Фур'є.

Висновки. В роботі вперше введено новий клас випадкових процесів - клас періодичних марківських процесів. Записано 1-е і 2-е рівняння Колмогорова для періодичних марківських процесів дифузійного типу. Введений клас відкриває нові можливості вивчення аналітичними, статистичними, імітаційними методами систем, явищ, сигналів, для яких крім марковості характерною особливістю є стохастична періодичність. Появилася також можливість означення і дослідження нових класів процесів марківського типу, наприклад, стрибкоподібних періодичних процесів, марківських періодичних ланцюгів, марківських періодичних полів тощо.

For the first time it is introduced new class of random processes: the class of Markov periodic processes. Using them opens new resources for researching by means of analytical, statistical and simulation methods into the systems, effects, signals which possess stochastic periodicity as a specific feature except Markov behavior.

Література

1. Колмогоров А.Н. Об аналитических методах в теории вероятностей // В кн.: Колмогоров А.Н. Теория вероятностей и математическая статистика [Сб. статей]. – М.: Наука, 1986. – С. 60-105.
2. Гихман И.И., Скороход А.В. Теория случайных процессов – Т.2. – М.: Наука, 1973. – 640 с.
3. Коваленко И.Н., Кузнецов Н.Ю., Шуренков В.М. Случайные процессы. Справочник. – К.: Наукова думка, 1983. – 366 с.
4. Гладышев Е.Г. О периодически коррелированных случайных последовательностях // Докл. АН СССР. – 1961. – 137, №5. С. 2236-2239.
5. Красильников О.І., Марченко Б.Г., Приймак М.В. Процеси з незалежними приростами і періодичні білі шуми // Відбір і обробка інформації. – 1996. – Вип.. 10(86). – С. 22-27.
6. Приймак М.В. Дискретні періодичні білі шуми з неперервними розподілами // Праці Ін-ту електродинаміки. Електроенергетика. - Київ: ІЕД НАН України, 1999. - С.15-19.
7. Драган Я.П., Приймак М.В. Линейные периодически коррелированные случайные процессы: Преп / АН УССР. Физико-механический ин-т, №120. – Львів, 1986. – 30 с.
8. Баранов Г.Л., Марченко Б.Г., Приймак Н.В. Модель стохастически периодических электроэнергетических нагрузок и анализ графиков энергосистем // Проблемы энергосбережения. Республиканский межведомственный сборник научных трудов. Институт проблем энергосбережения АН УССР. К.: Наукова думка.- 1990. - Вып.3. - С. 60-65.
9. Приймак М.В. Лінійні періодичні процеси і їх моделювання на ЕОМ // Вісник Тернопільського держ. техн. ун-ту. - 1998. - Т.3, число 3. - С. 111-114.
10. Марченко Б.Г., Приймак М.В. Побудова моделі та аналіз стохастично періодичних навантажень енергосистем //Праці Ін-ту електродинаміки. - Київ: ІЕД НАН України, 1999. - Вип. 1. - С.129-153.
11. Драган Я.П. Свойства отсчетов периодически коррелированных случайных процессов // Отбор и передача информации. – 1972. - №33. – С. 9-12.
12. Приймак М.В. Основи теорії моделювання, аналізу і прогнозу в автоматизованих системах управління ритмічними процесами: Автореф. дис…докт. техн. наук: 05.13.06 / Київ: НАУ, 2001. – 34 с.

Одержано 14.04.2003 р.