

УДК 539.9

**Я.Савула, докт.фіз.-мат.наук; О.Коссак, канд.фіз.-мат.наук;  
А.Торський**

*Львівський національний університет імені Івана Франка,  
Центр математичного моделювання ІППММ ім. Я.С. Підстригала НАНУ*

## **ЧИСЛОВЕ ДОСЛІДЖЕННЯ ВЛАСНИХ ЧАСТОТ ОБОЛОНКОВИХ КОНСТРУКЦІЙ З УРАХУВАННЯМ ПОЧАТКОВОГО НАПРУЖЕНОГО СТАНУ**

*Розглядається динамічна задача для оболонок типу Тимошенка з урахуванням початкового напружено-деформованого стану (НДС). Виходячи з ключових рівнянь геометрично нелінійної теорії Тимошенка, отримано лінеаризовані рівняння руху, а також фізичні та геометричні співвідношення для оболонок з початковим НДС. На основі узагальненої варіаційної постановки задачі отримано узагальнену проблему на власні значення, розв'язок якої шукається за допомогою методу скінчених елементів.*

### **Вступ**

Реальні умови роботи оболоноквих конструкцій, як правило, такі, що процеси нестационарного деформування відбуваються на фоні напружено - деформованого стану, який зумовлений статичним або динамічним навантаженням цих конструкцій.

У роботі [1] розглядаються статичні та динамічні задачі теорії пружності з початковими напруженнями. У роботі [2] проведено дослідження частот вільних коливань оболоноквих конструкцій з попередніми напруженнями. Вплив попередніх напружень на частоти вільних коливань циліндричної оболонки досліджувався в роботі [3]. Дана стаття, присвячена вивченню впливу статичного НДС, викликаного певним зовнішнім навантаженням, на частоти вільних коливань складових оболоноквих конструкцій.

### **1. Постановка задачі**

Розглянемо тонку оболонку  $Z$ ,

$$Z = \{(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) : (\alpha_1, \alpha_2) \in \Omega, -h \leq \alpha_3 \leq h\},$$

яка в недеформованому стані віднесена до криволінійної ортогональної системи координат,  $\alpha_i (i = 1, 2, 3)$ , де  $\alpha_3$  - напрямок, перпендикулярний до серединної поверхні оболонки  $\Omega$ .

Нехай напружено-деформований стан оболонки складається з "головного" стану, що є рівноважним і характеризується малими деформаціями та скінченними переміщеннями, а також "додаткового", якому відповідають малі переміщення і деформації, що виникають в процесі відхилень оболонки від стану рівноваги.

Згідно з прийнятим припущенням, подамо вектор переміщень на серединній поверхні у вигляді суми

$$u(\alpha_1, \alpha_2, t) = u^0(\alpha_1, \alpha_2) + \tilde{u}(\alpha_1, \alpha_2, t), \quad (1.1)$$

де  $t$  - час; індексом "0" позначатимемо "головний стан", а "~" - "додатковий".

Підставимо суму (1.1) у співвідношення геометрично - нелінійної теорії [4]. Тоді, нехтуючи квадратами величин "додаткового" стану, вважаючи їх такими, що мають більш високий порядок меншості ніж решта доданків, запишемо повну лінеаризовану систему рівнянь динаміки попередньо навантаженої оболонки [5]

$$\begin{aligned} C_\sigma (\tilde{\sigma}^*)^0 + \tilde{P} &= 0, & (\alpha_1, \alpha_2) \in \Omega, \\ G_1 (\tilde{\sigma}^*)^0 &= \tilde{\sigma}_r, & (\alpha_1, \alpha_2) \in \Gamma_\sigma, \\ G_2 (\tilde{u}) &= \tilde{u}_r, & (\alpha_1, \alpha_2) \in \Gamma_u. \end{aligned} \quad (1.2)$$

Систему (1.2) доповнимо початковими умовами

$$\begin{aligned} \tilde{u}(\alpha_1, \alpha_2, 0) &= u_0(\alpha_1, \alpha_2), \\ \frac{\partial}{\partial t} \tilde{u}(\alpha_1, \alpha_2, 0) &= \dot{u}_0(\alpha_1, \alpha_2). \end{aligned} \quad (1.3)$$

У формулах (1.2) і (1.3) використані такі позначення:

$$(\tilde{\sigma}^*)^0 = \tilde{F}B \left[ C_l u^0 + \frac{1}{2} (C_\omega u^0)_8^T E_\omega C_\omega u^0 \right] + F^0 B \left[ C_l \tilde{u} + (C_\omega u^0)_8^T E_\omega C_\omega \tilde{u} \right]$$

$\Gamma$ - границя області  $\Omega, \Gamma = \Gamma_\sigma \cup \Gamma_u$ ;  $C_\sigma, C_l, C_\omega$  - матриці диференціальних операторів;  $F^0, \tilde{F}, B, E_\omega$  - матриці констант;  $G_1, G_2$  - матриці напрямних косинусів;  $\tilde{P}$  - вектор - стовпець зовнішнього навантаження та інерційних складових "додаткового" стану;  $\tilde{\sigma}_\Gamma, \tilde{u}_\Gamma$  - вектори стовпці граничних зусиль-моментів та переміщень відповідно. Вигляд цих матриць подано у роботі [4].

Розглянемо задачу про вільні коливання тонких оболонок. Слід відзначити, що тоді мають місце однорідні граничні умови ( $\tilde{\sigma}_\Gamma = \tilde{u}_\Gamma = 0$ ), а також відсутнє зовнішнє поверхнєве навантаження.

## 2. Варіаційне формулювання задачі

Подано вектор переміщень у вигляді

$$\tilde{u}(\alpha_1, \alpha_2, t) = \bar{u}(\alpha_1, \alpha_2) e^{i\lambda t}, (\alpha_1, \alpha_2) \in \Omega. \quad (2.1)$$

Враховуючи (2.1), запишемо варіаційне формулювання [5] для задачі про вільні коливання попередньо навантаженої оболонки

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} \left[ C_l V + (C_\omega u^0)_8^T E_\omega C_\omega V \right]^T E_0 B \left[ C_l \bar{u} + (C_\omega u^0)_8^T E_\omega C_\omega \bar{u} \right] d\Omega + \\ \int_{\Omega} \left[ (C_\omega V)^T E_\omega^T \sigma_8^0 C_\omega \bar{u} \right] d\Omega - \lambda^2 \int_{\Omega} V^T m \bar{u} d\Omega = 0. \end{aligned} \quad (2.2)$$

Тут  $\sigma_8^0$  - матриця початкових зусиль-моментів [5];  $V$  - діагональна матриця розмірності  $5 \times 5$ , в якій відмінні від нуля елементи є функціями  $v_i (i = 1, \dots, 5)$  і задовольняють умови

$$v_i \in [W_2^1(\Omega)]^5, G_2 v_i = 0, \quad (i = 1, \dots, 5).$$

## 3. Схема побудови числового розв'язку

Розглянемо задачу про вільні коливання осесиметричних оболонкових конструкцій. Будемо використовувати циліндричну систему координат  $(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$ , яка пов'язана з декартовою системою такими співвідношеннями:

$$\begin{aligned} x &= \alpha_1 \cos \alpha_2, y = \alpha_1 \sin \alpha_2, z = \alpha_3, \\ 0 &\leq \alpha_1 \leq \alpha_1', 0 \leq \alpha_2 \leq 2\pi. \end{aligned}$$

Для побудови розв'язку використаємо квадратичні апроксимації за координатою  $\alpha_1$  та подамо у вигляді суми ряду за повною системою тригонометричних функцій за координатою  $\alpha_2$ . Отже, запишемо вектор-функцію  $\bar{u}$  у вигляді

$$\bar{u} = \sum_{m=0}^M \Phi_m(\alpha_2) \hat{u}(\alpha_1), \quad (3.1)$$

$$\hat{u}(\alpha_1) = N(\alpha_1) q. \quad (3.2)$$

Тут  $q$  - вектор-стовпець вузлових значень вектора-функції  $\hat{u}(\alpha_1)$ ;  $\Phi_m(\alpha_2)$  - діагональна матриця розмірності  $5 \times 5$ , яка має такі ненульові елементи:

$$\varphi_m^{11} = \varphi_m^{33} = \varphi_m^{44} = \cos m\alpha_2, \varphi_m^{22} = \varphi_m^{55} = \sin m\alpha_2,$$

$N(\alpha_1)$  - блочно-діагональна матриця координатних функцій [6]. Матриця  $V$  має вигляд

$$V = \sum_{m=0}^M \Phi_m(\alpha_2) N(\alpha_1). \quad (3.3)$$

Підставимо співвідношення (3.1)-(3.3) у варіаційне рівняння (2.2), отримаємо

$$\begin{aligned} & \sum_{m=0}^M \left( \int_{\Omega} [C_l \Phi_m N + (C_{\omega} u^0)^T E_{\omega} C_{\omega} \Phi_m N]^T E_0 B \times \right. \\ & \left. [C_l \Phi_m N + (C_{\omega} u^0)^T E_{\omega} C_{\omega} \Phi_m N] d\Omega + \right. \\ & \left. \int_{\Omega} (C_{\omega} \Phi_m N)^T E_{\omega}^T \sigma_8^0 C_{\omega} \Phi_m N d\Omega - \lambda^2 \int_{\Omega} (\Phi_m N)^T m \Phi_m N d\Omega \right) q = 0, \end{aligned} \quad (3.4)$$

де  $m$  - матриця констант [6].

Внаслідок розділення змінних  $\alpha_1, \alpha_2$  у рівнянні (3.4) та інтегрування по області  $\Omega$ , отримаємо матричну задачу на власні значення. Для розв'язання даної задачі використаємо метод ітерацій у підпросторі [7].

#### 4. Числовий приклад

Розглянемо задачу про вільні коливання циліндра, який з'єднаний з круглою пластиною на одному з торців. Дана конструкція перебуває під дією рівномірного зовнішнього або внутрішнього тиску, який характеризується поверхневим навантаженням  $p_3$ . Меридіальний переріз даної конструкції площиною  $\alpha_2 = const$ , зображено на рис.1.

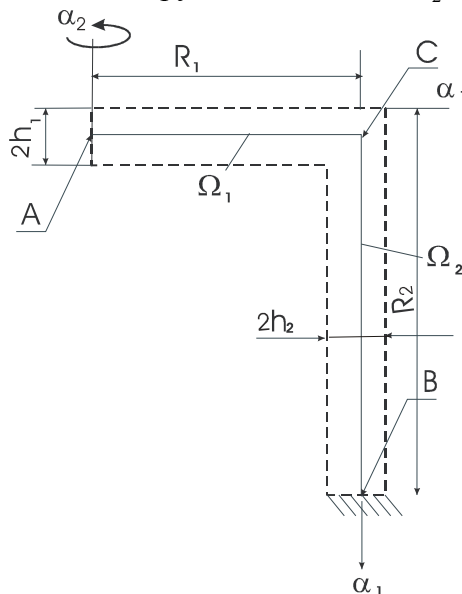


Рис.1. Циліндр, з'єднаний з круглою пластиною

Розглянемо випадок, коли в (3.1)  $m = 0$ . В точці В задані головні граничні умови:  $u = \gamma_1 = w = 0$ ; в точці С задаються головні умови спряження

$$T_j u_{(j)} = T_k u_{(k)}.$$

Тут  $T_j, T_k$  - матриці  $j$ -ої та  $k$ -ої складових оболонкової конструкції;  $u_{(j)}, u_{(k)}$  - вектори переміщень у вузлі спряження, які записані для  $j$ -ої та  $k$ -ої складових відповідно.

Задавались такі фізико-геометричні характеристики:

$$2h_1 = 2h_2 = 0.5m, E = 0.625 \times 10^{11} \text{ н/м}^2, \nu = 0.22, \rho = 0.245 \times 10^4 \text{ кг/м}^3, R_1 = R_2 = 10m.$$

В таблиці подані результати числового аналізу впливу зовнішнього та внутрішнього тисків  $p_3$  на перші три частоти коливань  $\omega_i = \frac{\lambda_i}{2\pi}, i = \overline{1,3}$ . Аналізуючи отримані результати, можна стверджувати, що однакове за характером початкове навантаження по-різному впливає на різні частоти коливань.

Результати таблиці отримані при поділі меридіана на 16 скінченних елементів. Зауважимо, що характер зміни першої та другої частот відрізняється від поведінки третьої частоти. Це можна пояснити тим, що третій частоті відповідають крутильні форми коливань, в той час як перша та друга частоти характеризують осесиметричні коливання.

Як видно з таблиці, можна умовно виділити такі зони навантаження  $p_3$ :

- зона малого впливу ( $0 \div 10^5 \text{ н/м}^2$  для внутрішнього тиску і  $0 \div -2 \times 10^6 \text{ н/м}^2$  для зовнішнього тиску);
- критична зона, яка характеризується різким наближенням частоти до нуля. Для внутрішнього тиску - це проміжок  $4 \times 10^6 \text{ н/м}^2 \div 4.86 \times 10^6 \text{ н/м}^2$  для зовнішнього  $-6 \times 10^6 \text{ н/м}^2 \div -6.87 \times 10^6 \text{ н/м}^2$ .

Враховуючи те, що область малого впливу - це діапазон навантаження в околі нуля, де  $\Delta < 10\%$ , можна зробити висновок, що перша з трьох наведених частот є найбільш чутлива до даного навантаження, оскільки має найменшу зону малого впливу. У третьої частоти ця зона найбільша. Тому ця частота є менш чутливою до даного навантаження.

### Висновки

В результаті проведеного числового аналізу можна відзначити, що зміна величини початкового НДС при збереженні його характеру по-різному впливає на спектр частот коливань оболонки. Ця обставина призводить також до зміни порядку розміщення частот у спектрі. Результати проведених обчислень засвідчують факт, що якщо напрям зовнішнього навантаження колінеарний до напрямку коливань, то відповідна частота коливань суттєво змінюється. Тому такі частоти і форми коливань викликають значний інтерес при вивченні явища впливу початкового навантаження на вібраційні характеристики конструкції.

						Таблиця
$p_3 \times 10^{-6}$	$\omega_1$	$\Delta\%$	$\omega_2$	$\Delta\%$	$\omega_3$	$\Delta\%$

4.85	.13975E+01	87	.50731E+02	26	.64436E+02	0.01
4.8	.38525E+01	63	.50607E+02	25	.64436E+02	0.01
4.7	.62434E+01	40	.50355E+02	24	.64436E+02	0.01
4.5	.90019E+01	13	.49837E+02	23	.64436E+02	0.01
4	.12443E+02	20	.48480E+02	20	.64436E+02	0.01
3	.14366E+02	38	.45711E+02	13	.64435E+02	0.01
1	.11907E+02	15	.41444E+02	2	.64431E+02	0.005
0.1	.10484E+02	1	.40563E+02	0.1	.64428E+02	0
0.01	.10385E+02	0.1	.40518E+02	0.01	.64428E+02	0
0	.10375E+02	0	.40513E+02	0	.64428E+02	0
-0.01	.10365E+02	0.1	.40509E+02	0.01	.64428E+02	0
-0.1	.10281E+02	1	.40474E+02	0.1	.64427E+02	0.002
-1	.10205E+02	1.6	.40570E+02	0.1	.64424E+02	0.006
-3	.14151E+02	36	.43905E+02	8	.64415E+02	0.02
-4	.16470E+02	59	.47116E+02	16	.64410E+02	0.03
-5	.17720E+02	71	.51146E+02	26	.64405E+02	0.04
-6	.15993E+02	54	.55360E+02	37	.62736E+02	3
-6.5	.11962E+02	15	.55999E+02	38	.61168E+02	5
-6.8	.56233E+01	45	.54938E+02	36	.61762E+02	4
-6.86	.14957E+01	86	.54624E+02	35	.61994E+02	4

*The Timoshenko shell theory problem with initial strain-stress state is under consideration. The linearized equilibrium equations, physical and geometrical correlations with the initial strain-stress state are obtained from the geometrically non-linear Timoshenko theory. The matrix eigen-value problem is obtained from the variational statement of the problem. The solution of this problem we can find by means of the finite element method.*

### Література

1. Васидзу К. Вариационные методы в теории упругости и пластичности. - М.: Мир, 1987. - 542 с.
2. Григоренко Я.М., Беспалова Е.И., Китайгородский А.Б., Шинкарь А.И. Колебания предварительно напряженных оболочечных конструкций // Прикл. механика.- 1986.- 22, №2.- С.24-29.
3. Кукуджанов С.М. О влиянии предварительных напряженных состояний на собственные колебания цилиндрической оболочки // Строит. мех. и расчет сооружений. - 1987. - № 3.- С.43-47.
4. Grigorenko Ya.M., Savula Ya.H., Mukha I.S. Linear and nonlinear problems on the elastic deformation of complex shells and methods of their numerical solution // Int. Appl. Mech. – 2000. –36, №8. – P.979-1000.
5. Григоренко Я.М., Савула Я.Г., Коссак О.С. Исследование напряженно деформированного состояния упругих тел на основании гетерогенной математической модели // Прикл. механика. - 2000.- 36, №12. - С.69-77.
6. Савула Я.Г., Коссак О.С. Чисельне моделювання вільних коливань пружних тіл з тонким покриттям // Математичні методи і фіз.мех.поля. - 1999. – 42, №1. - С.118-124.
7. Бате К., Вилсон Е. Численные методы анализа и метод конечных элементов. - М.: Стройиздат, 1982. - 448 с.

*Отримано 17.06.2003 р.*