Міністерство освіти і науки України
Тернопільський національний технічний університет
імені Івана Пулюя

Кафедра вищої математики

Вища математика. Частина 3: Кратні, криволінійні та поверхневі інтеграли

Тернопіль
2023

УДК 517.37
ББК 22.161.1
Г12

Укладачі
Г. В. Габрусєв, кандидат фізико-математичних наук, доцент,
І. Ю. Габрусєва, кандидат технічних наук,
Б. Г. Шелестовський, кандидат фізико-математичних наук, доцент

Методичний посібник розглянуто й затверджено на засіданні науково-методичної комісії Факультету прикладних інформаційних технологій та електроінженерії Тернопільського національного технічного університету імені Івана Пулюя протокол №9 від «5» квітня 2023 р.

Г12 Габрусєв Г. В. Вища математика. Частина 3: Кратні, криволінійні та поверхневі інтеграли / Г. В. Габрусєв, І. Ю. Габрусєва, Б. Г. Шелестовський – Тернопіль : СМП "Тайп", 2023 – 60 с.

Тема: Обчислення подвійного інтеграла. Зміна порядку інтегрування

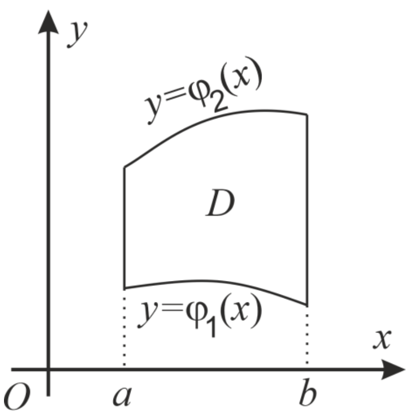


Рис. 1

Нехай область інтегрування D обмежена двома неперервними кривими $y=\varphi_1(x)$ та $y=\varphi_2(x)$ і двома прямими $x=a$ та $x=b$, причому $\varphi_1(x)\le\varphi_2(x)$ для всіх $x\in[a;b]$ (область правильна в напрямі осі Oy). В цьому випадку подвійний інтеграл обчислюється за формулою:

$$\iint_D f(x,y)\,dxdy=\int_a^b dx\int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(x,y)\,dy. \qquad (1)$$

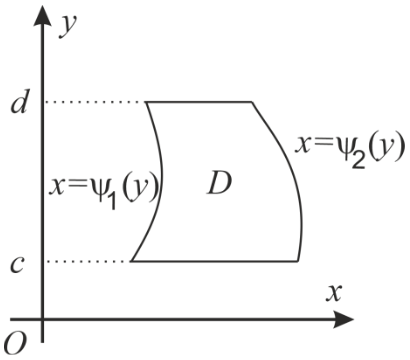


Рис. 2

Нехай область D обмежена двома неперервними кривими $x=\psi_1(y)$ та $x=\psi_2(y)$ і двома прямими $y=c$, $y=d$ $(c<d)$, причому $\psi_1(y)\le\psi_2(y)$ для всіх $y\in[c;d]$ (область правильна в напрямі осі Ox). Тоді справедлива формула:

$$\iint_D f(x,y)\,dxdy=\int_c^d dy\int_{\psi_1(x)}^{\psi_2(x)} f(x,y)\,dx. \qquad (2)$$

У випадку прямокутної області D, обмеженої прямими $x=a$, $x=b$ $(a<b)$, $y=c$, $y=d$ $(c<d)$, формули (1) та (2) набувають вигляду:

$$\iint_D f(x,y)\,dxdy=\int_a^b dx\int_c^d f(x,y)\,dy=\int_c^d dy\int_a^b f(x,y)\,dx \qquad (3)$$

Приклад 1. Обчислити подвійний інтеграл $\iint_D (x^3+2y)\,dxdy$, якщо область D обмежена лініями: $y=2x,\ y=-x^2,\ x=1.$

Розв'язання. Область інтегрування D зображена на рис. 3. Ця область правильна в напрямі осі Oy. Тому для обчислення даного інтеграла використаємо формулу (1)

$$\iint_D \left(x^3+2y\right)dxdy=\int_0^1 dx\int_{-x^2}^{2x}\left(x^3+2y\right)dxdy=\int_0^1\left(x^3y+y^2\right)\Big|_{-x^2}^{2x}dx=\int_0^1\left(x^3\left(2x+x^2\right)+4x^2-x^4\right)dx=$$

$$=\int_0^1\left(x^4+x^5+4x^2\right)dx=\left(\frac{x^5}{5}+\frac{x^6}{6}+\frac{4x^3}{3}\right)\Bigg|_0^1=\frac{1}{5}+\frac{1}{6}+\frac{4}{3}=\frac{51}{30}=1{,}7.$$

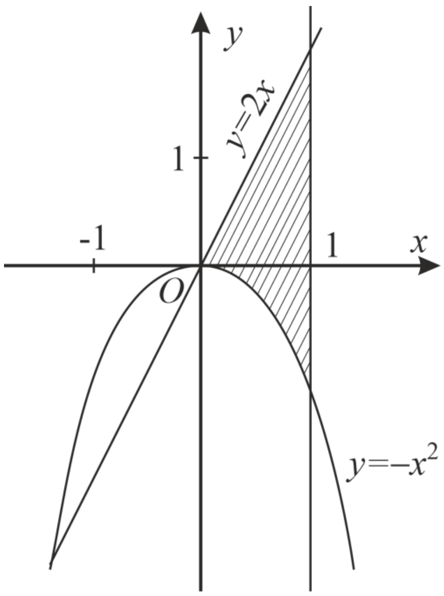


Рис. 3

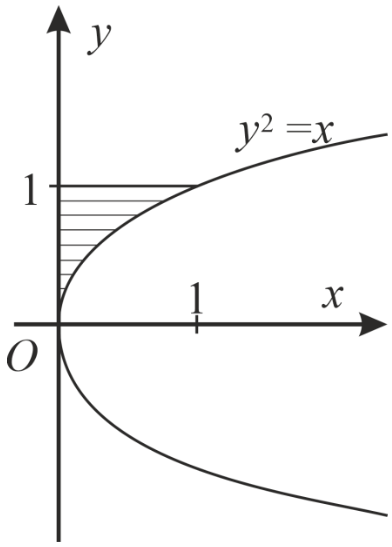


Рис. 4

Приклад 2. Обчислити подвійний інтеграл $\iint_D e^{\frac{x}{y}}dxdy$, якщо область D обмежена лініями: $y^2=x,\ x=0,\ y=1$.

Розв'язання. Область D зображена на рис. 4. Ця область правильна у напрямі як осі Oy, так і осі Ox, але обчислити даний інтеграл можна лише за формулою (2). Якби ми застосували формулу (1), то потрібно було б обчислювати інтеграл $\int e^{\frac{x}{y}}dy$, який в елементарних функціях не обчислюється.

Отже,

$$\iint_D e^{\frac{x}{y}}dxdy=\int_0^1 dy\int_0^{y^2}e^{\frac{x}{y}}dx=\int_0^1\left(ye^{\frac{x}{y}}\right)\Bigg|_0^{y^2}dy=\int_0^1\left(ye^y-y\right)dy=$$

$$=\int_0^1 ye^ydy-\int_0^1 ydy=\left(ye^y-e^y-\frac{y^2}{2}\right)\Bigg|_0^1=e-e-\frac{1}{2}+1=\frac{1}{2}.$$

Приклад 3. Обчислити інтеграл $\iint\limits_D \frac{dxdy}{(x+y)^2}$, якщо область D обмежена прямими $x=3,\ x=4,\ y=1, y=2$.

Розв'язання. Область інтегрування прямокутна, тому застосуємо формулу (3).

$$\iint\limits_D \frac{dxdy}{(x+y)^2} = \int_3^4 dx \int_1^2 \frac{dy}{(x+y)^2} = \int_3^4 dx \int_1^2 (x+y)^{-2}\, dy = \int_3^4 dx \left(-\frac{1}{x+y} \right)\Bigg|_1^2 =$$

$$= \int_3^4 \left(-\frac{1}{x+2} + \frac{1}{x+1} \right) dx = \left(\ln(x+1) - \ln(x+2) \right)\Big|_3^4 = \ln \frac{x+1}{x+2}\Bigg|_3^4 = \ln\frac{5}{6} - \ln\frac{4}{5} = \ln\frac{25}{24}.$$

Приклад 4. Обчислити $\iint\limits_D y \ln x\, dxdy$, якщо область D обмежена лініями $xy=1,\ y=\sqrt{x},\ x=2$.

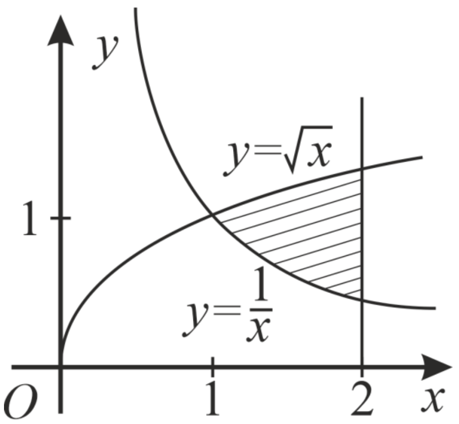


Рис. 5

Розв'язання. Область D правильна в напрямі осі Oy. Застосуємо формулу (1).

$$\iint\limits_D y \ln x\, dxdy = \int_1^2 dx \int_{\frac{1}{x}}^{\sqrt{x}} y \ln x\, dy =$$

$$= \int_1^2 \ln x\, dx \int_{\frac{1}{x}}^{\sqrt{x}} y\, dy = \int_1^2 \ln x \cdot \frac{y^2}{2}\Bigg|_{\frac{1}{x}}^{\sqrt{x}} dx =$$

$$= \frac{1}{2}\int_1^2 x \ln x\, dx - \frac{1}{2}\int_1^2 \frac{\ln x}{x^2} dx = \frac{1}{2}\left(\frac{x^2}{2}\ln x - \frac{x^2}{4} \right)\Bigg|_1^2 - \frac{1}{2}\left(-\frac{1}{x}\ln x - \frac{1}{x} \right)\Bigg|_1^2 =$$

$$= \frac{1}{2}\left(2\ln 2 - 1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{2}\ln 2 + \frac{1}{2} - 1 \right) = \frac{1}{2}\left(\frac{5}{2}\ln 2 - \frac{5}{4} \right) = \frac{5}{8}(2\ln 2 - 1).$$

Зауваження. Обидва інтеграли $\int_1^2 x \ln x\, dx$ та $\int_1^2 \frac{\ln x}{x^2} dx$ ми обчислили методом інтегрування за частинами, взявши $u = \ln x,\ dv = xdx$ для першого інтеграла та $dv = \frac{dx}{x^2}$ для другого інтеграла.

Приклад 5. Обчислити $\iint\limits_D y^2\cos xy\,dxdy$, якщо область D обмежена лініями $x=0,\ y=\sqrt{\pi}, y=2x$.

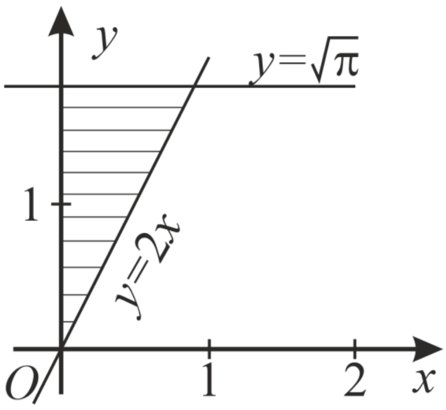


Рис. 6

Розв'язання. Область правильна в обох напрямах, але підінтегральну функцію простіше інтегрувати спочатку по змінній x. Тому застосуємо формулу (2).

$$\iint\limits_D y^2\cos xy\,dxdy=\int\limits_0^{\sqrt{\pi}}dy\int\limits_0^{\frac{y}{2}}y^2\cos xy\,dx=$$

$$=\int\limits_0^{\sqrt{\pi}}y^2dy\int\limits_0^{\frac{y}{2}}\cos xy\,dx=\int\limits_0^{\sqrt{\pi}}y^2\left(\frac{1}{y}\sin xy\right)\Bigg|_0^{\frac{y}{2}}dy=$$

$$=\int\limits_0^{\sqrt{\pi}}y\sin\frac{y^2}{2}dy=\int\limits_0^{\sqrt{\pi}}\sin\frac{y^2}{2}d\left(\frac{y^2}{2}\right)=-\cos\frac{y^2}{2}\Bigg|_0^{\sqrt{\pi}}=-\left(\cos\frac{\pi}{2}-\cos 0\right)=1.$$

Приклад 6. Змінити порядок інтегрування у повторних інтегралах:

а) $I=\int\limits_0^4 dx\int\limits_0^{\frac{3}{4}x}f\left(x,y\right)dy+\int\limits_4^5 dx\int\limits_0^{\sqrt{25-x^2}}f\left(x,y\right)dy$.

Розв'язання. Тут потрібно перейти від повторного інтеграла виду (1) до повторного інтеграла виду (2).

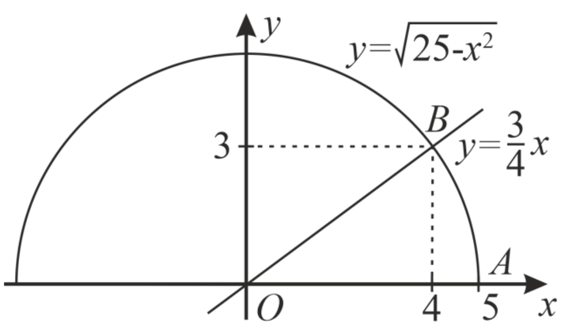


Рис. 7

Побудуємо область інтегрування, яка обмежена лініями $x=0,\ x=4,\ x=5,\ y=0,\ y=\frac{3}{4}x,\ y=\sqrt{25-x^2}$.

Рівняння $y=\frac{3}{4}x$ визначає пряму лінію; запишемо її рівняння у вигляді $x=\frac{4}{3}y$.

Рівняння $y=\sqrt{25-x^2}$ визначає верхнє півколо. Рівняння кола: $x^2+y^2=25$. Запишемо рівняння правого півкола: $x=\sqrt{25-y^2}$. Дуга AB є частиною цього правого півкола.

Застосувавши формулу (2), отримаємо:

$$I=\int\limits_0^3 dy\int\limits_{\frac{4}{3}y}^{\sqrt{25-y^2}} f(x,y)\,dx.$$

б) $I=\int\limits_0^1 dy\int\limits_{\sqrt{y}}^{3-2y} f(x,y)\,dx$

Розв'язання. Область інтегрування обмежена лініями $y=0,\ y=1,\ x=\sqrt{y},\ x=3-2y$. Задану область інтегрування потрібно розбити на дві частини D_1 і D_2, кожна з яких є правильною в напрямі осі Oy.

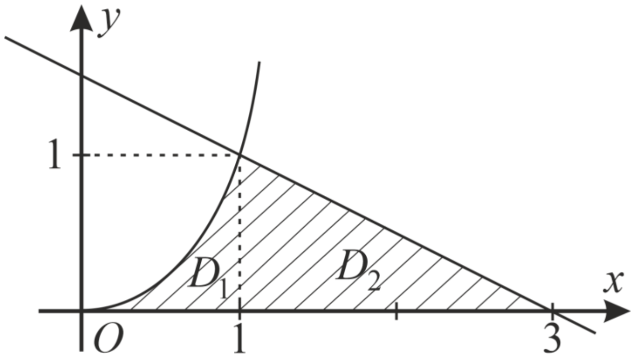


Рис. 8

Рівняння $x=\sqrt{y}$ визначає праву вітку параболи $y=x^2$; рівняння $x=3-2y$ визначає пряму лінію. Рівняння прямої запишемо у вигляді $y=\dfrac{3-x}{2}$.

Застосувавши формулу (1), отримаємо: $I=\int\limits_0^1 dx\int\limits_0^{x^2} f(x,y)\,dy+\int\limits_1^3 dx\int\limits_0^{\frac{1}{2}(3-x)} f(x,y)\,dy$.

в) $I=\int\limits_1^e dx\int\limits_0^{\ln x} f(x,y)\,dy$.

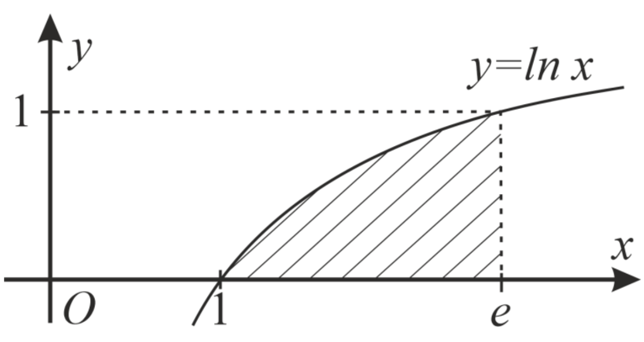


Рис. 9

Розв'язання. Область інтегрування правильна в обох напрямах. З рівняння $y=\ln x$ визначимо x; $x=e^y$.

Отже,

$$I=\int\limits_0^1 dy\int\limits_{e^y}^{e} f(x,y)\,dx.$$

г) $\int\limits_{1}^{2} dx \int\limits_{2-x}^{\sqrt{2x-x^2}} f(x,y)dy$.

Розв'язання. Область інтегрування D обмежена лініями $y = 2-x, y = \sqrt{2x-x^2}, \; x=1, \; x=2$. Вона зображена на рис.10.

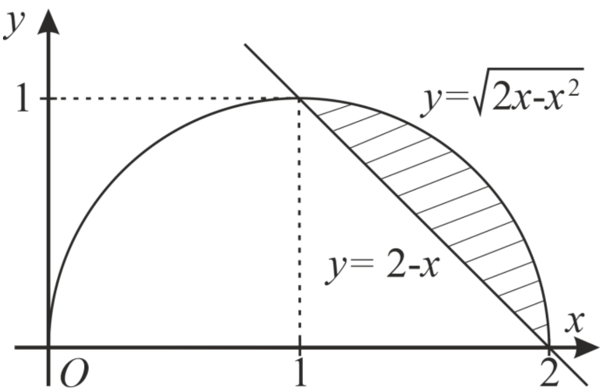


Рис. 10

Рівняння прямої $y = 2-x$ запишемо у вигляді $x = 2-y$, а рівняння півкола $y = \sqrt{2x-x^2}$ – у вигляді $x = 1+\sqrt{1-y^2}$. При змінні y від 0 до1, x змінюється від $(2-y)$ до $1+\sqrt{1-y^2}$. Тому, враховуючи формули (1) і (2), в даному інтегралі змінимо порядок інтегрування

$$\int\limits_{1}^{2} dx \int\limits_{2-x}^{\sqrt{2x-x^2}} f(x,y)dy = \iint\limits_{D} f(x,y)dxdy = \int\limits_{0}^{1} dy \int\limits_{2-y}^{1+\sqrt{1-y^2}} f(x,y)dx,$$

або $\int\limits_{1}^{2} dx \int\limits_{2-x}^{\sqrt{2x-x^2}} f(x,y)dy = \int\limits_{0}^{1} dy \int\limits_{2-y}^{1+\sqrt{1-y^2}} f(x,y)dx$.

Приклад 7. Обчислити $\iint\limits_{D} xdxdy$ по області *D*, обмеженій лініями y=-x, y=1, $y = x^2$.

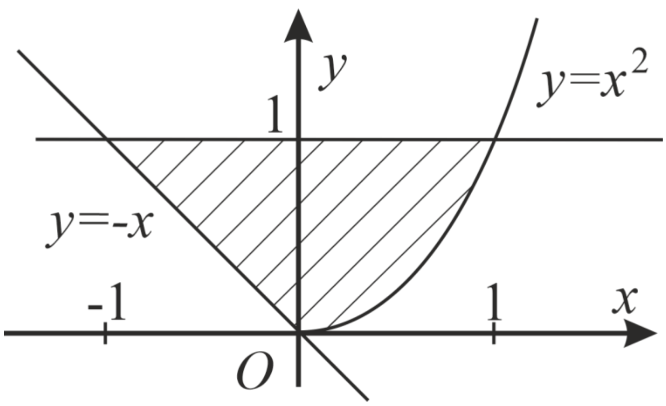


Рис. 11

Розв'язання. Використаємо формулу (2):

$$\iint\limits_{D} xdxdy = \int\limits_{0}^{1} dy \int\limits_{-y}^{\sqrt{y}} xdx = \int\limits_{0}^{1} \frac{x^2}{2}\Bigg|_{-y}^{\sqrt{y}} dy =$$

$$= \frac{1}{2}\int\limits_{0}^{1} (y-y^2)dy = \frac{1}{2}\left(\frac{y^2}{2} - \frac{y^3}{3}\right)\Bigg|_{0}^{1} = \frac{1}{12}.$$

Тема: Обчислення подвійного інтеграла в полярних координатах

Нехай потрібно обчислити подвійний інтеграл $\iint\limits_D f(x,y)\,dxdy$. Поряд з декартовою системою координат розглянемо полярну систему, полюс якої міститься в початку координат, а полярна вісь збігається з віссю Ox. В цьому випадку декартові координати x, y деякої точки M зв'язані з її полярними координатами ρ, φ відповідними формулами:

$$x = \rho\cos\varphi,\ \ y = \rho\sin\varphi.$$

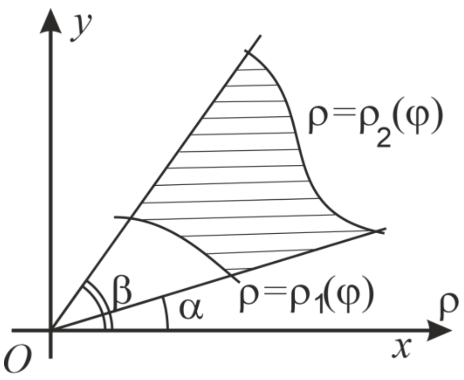


Рис. 1 *а*)

Нехай область D обмежена променями, які утворюють з полярною віссю кути α та β $(\alpha < \beta)$ і кривими $\rho = \rho_1(\varphi)$ та $\rho = \rho_2(\varphi)$ $(\rho_1(\varphi) \le \rho_2(\varphi))$ (рис.1(а)). Тоді справедлива формула

$$\iint\limits_D f(x,y)\,dxdy = \iint\limits_D f(\rho\cos\varphi,\ \rho\sin\varphi)\,\rho\, d\rho\, d\varphi =$$

$$= \int\limits_{\alpha}^{\beta} d\varphi \int\limits_{\rho_1(\varphi)}^{\rho_2(\varphi)} f(\rho\cos\varphi,\ \rho\sin\varphi)\,\rho\, d\rho. \qquad (1)$$

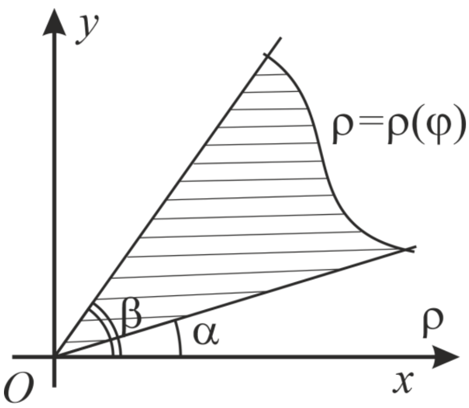


Рис. 1 *б*)

Якщо область D має такий вигляд, як на рис. 1(б) (полюс належить межі області), то отримаємо формулу

$$\iint\limits_D f(x,y)\,dxdy = \iint\limits_D f(\rho\cos\varphi,\ \rho\sin\varphi)\,\rho\, d\rho\, d\varphi =$$

$$= \int\limits_{\alpha}^{\beta} d\varphi \int\limits_{0}^{\rho(\varphi)} f(\rho\cos\varphi,\ \rho\sin\varphi)\,\rho\, d\rho. \qquad (2)$$

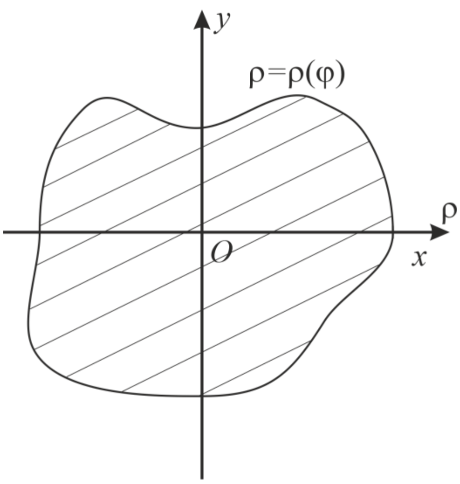


Рис. 1 *в*)

Якщо область D охоплює початок координат (рис.1(в)), тобто точка $O(0;0)$ є внутрішньою точкою області D, то

$$\iint\limits_D f(x,y)\,dxdy =$$

$$= \int\limits_{0}^{2\pi} d\varphi \int\limits_{0}^{\rho(\varphi)} f(\rho\cos\varphi,\ \rho\sin\varphi)\,\rho\, d\rho. \qquad (3)$$

Приклад 1. Обчислити подвійний інтеграл $\iint\limits_D \sqrt{16-x^2-y^2}\,dxdy$, якщо область D розміщена в першій чверті та обмежена лініями $x^2+y^2=16$, $x=0$, $y=0$.

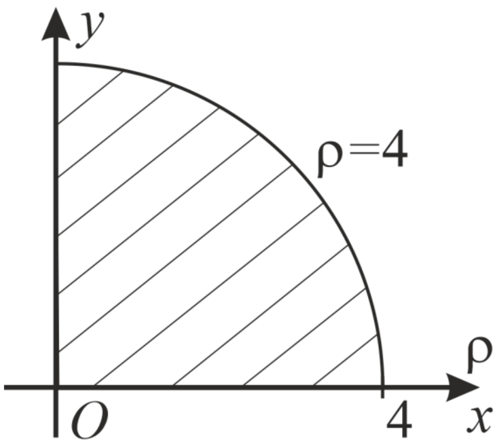


Рис. 2

Розв'язання. Рівняння $x^2+y^2=16$ є рівнянням кола з центром в точці $O(0;0)$ та радіусом $R=4$. Область D зображена на рис. 2. Рівняння цього кола в полярній системі координат має вигляд $\rho=4$, оскільки $x^2+y^2=\rho^2\cos^2\varphi+\rho^2\sin^2\varphi=\rho^2$. Область інтегрування такого ж вигляду, як на рис.1(б). Тому застосуємо формулу (2).

$$\iint\limits_D \sqrt{16-x^2-y^2}\,dxdy=\iint\limits_D \sqrt{16-\rho^2}\,\rho\,d\rho\,d\varphi=\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}d\varphi\int\limits_0^4\sqrt{16-\rho^2}\,\rho\,d\rho=$$

$$=-\frac{1}{2}\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}d\varphi\int\limits_0^4\left(16-\rho^2\right)^{\frac{1}{2}}d\left(16-\rho^2\right)=-\frac{1}{2}\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}\left.\frac{\left(16-\rho^2\right)^{\frac{3}{2}}\cdot 2}{3}\right|_0^4 d\varphi=\frac{64}{3}\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}d\varphi=\frac{32\pi}{3}.$$

Приклад 2. Обчислити подвійний інтеграл $\iint\limits_D\left(x^2+y^2\right)dxdy$, якщо область D обмежена колом $x^2+y^2=2x$.

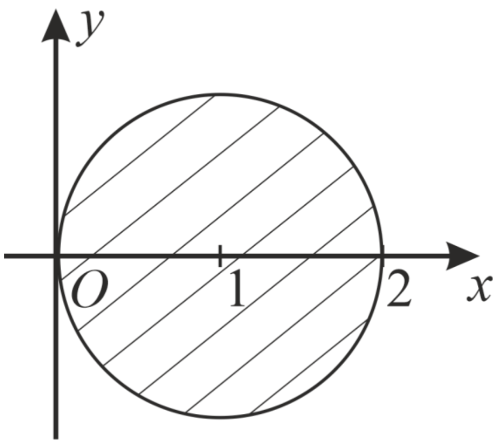


Рис. 3

Розв'язання. Побудуємо це коло. Для цього визначимо центр та радіус даного кола.

$$x^2+y^2-2x=0,\quad \left(x^2-2x+1\right)-1+y^2=0,$$

$$\left(x-1\right)^2+y^2=1.$$

Центр кола міститься в точці $C(1;0)$, радіус $R=1$.

Перейдемо до полярних координат: $x=\rho\cos\varphi,\ y=\rho\sin\varphi$. Рівняння даного кола в полярних координатах має вигляд: $\rho^2 = 2\rho\cos\varphi;\quad \rho = 2\cos\varphi;\quad -\frac{\pi}{2} \le \varphi \le \frac{\pi}{2}$.

$$\iint\limits_D \left(x^2+y^2\right)dxdy = \iint\limits_D \rho^2\cdot\rho\, d\rho\, d\varphi = \iint\limits_D \rho^3 d\rho\, d\varphi = \int\limits_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} d\varphi \int\limits_0^{2\cos\varphi} \rho^3 d\rho = \int\limits_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\rho^4}{4}\Bigg|_0^{2\cos\varphi} d\varphi =$$

$$= 4\int\limits_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos^4\varphi\, d\varphi = 4\int\limits_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \left(\frac{1+\cos 2\varphi}{2}\right)^2 d\varphi = \int\limits_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \left(1+2\cos 2\varphi+\frac{1+\cos 4\varphi}{2}\right)d\varphi =$$

$$= \int\limits_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \left(\frac{3}{2}+2\cos 2\varphi+\frac{1}{2}\cos 4\varphi\right)d\varphi = \left(\frac{3}{2}\varphi+\sin 2\varphi+\frac{1}{8}\sin 4\varphi\right)\Bigg|_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} = \frac{3\pi}{2}.$$

Приклад 3. Обчислити $\iint\limits_D (4-x-y)dxdy$, де D – круг $x^2+(y-1)^2 \le 1$.

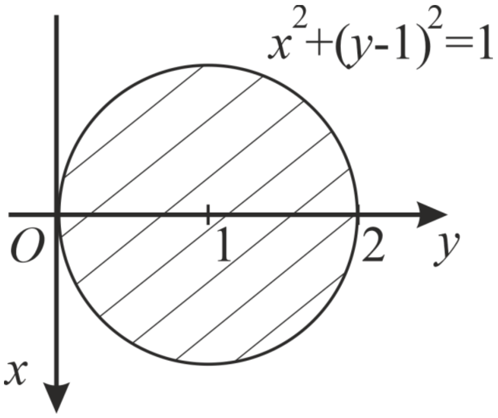


Рис. 4

Розв'язання. Перейдемо до полярних координат. Тоді рівняння кола $x^2+(y-1)^2=1$ (межі області D) буде мати вигляд $\rho = 2\sin\varphi$.

Використовуючи формулу (2), одержимо:

$$\iint\limits_D (4-x-y)dxdy =$$

$$= \int\limits_0^{\pi}\left(\int\limits_0^{2\sin\varphi}\left(4-\rho\cos\varphi-\rho\sin\varphi\right)\rho d\rho\right)d\varphi =$$

$$= \int\limits_0^{\pi}\left[4\frac{\rho^2}{2}-(\cos\varphi+\sin\varphi)\frac{\rho^3}{3}\right]\Bigg|_0^{2\sin\theta} d\varphi =$$

$$= \int\limits_0^{\pi}\left[8\sin^2\varphi-\frac{8}{3}(\cos\varphi+\sin\varphi)\sin^3\varphi\right]d\varphi = 3\pi.$$

Тема: Застосування подвійних інтегралів до задач геометрії

1. Площа плоскої фігури.

Якщо в площині Oxy задана фігура, що має форму обмеженої замкненої області D, то площа S цієї фігури знаходиться за формулою

$$S = \iint_D dxdy \,. \qquad (4)$$

2. Об'єм тіла.

Об'єм циліндричного тіла, твірні якого паралельні до осі Oz і яке обмежене знизу областю D площини Oxy, а зверху – поверхнею $z = f(x, y)$, де $f(x, y)$ – неперервна та невід'ємна в області D функція, знаходиться за формулою

$$V = \iint_D f(x, y)\, dxdy \,. \qquad (5)$$

Приклад 4. Знайти площу фігури, обмеженої лініями $y = \sqrt{8 - x^2}$ та $x^2 = 2y$.

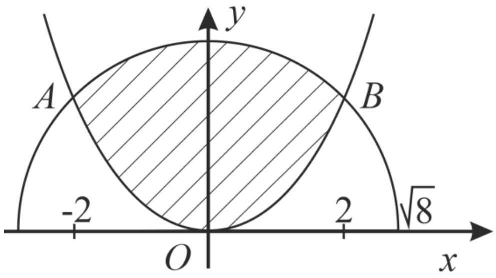


Рис. 5

Розв'язання. Рівняння $y = \sqrt{8 - x^2}$ визначає на площині Oxy верхнє півколо (рівняння кола має вигляд $x^2 + y^2 = 8$, його центр в точці O, радіус $R = \sqrt{8}$). Рівняння $x^2 = 2y$ є рівнянням параболи. Розв'язавши систему цих двох рівнянь, отримаємо координати їхніх точок перетину: $A(-2; 2)$, $B(2; 2)$.

Оскільки фігура симетрична відносно осі Oy, то можна знайти площу її частини при $x \geq 0$ і результат подвоїти.

$$S = \iint_D dxdy = 2\iint_{D_1} dxdy = 2\int_0^2 dx \int_{\frac{x^2}{2}}^{\sqrt{8-x^2}} dy = 2\int_0^2 y\Big|_{\frac{x^2}{2}}^{\sqrt{8-x^2}} dx = 2\int_0^2 \left(\sqrt{8-x^2} - \frac{x^2}{2}\right) dx = 2\int_0^2 \sqrt{8-x^2}\, dx - \int_0^2 x^2 dx.$$

Перший інтеграл обчислюємо за допомогою підстановки $x = \sqrt{8}\sin t;\ dx = \sqrt{8}\cos t\, dt$.

Отримаємо:

$$S = 2\int_0^{\frac{\pi}{4}} 8\cos^2 t\, dt - \frac{x^3}{3}\Big|_0^2 = 8\int_0^{\frac{\pi}{4}} (1 + \cos 2t)\, dt - \frac{8}{3} = 8\left(t + \frac{1}{2}\sin 2t\right)\Big|_0^{\frac{\pi}{4}} - \frac{8}{3} = 8\left(\frac{\pi}{4} + \frac{1}{2}\right) - \frac{8}{3} = 2\pi + \frac{4}{3}.$$

Приклад 5. Знайти площу області D, обмеженої лініями $y^2 = x+1, \quad x+y=1$.

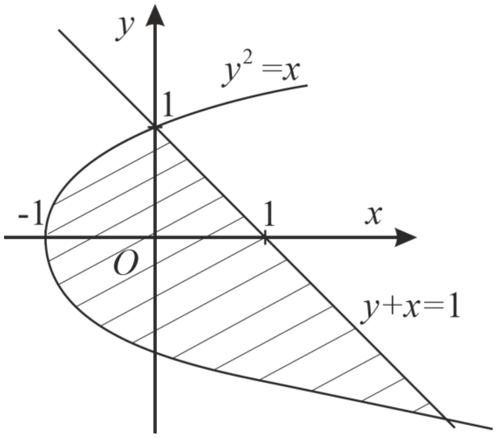


Рис. 6

Розв'язання. Розв'язуючи систему рівнянь параболи $y^2 = x+1$ та прямої $x+y=1$, знаходимо ординати точок їх перетину:

$y_1 = -2, \; y_2 = 1.$

Значить,

$$S = \iint_D dxdy = \int_{-2}^{1} dy \int_{y^2-1}^{1-y} dx = \int_{-2}^{1} (2-y-y^2)dy = \frac{9}{2}.$$

Приклад 6. Знайти площу фігури, обмеженої лініями

$$x^2+y^2=2y, \; x^2+y^2=4y, \; x=0, \; y=\frac{x}{\sqrt{3}}.$$

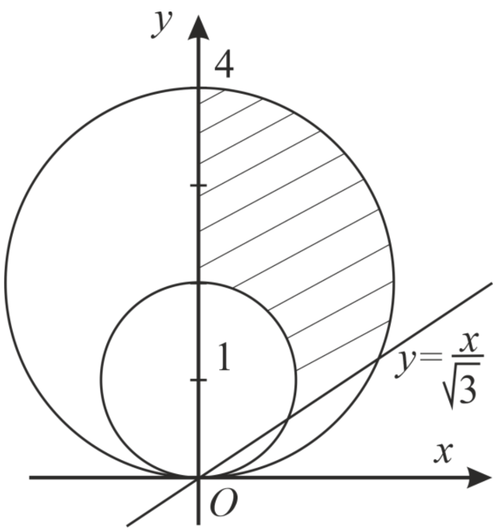


Рис. 7

Розв'язання. $x^2+y^2=2y$ та $x^2+y^2=4y$ визначають кола. Ці рівняння можна записати відповідно у вигляді: $x^2+\left(y-1\right)^2=1$ та $x^2+\left(y-2\right)^2=4$. Пряма $y=\frac{x}{\sqrt{3}}$ проходить через початок координат під кутом $\alpha=\frac{\pi}{6}$ до осі Ox (рис. 7).

Перейдемо до полярних координат: $x=\rho\cos\varphi, \; y=\rho\sin\varphi$.

$\rho^2\cos^2\varphi+\rho^2\sin^2\varphi=2\rho\sin\varphi$. Звідси $\rho=2\sin\varphi$ – рівняння в полярних координатах малого кола. Аналогічно знаходимо, що $\rho=4\sin\varphi$ – рівняння в полярних координатах великого кола.

$$S=\iint_D dxdy=\iint_D \rho\, d\rho\, d\varphi=\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}} d\varphi \int_{2\sin\varphi}^{4\sin\varphi} \rho\, d\rho=\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\rho^2}{2}\Bigg|_{2\sin\varphi}^{4\sin\varphi} d\varphi=6\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}} \sin^2\varphi\, d\varphi=3\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}} \left(1-\cos 2\varphi\right) d\varphi=$$

$$=3\left(\varphi-\frac{1}{2}\sin 2\varphi\right)\Bigg|_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}}=3\left(\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{6}+\frac{1}{2}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}\right)=3\left(\frac{\pi}{3}+\frac{\sqrt{3}}{4}\right).$$

Приклад 7. Знайти об'єм тіла, обмеженого поверхнями

$$z = 4 - x^2,\ 3x + 2y - 6 = 0,\ x = 0,\ y = 0,\ z = 0.$$

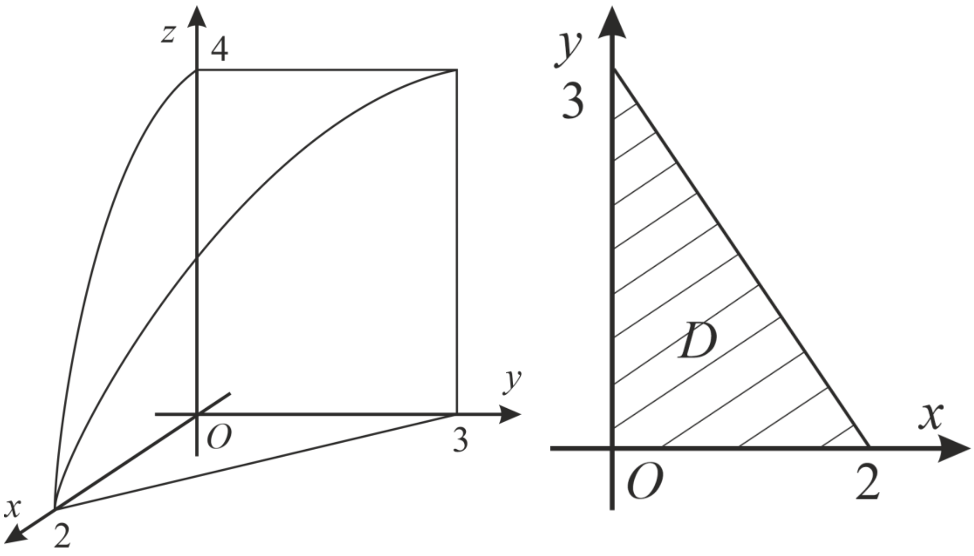


Рис. 8

Розв'язання. Рівняння $z = 4 - x^2$ визначає параболічний циліндр, твірні якого паралельні до осі Oy, а напрямна міститься в площині xOz (парабола).

Рівняння $3x + 2y - 6 = 0$ – це рівняння площини, яка паралельна до осі Oz і відтинає на осях Ox та Oy відрізки відповідно $a = 2,\ b = 3$. Рівняння $x = 0,\ y = 0,\ z = 0$ – це рівняння координатних площин (рис. 8).

Застосуємо формулу (5).

$$V = \iint_D f(x, y)\,dxdy = \iint_D \left(4 - x^2\right) dxdy = \int_0^2 dx \int_0^{\frac{6-3x}{2}} \left(4 - x^2\right) dy =$$

$$= \int_0^2 \left(4 - x^2\right) y\Big|_0^{\frac{6-3x}{2}} dx = \frac{1}{2}\int_0^2 \left(4 - x^2\right)\left(6 - 3x\right) dx =$$

$$= \frac{1}{2}\int_0^2 \left(24 - 12x - 6x^2 + 3x^3\right) dx = \frac{1}{2}\left(24x - 6x^2 - 2x^3 + 3\cdot\frac{x^4}{4}\right)\Bigg|_0^2 =$$

$$= \frac{1}{2}\left(48 - 24 - 16 + 12\right) = 10.$$

Приклад 8. Знайти об'єм тіла , обмеженого зверху параболоїдом обертання $z = x^2 + y^2$, знизу – площиною $z = 0$, з боків – циліндричною поверхнею $y = x^2$ і площиною $y = 1$.

Розв'язання. Циліндрична поверхня $y = x^2$ і площина $y = 1$ вирізають на площині xOy область *D*, обмежену лініями $y = x^2$, $y = 1$. Тому згідно з (5) маємо:

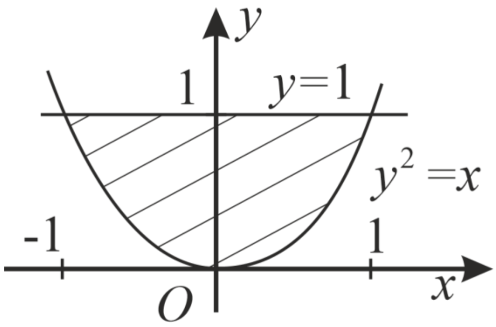


Рис. 9

$$V = \iint_D (x^2 + y^2)dxdy = \int_{-1}^{1} dx \int_{x^2}^{1} (x^2 + y^2)dy =$$

$$= \int_{-1}^{1} \left(x^2 y + \frac{y^3}{3} \right)\Bigg|_{x^2}^{1} dx = \int_{-1}^{1} \left(x^2 - x^4 + \frac{1}{3} - \frac{x^6}{3} \right) dx = \frac{88}{105}$$

Приклад 9. Знайти об'єм тіла, обмеженого параболоїдом $z = 1 - x^2 - y^2$ та площиною $z = 0$.

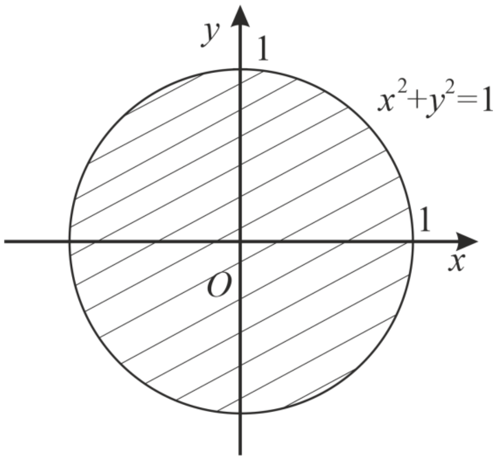


Рис. 10

Розв'язання. Тіло та його проекція на площину xOy зображені на рис. 10.

$$V = \iint_D \left(1 - x^2 - y^2\right) dxdy.$$

Перейдемо до полярних координат: $x = \rho\cos\varphi,\ y = \rho\sin\varphi$.

$$V = \iint_D \left(1 - \rho^2\right) \rho \, d\rho \, d\varphi = \iint_D \left(\rho - \rho^3\right) d\rho \, d\varphi =$$

$$= \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^1 \left(\rho - \rho^3\right) d\rho =$$

$$= \varphi\Big|_0^{2\pi} \cdot \left(\frac{\rho^2}{2} - \frac{\rho^4}{4} \right)\Bigg|_0^1 = 2\pi \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{4} \right) = \frac{\pi}{2}.$$

Тема: Застосування подвійних інтегралів до задач механіки

1. **<u>Маса пластинки.</u>** Нехай на площині xOy маємо матеріальну пластинку D. Якщо $\gamma(x,y)$ – густина речовини пластинки, то її ***маса*** m знаходиться за формулою

$$m = \iint_D \gamma(x,y)dxdy.$$

2. **<u>Статичні моменти. Центр маси пластинки.</u>** Для знаходження ***статичних моментів пластинки*** M_x і M_y відносно осей координат Ox і Oy використовують формули:

$$M_x = \iint_D y\gamma(x,y)dxdy,\ M_y = \iint_D x\gamma(x,y)dxdy. \qquad (2)$$

Координати центра маси пластинки $x_{c,}y_c$ знаходять за допомогою формул:

$$x_c = \frac{M_y}{m} = \frac{\iint_D x\gamma(x,y)dxdy}{\iint_D \gamma(x,y)dxdy}, \qquad y_c = \frac{M_x}{m} = \frac{\iint_D y\gamma(x,y)dxdy}{\iint_D \gamma(x,y)dxdy}, \qquad (3)$$

Якщо пластинка однорідна, тобто $\gamma(x,y) = const$, то формули (3) набувають вигляду:

$$x_c = \frac{\iint_D xdxdy}{S},\ y_c = \frac{\iint_D ydxdy}{S}, \qquad (4)$$

де S – площа пластинки.

3. **<u>Моменти інерції пластинки.</u>** Якщо I_x і I_y – ***моменти інерції пластинки*** D, що лежить в площині xOy, відносно осей O_x і O_y, то їх можна обчислити за формулами:

$$I_x = \iint_D y^2\gamma(x,y)dxdy, \qquad I_y = \iint_D x^2\gamma(x,y)dxdy. \qquad (5)$$

Полярний момент інерції пластинки відносно початку координат дорівнює

$$I_0 = \iint_D (x^2+y^2)\gamma(x,y)dxdy. \qquad (6)$$

Приклад 1. Знайти масу квадратної пластинки із стороною a, якщо густина речовини пластинки в кожній точці пропорційна квадрату відстані цієї точки до однієї з вершин квадрата і дорівнює γ_0 у центрі квадрата.

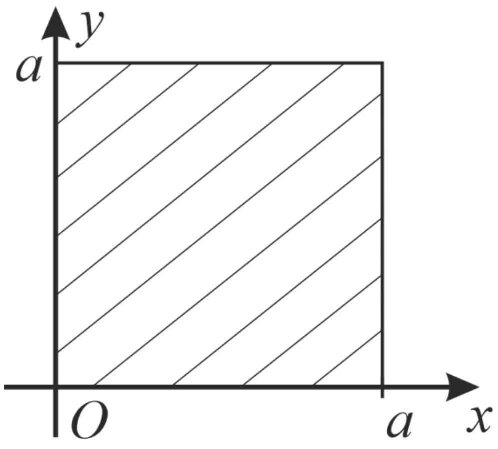


Рис. 1

Розв'язання. Припустимо, що сторонами пластинки є відрізки осей координат $0 \le x \le a$, $0 \le y \le a$. За умовою $\gamma(x, y) = k(x^2 + y^2)$, де k – стала, яку необхідно визначити. Із умови $\gamma\left(\frac{a}{2}, \frac{a}{2}\right) = \gamma_0$ знаходимо $k = \frac{2\gamma_0}{a^2}$.

Згідно з (1) маємо:

$$m = \frac{2\gamma_0}{a^2} \iint_D (x^2 + y^2) dxdy =$$

$$= \frac{2\gamma_0}{a^2} \int_0^a dx \int_0^a \left(x^2 + y^2\right) dy = \frac{2\gamma_0}{a^2} \int_0^a \left(x^2 y + \frac{y^3}{3} \right)\Bigg|_0^a dx = \frac{2\gamma_0}{a^2} \int_0^a \left(ax^2 + \frac{a^3}{3} \right) dx = \frac{4}{3}\gamma_0 a^2.$$

Приклад 2. Знайти масу пластинки D, обмеженої лініями $x^2 + y^2 = 1$, $x^2 + y^2 = 4$, $x = 0$, $y = 0$ $\left(x \le 0,\ y \ge 0\right)$, якщо поверхнева густина $\gamma\left(x, y\right) = \frac{2y - x}{x^2 + y^2}$.

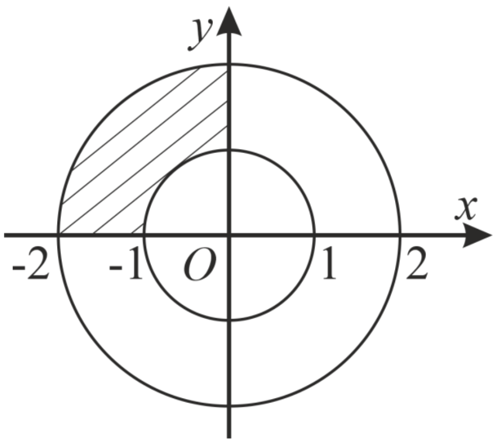


Рис. 2

Розв'язання. Область D зображена на рис. 2.

За формулою (1) маємо $m = \iint_D \frac{2y - x}{x^2 + y^2} dxdy$.

Перейдемо до полярних координат: $x = \rho \cos\varphi,\ y = \rho \sin\varphi$:

$$m = \iint_D \frac{2\rho \sin\varphi - \rho \cos\varphi}{\rho^2} \rho \, d\rho \, d\varphi =$$

$$= \iint_D \left(2\sin\varphi - \cos\varphi\right) d\rho \, d\varphi =$$

$$= \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \left(2\sin\varphi - \cos\varphi\right) d\varphi \int_1^2 d\rho = \left(-2\cos\varphi - \sin\varphi\right)\Big|_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \cdot \rho\Big|_1^2 = -2\cos\pi - \sin\pi + 2\cos\frac{\pi}{2} + \sin\frac{\pi}{2} = 2 + 1 = 3.$$

Приклад 3. Знайти координати центра маси однорідної пластинки, обмеженої лініями $ay = x^2$, $x + y = 2a$ $(a > 0)$.

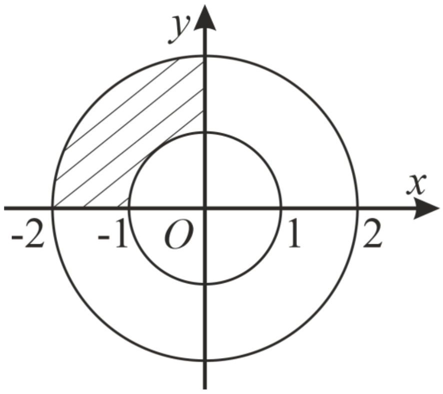


Рис. 3

Розв'язання. Розв'язуючи систему рівнянь заданих ліній, знаходимо абсциси точок їх перетину: $x_1 = -2a$, $x_2 = a$.

Знайдемо спочатку площу області D:

$$S = \iint_D dxdy = \int_{-2a}^{a} dx \int_{\frac{x^2}{a}}^{2a-x} dy = \int_{-2a}^{a} \left(2a - x - \frac{x^2}{a} \right) dx = \frac{9}{2} a^2.$$

Далі обчислюємо інтеграли, що входять у формули (4):

$$\iint_D xdxdy = \int_{-2a}^{a} xdx \int_{\frac{x^2}{a}}^{2a-x} dy = \int_{-2a}^{a} \left(2ax - x^2 - \frac{x^3}{a} \right) dx = -\frac{9}{4} a^3;$$

$$\iint_D ydxdy = \int_{-2a}^{a} dx \int_{\frac{x^2}{a}}^{2a-x} ydy = \int_{-2a}^{a} \frac{y^2}{2} \Bigg|_{\frac{x^2}{a}}^{2a-x} dx = \frac{1}{2} \int_{-2a}^{a} \left(4a^2 - 4ax + x^2 - \frac{x^4}{a^2} \right) dx = \frac{36}{5} a^3.$$

Знаходимо координати центра маси: $x_C = -\frac{a}{2}$; $y_C = \frac{8}{5} a.$

Приклад 4. Знайти центр маси однорідної пластинки, обмеженої лініями $y = \cos x$ та $y = 0$ $\left(-\frac{\pi}{2} \le x \le \frac{\pi}{2} \right)$.

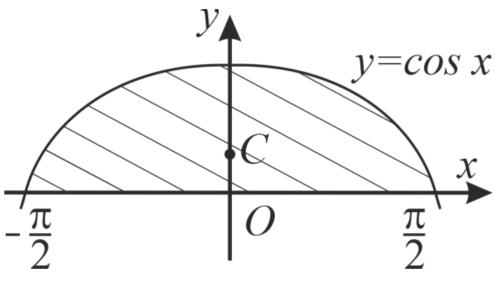


Рис. 4

Розв'язання. Внаслідок симетрії пластинки відносно осі Oy маємо $x_C = 0$. Для знаходження y_C скористаємось другою з формул (4).

$$S = \iint_D dxdy = 2\int_0^{\frac{\pi}{2}} dx \int_0^{\cos x} dy = 2\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos x \, dx = 2\sin x \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = 2.$$

$$\iint_D ydxdy = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} dx \int_0^{\cos x} ydy = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos^2 x}{2} dx = \frac{1}{4} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} (1 + \cos 2x) dx = \frac{1}{4} \left(x + \frac{1}{2} \sin 2x \right) \Bigg|_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} = \frac{\pi}{4}.$$

Тобто $y_C = \frac{\pi}{8}$. А тому, центр маси даної пластинки міститься в точці $C\left(0; \frac{\pi}{8} \right)$.

Приклад 5. Обчислити момент інерції плоскої матеріальної фігури D, обмеженої лініями $x^2 = 1 - y$, $x = 0$, $y = 0$ $(x \ge 0, y \ge 0)$ відносно осі Ox, якщо поверхнева густина $\gamma(x, y) = x$.

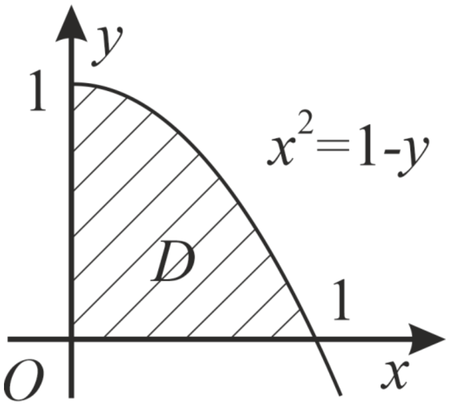


Рис. 5

Розв'язання. Використовуючи першу з формул (5), одержуємо:

$$I_x = \iint_D y^2 x dx dy = \int_0^1 y^2 dy \int_0^{\sqrt{1-y}} x dx =$$

$$= \int_0^1 y^2 \left. \frac{x^2}{2} \right|_0^{\sqrt{1-y}} dy = \frac{1}{2} \int_0^1 y^2 (1 - y) dy =$$

$$= \frac{1}{2} \left. \left(\frac{y^3}{3} - \frac{y^4}{4} \right) \right|_0^1 = \frac{1}{24}.$$

Приклад 6. Знайти момент інерції відносно осі Oy однорідної пластинки, обмеженої лініями $x = 1 - \sqrt{-y}$, $x = -\sqrt{y+1}$, $y = 0$ $(\gamma(x, y) = 1)$.

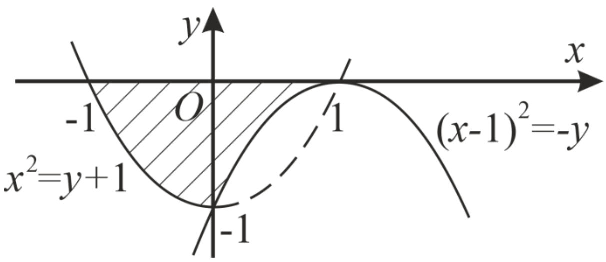


Рис. 6

Розв'язання. Дана пластинка зображена на рис. 6.

Рівняння $x = 1 - \sqrt{-y}$ визначає частину параболи $(x-1)^2 = -y$ при $x \le 1$, а рівняння $x = -\sqrt{y+1}$ – частину параболи $x^2 = y + 1$ при $x \le 0$.

За другою з формул (5) отримаємо:

$$I_y = \iint_D x^2 dx dy = \int_{-1}^0 x^2 dx \int_{x^2-1}^0 dy + \int_0^1 x^2 dx \int_{-(x-1)^2}^0 dy =$$

$$= \int_{-1}^0 x^2 (1 - x^2) dx + \int_0^1 x^2 (x-1)^2 dx =$$

$$= \left. \left(\frac{x^3}{3} - \frac{x^5}{5} \right) \right|_{-1}^0 + \left. \left(\frac{x^5}{5} - \frac{x^4}{2} + \frac{x^3}{3} \right) \right|_0^1 = \frac{1}{6}.$$

Приклад 7. Знайти момент інерції відносно початку координат однорідної пластинки, обмеженої лініями $x+y=2$, $x=0,\ y=0$ $\left(\gamma\left(x,y\right)=1\right)$.

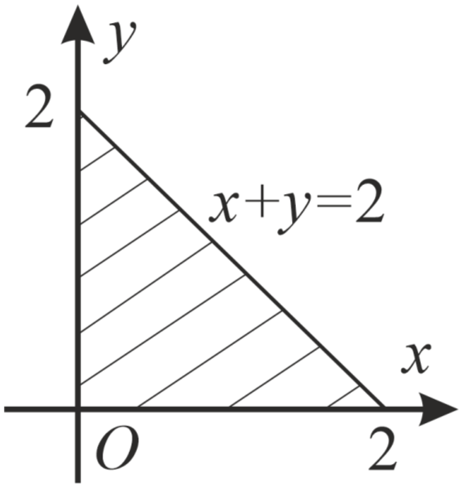


Рис. 7

Розв'язання. Застосуємо формулу (6).

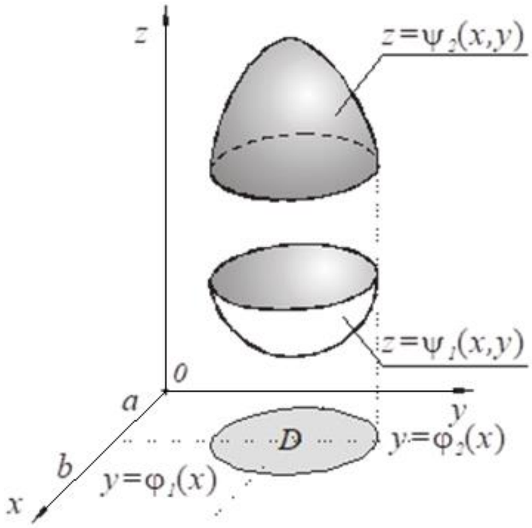
$$I_0=\iint\limits_D\left(x^2+y^2\right)dxdy=\int\limits_0^2 dx\int\limits_0^{2-x}\left(x^2+y^2\right)dy=$$

$$=\int\limits_0^2\left(x^2y+\frac{y^3}{3}\right)\Bigg|_0^{2-x}dx=\int\limits_0^2\left(2x^2-x^3+\frac{\left(2-x\right)^3}{3}\right)dx=$$

$$=\left(2\frac{x^3}{3}-\frac{x^4}{4}-\frac{1}{3}\frac{\left(2-x\right)^4}{4}\right)\Bigg|_0^2=\frac{16}{3}-4+\frac{4}{3}=\frac{8}{3}.$$

Тема: Потрійні інтеграли

1. Обчислення потрійного інтеграла в декартових координатах.



Нехай просторова область V обмежена знизу і зверху поверхнями $z=\psi_1(x,y)$, $z=\psi_2(x,y)$, де $\psi_1(x,y)$ і $\psi_2(x,y)$ – неперервні функції в замкненій області D площини xOy, і циліндричною поверхнею, в якої твірні паралельні осі Oz, а напрямною є межа області D (по суті область D є проекцією області V на площину xOy). Тоді потрійний інтеграл від неперервної в області V функції обчислюється за формулою:

$$\iiint\limits_V f(x,y,z)\,dxdydz=\iint\limits_D\left[\int\limits_{\psi_1(x,y)}^{\psi_2(x,y)} f(x,y,z)\,dz\right]dxdy=\iint\limits_D dxdy\int\limits_{\psi_1(x,y)}^{\psi_2(x,y)} f(x,y,z)\,dz\,. \quad (1)$$

Якщо область D обмежена лініями $x=a,\ x=b\ (a<b),\ y=\varphi_1(x),\ y=\varphi_2(x)$ [$\varphi_1(x),\varphi_2(x)$ – неперервні на відрізку $[a,b]$ функції, причому $\varphi_1(x)\le\varphi_2(x)$], то, звівши у формулі (1) подвійний інтеграл до двократного, одержимо формулу:

$$\iiint\limits_V f(x,y,z)\,dxdydz=\int\limits_a^b dx\int\limits_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} dy\int\limits_{\psi_1(x,y)}^{\psi_2(x,y)} f(x,y,z)\,dz\,. \quad (2)$$

Вираз у правій частині формули (2) називається трикратним інтегралом. При відповідних умовах мають місце формули, які одержуються із формул (1) та (2) перестановкою змінних x , y, z.

Приклад 1. Обчислити інтеграл $\iiint\limits_V x\,dxdydz$ по області V, обмеженій площинами

$$x+y+z=2,\ x=0,\ y=0,\ z=1.$$

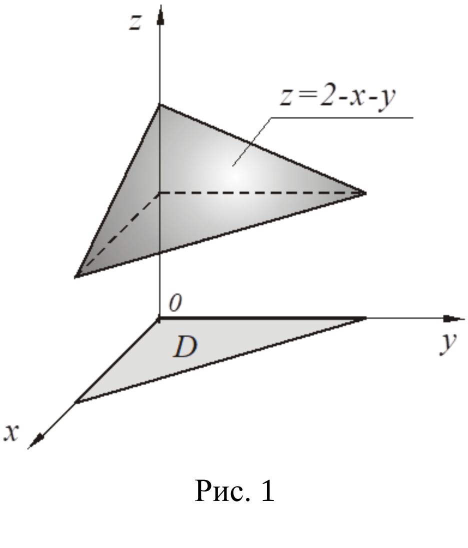


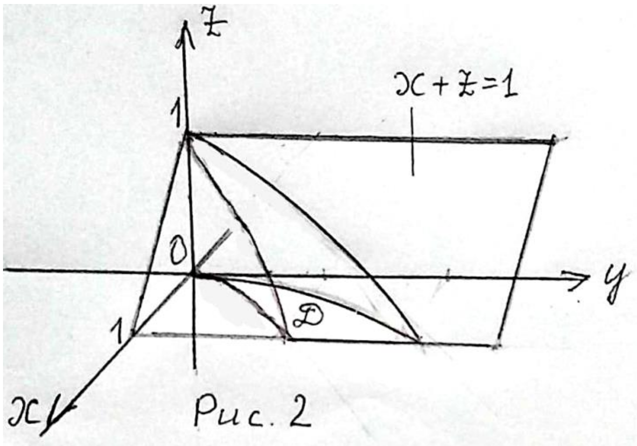
Рис. 1

Розв'язання. Область V проектується на площину xOy в трикутник D, обмежений прямими $x=0, y=0, x+y=1$. Використовуючи (1), одержуємо:

$$\iiint\limits_V x\,dxdydz=\iint\limits_{D_1}\left[\int\limits_1^{2-x-y} x\,dz\right]dxdy=\iint\limits_D x\left[z\Big|_1^{2-x-y}\right]dxdy=$$

$$=\iint\limits_D x(2-x-y-1)\,dxdy=\int\limits_0^1 x\left(y-xy-\frac{y^2}{2}\right)\Bigg|_0^{1-x}dx=\frac{1}{24}.$$

Приклад 2. Обчислити потрійний інтеграл $\iiint\limits_G xy^2dxdydz$, якщо область G обмежена поверхнями $y=\sqrt{x}$, $y=2\sqrt{x}$, $z=0$, $x+z=1$.



Розв'язання. Рівняння $y=\sqrt{x}$ та $y=2\sqrt{x}$ визначають у просторі циліндричні поверхні, твірні яких паралельні до осі Oz, а напрямні лежать в площині xOy: крива $y=\sqrt{x}$ – це частина параболи $y^2=x$, а крива $y=2\sqrt{x}$ – частина параболи $y^2=4x$.

Рівняння $x+z=1$ – це рівняння площини, яка паралельна до осі Oy (рис. 2).

Область інтегрування G проектується на площину xOy в область D.

$$\iiint\limits_G xy^2dxdydz=\int\limits_0^1 xdx\int\limits_{\sqrt{x}}^{2\sqrt{x}} y^2dy\int\limits_0^{1-x} dz=\int\limits_0^1 xdx\int\limits_{\sqrt{x}}^{2\sqrt{x}} y^2\left(z\Big|_0^{1-x}\right)dy=\int\limits_0^1 x(1-x)\left(\left.\frac{y^3}{3}\right|_{\sqrt{x}}^{2\sqrt{x}}\right)dx=$$

$$=\frac{1}{3}\int\limits_0^1\left(x-x^2\right)7x^{\frac{3}{2}}dx=\frac{7}{3}\int\limits_0^1\left(x^{\frac{5}{2}}-x^{\frac{7}{2}}\right)dx=\frac{7}{3}\left.\left(\frac{2x^{\frac{7}{2}}}{7}-\frac{2x^{\frac{9}{2}}}{9}\right)\right|_0^1=\frac{7}{3}\left(\frac{2}{7}-\frac{2}{9}\right)=\frac{4}{27}.$$

Приклад 3. Обчислити потрійний інтеграл $\iiint\limits_G xz^2\sin(xyz)dxdydz$, якщо область G обмежена площинами $x=0,\ y=0,\ z=0,\ x=1,\ y=\pi,\ z=2$.

Розв'язання. Оскільки область інтегрування є прямокутним паралелепіпедом, то усі межі інтегрування будуть сталими: $0\le x\le 1,\ 0\le y\le\pi,\ 0\le z\le 2$. Порядок інтегрування залежатиме від вигляду підінтегральної функції: задану функцію зручніше інтегрувати спочатку по змінній y, потім – по змінній x і, нарешті, по змінній z.

$$\iiint\limits_G xz^2\sin(xyz)dxdydz=\int\limits_0^2 dz\int\limits_0^1 dx\int\limits_0^\pi xz^2\sin(xyz)dy=\int\limits_0^2 z^2dz\int\limits_0^1 xdx\int\limits_0^\pi \sin(xyz)dy=$$

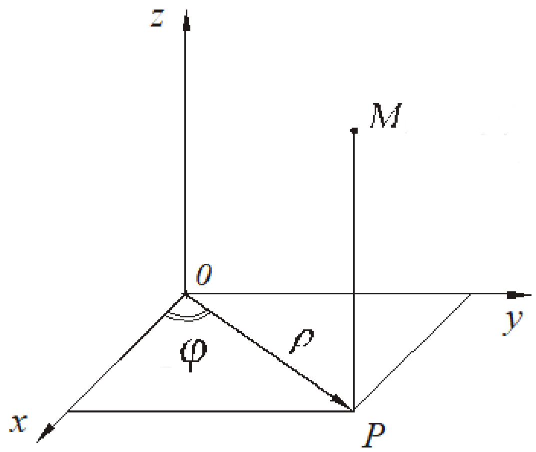
$$=\int\limits_0^2 z^2dz\int\limits_0^1 x\left.\left(-\frac{1}{xz}\cos(xyz)\right)\right|_0^\pi dx=\int\limits_0^2 zdz\int\limits_0^1\left(1-\cos(\pi xz)\right)dx=\int\limits_0^2 z\left.\left(x-\frac{1}{\pi z}\sin(\pi xz)\right)\right|_0^1 dz=$$

$$=\int\limits_0^2 z\left(1-\frac{1}{\pi z}\sin(\pi z)\right)dz=\int\limits_0^2\left(z-\frac{1}{\pi}\sin(\pi z)\right)dz=\left.\left(\frac{z^2}{2}+\frac{1}{\pi^2}\cos(\pi z)\right)\right|_0^2=2+\frac{1}{\pi^2}\left(\cos 2\pi-\cos 0\right)=2.$$

2. Потрійний інтеграл в циліндричних і сферичних координатах

а) Перехід в потрійному інтегралі до циліндричних координат

Положення точки $M(x, y, z)$ тривимірного простору однозначно визначається трьома числами ρ, φ, z, де ρ – довжина радіуса-вектора проекції точки М на площину xOy, φ – кут, який утворює цей радіус-вектор з віссю Ox, z – апліката точки М.



Числа ρ, φ, z називаються циліндричними координатами точки М. Вони зв'язані з декартовими координатами точки співвідношеннями:

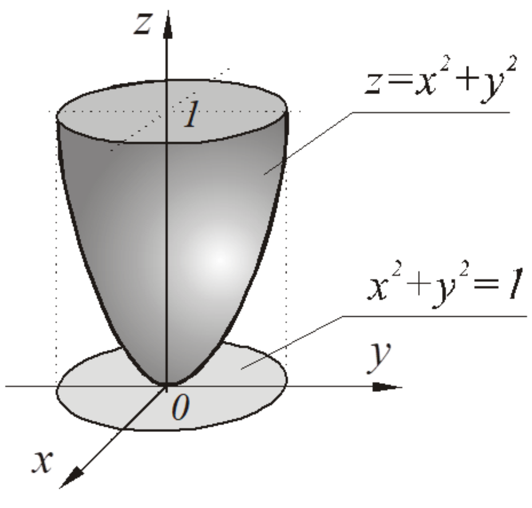
$$x = \rho\cos\varphi, \quad y = \rho\sin\varphi, \quad z = z. \qquad (3)$$

Для обчислення потрійного інтеграла шляхом переходу до циліндричних координат використовується формула:

$$\iiint\limits_V f(x, y, z)dxdydz = \iiint\limits_V f(\rho\cos\varphi, \rho\sin\varphi, z)\rho\, d\rho d\varphi dz. \qquad (4)$$

Обчислення потрійного інтеграла в циліндричних координатах зводиться до інтегрування по ρ, φ і z на основі тих же принципів, що й у випадку декартових координат.

Приклад 4. Обчислити $\iiint\limits_V (x-1)dxdydz$, якщо область V обмежена поверхнями $x^2 + y^2 = z, z = 1$.



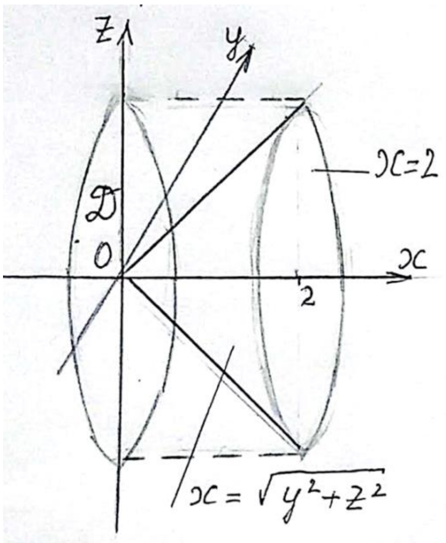
Розв'язання. Перейдемо до циліндричних координат. Рівняння заданих поверхонь у циліндричній системі координат мають вигляд: $\rho^2 = z;\ z = 1$.

$$\iiint\limits_V (x-1)dxdydz = \iiint\limits_V (\rho\cos\varphi - 1)\rho\, d\rho d\varphi dz =$$

$$= \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^1 (\rho\cos\varphi - 1)\rho d\varphi \int_{\rho^2}^1 dz =$$

$$= \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^1 (\rho\cos\varphi - 1)\rho\, z\Big|_{\rho^2}^1 d\rho = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^1 (\rho\cos\varphi - 1)\rho(1-\rho^2)d\rho = \int_0^{2\pi}\left(\frac{2}{15}\cos\varphi - \frac{1}{4}\right)d\varphi = -\frac{\pi}{2}.$$

Приклад 5. Обчислити $\iiint\limits_G x dxdydz,$ якщо область G обмежена поверхнями $x=\sqrt{y^2+z^2}$ та $x=2$.



Розв'язання. Область інтегрування G зображена на рис. 4. Рівняння $x=\sqrt{y^2+z^2}$ – це рівняння частини конуса $x^2=y^2+z^2$ при $x\ge 0$. Спроектуємо область G на площину yOz. Отримаємо область D – круг $y^2+z^2\le 4$. Перейдемо до циліндричних координат: $y=\rho\cos\varphi,\ z=\rho\sin\varphi,\ x=x$.

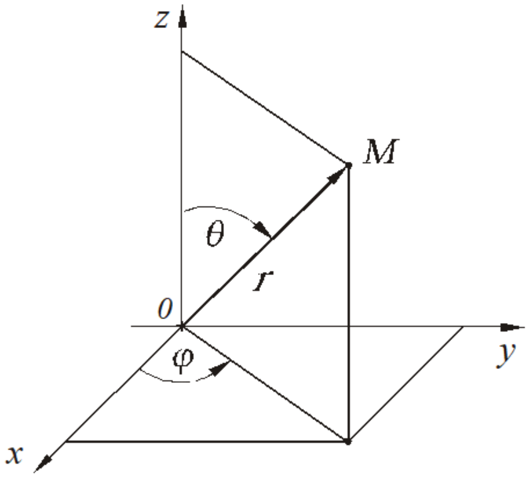
$$\iiint\limits_G x dxdydz=\iiint\limits_G x\rho d\rho d\varphi dx.$$

Рівняння конуса в циліндричній системі координат має вигляд $x=\rho$, а рівняння кола $y^2+z^2=4$ в площині yOz має вигляд $\rho=2$. Отже,

$$\iiint\limits_G x dxdydz=\int\limits_0^{2\pi}d\varphi\int\limits_0^2\rho d\rho\int\limits_\rho^2 xdx=\int\limits_0^{2\pi}d\varphi\int\limits_0^2\rho\left(\left.\frac{x^2}{2}\right|_\rho^2\right)d\rho=$$

$$=\frac{1}{2}\int\limits_0^{2\pi}d\varphi\int\limits_0^2\left(4\rho-\rho^3\right)d\rho=\frac{1}{2}\varphi\Big|_0^{2\pi}\cdot\left.\left(2\rho^2-\frac{\rho^4}{4}\right)\right|_0^2=\pi(8-4)=4\pi.$$

б) Перехід в потрійному інтегралі до сферичних координат



В сферичних координатах положення точки М в просторі визначається трьома числами $r,\ \varphi,\ \theta$, де r – довжина радіус-вектора $\overline{OM}$ точки M; θ – кут між радіусом-вектором $\overline{OM}$ і віссю Oz; φ – кут між проекцією радіус-вектора $\overline{OM}$ на площину xOy і віссю Ox. Для будь-якої точки простору мають місце співвідношення:

$$0\le r<\infty,\quad 0\le\theta\le\pi,\quad 0\le\varphi<2\pi.$$

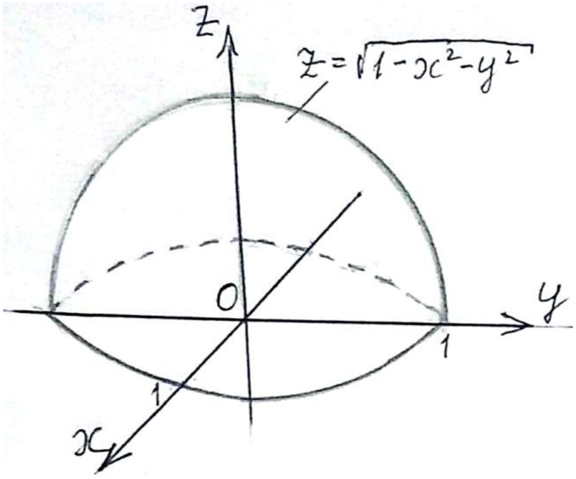
Із рисунка встановлюється зв'язок між декартовими і сферичними координатами:

$$x=r\cos\varphi\sin\theta,\quad y=r\sin\varphi\sin\theta,\quad z=r\cos\theta. \tag{5}$$

Формула переходу в потрійному інтегралі від декартових координат до сферичних має вигляд:

$$\iiint\limits_V f(x,y,z)dxdydz=\iiint\limits_V f(r\sin\theta\cos\varphi,r\sin\theta\sin\varphi,r\cos\theta)r^2\sin\theta dr\,d\theta\,d\varphi. \tag{6}$$

Приклад 6. Обчислити $\iiint\limits_G \left(x^2+y^2\right)dxdydz,$ якщо область G обмежена поверхнями



$z=\sqrt{1-x^2-y^2}$, $z=0$.

Розв'язання. Область G зображена на рисунку. Перейдемо до сферичних координат:

$$x=r\cos\varphi\sin\theta,\;\; y=r\sin\varphi\sin\theta,$$

$$z=r\cos\theta;\;\; x^2+y^2+z^2=r^2.$$

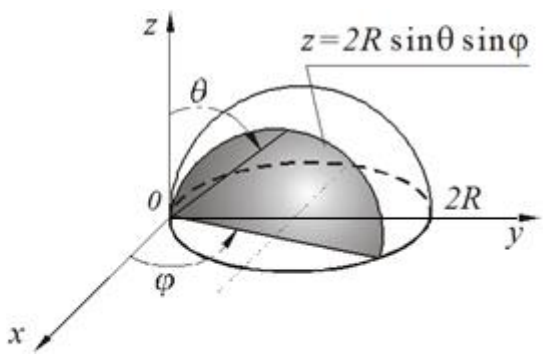
Рівняння $z=\sqrt{1-x^2-y^2}$ визначає верхню півсферу. Рівняння сфери має вигляд $x^2+y^2+z^2=1.$ У сферичних координатах це рівняння набуває вигляду $r=1$. Враховуючи формулу (6), отримаємо:

$$\iiint\limits_G \left(x^2+y^2\right)dxdydz=\iiint\limits_G r^2\sin^2\theta\; r^2\sin\theta\, drd\varphi d\theta=\iiint\limits_G r^4\sin^3\theta\;\; drd\varphi d\theta=$$

$$=\int\limits_0^{2\pi}d\varphi\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^3\theta d\theta\int\limits_0^1 r^4dr=2\pi\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^3\theta d\theta\cdot\left.\frac{r^5}{5}\right|_0^1=-\frac{2\pi}{5}\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}\left(1-\cos^2\theta\right)d\left(\cos\theta\right)=$$

$$=-\frac{2\pi}{5}\left.\left(\cos\theta-\frac{\cos^3\theta}{3}\right)\right|_0^{\frac{\pi}{2}}=-\frac{2\pi}{5}\left(-1+\frac{1}{3}\right)=\frac{4\pi}{15}.$$

Приклад 7. Обчислити $\iiint\limits_V \sqrt{x^2+y^2+z^2}\,dxdydz,$ якщо V – область, обмежена



поверхнями $x^2+y^2+z^2=2Ry,\quad z=0\;\;(z\ge 0).$

Розв'язання. Перейдемо до сферичних координат. Враховуючи (6), будемо мати:

$$\iiint\limits_V \sqrt{x^2+y^2+z^2}\,dxdydz=\iiint\limits_V r\cdot r^2\sin\theta drd\theta d\varphi=$$

$$=\int\limits_0^{\pi}d\varphi\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}\sin\theta d\theta\int\limits_0^{2R\sin\varphi\sin\theta}r^3dr=\int\limits_0^{\pi}d\varphi\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}\sin\theta\;\left.\frac{r^4}{4}\right|_0^{2R\sin\varphi\sin\theta}d\theta=$$

$$=4R^4\int\limits_0^{\pi}d\varphi\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^5\theta\,\sin^4\varphi\, d\theta=-4R^4\int\limits_0^{\pi}\sin^4\varphi d\varphi\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}\left(1-\cos^2\theta\right)^2d\left(\cos\theta\right)=$$

$$=-4R^4\int\limits_0^{\pi}\left(\frac{1-\cos2\varphi}{2}\right)^2d\varphi\cdot\left.\left(\cos\theta-2\frac{\cos^3\theta}{3}+\frac{\cos^5\theta}{5}\right)\right|_0^{\frac{\pi}{2}}=$$

$$=\frac{32}{15}R^4\cdot\frac{1}{4}\int\limits_0^{\pi}\left(1-2\cos2\varphi+\frac{1+\cos4\varphi}{2}\right)d\varphi=\frac{8}{15}R^4\cdot\frac{3}{2}\pi=\frac{4}{5}\pi R^4.$$

Тема: Застосування потрійного інтеграла

1. Обчислення об'ємів. Об'єм замкненої обмеженої області G можна знайти за допомогою формули:

$$V = \iiint\limits_G dxdydz. \qquad (1)$$

2. Обчислення маси тіла. Маса тіла G, густина якого дорівнює $\gamma(x, y, z)$, знаходиться за формулою:

$$m = \iiint\limits_G \gamma(x, y, z)dxdydz. \qquad (2)$$

3. Знаходження координат центра маси. Координати центра маси $C(x_C, y_C, z_C)$ тіла G можна обчислити за допомогою формул:

$$x_C = \frac{1}{m}\iiint\limits_G x\gamma(x, y, z)dxdydz,$$

$$y_C = \frac{1}{m}\iiint\limits_G y\gamma(x, y, z)dxdydz, \qquad (3)$$

$$z_C = \frac{1}{m}\iiint\limits_G z\gamma(x, y, z)dxdydz,$$

де m – маса тіла; $\gamma(x, y, z)$ – густина. Якщо тіло однорідне, то $\gamma(x, y, z) = const.$

4.Обчислення моментів інерції. Моменти інерції тіла G відносно осей координат Ox, Oy, Oz знаходяться відповідно за формулами:

$$I_x = \iiint\limits_G (y^2 + z^2)\gamma(x, y, z)dxdydz,$$

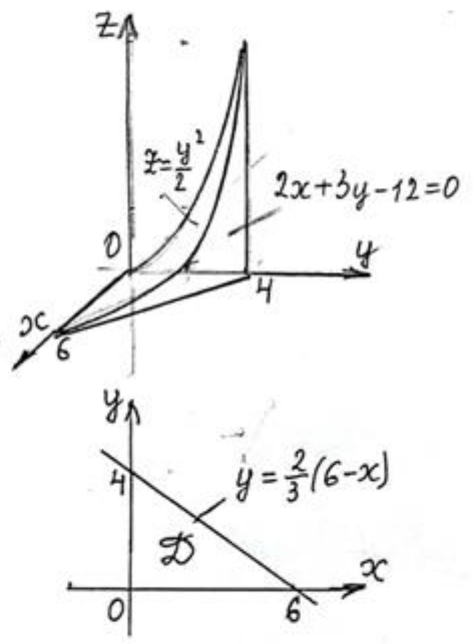
$$I_y = \iiint\limits_G (x^2 + z^2)\gamma(x, y, z)dxdydz, \qquad (4)$$

$$I_z = \iiint\limits_G (x^2 + y^2)\gamma(x, y, z)dxdydz,$$

Момент інерції I_0 відносно початку координат обчислюється за допомогою формули:

$$I_0 = \iiint\limits_G (x^2 + y^2 + z^2)\gamma(x, y, z)dxdydz.$$

Приклад 1. Знайти об’єм тіла, обмеженого поверхнями



$$z = \frac{y^2}{2},\ \ 2x + 3y - 12 = 0,\ \ x = 0,\ \ y = 0,\ \ z = 0.$$

Розв’язання.

$$V = \iiint\limits_G dxdydz\ .$$

$$V = \int\limits_0^6 dx \int\limits_0^{\frac{2}{3}(6-x)} dy \int\limits_0^{\frac{y^2}{2}} dz = \int\limits_0^6 dx \int\limits_0^{\frac{2}{3}(6-x)} \frac{y^2}{2} dy =$$

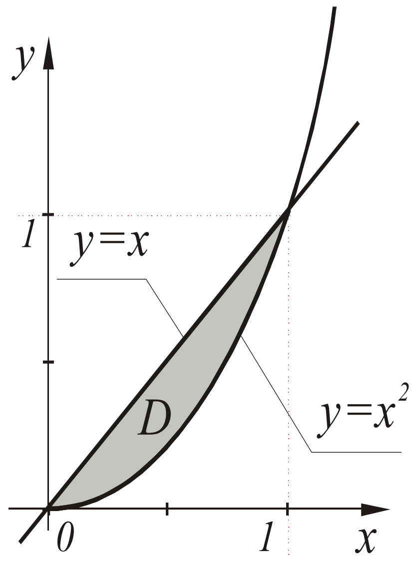
$$= \frac{1}{2}\int\limits_0^6 \left.\frac{y^3}{3}\right|_0^{\frac{2}{3}(6-x)} dx = \frac{4}{81}\int\limits_0^6 (6-x)^3\, dx =$$

$$= -\frac{4}{81}\int\limits_0^6 (6-x)^3\, d(6-x) = -\frac{4}{81}\left.\frac{(6-x)^4}{4}\right|_0^6 = \frac{6^4}{81} = 16.$$

Приклад 2. Обчислити об’єм тіла, обмеженого поверхнями

$z = x^2 + y^2,\quad z = 2\left(x^2 + y^2\right),\quad y = x,\quad y = x^2.$

Розв’язання. Тіло, обмежене частинами поверхонь параболоїдів обертання $z = x^2 + y^2,\ \ z = 2(x^2 + y^2),$ частиною площини $y = x$ і частиною циліндричної поверхні $y = x^2.$ Тому область інтегрування можна представити за допомогою нерівностей:



$$x^2 + y^2 \le z \le 2(x^2 + y^2),\ \ x^2 \le y \le x,\quad 0 \le x \le 1.$$

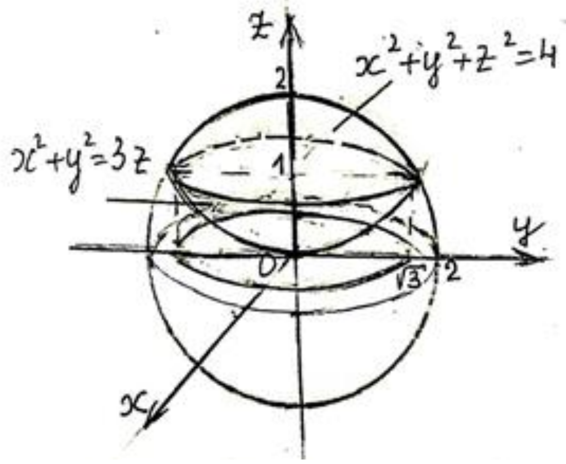
За формулою (1) знаходимо:

$$V = \iiint\limits_G dxdydz = \iint\limits_D dxdy \int\limits_{x^2+y^2}^{2(x^2+y^2)} dz =$$

$$= \int\limits_0^1 dx \int\limits_{x^2}^{x} \left. z \right|_{x^2+y^2}^{2(x^2+y^2)} dy = \int\limits_0^1 dx \int\limits_{x^2}^{x} (x^2 + y^2) dy =$$

$$= \int\limits_0^1 \left.\left(x^2 y + \frac{y^3}{3} \right)\right|_{x^2}^{x} dx = \int\limits_0^1 \left(\frac{4x^3}{3} - x^4 - \frac{x^6}{3} \right) dx = \left.\left(\frac{x^4}{3} - \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{21} \right)\right|_0^1 = \frac{3}{35}.$$

Приклад 3. Знайти об'єм тіла, обмеженого поверхнями $x^2+y^2+z^2=4,\ x^2+y^2=3z$.



Розв'язання. Дане тіло обмежене знизу параболоїдом $x^2+y^2=3z$, зверху сферою $x^2+y^2+z^2=4$ і проектується на площину *Oxy* в круг $x^2+y^2\le 3$. Перейдемо до циліндричних координат:

$$x=\rho\cos\varphi,\ y=\rho\sin\varphi,\ z=z.$$

Рівняння параболоїда матиме вигляд $z=\dfrac{\rho^2}{3}$, а рівняння сфери – $\rho^2+z^2=4$.

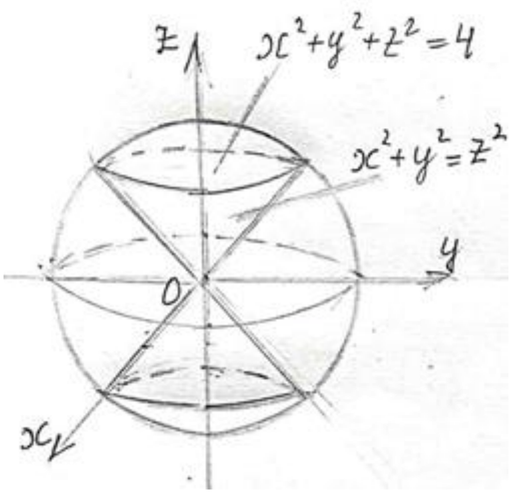
Рівняння верхньої півсфери має вигляд $z=\sqrt{4-\rho^2}$.

$$V=\iiint\limits_G dxdydz=\iiint\limits_G \rho d\rho d\varphi dz=\int_0^{2\pi}d\varphi\int_0^{\sqrt{3}}\rho d\rho\int_{\frac{\rho^2}{3}}^{\sqrt{4-\rho^2}}dz=$$

$$=2\pi\int_0^{\sqrt{3}}\rho\left(\sqrt{4-\rho^2}-\frac{\rho^2}{3}\right)d\rho=2\pi\left(-\frac{1}{2}\int_0^{\sqrt{3}}\left(4-\rho^2\right)^{\frac{1}{2}}d\left(4-\rho^2\right)-\frac{1}{3}\int_0^{\sqrt{3}}\rho^3 d\rho\right)=$$

$$=2\pi\left.\left(-\frac{1}{2}\frac{\left(4-\rho^2\right)^{\frac{3}{2}}2}{3}-\frac{1}{3}\cdot\frac{\rho^4}{4}\right)\right|_0^{\sqrt{3}}=2\pi\left(-\frac{1}{3}+\frac{8}{3}-\frac{3}{4}\right)=2\pi\cdot\frac{19}{12}=\frac{19\pi}{6}.$$

Приклад 4. Знайти об'єм тіла, обмеженого поверхнями $x^2+y^2+z^2=4,\ x^2+y^2=z^2$.



Розв'язання. Дане тіло обмежене сферою $x^2+y^2+z^2=4$ та конусом $x^2+y^2=z^2$ і міститься всередині конуса. Застосуємо сферичні координати:

$$x=r\sin\theta\cos\varphi,\ y=r\sin\theta\sin\varphi,\ z=r\cos\theta.$$

Оскільки $x^2+y^2+z^2=r^2$, то рівняння сфери набуває вигляду $r=2$. Знайдемо рівняння конуса у сферичних координатах:

$$r^2\sin^2\theta=r^2\cos^2\theta,$$

звідки $tg^2\theta=1;\ tg\theta=\pm1;\ \theta=\dfrac{\pi}{4}$ або $\theta=\dfrac{3\pi}{4}$.

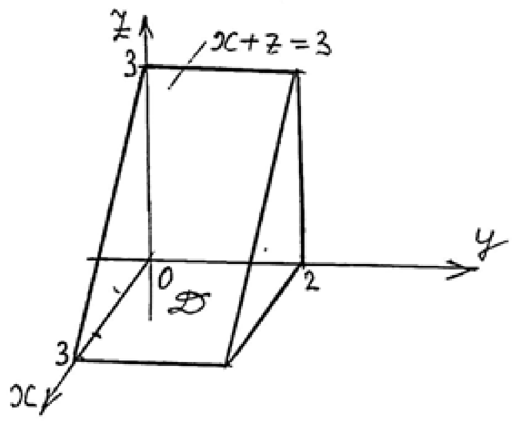
Для верхньої частини конуса $\theta=\dfrac{\pi}{4}$.

Обчислимо половину шуканого об’єму.

$$\frac{V}{2}=\iiint\limits_G r^2\sin\theta\,drd\varphi d\theta=\int\limits_0^{2\pi}d\varphi\int\limits_0^{\frac{\pi}{4}}\sin\theta\,d\theta\int\limits_0^{2}r^2dr=2\pi\left(-\cos\theta\right)\Big|_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{r^3}{3}\Big|_0^2=\frac{16}{3}\pi\left(1-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)=\frac{8\pi}{3}\left(2-\sqrt{2}\right).$$

Отже $V=\frac{16\pi}{3}\left(2-\sqrt{2}\right)$.

Приклад 5. Обчислити масу тіла, обмеженого площинами $x+z=3,\ y=2,\ x=0,\ y=0,\ z=0$, якщо густина $\gamma\left(x,y,z\right)=\frac{1}{\left(x+y+z+1\right)^3}$.



Розв’язання. Застосуємо формулу (2)

$$m=\iiint\limits_G\frac{dxdydz}{\left(x+y+z+1\right)^3}=\iint\limits_D dxdy\int\limits_0^{3-x}\left(x+y+z+1\right)^{-3}dz=$$

$$=\iint\limits_D\frac{\left(x+y+z+1\right)^{-2}}{-2}\Bigg|_0^{3-x}dxdy=$$

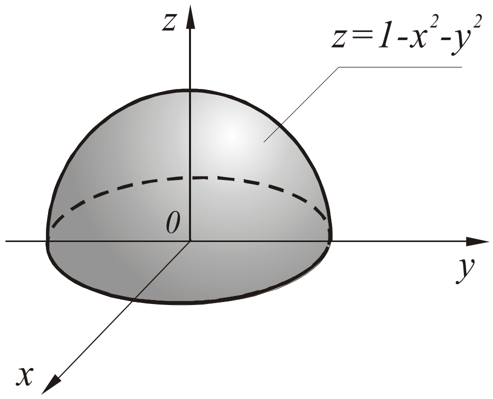
$$=-\frac{1}{2}\int\limits_0^3dx\int\limits_0^2\left(\left(y+4\right)^{-2}-\left(x+y+1\right)^{-2}\right)dy=$$

$$=\frac{1}{2}\int\limits_0^3\left(\frac{1}{y+4}-\frac{1}{x+y+1}\right)\Bigg|_0^2dx=\frac{1}{2}\int\limits_0^3\left(\frac{1}{6}-\frac{1}{4}-\frac{1}{x+3}+\frac{1}{x+1}\right)dx=\frac{1}{2}\int\limits_0^3\left(\frac{1}{x+1}-\frac{1}{x+3}-\frac{1}{12}\right)dx=$$

$$=\frac{1}{2}\left(\ln\left(x+1\right)-\ln\left(x+3\right)-\frac{x}{12}\right)\Bigg|_0^3=\frac{1}{2}\left(\ln 4-\ln 6+\ln 3-\frac{1}{4}\right)=\frac{1}{2}\left(\ln 2-\frac{1}{4}\right)=\frac{1}{8}\left(4\ln 2-1\right).$$

Приклад 6. Знайти масу тіла, що заповнює область G, обмежену поверхнями $z=1-x^2-y^2,\quad z=0,$ якщо густина тіла змінюється за законом $\gamma=kz\quad(k=const>0).$

Розв’язання. Використовуючи формулу (2), одержимо: $m=\iiint\limits_G kzdxdydz.$



Перейдемо до циліндричних координат:

$$m=\iiint\limits_G kz\rho d\rho d\varphi dz=k\int\limits_0^{2\pi}d\varphi\int\limits_0^1\rho d\rho\int\limits_0^{1-\rho^2}zdz=$$

$$=k\int\limits_0^{2\pi}d\varphi\int\limits_0^1\rho\cdot\frac{z^2}{2}\Bigg|_0^{1-\rho^2}d\rho=\frac{k}{2}\int\limits_0^{2\pi}d\varphi\int\limits_0^1\left(\rho-2\rho^3+\rho^5\right)d\rho=$$

$$=k\pi\left(\frac{\rho^2}{2}-\frac{\rho^4}{2}+\frac{\rho^6}{6}\right)\Bigg|_0^1=\frac{k\pi}{6}.$$

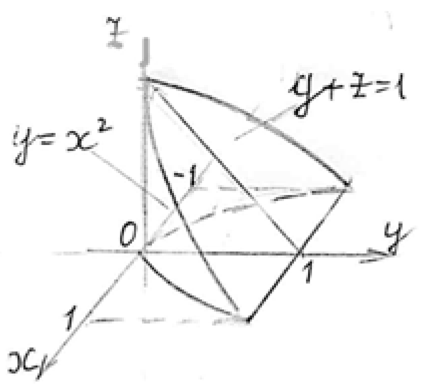
Приклад 7. Знайти координати центра маси тіла G, що розглядалося в прикладі 6.

Розв'язання. Враховуючи симетрію тіла та формулу для його густини, отримаємо: $x_C = y_C = 0$. Далі:

$$\iiint\limits_G z\gamma(x,y,z)dxdydz = k\int\limits_0^{2\pi} d\varphi \int\limits_0^1 \rho d\rho \int\limits_0^{1-\rho^2} z^2 dz = k\int\limits_0^{2\pi} d\varphi \int\limits_0^1 \rho \left.\frac{z^3}{3}\right|_0^{1-\rho^2} d\rho =$$

$$= \frac{k}{3}\int\limits_0^{2\pi} d\varphi \int\limits_0^1 \left(\rho - 3\rho^3 + 3\rho^5 - \rho^7\right) d\rho = \frac{k}{3}\int\limits_0^{2\pi} \left.\left(\frac{\rho^2}{2} - \frac{3\rho^4}{4} + \frac{\rho^6}{2} - \frac{\rho^8}{8}\right)\right|_0^1 d\varphi = \frac{k\pi}{12}; \quad z_c = \frac{1}{m}\cdot\frac{k\pi}{12} = \frac{1}{2}.$$

Приклад 8. Знайти координати центра маси однорідного тіла, обмеженого поверхнями $y = x^2,\ z = 0,\ y + z = 1$.



Розв'язання. Дане тіло обмежене параболічним циліндром $y = x^2$, площиною $y + z = 1$ та площиною Oxy і на площину Oxy проектується в параболічний сегмент. Цей сегмент обмежений параболою $y = x^2$ та прямою $y = 1$.

Оскільки дане тіло симетричне відносно площини Oyz, то $x_C = 0$.

$$y_C = \frac{1}{V}\iiint\limits_G ydxdydz, \quad z_C = \frac{1}{V}\iiint\limits_G zdxdydz,$$

де V – об'єм тіла.

$$V = \iiint\limits_G dxdydz = \int\limits_0^1 dy \int\limits_{-\sqrt{y}}^{\sqrt{y}} dx \int\limits_0^{1-y} dz = \int\limits_0^1 dy \int\limits_{-\sqrt{y}}^{\sqrt{y}} (1-y)dx = 2\int\limits_0^1 (1-y)\sqrt{y}dy = 2\left.\left(\frac{2y^{\frac{3}{2}}}{3} - \frac{2y^{\frac{5}{2}}}{5}\right)\right|_0^1 = \frac{8}{15};$$

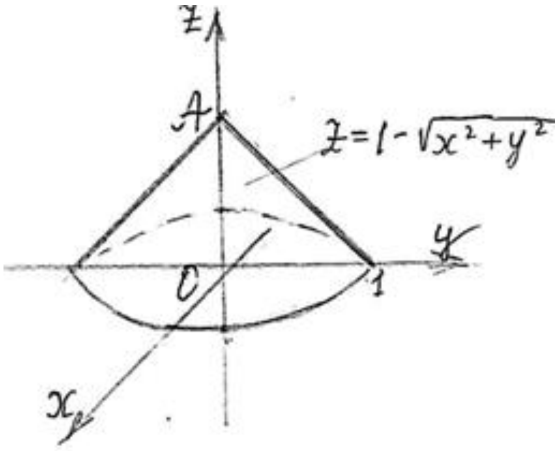
$$\iiint\limits_G ydxdydz = 2\int\limits_0^1 \left(y - y^2\right)\sqrt{y}dy = 2\left.\left(\frac{2y^{\frac{5}{2}}}{5} - \frac{2y^{\frac{7}{2}}}{7}\right)\right|_0^1 = \frac{8}{35};$$

$$\iiint\limits_G zdxdydz = \int\limits_0^1 dy \int\limits_{-\sqrt{y}}^{\sqrt{y}} dx \int\limits_0^{1-y} zdz = \frac{1}{2}\int\limits_0^1 (1-y)^2 2\sqrt{y}dy = \int\limits_0^1 \left(y^{\frac{1}{2}} - 2y^{\frac{3}{2}} + y^{\frac{5}{2}}\right)dy =$$

$$= \left.\left(\frac{2y^{\frac{3}{2}}}{3} - \frac{4y^{\frac{5}{2}}}{5} + \frac{2y^{\frac{7}{2}}}{7}\right)\right|_0^1 = \frac{16}{105}.$$ А тому $y_C = \frac{3}{7};\ z_C = \frac{2}{7}$.

Отже, центр маси даного тіла міститься в точці $C\left(0;\ \frac{3}{7};\ \frac{2}{7}\right)$.

Приклад 9. Обчислити моменти інерції відносно координатних осей однорідного тіла, обмеженого поверхнями $z=1-\sqrt{x^2+y^2}$, $z=0$ $\left(\gamma(x,y,z)=1\right)$.



Розв'язання. Рівняння $z=1-\sqrt{x^2+y^2}$ визначає частину конуса $(z-1)^2=x^2+y^2$ при $z\le 1$. Вершина цього конуса міститься в точці $A(0;0;1)$. Застосуємо формули (4) і перейдемо до циліндричних координат: $x=\rho\cos\varphi,\ y=\rho\sin\varphi,\ z=z$. Рівняння даної частини конуса: $z=1-\rho$.

Очевидно, що $I_x=I_y$.

$$I_x=\iiint\limits_G\left(\rho^2\sin^2\varphi+z^2\right)\rho\,d\rho d\varphi dz=\int_0^{2\pi}d\varphi\int_0^1\rho d\rho\int_0^{1-\rho}\left(\rho^2\sin^2\varphi+z^2\right)dz=$$

$$=\int_0^{2\pi}d\varphi\int_0^1\rho\left(\rho^2\sin^2\varphi\cdot z+\frac{z^3}{3}\right)\Bigg|_0^{1-\rho}d\rho=$$

$$=\int_0^{2\pi}d\varphi\int_0^1\left(\left(\rho^3-\rho^4\right)\sin^2\varphi+\frac{1}{3}\rho\left(1-3\rho+3\rho^2-\rho^3\right)\right)d\rho=$$

$$=\int_0^{2\pi}\left(\frac{\rho^4}{4}-\frac{\rho^5}{5}\right)\Bigg|_0^1\sin^2\varphi\,d\varphi+\frac{1}{3}\int_0^{2\pi}\left(\frac{\rho^2}{2}-\rho^3+\frac{3\rho^4}{4}-\frac{\rho^5}{5}\right)\Bigg|_0^1d\varphi=$$

$$=\frac{1}{20}\int_0^{2\pi}\frac{1-\cos2\varphi}{2}d\varphi+\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{20}\cdot2\pi=\frac{\pi}{20}+\frac{\pi}{30}=\frac{\pi}{12}.$$

$$I_z=\iiint\limits_G\rho^2\cdot\rho\,d\rho d\varphi dz=\int_0^{2\pi}d\varphi\int_0^1\rho^3d\rho\int_0^{1-\rho}dz=2\pi\int_0^1\rho^3(1-\rho)d\rho=$$

$$=2\pi\left(\frac{\rho^4}{4}-\frac{\rho^5}{5}\right)\Bigg|_0^1=2\pi\cdot\frac{1}{20}=\frac{\pi}{10}.$$

Тема: Криволінійні інтеграли І-го роду

1. Обчислення криволінійного інтеграла І-го роду

Нехай крива AB задана параметричними рівняннями $x = x(t),\ \ y = y(t),\ \ (t_0 \le t \le t_1)$, де $x(t),\ y(t)$ – неперервні функції разом із своїми похідними першого порядку. Тоді справджується формула:

$$\int\limits_{AB} f(x,y)dl = \int\limits_{t_0}^{t_1} f\left[x(t), y(t)\right]\sqrt{\left[x'(t)\right]^2 + \left[y'(t)\right]^2}dt \ . \qquad (1)$$

Якщо крива AB задана рівнянням $y = q(x)\ \ (a \le x \le b)$, то для обчислення криволінійного інтеграла І-го роду маємо:

$$\int\limits_{AB} f(x,y)dl = \int\limits_{a}^{b} f\left[x, q(x)\right]\sqrt{1 + \left[q'(x)\right]^2}dx. \qquad (2)$$

Якщо AB – просторова крива, задана параметричними рівняннями $x = x(t),\ \ y = y(t),$ $z = z(t),\ \ \ (t_0 \le t \le t_1)$, де $x(t),\ y(t),\ z(t)$ – неперервно-диференційовні функції, то для обчислення криволінійного інтеграла І-го роду маємо формулу:

$$\int\limits_{AB} f(x,y,z)dl = \int\limits_{t_0}^{t_1} f\left[x(t), y(t), z(t)\right]\sqrt{\left[x'(t)\right]^2 + \left[y'(t)\right]^2 + \left[z'(t)\right]^2}dt. \qquad (3)$$

2. Застосування криволінійного інтеграла І-го роду до задач механіки

а) Якщо $\gamma = \gamma(x,y)$ – лінійна густина плоскої матеріальної кривої *AB*, то масу кривої *AB* визначають за формулою:

$$m = \int\limits_{AB} \gamma(x,y)dl. \qquad (4)$$

Для просторової кривої *AB* маємо:

$$m = \int\limits_{AB} \gamma(x,y,z)dl. \qquad (4')$$

де $\gamma(x,y,z)$ – лінійна густина лінії *AB*.

б) Координати центра маси x_c, y_c плоскої кривої визначаються співвідношеннями:

$$x_c = \frac{1}{m}\int\limits_{AB} x\gamma(x,y)dl, \qquad y_c = \frac{1}{m}\int\limits_{AB} y\gamma(x,y)dl\ . \qquad (5)$$

Аналогічні формули мають місце і для випадку просторової кривої.

в) Моменти інерції плоскої кривої відносно осей O_x і O_y обчислюються відповідно за формулами:

$$I_x = \int\limits_{AB} y^2 \gamma(x, y) dl, \quad I_y = \int\limits_{AB} x^2 \gamma(x, y) dl. \tag{6}$$

Момент інерції відносно початку координат визначається за допомогою формули:

$$I_0 = \int\limits_{AB} (x^2 + y^2) \gamma(x, y) dl. \tag{6'}$$

Моменти інерції просторової кривої відносно осей координат O_x, O_y, O_z знаходяться за формулами:

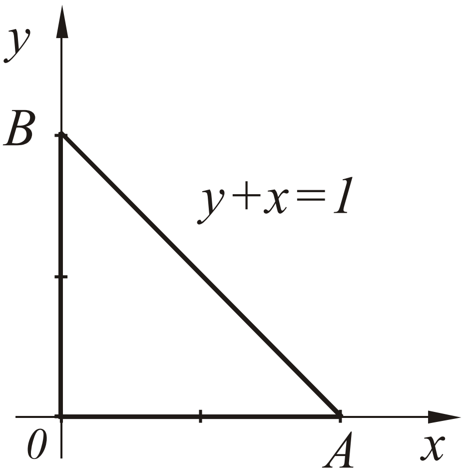
$$I_x = \int\limits_{AB} (y^2 + z^2) \gamma(x, y, z) dl, \quad I_y = \int\limits_{AB} (x^2 + z^2) \gamma(x, y, z) dl,$$

$$I_z = \int\limits_{AB} (x^2 + y^2) \gamma(x, y, z) dl. \tag{7}$$

Момент інерції просторової кривої відносно початку координат знаходиться за формулою:

$$I_0 = \int\limits_{AB} (x^2 + y^2 + z^2) \gamma(x, y, z) dl. \tag{8}$$

Приклад 1. Обчислити $I = \int\limits_{L} (x + y) dl$, де L – контур трикутника з вершинами $O(0;0)$, $A(1;0)$, $B(0;1)$.



Розв'язання. $I = \int\limits_{OB} (x+y) dl + \int\limits_{OA} (x+y) dl + \int\limits_{BA} (x+y) dl.$

На відрізку OB: $x = 0$, $dl = dy$, $0 \le y \le 1$, тому

$$\int\limits_{OB} (x+y) dl = \int\limits_0^1 y dy = \frac{1}{2}.$$

На відрізку OA: $y = 0$, $dl = dx$, $0 \le x \le 1$. Отже,

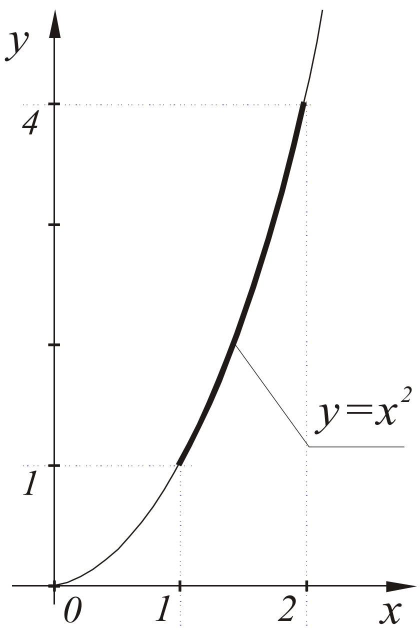
$$\int\limits_{OA} (x+y) dl = \int\limits_0^1 x dx = \frac{1}{2}.$$

Відрізок BA лежить на прямій $x + y = 1$, у зв'язку з чим $dl = \sqrt{2} dx$, тому

$$\int\limits_{BA} (x+y) dl = \sqrt{2} \int\limits_0^1 dx = \sqrt{2}.$$

Додамо одержані значення і одержимо: $I = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \sqrt{2} = 1 + \sqrt{2}.$

Приклад 2. Обчислити $I=\int\limits_L \sqrt{y}dl,$ де L – частина параболи $y=x^2,$ відтята від неї прямими $x=1, x=2.$



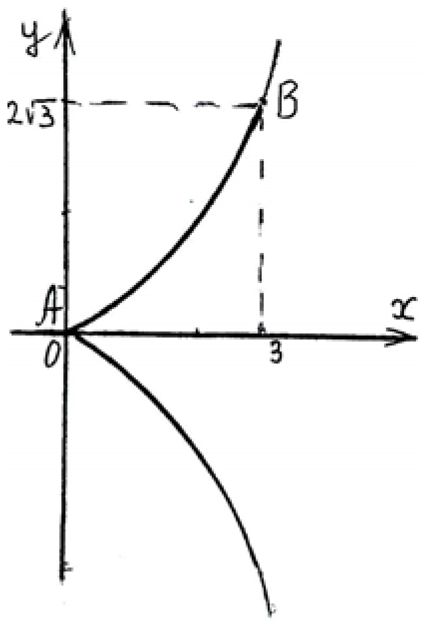
Розв'язання. Використовуємо в цьому випадку формулу (2).

Оскільки $y'=2x$, то маємо:

$$I=\int\limits_1^2 x\sqrt{1+4x^2}dx=\frac{1}{8}\int\limits_1^2(1+4x^2)^{\frac{1}{2}}d(1+4x^2)=$$

$$=\frac{1}{8}\cdot\frac{2}{3}(1+4x^2)^{\frac{3}{2}}\Big|_1^2=\frac{1}{12}(17\sqrt{17}-5\sqrt{5}).$$

Приклад 3. Обчислити криволінійний інтеграл $\int\limits_{AB}\frac{ydl}{\sqrt{x}}$, де AB – дуга півкубічної параболи $y^2=\frac{4}{9}x^3$ від точки $A(0;0)$ до точки $B\left(3;2\sqrt{3}\right)$.



Розв'язання. Рівняння півкубічної параболи запишемо у вигляді: $y=\frac{2}{3}\sqrt{x^3}$ (верхня вітка, $y\geq 0$) та $y=-\frac{2}{3}\sqrt{x^3}$ (нижня вітка, $y\leq 0$). Дана дуга AB є частиною верхньої вітки.

Застосуємо формулу (2). Враховуючи, що $y'=\frac{2}{3}\cdot\frac{3}{2}x^{\frac{1}{2}}=x^{\frac{1}{2}}$, отримаємо:

$$I=\int\limits_{AB}\frac{ydl}{\sqrt{x}}=\int\limits_0^3\frac{\frac{2}{3}\sqrt{x^3}\cdot\sqrt{1+x}}{\sqrt{x}}dx=\frac{2}{3}\int\limits_0^3 x\sqrt{1+x}\,dx\,.$$

Зробимо підстановку $1+x=t^2;\ x=t^2-1;\ dx=2tdt$. Тоді одержимо:

$$I=\frac{2}{3}\int\limits_1^2\left(t^2-1\right)2t^2dt=\frac{2}{3}\int\limits_1^2 2\left(t^4-t^2\right)dt=\frac{4}{3}\left(\frac{t^5}{5}-\frac{t^3}{3}\right)\Bigg|_1^2=\frac{4}{3}\left(\frac{32}{5}-\frac{1}{5}-\frac{8}{3}+\frac{1}{3}\right)=\frac{4}{3}\cdot\frac{58}{15}=\frac{232}{45}.$$

Приклад 4. Обчислити криволінійний інтеграл $\int\limits_{AB} xydl$, де AB – дуга еліпса $\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{1}=1$, що міститься в першому квадранті.

Розв'язання. Запишемо параметричні рівняння даного еліпса: $x=2\cos t, y=\sin t$. Для дуги еліпса, яка міститься в першій чверті, маємо $0\le t\le\frac{\pi}{2}$. Застосуємо формулу (1).

Оскільки $x'(t)=-2\sin t, y'(t)=\cos t$, то отримаємо:

$$\int\limits_{AB} xydl=2\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}\sin t\cos t\sqrt{4\sin^2 t+\cos^2 t}dt=2\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}\sin t\cos t\sqrt{1+3\sin^2 t}dt=$$

$$=\frac{1}{3}\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}\left(1+3\sin^2 t\right)^{\frac{1}{2}}d\left(1+3\sin^2 t\right)=\frac{1}{3}\left.\frac{\left(1+3\sin^2 t\right)^{\frac{3}{2}}\cdot 2}{3}\right|_0^{\frac{\pi}{2}}=\frac{2}{9}(8-1)=\frac{14}{9}.$$

Приклад 5. Обчислити криволінійний інтеграл $\int\limits_{AB}(x+6z)dl$, де AB – дуга кривої $x=t$, $y=\frac{t^2}{2}$, $z=\frac{t^3}{3}$, $0\le t\le 1$.

Розв'язання. Оскільки $x'(t)=1$, $y'(t)=t$, $z'(t)=t^2$, то за формулою (3) маємо

$$\int\limits_{AB}(x+6z)dl=\int\limits_0^1\left(t+2t^3\right)\sqrt{1+t^2+t^4}dt=\frac{1}{2}\int\limits_0^1\left(1+t^2+t^4\right)^{\frac{1}{2}}d\left(1+t^2+t^4\right)=$$

$$=\frac{1}{2}\left.\frac{2\left(1+t^2+t^4\right)^{\frac{3}{2}}}{3}\right|_0^1=\frac{1}{3}\left(3\sqrt{3}-1\right).$$

Приклад 6. Знайти масу дуги кривої $y=\ln x, \sqrt{3}\le x\le\sqrt{8}$, якщо лінійна густина в кожній точці дуги дорівнює квадрату абсциси цієї точки.

Розв'язання. За формулою (4) маємо

$$m=\int\limits_{AB}x^2dl=\int\limits_{\sqrt{3}}^{\sqrt{8}}x^2\sqrt{1+\left(\frac{1}{x}\right)^2}dx=\int\limits_{\sqrt{3}}^{\sqrt{8}}x\sqrt{x^2+1}\,dx=\frac{1}{2}\int\limits_{\sqrt{3}}^{\sqrt{8}}\left(x^2+1\right)^{\frac{1}{2}}d\left(x^2+1\right)=$$

$$=\frac{1}{2}\left.\frac{2\left(x^2+1\right)^{\frac{3}{2}}}{3}\right|_{\sqrt{3}}^{\sqrt{8}}=\frac{27}{3}-\frac{8}{3}=\frac{19}{3}.$$

Приклад 7. Знайти масу першого витка гвинтової лінії $x = 2\cos t$, $y = 2\sin t$, $z = t$, $0 \le t \le 2\pi$, якщо лінійна густина $\gamma(x, y, z) = x^2 + z^2$.

Розв'язання. Застосуємо формулу ($4'$).

$$m = \int_L \left(x^2 + z^2\right) dl .$$

Оскільки $x'(t) = -2\sin t$, $y'(t) = 2\cos t$, $z'(t) = 1$, то

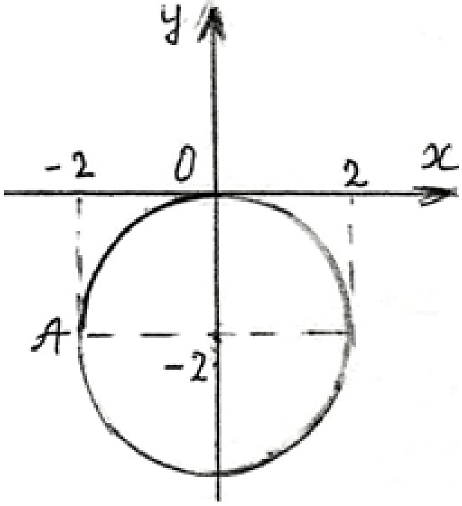
$$m = \int_0^{2\pi} \left(4\cos^2 t + t^2\right)\sqrt{4\sin^2 t + 4\cos^2 t + 1}dt = \int_0^{2\pi} \left(4\cos^2 t + t^2\right)\sqrt{5}dt = \sqrt{5}\left(2\int_0^{2\pi}\left(1 + \cos 2t\right)dt + \int_0^{2\pi} t^2 dt\right) =$$

$$= \sqrt{5}\left(2\left(t + \frac{1}{2}\sin 2t\right) + \frac{t^3}{3}\right)\Bigg|_0^{2\pi} = \sqrt{5}\left(4\pi + \frac{8\pi^3}{3}\right) = \frac{4\pi\sqrt{5}}{3}\left(2\pi^2 + 3\right).$$

Приклад 8. Знайти координати центра маси однорідної матеріальної лінії $y = -2 + \sqrt{4 - x^2}$, $x \le 0$.

Розв'язання. Виконаємо деякі перетворення даного рівняння

$$y + 2 = \sqrt{4 - x^2}\ ;\ (y + 2)^2 = 4 - x^2;\ x^2 + (y + 2)^2 = 4 .$$



Отримали рівняння кола, центр якого міститься в точці $M_0(0; -2)$, а радіус $R = 2$. В умові задачі задана дуга OA цього кола. Використаємо параметричні рівняння цієї дуги: $x = 2\cos t; y = -2 + 2\sin t,\ \frac{\pi}{2} \le t \le \pi$.

Застосуємо формули (5) за умови, що $\gamma(x, y) = const$.

$$x_c = \frac{1}{L}\int_{OA} x dl ,\quad y_c = \frac{1}{L}\int_{OA} y dl ,$$

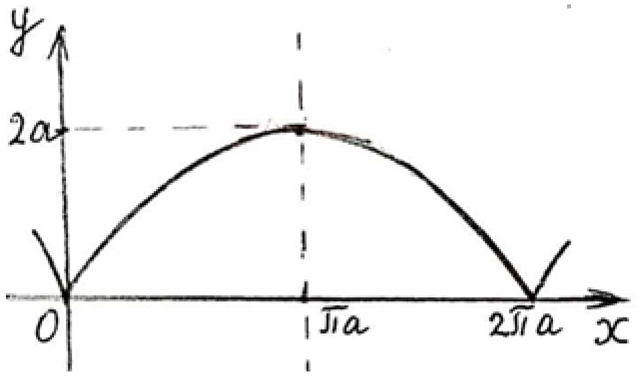
де L – довжина дуги OA. $L = \frac{1}{4}\cdot 4\pi = \pi$.

$$x_c = \frac{1}{\pi}\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} 2\cos t\sqrt{(-2\sin t)^2 + (2\cos t)^2}dt = \frac{4}{\pi}\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}\cos t dt = \frac{4}{\pi}\sin t\Big|_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} = -\frac{4}{\pi};$$

$$y_c = \frac{1}{\pi}\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}(-2 + 2\sin t)2dt = \frac{4}{\pi}\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}(\sin t - 1)dt = \frac{4}{\pi}(-\cos t - t)\Big|_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} = \frac{4}{\pi}\left(1 - \frac{\pi}{2}\right) = \frac{4}{\pi} - 2 .$$

Отже, центр маси даної лінії міститься в точці $C\left(-\frac{4}{\pi}; \frac{4}{\pi} - 2\right)$.

Приклад 9. Знайти координати центра маси однорідної матеріальної лінії – першої арки циклоїди $x = a(t - \sin t),\ y = a(1 - \cos t),\ 0 \le t \le 2\pi,\ a > 0$.



Розв'язання. Оскільки ця арка симетрична відносно прямої $x = \pi a$, то її центр маси лежить на цій прямій, тобто $x_c = \pi a$.

$y_c = \dfrac{1}{L}\int\limits_{AB} y\,dl$, де L – довжина даної арки.

$$L = \int\limits_{AB} dl = \int\limits_{t_0}^{t_1} \sqrt{\left(x'(t)\right)^2 + \left(y'(t)\right)} dt.$$

$$L = \int\limits_0^{2\pi} \sqrt{a^2(1-\cos t)^2 + a^2\sin^2 t}\,dt = a\int\limits_0^{2\pi} \sqrt{2(1-\cos t)}\,dt = 2a\int\limits_0^{2\pi} \sin\frac{t}{2}\,dt = 4a\left(-\cos\frac{t}{2}\right)\Bigg|_0^{2\pi} = 8a.$$

$$\int\limits_{AB} y\,dl = \int\limits_0^{2\pi} a(1-\cos t)\cdot 2a\sin\frac{t}{2}\,dt = 2a^2\left(\int\limits_0^{2\pi}\sin\frac{t}{2}\,dt - \int\limits_0^{2\pi}\sin\frac{t}{2}\cos t\,dt\right) =$$

$$= 2a^2\left(-2\cos\frac{t}{2}\Bigg|_0^{2\pi} - \frac{1}{2}\int\limits_0^{2\pi}\left(-\sin\frac{t}{2} + \sin\frac{3t}{2}\right)dt\right) = 2a^2\left(4 - \frac{1}{2}\left(2\cos\frac{t}{2} - \frac{2}{3}\cos\frac{3t}{2}\right)\Bigg|_0^{2\pi}\right) =$$

$$= 2a^2\left(4 - \frac{1}{2}\left(-4 + \frac{4}{3}\right)\right) = \frac{32a^2}{3}.$$

$y_c = \dfrac{32a^2}{3\cdot 8a} = \dfrac{4}{3}a$. Отже, центр маси даної арки міститься в точці $C\left(\pi a; \dfrac{4}{3}a\right)$.

Зауваження. При обчисленні інтеграла було використано формулу: $\sin\alpha\cos\beta = \dfrac{1}{2}\left(\sin(\alpha-\beta) + \sin(\alpha+\beta)\right)$.

Приклад 10. Знайти моменти інерції відносно координатних осей *Ox* та *Oy* частини однорідного кола $x = 3\cos t; y = 3\sin t$, яка лежить в першому квадранті $\left(\gamma(x,y) = 1\right)$.

Розв'язання. Застосуємо формули (6). Для даної частини кола значення параметра t задовольняє умову: $0 \le t \le \dfrac{\pi}{2}$. Очевидно, що $I_x = I_y$.

$$I_x = \int\limits_{AB} y^2 dl = \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} 9\sin^2 t\sqrt{(-3\sin t)^2 + (3\cos t)^2}\,dt = 27\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^2 t\,dt = \frac{27}{2}\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}(1-\cos 2t)\,dt =$$

$$= \frac{27}{2}\left(t - \frac{1}{2}\sin 2t\right)\Bigg|_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{27}{2}\cdot\frac{\pi}{2} = \frac{27\pi}{4}.$$

Тема: Криволінійні інтеграли ІІ-го роду

Криволінійні інтеграли 2-го роду $\int\limits_{L} P(x,y)dx + Q(x,y)dy$ зводяться до означених інтегралів. Якщо гладка крива AB задана рівняннями $x = x(t),\ \ y = y(t),\ \ (t_1 \le t \le t_2)$, то має місце формула:

$$\int\limits_{AB} P(x,y)dx + Q(x,y)dy = \int\limits_{t_1}^{t_2} \left[P\left(x(t), y(t)\right) x'(t) + Q\left(x(t), y(t)\right) y'(t) \right] dt. \qquad (1)$$

Якщо гладка крива задана рівнянням $y = f(x)\ (a \le x \le b)$, то формула (1) набуває вигляду:

$$\int\limits_{AB} P(x,y)dx + Q(x,y)dy = \int\limits_{a}^{b} \left[P\left(x, f(x)\right) + Q\left(x, f(x)\right) f'(x) \right] dx. \qquad (2)$$

Для випадку просторової гладкої кривої AB, заданої рівняннями $x = x(t),\ \ y = y(t)$, $z = z(t)\ (t_1 \le t \le t_2),$ має місце співвідношення:

$$\int\limits_{AB} P(x,y,z)dx + Q(x,y,z)dy + R(x,y,z)dz =$$
$$= \int\limits_{t_1}^{t_2} \left[P\left(x(t), y(t), z(t)\right) x'(t) + Q\left(x(t), y(t), z(t)\right) y'(t) + R\left(x(t), y(t), z(t)\right) z'(t) \right] dt. \qquad (3)$$

При зміні напряму інтегрування криволінійний інтеграл ІІ-го роду змінює свій знак на протилежний.

Якщо функції $P(x,y)$ та $Q(x,y)$ визначені і неперервні разом із своїми частинними похідними $\frac{\partial Q}{\partial x}$ та $\frac{\partial P}{\partial y}$ в замкненій однозв'язній області D, в якій виконується умова $\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}$, то в області D криволінійний інтеграл $\int\limits_{AB} P(x,y)dx + Q(x,y)dy$ не залежить від форми шляху інтегрування.

Умова $\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}$ є необхідною і достатньою умовою того, щоб вираз $Pdx + Qdy$ був повним диференціалом деякої функції $u\left(x,y\right)$. Функцію $u\left(x,y\right)$ можна знайти за її повним диференціалом, застосувавши формулу:

$$u\left(x,y\right) = \int\limits_{(x_0;y_0)}^{(x;y)} du + C = \int\limits_{(x_0;y_0)}^{(x;y)} Pdx + Qdy + C;\ \left(x_0; y_0\right) \in D.$$

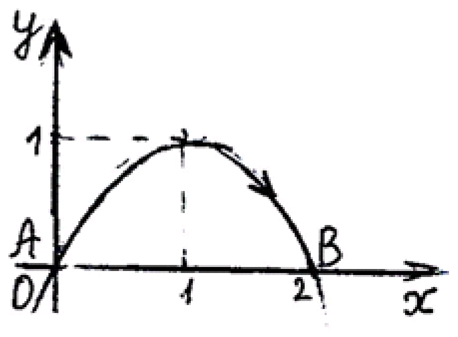
Приклад 1. Обчислити інтеграл $I = \int\limits_L (x^2 - 2xy)dx + (y^2 - 2xy)dy,$

де L – парабола $y = x^2 \quad (-1 \le x \le 1).$

Розв'язання. Використовуючи формулу (2), знаходимо:

$$I = \int\limits_{-1}^{1} \left[x^2 - 2x^3 + (x^4 - 2x^3)2x \right] dx = -\frac{14}{15}.$$

Приклад 2. Обчислити криволінійний інтеграл $\int\limits_{AB} ydx - \left(y + x^2\right)dy$, де AB – дуга параболи $y = 2x - x^2$, яка розміщена над віссю Ox і пробігається за рухом годинникової стрілки.

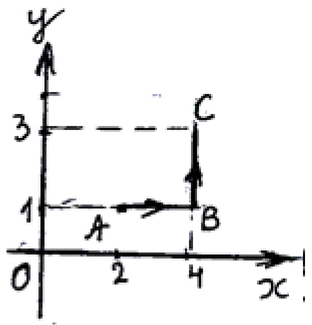


Розв'язання. Дана парабола перетинає вісь Ox в точках $A(0;0)$ та $B(2;0)$ (рис.1). Застосуємо формулу (2). Оскільки $y' = 2 - 2x$, то отримаємо:

$$\int\limits_{AB} ydx - \left(y + x^2\right)dy = \int\limits_0^2 \left(2x - x^2 - \left(2x - x^2 + x^2\right)\left(2 - 2x\right)\right)dx =$$

$$= \int\limits_0^2 \left(2x - x^2 - 4x + 4x^2\right)dx = \int\limits_0^2 \left(3x^2 - 2x\right)dx = \left(x^3 - x^2\right)\Big|_0^2 = 4.$$

Приклад 3. Обчислити $\int\limits_L \left(x^2 + 4xy^3\right)dx + \left(1 - x^2 y\right)dy$, де L – ламана ABC: $A(2;1), B(4;1), C(4;3)$.



Розв'язання. Ламана L складається з двох відрізків.

На відрізку AB: $y = 1,\ dy = 0,\ 2 \le x \le 4$;

на відрізку BC: $x = 4,\ dx = 0,\ 1 \le y \le 3$.

$$\int\limits_{AB} \left(x^2 + 4xy^3\right)dx + \left(1 - x^2 y\right)dy = \int\limits_2^4 \left(x^2 + 4x\right)dx = \left(\frac{x^3}{3} + 2x^2\right)\Bigg|_2^4 = \frac{128}{3};$$

$$\int\limits_{BC} \left(x^2 + 4xy^3\right)dx + \left(1 - x^2 y\right)dy = \int\limits_1^3 \left(1 - 16y\right)dy = \left(y - 8y^2\right)\Big|_1^3 = -62.$$

Отже, $\int\limits_L \left(x^2 + 4xy^3\right)dx + \left(1 - x^2 y\right)dy = \frac{128}{3} - 62 = -\frac{58}{3}.$

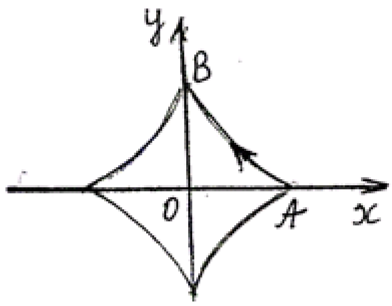
Приклад 4. Обчислити криволінійний інтеграл $\int\limits_L y^2dx + x^2dy$, де L – верхня половина еліпса $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$, яка пробігається за годинниковою стрілкою.

Розв'язання. Застосуємо параметричні рівняння еліпса $x = a\cos t,\ y = b\sin t$ і формулу (1). При вказаному напрямку на верхній половині еліпса параметр t буде зменшуватися від $t_1=\pi$ до $t_2=0$. Оскільки $x'(t) = -a\sin t,\ y'(t) = b\cos t$, то маємо

$$\int\limits_L y^2dx + x^2dy = \int\limits_\pi^0\left(-ab^2\sin^3 t + a^2b\cos^3 t\right)dt = ab^2\int\limits_\pi^0\left(1-\cos^2 t\right)d\left(\cos t\right) + a^2b\int\limits_\pi^0\left(1-\sin^2 t\right)d\left(\sin t\right) =$$

$$= ab^2\left(\cos t - \frac{\cos^3 t}{3}\right)\Bigg|_\pi^0 + a^2b\left(\sin t - \frac{\sin^3 t}{3}\right)\Bigg|_\pi^0 = ab^2\left(2-\frac{2}{3}\right) + a^2b\cdot 0 = \frac{4}{3}ab^2.$$

Приклад 5. Обчислити $\int\limits_{AB}\frac{x^2dy - y^2dx}{x^{\frac{5}{3}}+y^{\frac{5}{3}}}$, де AB – дуга астроїди $x = a\cos^3 t,\ y = a\sin^3 t$ від точки від точки $A(a;0)$ до $B(0;a)$, $a>0$.



Розв'язання. Точці A відповідає значення параметра $t_1 = 0$, точці B – значення параметра $t_2=\frac{\pi}{2}$.

Знайдемо похідні $x'(t),\ y'(t)$ і застосуємо формулу (1).

$x'(t) = -3a\cos^2 t\sin t,\ y'(t) = 3a\sin^2 t\cos t$.

$$\int\limits_{AB}\frac{x^2dy - y^2dx}{x^{\frac{5}{3}}+y^{\frac{5}{3}}} = \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{3a^3\left(\cos^7 t\,\sin^2 t + \sin^7 t\,\cos^2 t\right)}{a^{\frac{5}{3}}\left(\cos^5 t + \sin^5 t\right)}dt = 3a^{\frac{4}{3}}\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^2 t\cos^2 t\,dt =$$

$$= \frac{3}{4}a^{\frac{4}{3}}\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^2 2t\,dt = \frac{3}{8}a^{\frac{4}{3}}\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}\left(1-\cos 4t\right)dt = \frac{3}{8}a^{\frac{4}{3}}\left(t - \frac{1}{4}\sin 4t\right)\Bigg|_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{3\pi a^{\frac{4}{3}}}{16}.$$

Приклад 6. Обчислити інтеграл $I = \int\limits_L (2a-y)dx + xdy,$ де L – арка циклоїди $x = a(t-\sin t),\ \ y = a(1-\cos t)\ \ (0\le t\le 2\pi).$

Розв'язання. Використовуючи формулу (1) одержимо:

$$I = \int\limits_0^{2\pi}\left[\left(2a - a(1-\cos t)\right)a(1-\cos t) + a(t-\sin t)a\sin t\right]dt = a^2\int\limits_0^{2\pi} t\sin t dt.$$

Обчислюючи останній інтеграл за частинами, остаточно знаходимо:

$$I = a^2 \left(-t\cos t \Big|_0^{2\pi} + \sin t \Big|_0^{2\pi} \right) = -2\pi a^2.$$

Приклад 7. Обчислити криволінійний інтеграл $\int\limits_{AB} z^2dx + x^2dy + ydz$, де AB – відрізок прямої від точки $A(1;-1;2)$ до точки $B(2;3;4)$.

Розв'язання. Складемо параметричні рівняння прямої AB, використавши рівняння прямої, яка проходить через дві дані точки:

$$\frac{x-x_1}{x_2-x_1}=\frac{y-y_1}{y_2-y_1}=\frac{z-z_1}{z_2-z_1}; \quad \frac{x-1}{1}=\frac{y+1}{4}=\frac{z-2}{2}=t; \quad x=t+1;\ y=4t-1;\ z=2t+2.$$

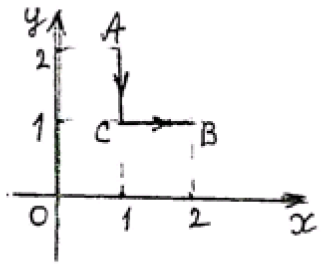
Точці A відповідає значення параметра $t_1=0$, точці B – значення параметра $t_2=1$.

Застосуємо формулу (3). Оскільки $x'(t)=1;\ y'(t)=4;\ z'(t)=2$, то одержимо:

$$\int\limits_{AB} z^2dx + x^2dy + ydz = \int\limits_0^1 \Big(\big(4t^2+8t+4\big)\cdot 1 + \big(t^2+2t+1\big)\cdot 4 + \big(4t-1\big)\cdot 2\Big)dt =$$

$$= \int\limits_0^1 \big(8t^2+24t+6\big)dt = \left(8\frac{t^3}{3}+12t^2+6t\right)\Bigg|_0^1 = \frac{62}{3}.$$

Приклад 8. Обчислити криволінійний інтеграл $I = \int\limits_{(1;2)}^{(2;1)} \frac{ydx - xdy}{y^2}$.



Розв'язання. Даний інтеграл не залежить від форми шляху інтегрування тому, що справджується рівність

$$\frac{\partial P}{\partial y}=\frac{\partial Q}{\partial x}: \quad P=\frac{1}{y};\ Q=-\frac{x}{y^2}; \quad \frac{\partial P}{\partial y}=-\frac{1}{y^2}; \quad \frac{\partial Q}{\partial x}=-\frac{1}{y^2}.$$

Виконаємо інтегрування по ламаній ACB.

На відрізку AC: $x=1,\ dx=0,\ 2\ge y\ge 1;$

на відрізку CB: $y=1,\ dy=0,\ 1\le x\le 2$.

Отже, $I=-\int\limits_2^1 \frac{dy}{y^2}+\int\limits_1^2 dx = \frac{1}{y}\Bigg|_2^1 + x\Big|_1^2 = \frac{3}{2}$.

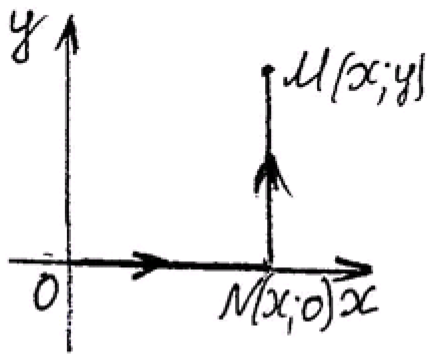
Приклад 9. Впевнитись, що вираз $\left(3x^2-2xy+y^2\right)dx-\left(x^2-2xy+3y^2\right)dy$ є повним диференціалом деякої функції $u\left(x,y\right)$, і знайти цю функцію.

Розв'язання. $P\left(x,y\right)=3x^2-2xy+y^2;\quad Q\left(x,y\right)=-x^2+2xy-3y^2$;

$$\frac{\partial P}{\partial y}=-2x+2y;\quad \frac{\partial Q}{\partial x}=-2x+2y.$$

Функції P,Q та частинні похідні $\frac{\partial P}{\partial y},\ \frac{\partial Q}{\partial x}$ неперервні на всій площині і виконується умова $\frac{\partial P}{\partial y}=\frac{\partial Q}{\partial x}$. Отже, даний вираз є повним диференціалом деякої функції $u\left(x,y\right)$:

$$u\left(x,y\right)=\int\limits_{(0;0)}^{(x;y)}du+C.$$



Виконаємо інтегрування по ламаній ONM.

На відрізку ON: $y=0,\ dy=0$; на відрізку NM: $x=const,\ dx=0$.

$$u\left(x,y\right)=\int\limits_0^x 3x^2dx-\int\limits_0^y\left(x^2-2xy+3y^2\right)dy+C=$$
$$=x^3\Big|_0^x-\left(x^2y-xy^2+y^3\right)\Big|_0^y+C.$$

Отже, $u\left(x,y\right)=x^3-x^2y+xy^2-y^3+C$.

Тема: Поверхневі інтеграли І-го роду та їхнє застосування

Нехай поверхня σ задана рівнянням $z = z(x, y)$, де функція $z(x, y)$ і її частинні похідні $z'_x(x, y),\ z'_y(x, y)$ неперервні в замкненій області D – проекції σ на площину xOy, а функція $f(x, y, z)$ – неперервна на поверхні σ. Тоді для обчислення поверхневого інтеграла І-го роду $\iint\limits_{\sigma} f(x, y, z)d\sigma$ має місце формула:

$$\iint\limits_{\sigma} f(x, y, z)d\sigma = \iint\limits_{D} f\left[x, y, z(x, y)\right]\sqrt{1 + (z'_x)^2 + (z'_y)^2}\,dxdy. \qquad (1)$$

Бувають випадки, що рівняння поверхні не можна записати у вигляді $z = z(x, y)$, але можна записати у вигляді $y = y(x, z)$ або $x = x(y, z)$. Тоді будемо мати відповідно формули:

$$\iint\limits_{\sigma} f(x, y, z)d\sigma = \iint\limits_{D'} f\left[x, y(x, z), z\right]\sqrt{1 + (y'_x)^2 + (y'_z)^2}\,dxdz, \qquad (1')$$

де D' – проекція поверхні σ на площину xOz;

$$\iint\limits_{\sigma} f(x, y, z)d\sigma = \iint\limits_{D''} f\left[x(y, z), y, z\right]\sqrt{1 + (x'_y)^2 + (x'_z)^2}\,dydz, \qquad (1'')$$

де D'' – проекція поверхні σ на площину yOz.

За допомогою поверхневого інтеграла І-го роду можна визначити масу, статичні моменти, координати центра маси, моменти інерції для матеріальної поверхні (оболонки) з відомою густиною розподілу маси $\gamma(x, y, z)$.

Наведемо формули, за допомогою яких можна обчислювати перераховані вище величини.

а) маса поверхні знаходиться за формулою

$$m = \iint\limits_{\sigma} \gamma(x, y, z)d\sigma. \qquad (2)$$

б) моменти інерції відносно осей координат обчислюються за допомогою формул:

$$I_x = \iint\limits_{\sigma} (y^2 + z^2)\gamma(x, y, z)d\sigma, \quad I_y = \iint\limits_{\sigma} (x^2 + z^2)\gamma(x, y, z)d\sigma,$$

$$I_z = \iint\limits_{\sigma} (x^2 + y^2)\gamma(x, y, z)d\sigma, \qquad (3)$$

в) для знаходження статичних моментів відносно координатних площин маємо формули:

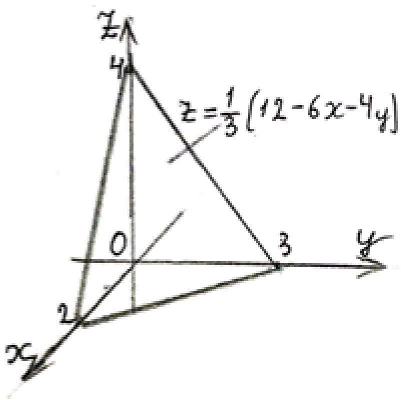
$$M_{xy} = \iint\limits_{\sigma} z\gamma(x, y, z)d\sigma,\ M_{yz} = \iint\limits_{\sigma} x\gamma(x, y, z)d\sigma,\ M_{zx} = \iint\limits_{\sigma} y\gamma(x, y, z)d\sigma, \qquad (4)$$

г) координати центра маси поверхні визначаються співвідношеннями:

$$x_c = \frac{M_{yz}}{m}, \qquad y_c = \frac{M_{zx}}{m}, \qquad z_c = \frac{M_{xy}}{m}. \qquad (5)$$

Приклад 1. Обчислити поверхневий інтеграл $\iint\limits_{\sigma}\left(z+3x+\frac{4}{3}y\right)d\sigma$, де σ – частина площини $6x+4y+3z=12$, яка розміщена в першому октанті.

Розв'язання. Рівняння площини запишемо у вигляді $z=\frac{1}{3}(12-6x-4y)$. Частина цієї площини σ проектується на площину Oxy в трикутник, який обмежений прямими $x=0,\ y=0,\ 3x+2y=6$. Застосуємо формулу (1). Знаходимо:



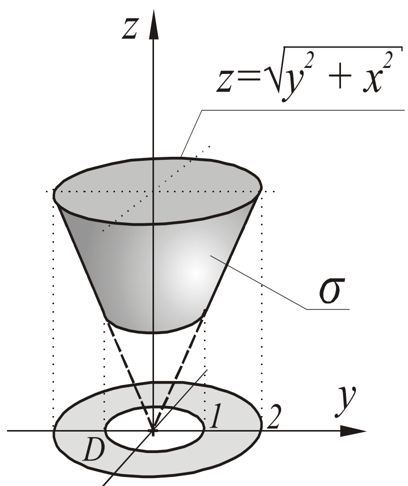
$$z'_x=-2;\ z'_y=-\frac{4}{3}.$$

$$\iint\limits_{\sigma}\left(z+3x+\frac{4}{3}y\right)d\sigma=\iint\limits_{D}\left(\frac{1}{3}(12-6x-4y)+3x+\frac{4}{3}y\right)\sqrt{\frac{61}{9}}dxdy=$$

$$=\frac{\sqrt{61}}{3}\iint\limits_{D}(4+x)dxdy=\frac{\sqrt{61}}{3}\int\limits_{0}^{2}(4+x)dx\int\limits_{0}^{\frac{3}{2}(2-x)}dy=$$

$$\frac{\sqrt{61}}{2}\int\limits_{0}^{2}(4+x)(2-x)dx=\frac{\sqrt{61}}{2}\int\limits_{0}^{2}\left(8-2x-x^2\right)dx=\frac{\sqrt{61}}{2}\left(8x-x^2-\frac{x^3}{3}\right)\Bigg|_0^2=\frac{\sqrt{61}}{2}\left(16-4-\frac{8}{3}\right)=\frac{14\sqrt{61}}{3}.$$

Приклад 2. Обчислити інтеграл $I=\iint\limits_{\sigma}zd\sigma$ по частині поверхні конуса



$$z=\sqrt{x^2+y^2},\ 1\le z\le 2.$$

Розв'язання. Для обчислення інтеграла використовуємо формулу (1).

В нашому випадку $z(x,y)=\sqrt{x^2+y^2}$,

$$z'_x=\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}},\quad z'_y=\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}.$$

Поверхня σ проектується на площину xOy в область D, яка є кільцем $1\le x^2+y^2\le 4$.

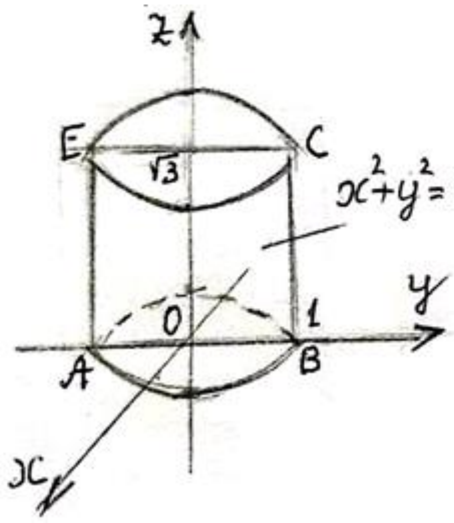
Таким чином, одержуємо:

$$I=\iint\limits_{\sigma}zd\sigma=\iint\limits_{D}\sqrt{x^2+y^2}\cdot\sqrt{1+\frac{x^2}{x^2+y^2}+\frac{y^2}{x^2+y^2}}dxdy=\sqrt{2}\iint\limits_{D}\sqrt{x^2+y^2}dxdy.$$

Перейдемо в останньому інтегралі до полярних координат і знайдемо

$$I=\sqrt{2}\int\limits_{0}^{2\pi}d\varphi\int\limits_{1}^{2}\rho^2d\rho=\sqrt{2}\int\limits_{0}^{2\pi}\frac{\rho^3}{3}\Bigg|_1^2d\varphi=\frac{7}{3}\sqrt{2}\cdot 2\pi.$$

Приклад 3. Обчислити $\iint\limits_{\sigma} \dfrac{d\sigma}{x^2+y^2+z^2}$, де σ – циліндр $x^2+y^2=1$, обмежений площинами $z=0,\ z=\sqrt{3}$.



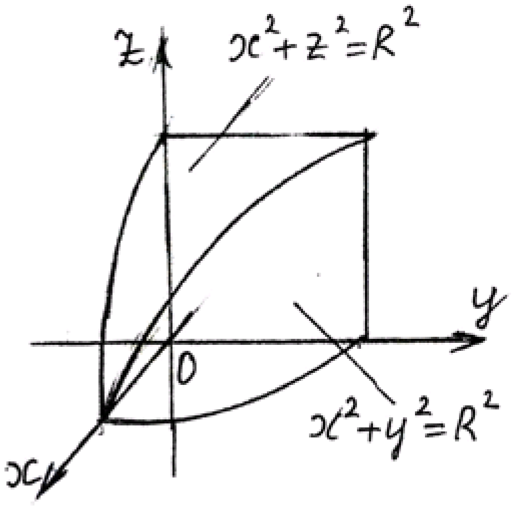
Розв'язання. Спроектуємо поверхню σ на площину Oyz. Обидві частини циліндра $x=\sqrt{1-y^2}$ та $x=-\sqrt{1-y^2}$ проектуються в прямокутник $ABCE$ (позначимо його D). Поверхневі інтеграли по площі поверхні від заданої функції по цих частинах циліндра рівні між собою.

Застосуємо формулу ($1''$). Знаходимо: $x'_y=-\dfrac{y}{\sqrt{1-y^2}}$; $x'_z=0$ (ми розглядаємо частину циліндра $x=\sqrt{1-y^2}$).

$$\iint\limits_{\sigma}\frac{d\sigma}{x^2+y^2+z^2}=2\iint\limits_{D}\frac{1}{1+z^2}\sqrt{1+\left(\frac{-y}{\sqrt{1-y^2}}\right)^2}\,dydz=2\iint\limits_{D}\frac{dydz}{\left(1+z^2\right)\sqrt{1-y^2}}=$$

$$=2\int\limits_{-1}^{1}\frac{dy}{\sqrt{1-y^2}}\int\limits_{0}^{\sqrt{3}}\frac{dz}{z^2+1}=2\arcsin y\Big|_{-1}^{1}\cdot arctgz\Big|_{0}^{\sqrt{3}}=2\left(\frac{\pi}{2}-\left(-\frac{\pi}{2}\right)\right)\cdot\frac{\pi}{3}=\frac{2\pi^2}{3}.$$

Приклад 4. Знайти площу частини циліндра $x^2+z^2=R^2$, яка міститься всередині циліндра $x^2+y^2=R^2$.



Розв'язання. Площу P поверхні σ можна обчислити за формулою $P=\iint\limits_{\sigma}d\sigma$.

На рисунку зображено $\dfrac{1}{8}$ даної частини поверхні $x^2+z^2=R^2$. Вона проектується на площину Oxy в круговий сектор, який обмежений осями координат і дугою кола $x^2+y^2=R^2$.

Знаходимо: $z=\sqrt{R^2-x^2}$; $z'_x=\dfrac{-x}{\sqrt{R^2-x^2}}$; $z'_y=0$.

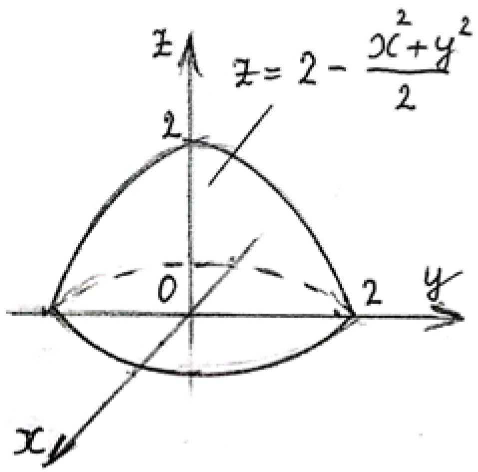
$$d\sigma=\sqrt{1+\left(\frac{-x}{\sqrt{R^2-x^2}}\right)^2}dxdy=\frac{Rdxdy}{\sqrt{R^2-x^2}};$$

$$\frac{1}{8}P=\iint_D\frac{Rdxdy}{\sqrt{R^2-x^2}}=R\int_0^R dx\int_0^{\sqrt{R^2-x^2}}\frac{dy}{\sqrt{R^2-x^2}}=R\int_0^R\frac{dx}{\sqrt{R^2-x^2}}\left(y\Big|_0^{\sqrt{R^2-x^2}}\right)=R\int_0^R dx=R^2.$$

Отже $P=8R^2$.

Приклад 5. Знайти площу частини параболоїда $z=2-\dfrac{x^2+y^2}{2}$, розміщеної над площиною Oxy.

Розв'язання. Застосуємо формулу $P=\iint\limits_\sigma d\sigma$.



Проекцією D поверхні σ на площину Oxy є круг

$$x^2+y^2\le 4.$$

Знаходимо $z'_x=-x;\ z'_y=-y$.

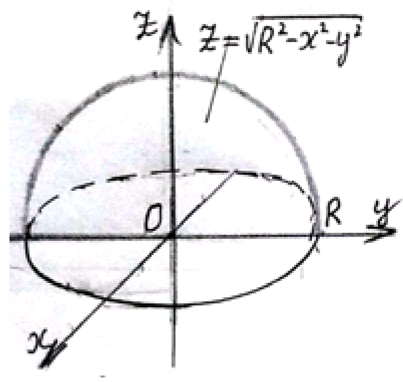
$$P=\iint_D\sqrt{1+x^2+y^2}dxdy.$$

Перейдемо до полярних координат.

$$P=\iint_D\sqrt{1+\rho^2}\rho\,d\rho\,d\varphi=\int_0^{2\pi}d\varphi\int_0^2\sqrt{1+\rho^2}\ \rho\,d\rho=$$

$$=2\pi\frac{1}{2}\int_0^2\left(1+\rho^2\right)^{\frac{1}{2}}d\left(1+\rho^2\right)=\pi\frac{2\left(1+\rho^2\right)^{\frac{3}{2}}}{3}\Bigg|_0^2=\frac{2\pi}{3}\left(5\sqrt{5}-1\right).$$

Приклад 6. Знайти масу півсфери $z=\sqrt{R^2-x^2-y^2}$, якщо поверхнева густина $\gamma(x,y,z)=x^2y^2$.



Розв'язання. Застосуємо формулу (2). Проекцією даної поверхні на площину Oxy є круг $x^2+y^2\le R^2$.

Знаходимо $z'_x=\dfrac{-x}{\sqrt{R^2-x^2-y^2}}$; $z'_y=\dfrac{-y}{\sqrt{R^2-x^2-y^2}}$;

$$d\sigma=\sqrt{1+\frac{x^2}{R^2-x^2-y^2}+\frac{y^2}{R^2-x^2-y^2}}dxdy=\frac{Rdxdy}{\sqrt{R^2-x^2-y^2}}.$$

$$m=\iint_{\sigma} x^2y^2 d\sigma=\iint_{D} x^2y^2\,\frac{R}{\sqrt{R^2-x^2-y^2}}\,dxdy\,.$$

Перейдемо до полярних координат: $x=\rho\cos\varphi,\;\; y=\rho\sin\varphi$.

$$m=R\iint_{D}\frac{\rho^5\cos^2\varphi\,\sin^2\varphi}{\sqrt{R^2-\rho^2}}\,d\rho\, d\varphi=R\int_0^{2\pi}\cos^2\varphi\,\sin^2\varphi\, d\varphi\int_0^R\frac{\rho^5 d\rho}{\sqrt{R^2-\rho^2}}=\frac{R}{4}\int_0^{2\pi}\sin^2 2\varphi\, d\varphi\int_0^R\frac{\rho^5 d\rho}{\sqrt{R^2-\rho^2}}\,.$$

Обчислимо отримані визначені інтеграли.

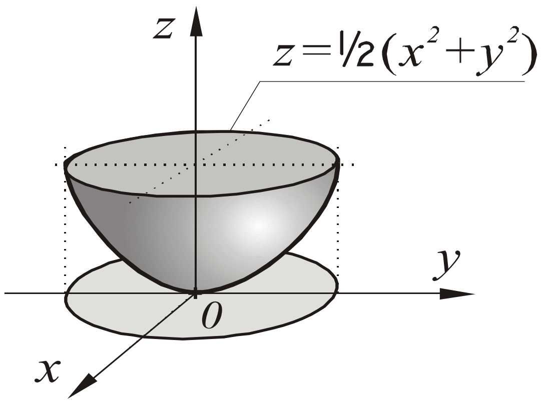
$$\int_0^{2\pi}\sin^2 2\varphi\, d\varphi=\frac{1}{2}\int_0^{2\pi}\left(1-\cos 4\varphi\right)d\varphi=\frac{1}{2}\left(\varphi-\frac{1}{4}\sin 4\varphi\right)\Big|_0^{2\pi}=\pi\,;$$

$$\int_0^R\frac{\rho^5 d\rho}{\sqrt{R^2-\rho^2}}=\begin{bmatrix}R^2-\rho^2=t^2;\\ -\rho d\rho=tdt;\\ \rho^2=R^2-t^2;\\ t_1=R;\quad t_2=0\end{bmatrix}=-\int_R^0\left(R^2-t^2\right)^2dt=\int_0^R\left(R^4-2R^2t^2+t^4\right)dt=$$

$$=\left(R^4t-2R^2\frac{t^3}{3}+\frac{t^5}{5}\right)\Big|_0^R=R^5-\frac{2}{3}R^5+\frac{R^5}{5}=\frac{8}{15}R^5.$$

Отже, $\;m=\dfrac{R}{4}\cdot\pi\cdot\dfrac{8}{15}R^5=\dfrac{2\pi R^6}{15}$.

Приклад 7. Знайти масу параболічної оболонки $z=\dfrac{1}{2}(x^2+y^2)\;\;(0\le z\le 1)$, густина якої змінюється за законом $\gamma = z$.



Розв'язання. Використаємо формулу (2), а потім – формулу (1). Одержимо:

$$m=\iint_{\sigma} zd\sigma=\frac{1}{2}\iint_{D}(x^2+y^2)\sqrt{1+x^2+y^2}\,dxdy\,.$$

Тут D – круг з центром в початку координат радіуса $\sqrt{2}.$

Перейдемо в останньому інтегралі до полярних координат:

$$x=\rho\cos\varphi\,,\;\; y=\rho\sin\varphi,\;\; dxdy=\rho d\rho d\varphi\quad (0\le\varphi\le 2\pi, 0\le\rho\le\sqrt{2}).$$

Тоді будемо мати: $m=\dfrac{1}{2}\displaystyle\int_0^{2\pi}d\varphi\int_0^{\sqrt{2}}\rho^3\sqrt{1+\rho^2}\,d\rho.$

Зробимо заміну змінної: $1+\rho^2=t^2,\;\;\rho d\rho=tdt\;\;(1\le t\le\sqrt{3})$. Отримаємо:

$$m=\frac{1}{2}\int_0^{2\pi}d\varphi\int_1^{\sqrt{3}}t^2(t^2-1)dt=\frac{1}{2}\int_0^{2\pi}\left(\frac{t^5}{5}-\frac{t^3}{3}\right)\Big|_1^{\sqrt{3}}d\varphi=\frac{2(6\sqrt{3}+1)}{15}\pi.$$

Приклад 8. Обчислити момент інерції відносно осі Oz оболонки, що розглядалася в прикладі 7.

Розв'язання. Використаємо третю з формул (3) і формулу (1). Будемо мати:

$$I_z = \iint_\sigma (x^2+y^2) z d\sigma = \frac{1}{2}\iint_D (x^2+y^2)^2 \ \sqrt{1+x^2+y^2}dxdy = \frac{1}{2}\int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\sqrt{2}} \rho^5 \sqrt{1+\rho^2} d\rho$$

(ми знову перейшли до полярних координат).

Як і в попередньому прикладі, робимо заміну змінної: $1+\rho^2 = t^2$. Тоді одержимо:

$$I_z = \frac{1}{2}\int_0^{2\pi} d\varphi \int_1^{\sqrt{3}} t^2 (t^2-1)^2 dt = \frac{1}{2}\int_0^{2\pi} d\varphi \int_1^{\sqrt{3}} (t^6 - 2t^4 + t^2) dt = \frac{1}{2}\int_0^{2\pi} \left(\frac{1}{7}t^7 - \frac{2}{5}t^5 + \frac{1}{3}t^3 \right)\Bigg|_1^{\sqrt{3}} d\varphi =$$

$$= \frac{4\pi(33\sqrt{3}-2)}{105}.$$

Приклад 9. Обчислити координати центра маси оболонки, яка розглядалася в прикладі 7.

Розв'язання. У зв'язку із симетрією оболонки відносно осі Oz та із виглядом формули для її густини, маємо: $x_c = y_c = 0.$ Використовуючи останню з формул (5), беручи до уваги при цьому формули (4) і (2), одержуємо:

$$z_c = \frac{1}{m}\iint_\sigma z^2 d\sigma = \frac{1}{m}\cdot\frac{1}{4}\iint_D (x^2+y^2)^2 \ \sqrt{1+x^2+y^2}dxdy.$$

В прикладі 7 ми обчислили масу m оболонки, а в прикладі 8 – інтеграл, який фігурує в останній формулі. Отже, отримаємо:

$$z_c = \frac{2\pi(33\sqrt{3}-2)15}{2\pi(6\sqrt{3}+1)\cdot 105} = \frac{33\sqrt{3}-2}{7(6\sqrt{3}+1)}.$$

Тема: Поверхневі інтеграли другого роду. Формула Остроградського – Гаусса. Формула Стокса. Потік вектора через поверхню.

Поверхневі інтеграли другого роду обчислюються за допомогою подвійних інтегралів.

Нехай σ – гладка двостороння поверхня, на якій вибрана одна з двох сторін за допомогою нормалі $\vec{n}$. Нехай α, β, γ – кути, які ця нормаль $\vec{n}$ утворює з координатними осями Ox, Oy, Oz. Якщо поверхня σ задана рівнянням $z = z(x, y)$, область D_{xy} є проекцією поверхні σ на площину Oxy і функція $R(x, y, z)$ неперервна на поверхні σ, то справджується формула

$$\iint_{\sigma} R(x, y, z)\,dxdy = \pm\iint_{D_{xy}} R(x, y, z(x, y))\,dxdy\,, \qquad (1)$$

де знак «плюс» беремо тоді, коли нормаль до поверхні утворює з віссю Oz гострий кут, а знак «мінус» – коли тупий кут.

Аналогічно

$$\iint_{\sigma} Q(x, y, z)\,dxdz = \pm\iint_{D_{xz}} Q(x, y(x, z), z)\,dxdz\,; \qquad (2)$$

$$\iint_{\sigma} P(x, y, z)\,dydz = \pm\iint_{D_{yz}} P(x(y, z), y, z)\,dydz\,. \qquad (3)$$

У формулі (2) гладка поверхня σ задана рівнянням $y = y(x, z)$, а у формулі (3) – рівнянням $x = x(y, z)$. Знак «плюс» беремо у цих формулах тоді, коли нормаль до поверхні утворює відповідно з віссю Oy, з віссю Ox гострий кут, а знак «мінус» – коли тупий кут; D_{xz}, D_{yz} – проекції поверхні σ на площини Oxz та Oyz відповідно.

Зв'язок між поверхневими інтегралами першого та другого роду:

$$\iint_{\sigma} Pdydz + Qdxdz + Rdxdy = \iint_{\sigma} (P\cos\alpha + Q\cos\beta + R\cos\gamma)\,d\sigma\,, \qquad (4)$$

де α, β, γ – кути між нормаллю $\vec{n}$ до поверхні σ та осями координат Ox, Oy, Oz відповідно.

Формула Остроградського – Гаусса встановлює зв'язок між поверхневим інтегралом другого роду по замкненій поверхні і потрійним інтегралом по просторовій області, обмеженій цією поверхнею: якщо функції $P(x, y, z)$, $Q(x, y, z)$, $R(x, y, z)$ неперервні разом зі своїми частинними похідними $\frac{\partial P}{\partial x}, \frac{\partial Q}{\partial y}, \frac{\partial R}{\partial z}$ в області G, обмеженій замкненою поверхнею σ, то справджується формула:

$$\iiint\limits_G \left(\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z} \right) dxdydz = \iint\limits_\sigma Pdydz + Qdxdz + Rdxdy, \tag{5}$$

причому інтегрування в поверхневому інтегралі виконується по зовнішній стороні поверхні σ.

Формула Стокса встановлює зв'язок між поверхневим інтегралом другого роду по поверхні σ та криволінійним інтегралом другого роду по замкненому контуру L, який обмежує цю поверхню. Напрям обходу контура L і сторона поверхні σ мають бути узгоджені за таким правилом: при обході контура L в даному напрямку вибрана сторона поверхні σ повинна бути зліва. Якщо функції $P(x, y, z)$, $Q(x, y, z)$, $R(x, y, z)$ та їхні частинні похідні першого порядку неперервні на поверхні σ, обмеженій замкненим контуром L, то справджується формула:

$$\int\limits_L Pdx + Qdy + Rdz = \iint\limits_\sigma \left(\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z} \right) dydz + \left(\frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x} \right) dxdz + \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dxdy. \tag{6}$$

Потоком вектора $\vec{F}(x, y, z)$ (або потоком векторного поля $\vec{F}(x, y, z)$) через поверхню σ називається поверхневий інтеграл другого роду по поверхні σ:

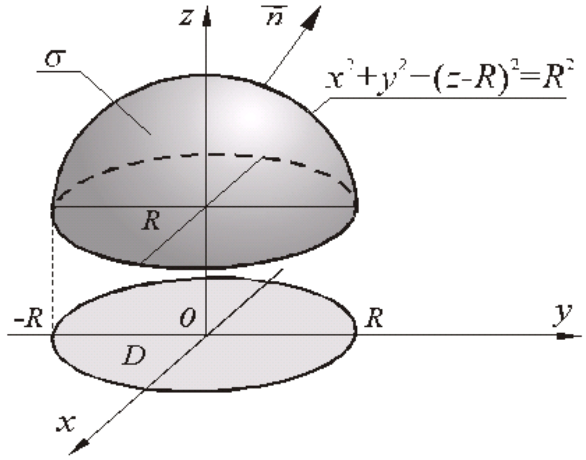
$$П = \iint\limits_\sigma P(x, y, z)dydz + Q(x, y, z)dxdz + R(x, y, z)dxdy, \tag{7}$$

де $P(x, y, z)$, $Q(x, y, z)$, $R(x, y, z)$ – проекції вектора $\vec{F}(x, y, z)$ на координатні осі.

Циркуляцією векторного поля $\vec{F}(x, y, z)$ вздовж замкненого контура L називається криволінійний інтеграл другого роду

$$Ц = \int\limits_L P(x, y, z)dx + Q(x, y, z)dy + R(x, y, z)dz. \tag{8}$$

Приклад 1. Обчислити інтеграл $I=\iint\limits_{\sigma}(z-R)^2dxdy$ по зовнішній стороні півсфери $x^2+y^2+z^2=2Rz,\ R<z<2R.$



Розв'язання. Перетворимо рівняння поверхні, до вигляду $x^2+y^2+(z-R)^2=R^2.$ Звідси отримаємо рівняння для даної півсфери:

$$z=R+\sqrt{R^2-x^2-y^2}.$$

Тому за формулою (1) будемо мати:

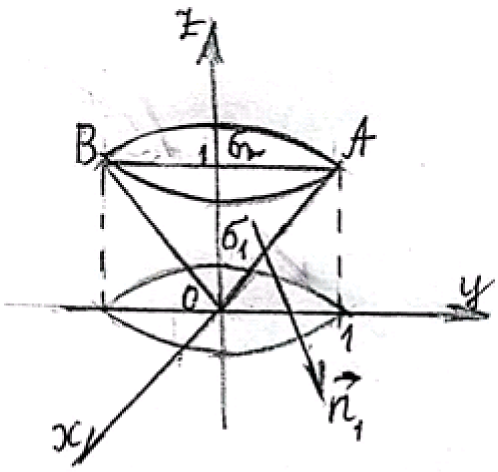
$$I=\iint\limits_{\sigma}(z-R)^2dxdy=\iint\limits_{D}(R^2-x^2-y^2)dxdy,$$

де область D – круг $x^2+y^2\le R^2.$

Перейдемо до полярних координат, покладаючи $x=\rho\cos\varphi,$ $y=\rho\sin\varphi,$ $dxdy=\rho d\rho d\varphi$ $(0\le\varphi\le 2\pi; 0\le\rho\le R)$, одержуємо:

$$I=\int\limits_0^{2\pi}d\varphi\int\limits_0^R(R^2-\rho^2)\rho d\rho=-\frac{1}{2}\int\limits_0^{2\pi}d\varphi\int\limits_0^R(R^2-\rho^2)d(R^2-\rho^2)=-\frac{1}{4}\int\limits_0^{2\pi}(R^2-\rho^2)^2\Big|_0^R d\varphi=\frac{\pi R^4}{2}.$$

Приклад 2. Обчислити поверхневий інтеграл другого роду $I=\iint\limits_{\sigma}x^2dydz+z^2dxdy$ по зовнішній стороні частини конуса $z^2=x^2+y^2$, $0\le z\le 1$.



Розв'язання. $I=\iint\limits_{\sigma}x^2dydz+\iint\limits_{\sigma}z^2dxdy$. Нехай D_{yz}, D_{xy} – проекції заданої поверхні на координатні площини Oyz, Oxy відповідно. D_{yz} – це трикутник OAB, а D_{xy} – це круг $x^2+y^2\le 1$.

$\iint\limits_{\sigma}x^2dydz=\iint\limits_{\sigma_1}x^2dydz+\iint\limits_{\sigma_2}x^2dydz$. Рівняння поверхні σ_1 має вигляд $x=\sqrt{z^2-y^2}$, а рівняння поверхні σ_2 таке: $x=-\sqrt{z^2-y^2}$.

Нормаль $\vec{n}_1$ до зовнішньої сторони поверхні σ_1 утворює з віссю Ox гострий кут, а нормаль $\vec{n}_2$ до зовнішньої сторони поверхні σ_2 утворює з віссю Ox тупий кут. Тому отримаємо:

$$\iint\limits_{\sigma} x^2 dydz = \iint\limits_{D_{yz}} \left(\sqrt{z^2-y^2}\right)^2 dydz - \iint\limits_{D_{yz}} \left(-\sqrt{z^2-y^2}\right)^2 dydz =$$

$$= \iint\limits_{D_{yz}} \left(z^2-y^2\right) dydz - \iint\limits_{D_{yz}} \left(z^2-y^2\right) dydz = 0$$

$$\iint\limits_{\sigma} z^2 dxdy = -\iint\limits_{D_{xy}} \left(x^2+y^2\right) dxdy .$$

Знак «–» поставлено тому, що нормаль $\vec{n}$ до зовнішньої сторони поверхні σ утворює з віссю Oz тупий кут.

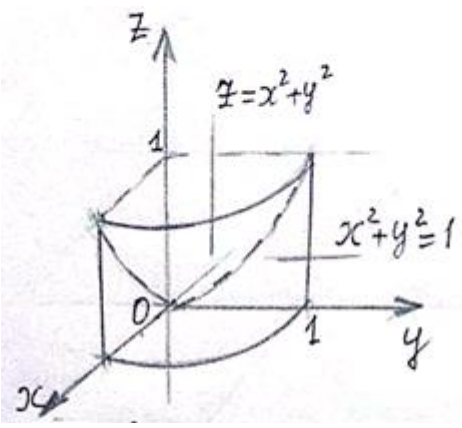
Перейдемо до полярних координат: $x=\rho\cos\varphi,\ y=\rho\sin\varphi$.

Отримаємо:

$$\iint\limits_{\sigma} z^2 dxdy = -\iint\limits_{D_{xy}} \rho^2 \cdot \rho\, d\rho d\varphi = -\int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^1 \rho^3 d\rho = -2\pi \cdot \left.\frac{\rho^4}{4}\right|_0^1 = -\frac{\pi}{2} .$$

Отже, $I = 0 - \frac{\pi}{2} = -\frac{\pi}{2}$.

Приклад 3. За допомогою формули Остроградського – Гаусса обчислити поверхневий інтеграл $I = \iint\limits_{\sigma} xzdydz + x^2ydxdz + y^2zdxdy$, де σ – зовнішня сторона поверхні, що міститься в першому октанті і складається з параболоїда обертання $z=x^2+y^2$, циліндра $x^2+y^2=1$ та координатних площин.



Розв'язання. Задана поверхня σ замкнена і обмежує просторову область G. Застосуємо формулу (5).

$$P(x,y,z) = xz;\ Q(x,y,z) = x^2y;\ R(x,y,z) = y^2z;$$

$$\frac{\partial P}{\partial x} = z;\ \frac{\partial Q}{\partial y} = x^2;\ \frac{\partial R}{\partial z} = y^2 .$$

$$I = \iiint\limits_{G} \left(z + x^2 + y^2\right) dxdydz .$$

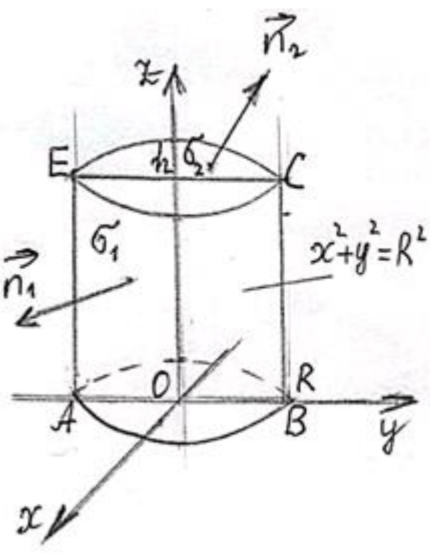
Перейдемо до циліндричних координат: $x=\rho\cos\varphi,\ y=\rho\sin\varphi,\ z=z$. Рівняння параболоїда набуває вигляду $z=\rho^2$, а рівняння циліндра буде таким: $\rho=1$.

$$I=\iiint\limits_{G}\left(z+\rho^2\right)\rho d\rho d\varphi dz=\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}d\varphi\int\limits_0^1\rho d\rho\int\limits_0^{\rho^2}\left(z+\rho^2\right)dz=\frac{\pi}{2}\int\limits_0^1\rho\left(\frac{z^2}{2}+\rho^2 z\right)\Bigg|_0^{\rho^2}d\rho=$$

$$=\frac{\pi}{2}\int\limits_0^1\rho\cdot\frac{3}{2}\rho^4 d\rho=\frac{3\pi}{4}\int\limits_0^1\rho^5 d\rho=\frac{3\pi}{4}\cdot\frac{\rho^6}{6}\Bigg|_0^1=\frac{3\pi}{4}\cdot\frac{1}{6}=\frac{\pi}{8}.$$

Приклад 4. Обчислити поверхневий інтеграл другого роду $I=\iint\limits_{\sigma}xdydz+ydxdz+zdxdy$, де σ – зовнішня сторона поверхні циліндра $x^2+y^2=R^2$ між площинами $z=0$ та $z=h$.

Розв'язання. $I=\iint\limits_{\sigma}xdydz+\iint\limits_{\sigma}ydxdz+\iint\limits_{\sigma}zdxdy$.



Оскільки нормаль $\vec{n}$ до поверхні заданого циліндра утворює з віссю Oz кут $\gamma=\frac{\pi}{2}$, то $\iint\limits_{\sigma}zdxdy=0$. Проекцією D_{yz} заданої поверхні на координатну площину Oyz є прямокутник $ABCE$.

$$\iint\limits_{\sigma}xdydz=\iint\limits_{\sigma_1}xdydz+\iint\limits_{\sigma_2}xdydz.$$

Рівняння поверхні σ_1 має вигляд $x=\sqrt{R^2-y^2}$, а рівняння поверхні σ_2 має вигляд $x=-\sqrt{R^2-y^2}$.

Нормаль $\vec{n}_1$ до зовнішньої сторони поверхні σ_1 утворює з віссю Ox гострий кут, а нормаль $\vec{n}_2$ до зовнішньої сторони поверхні σ_2 – тупий кут.

$$\iint\limits_{\sigma}xdydz=\iint\limits_{D_{yz}}\sqrt{R^2-y^2}dydz-\iint\limits_{D_{yz}}\left(-\sqrt{R^2-y^2}\right)dydz=2\iint\limits_{D_{yz}}\sqrt{R^2-y^2}dydz=$$

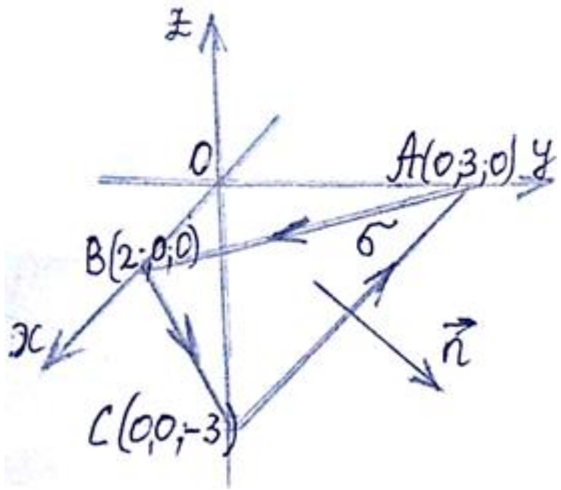
$$=2\int\limits_{-R}^{R}\sqrt{R^2-y^2}dy\cdot\int\limits_0^h dz=2h\int\limits_{-R}^{R}\sqrt{R^2-y^2}dy=\begin{bmatrix}y=R\sin t,\\ dy=R\cos tdt,\\ t_1=-\frac{\pi}{2},\ t_2=\frac{\pi}{2}\end{bmatrix}=2h\int\limits_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}R\cos t\cdot R\cos tdt=$$

$$=2hR^2\int\limits_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\frac{1+\cos 2t}{2}dt=R^2h\left(t+\frac{1}{2}\sin 2t\right)\Bigg|_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}=\pi R^2h.$$

Аналогічно можна обчислити $\iint\limits_{\sigma} ydxdz$, причому очевидно, що $\iint\limits_{\sigma} ydxdz = \pi R^2 h$.

Отже, $I = \pi R^2 h + \pi R^2 h + 0 = 2\pi R^2 h$.

Приклад 5. Обчислити: 1) потік векторного поля $\vec{F} = (x+y)\vec{i} + 2(y+z)\vec{j} + (2x+z)\vec{k}$ через площину трикутника σ, вирізаного з площини P $3x + 2y - 2z =$ координатними площинами, в напрямі нормалі $\vec{n}$, направленої назовні піраміди G, утвореної площиною P та координатними площинами; 2) циркуляцію векторного поля $\vec{F}$ по контуру, що обмежує σ, безпосередньо і застосувавши формулу Стокса до цього контура та поверхні σ з нормаллю $\vec{n}$; 3) потік векторного поля $\vec{F}$ через повну поверхню піраміди G в напрямі зовнішньої нормалі до її поверхні безпосередньо і застосувавши формулу Остроградського – Гаусса.



Розв'язання. 1) Використаємо формули (7) та (4):

$$\Pi = \iint\limits_{\sigma} \left(P\cos\alpha + Q\cos\beta + R\cos\gamma \right) d\sigma .$$

Визначимо нормаль до поверхні σ, яка направлена назовні піраміди G: $\vec{n} = (3; 2; -2)$.

$$|\vec{n}| = \sqrt{9+4+4} = \sqrt{17}; \quad \cos\alpha = \frac{3}{\sqrt{17}},\ \cos\beta = \frac{2}{\sqrt{17}},\ \cos\gamma = -\frac{2}{\sqrt{17}}.$$

$$\Pi = \iint\limits_{\sigma} \left((x+y)\cdot\frac{3}{\sqrt{17}} + 2(y+z)\cdot\frac{2}{\sqrt{17}} - (2x+z)\cdot\frac{2}{\sqrt{17}} \right) d\sigma = \frac{1}{\sqrt{17}} \iint\limits_{\sigma} (-x + 7y + 2z)\, d\sigma.$$

З рівняння площини P отримаємо: $z=\frac{3}{2}x+y-3$. Зведемо отриманий поверхневий інтеграл до подвійного інтеграла по області D_{xy} – проекції заданої поверхні на площину Oxy. Маємо:

$$z'_x=\frac{3}{2};\quad z'_y=1,\quad d\sigma=\sqrt{1+\frac{9}{4}+1}\,dxdy=\frac{\sqrt{17}}{2}dxdy.$$

$$\Pi=\frac{1}{2}\iint\limits_{D_{xy}}(-x+7y+3x+2y-6)dxdy=\frac{1}{2}\iint\limits_{D_{xy}}(2x+9y-6)dxdy=\frac{1}{2}\int_0^2 dx\int_0^{\frac{6-3x}{2}}(2x+9y-6)dy=$$

$$=\frac{1}{2}\int_0^2\left(2xy+\frac{9y^2}{2}-6y\right)\Bigg|_0^{\frac{-3(x-2)}{2}}dx=\frac{1}{2}\int_0^2\left(-3x^2+6x+\frac{81}{8}(x-2)^2+9(x-2)\right)dx=$$

$$=\frac{1}{2}\left(-x^3+3x^2+\frac{27(x-2)^3}{8}+\frac{9(x-2)^2}{2}\right)\Bigg|_0^2=\frac{13}{2}.$$

2) Нехай L – замкнений контур, який обмежує поверхню σ. Він складається з трьох відрізків: AB, BC, CA. Напрям обходу контура L узгоджений з вибором сторони поверхні σ.

$$Ц=\int_L(x+y)dx+2(y+z)dy+(2x+z)dz.$$

а) На відрізку AB: $z=0,\ dz=0;\ 3x+2y=6$.

$$\int_{AB}(x+y)dx+2(y+z)dy+(2x+z)dz=\int_0^2\left(x+\frac{3(2-x)}{2}\right)dx+2\int_3^0 ydy=$$

$$=\frac{1}{2}\int_0^2(6-x)dx+y^2\Big|_3^0=\frac{1}{2}\left(6x-\frac{x^2}{2}\right)\Bigg|_0^2-9=-4.$$

б) На відрізку BC: $y=0,\ dy=0;\ 3x-2z=6$.

$$\int_{BC}(x+y)dx+2(y+z)dy+(2x+z)dz=\int_2^0 xdx+\int_2^0\left(2x+\frac{3x-6}{2}\right)\cdot\frac{3}{2}dx=$$

$$=\frac{x^2}{2}\Bigg|_2^0+\int_2^0\frac{3}{4}(7x-6)dx=-2+\frac{3}{4}\left(\frac{7x^2}{2}-6x\right)\Bigg|_2^0=-\frac{7}{2}.$$

в) На відрізку CA: $x=0,\ dx=0;\ y-z=3$.

$$\int\limits_{CA}(x+y)dx+2(y+z)dy+(2x+z)dz=2\int\limits_0^3(y+y-3)dy+\int\limits_{-3}^0 zdz=$$

$$=2\left(y^2-3y\right)\Big|_0^3+\frac{z^2}{2}\Bigg|_{-3}^0=0-\frac{9}{2}=-\frac{9}{2}.$$

Отже, циркуляція заданого векторного поля вздовж контура L дорівнює:

$$Ц=-4-\frac{7}{2}-\frac{9}{2}=-12.$$

г) Застосуємо формулу Стокса (6) до обчислення циркуляції заданого векторного поля вздовж контура L.

$$P=x+y;\ Q=2(y+z);\ R=2x+z;\quad \frac{\partial P}{\partial y}=1;\ \frac{\partial P}{\partial z}=0;\ \frac{\partial Q}{\partial x}=0;\ \frac{\partial Q}{\partial z}=2;\ \frac{\partial R}{\partial x}=2;\ \frac{\partial R}{\partial y}=0.$$

$$Ц=-\iint\limits_{\sigma}2dydz+2dxdz+dxdy=-2\iint\limits_{D_{yz}}dydz-2\iint\limits_{D_{xz}}dxdz+\iint\limits_{D_{xy}}dxdy=$$

$$=-2\cdot S_{\Delta OCA}-2\cdot S_{\Delta OBC}+S_{\Delta OAB}=-2\cdot\frac{9}{2}-2\cdot 3+3=-12.$$

3) Позначимо потік заданого векторного поля $\vec{F}$ через повну поверхню піраміди G через $П_{повн.}$. Обчислимо потік вектора $\vec{F}$ через кожну з граней піраміди, які лежать на координатних площинах.

а) Розглянемо поверхню σ_1 – верхню сторону трикутника OAB. Маємо: $z=0$

$$П_1=\iint\limits_{\sigma_1}(x+y)dydz+2(y+z)dxdz+(2x+z)dxdy=\iint\limits_{D_{xy}}2xdxdy=$$

$$=2\int\limits_0^2 xdx\int\limits_0^{\frac{6-3x}{2}}dy=3\int\limits_0^2\left(2x-x^2\right)dx=3\left(x^2-\frac{x^3}{3}\right)\Bigg|_0^2=4.$$

б) На поверхні σ_2 (трикутник OBC) маємо: $y=0$. Нормаль до поверхні σ_2 утворює тупий кут з віссю Oy.

$$\Pi_2 = \iint_{\sigma_2} (x+y)\,dydz + 2(y+z)\,dxdz + (2x+z)\,dxdy = -2\iint_{D_{xz}} zdxdz =$$

$$= -2\int_0^2 dx \int_{\frac{3x-6}{2}}^{0} zdz = \frac{9}{4}\int_0^2 (x-2)^2\,dx = \frac{9}{4}\cdot\left.\frac{(x-2)^3}{3}\right|_0^2 = 6.$$

в) На поверхні σ_3 (трикутник OCA) маємо: $x=0$. Нормаль до поверхні σ_3 утворює тупий кут з віссю Ox.

$$\Pi_3 = \iint_{\sigma_3} (x+y)\,dydz + 2(y+z)\,dxdz + (2x+z)\,dxdy = -2\iint_{D_{yz}} ydydz =$$

$$= -\int_0^3 ydy \int_{y-3}^{0} dz = \int_0^3 \left(y^2-3y\right)dy = \left.\left(\frac{y^3}{3}-\frac{3y^2}{2}\right)\right|_0^3 = \frac{27}{3}-\frac{27}{2} = -\frac{9}{2}.$$

Отже, $\Pi_{повн.} = \dfrac{13}{2}+4+6-\dfrac{9}{2} = 12$.

г) Обчислимо $\Pi_{повн.}$ за допомогою формули Остроградського – Гаусса (5).

$$P = x+y;\; Q = 2(y+z);\; R = 2x+z; \quad \frac{\partial P}{\partial x}+\frac{\partial Q}{\partial y}+\frac{\partial R}{\partial z} = 1+2+1 = 4.$$

$\Pi_{повн.} = \iiint_G 4dxdydz = 4\iiint_G dxdydz$. Оскільки $\iiint_G dxdydz$ дорівнює об’єму заданої піраміди G, то отримаємо:

$$\Pi_{повн.} = 4\cdot V = 4\cdot\frac{1}{3}\cdot 3\cdot 3 = 12.$$

Список літератури

1. Архіпова О. С. Посібник для розв’язання типових завдань з курсу вищої математики. / О. С. Архіпова, В. П. Протопопова, Є. С. Пахомова – Х.: ХНАМГ, 2008. – 205 с.
2. Бізюк В. В. Спеціальні розділи вищої математики для електротехніків. / А. В. Бізюк, А. В. Якунін – Х.: ХНАМГ, 2008. – 300 с.
3. Вища математика в прикладах і задачах. – Т.2./ Під ред. Л.В. Курпи. Харків: НТУ «ХПІ», 2009.- 432с.
4. Владіміров В.М. Збірник завдань з вищої математики. Ч.2. / В.М. Владіміров, О.А. Пучков, М.В Шмигевський. - Київ: Політехніка. - 2002.-108 с.
5. Дубовик, В.П. Вища математика: Навч. посіб. для вищих навчальних закладів / В.П. Дубовик, І.І. Юрик. – К.: А. С. К., 2006. – 648 с.
6. Кузнецов Л.А. Сборник заданий по высшей математике (6 изд.) – С.-П.:Лань – 2007. – 238 с.
7. Тевяшев А. Д. Вища математика у прикладах і задачах. Частина 2. / А. Д. Тевяшев, О. Г. Литвин, Г. М. Кривошеєва та ін. - Харків: Фактор-Друк, 2002.
8. Фихтенгольц Г. М. Курс дифференциального и интегрального исчисления. Том 3.
9. Шкіль М. І.. Математичний аналіз: Підручник: у 2 ч. - 3-тє вид., переробл. і допов. - К.: Вища шк.., 2005.

Зміст

Вища математика. Частина 3:

Кратні, криволінійні та поверхневі інтеграли

Методичний посібник

Підписано до друку 06.04.2023р.
Папір офсетний. Формат 60х 84 1/16.
Гарнітура Times New Roman.
Друк офсетний.
Умов. друк. арк. 2
Облік. вид. арк. 2,3
Наклад 10 прим.

Віддруковано з готових діапозитивів в СМП «Тайп»
46006, м. Тернопіль, вул. Чернівецька, 44 б,
телефон +380(352)520075; +380(352)526161