Міністерство освіти і науки України
Тернопільський національний технічний університет
імені Івана Пулюя

Кафедра вищої математики

НАВЧАЛЬНИЙ ПОСІБНИК

Вища математика:
теорія ймовірностей та математична статистика

Тернопіль
2023 р.

Укладачі: к.ф.-м.н., доц. Б.Г. Шелестовський
к.ф.-м.н., доц. Г.В. Габрусєв
к.т.н., доц. І.Ю. Габрусєва

Рецензенти: канд. фіз.-мат. наук, доц. М.І. Громяк
канд. фіз.-мат. наук, доц. А.М. Алілуйко

Рекомендовано до друку Вченою радою Тернопільського національного технічного університету імені Івана Пулюя.
Протокол № 4 від «24» квітня 2023 року.

Вища математика: теорія ймовірностей та математична статистика. Навчальний посібник / Шелестовський Б.Г., Габрусєв Г.В., Габрусєва І.Ю. – Тернопіль: СМП "Тайп", 2023 – 142 с.

ВСТУП

Сучасний рівень науки та використання новітніх технологій у виробництві вимагає від спеціалістів володіння широким математичним апаратом. Завдяки останнім досягненням обчислювальної техніки математичні методи досліджень знаходять застосування в усіх галузях науки і техніки. Значно розширилися, зокрема, можливості використання методів теорії ймовірностей та математичної статистики при розв'язанні інженерних задач.

Основне завдання студентів – навчитись працювати самостійно, використовуючи при цьому різноманітні джерела інформації. Метою даного навчального посібника є надання допомоги студентам денної та заочної форми навчання при вивченні теорії ймовірностей та математичної статистики.

Усі розділи посібника містить як основні теоретичні відомості та формули, так і приклади розв'язання типових задач. Значна частина розв'язаних у посібнику задач має технічний зміст.

Посібник укладено відповідно до програми курсу вищої математики для вищих технічних навчальних закладів і може бути використаний студентами при самостійному опрацюванні вище названих розділів та виконанні завдань контрольних робіт.

1. Випадкові події

1.1. Предмет комбінаторики. Основні формули комбінаторики

Комбінаторика – це розділ математики в якому вивчають розташування та вибір об'єктів за певними правилами і методи обчислення всіх можливих способів, якими це можна здійснити.

Перші теоретичні дослідження проблем комбінаторики були зроблені у XVII ст. Б. Паскалем, П. Ферма, Г. Лейбніцем, а у XVIII ст. Я. Бернуллі, Л. Ейлером. Але лише у другій половині XX ст. у зв'язку з розвитком теорії обчислювальних машин, теорії інформації та дискретної математики комбінаторика стала по-справжньому математичною наукою. Зокрема, її методи відіграють важливу роль при розв'язуванні задач теорії ймовірностей.

Вся сукупність довільних елементів утворює ***множину***. Множина ***визначена***, якщо відомі всі її елементи. Множина, що має скінченну кількість елементів, називається ***скінченною***. Множини позначатимемо великими латинськими літерами: $A, B, C, \ldots$, а їх елементи – малими $a, b, c, \ldots$ кількість елементів множини A позначатимемо $N(A)$.

Дві ***множини рівні*** між собою, якщо всі елементи першої є елементами другої і, навпаки, всі елементи другої є елементами першої.

Сумою, або об'єднанням множин A та B називається множина $C = A + B$ $(C = A \cup B)$, яка складається лише з тих елементів, що належать принаймні одній із множин A або B.

Приклад. Нехай $A = \{1;3;5\}$, $B = \{3;5;7\}$. Тоді $A + B = \{1;3;5;7\}$.

Множина D, якій належать ті і тільки ті елементи, що є спільними для множин A та B, називається ***добутком або перерізом множин*** A та B і позначається $D = AB$ $(D = A \cap B)$.

Приклад. Нехай $A = \{1;3;5\}$, $B = \{3;5;7\}$. Тоді $AB = \{3;5\}$.

Множина, яка не містить жодного елемента, називається ***порожньою*** і позначається $\varnothing$.

Якщо дві множини A та B не мають спільних елементів, то $AB = \varnothing$.

Кількість елементів множини, що є сумою відповідно двох і трьох множин обчислюється за формулами:

$$N(A+B) = N(A) + N(B) - N(AB);$$

$$N(A+B+C) = N(A) + N(B) + N(C) - N(AB) - N(AC) - N(BC) + N(ABC).$$

Задача 1.1. Кожен студент навчальної групи або хлопець, або блондин, або любить математику. В групі 25 хлопців з них 17 блондинів, два блондина люблять математику. Всього в групі 26 блондинів, математику з них любить 13, а всього люблять математику 15 студентів, з них 8 хлопців. Скільки студентів у групі?

Розв'язання. Нехай A – множина хлопців, B – блондинів, C – люблять математику. Тоді $N\left(A+B+C\right)$ – шукане число. Причому AB – множина хлопців блондинів, AC – множина хлопців, що люблять математику, BC – множина блондинів, які люблять математику, ABC – множина хлопців блондинів, які люблять математику. Отже, студентів у групі

$$N\left(A+B+C\right)=N\left(A\right)+N\left(B\right)+N\left(C\right)-N\left(AB\right)-N\left(AC\right)-N\left(BC\right)+N\left(ABC\right)=$$
$$=25+26+15-17-8-13+2=30.$$

Більшість формул комбінаторики ґрунтується на двох основних принципах:

1. Якщо множини A та B не мають спільних елементів ($AB=\varnothing$) і множина A містить $N\left(A\right)=n$ елементів, множина B – $N\left(B\right)=m$ елементів, тоді множина $A+B$ містить $N\left(A+B\right)=n+m$ елементів.

2. Нехай необхідно виконати послідовно k дій. Якщо першу дію можна виконати n_1 способами, другу – n_2 способами і так далі до k-тої дії, яку можна виконати n_k способами, то всі k дій разом можуть бути виконані $n_1 \cdot n_2 \cdot ... \cdot n_k$ способами.

Множина називається ***впорядкованою***, якщо кожному її елементу поставлено у відповідність деяке натуральне число (номер елемента) так, що різним елементам відповідають різні числа. Впорядковані множини вважаються різними, якщо вони відрізняються або своїми елементами, або їх порядком.

Групою називають впорядковану підмножину даної множини. Розрізняють групи трьох видів: розміщення, перестановки та комбінації.

Нехай задано множину, що містить n різних елементів.

Розміщеннями з n елементів по k елементів $(k \le n)$ називаються групи елементів, кожна з яких містить k елементів з даних n елементів і які відрізняються одна від одної або елементами, або їх порядком.

Число розміщень з n елементів по k елементів дорівнює

$$A_n^k = n(n-1)(n-2)...(n-k+1) = \frac{n!}{\left(n-k\right)!}. \qquad (1.1)$$

Задача 1.2. Скількома способами можна призначити трьох осіб на три різні посади із десяти кандидатів на ці посади?

Розв'язання. Кількість способів дорівнює числу розміщень з 10 елементів по 3 елементи

$$A_{10}^3 = 10 \cdot 9 \cdot 8 = 720.$$

Перестановками з n елементів називаються групи елементів, кожна з яких містить даних n елементів і які відрізняються одна від одної тільки порядком елементів.

Перестановки з n елементів – це розміщення з n елементів по n.

Число перестановок з n елементів дорівнює

$$P_n = n!, \qquad (1.2)$$

де $n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot n, \quad 0! = 1.$

Задача 1.3. Скільки чотиризначних чисел можна записати цифрами: а)1, 2, 3, 4; б) 0, 1, 2, 3, якщо кожну цифру використовувати тільки один раз?

Розв'язання. а). Кількість чотиризначних чисел, які можна записати цифрами 1, 2, 3, 4 і в яких усі цифри різні, дорівнює кількості перестановок з чотирьох елементів: $P_n = 4! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 = 24.$

б). Оскільки цифра 0 не може стояти на початку числа, то від загальної кількості чисел, які можна записати даними чотирма різними цифрами, потрібно відняти кількість «чисел», на початку яких стоїть цифра 0. Таких «чисел» буде 3!, оскільки інші три цифри можна переставляти всіма можливими способами.

Отже, шукана кількість чотиризначних чисел в цьому випадку дорівнює $P_4 - P_3 = 4! - 3! = 24 - 6 = 18.$

Комбінаціями з n елементів по k елементів називаються групи елементів, кожна з яких містить k елементів з даних n і які відрізняються одна від одної хоча б одним елементом.

Число комбінацій з n елементів по k елементів дорівнює

$$C_n^k = \frac{A_n^k}{P_k} = \frac{n(n-1)(n-2)\ldots(n-k+1)}{k!}. \qquad (1.3)$$

Цю формулу можна записати у вигляді:

$$C_n^k = \frac{n!}{k!(n-k)!}. \qquad (1.4)$$

Із означення комбінацій випливає, що комбінації отримують із розміщень вилучивши групи, що відрізняються лише порядком елементів, тобто перестановки.

Задача 1.4. Скількома способами можна вибрати 4 деталі з ящика, в якому міститься 12 деталей?

Розв'язання. Шукана кількість способів дорівнює числу комбінацій з 12 елементів по 4 елементи. Скористаємося формулою (1.3):

$$C_{12}^4 = \frac{12!}{4!8!} = \frac{8!\cdot 9\cdot 10\cdot 11\cdot 12}{4!8!} = \frac{12\cdot 11\cdot 10\cdot 9}{4!} = \frac{12\cdot 11\cdot 10\cdot 9}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4} = 495.$$

Розміщеннями із повтореннями з n елементів по k елементів $(k \le n)$ називаються групи елементів, кожна з яких містить k елементів з даних n елементів серед яких є однакові і які відрізняються одна від одної або елементами, або їх порядком.

Число розміщень з n елементів по k елементів дорівнює $\overline{A_n^k} = n^k$.

Розглянемо ***перестановки з повтореннями***. Число різних перестановок, які можна утворити з n елементів, серед яких є k_1 елементів першого типу, k_2 елементів другого типу,..., k_m елементів m-го типу, дорівнює

$$P_n(k_1, k_2, ..., k_m) = \frac{n!}{k_1!k_2!...k_m!}. \qquad (1.5)$$

Задача 1.5. Скільки різних слів можна утворити, переставляючи літери у слові «математика»?

Розв'язання. У слові «математика» є 10 літер. Шукана кількість різних слів дорівнює числу перестановок, які можна утворити з 10 літер, серед яких є 3 літери **а**, 2 літери **м** та 2 літери **т**. Використаємо формулу (1.5):

$$P_{10}(3,2,2) = \frac{10!}{3!\cdot 2!\cdot 2!} = 151200.$$

Комбінаціями з n елементів по m з повтореннями називаються групи по m елементів взятих з даних n елементів, які відрізняються одна від одної хоча б одним елементом, причому кожен елемент може повторюватися будь-яке число разів.

Число комбінацій з повтореннями n елементів по m елементів дорівнює

$$K_n^m = C_{n+m-1}^m, \tag{1.6}$$

де C_{n+m-1}^m обчислюється за формулами (1.3) або (1.4).

Задача 1.6. Скількома способами можна вибрати 6 однакових або різних тістечок в кондитерській, де є 11 різних сортів тістечок?

Розв'язання. Шукана кількість способів дорівнює числу комбінацій з 11 елементів по 6 елементів з повторенням, тобто $K_{11}^6 = C_{16}^6 = \dfrac{16\cdot15\cdot14\cdot13\cdot12\cdot11}{1\cdot2\cdot3\cdot4\cdot5\cdot6} = 8008$.

Розв'язування типових задач

Задача 1. Скільки чотиризначних чисел можна скласти з цифр 0, 1, 2, 3, 4, 5 якщо:

а) жодна з цифр не повторюється;

б) цифри можуть повторюватися;

в) числа повинні бути непарними (цифри можуть повторюватися)?

Розв'язання.

а) Першою цифрою чотиризначного числа можуть бути 1, 2, 3, 4, 5, тобто існує 5 способів її вибору. Якщо перша цифра вибрана, то другу можна вибрати 5-ма способами, третю – 4-ма способами і четверту – 3-ма.

Отже, згідно з основним правилом комбінаторики, загальне число способів дорівнює $5\cdot5\cdot4\cdot3 = 300$.

б) Першою цифрою чотиризначного числа можуть бути 1, 2, 3, 4, 5 (5 способів), для кожної з наступних трьох цифр існує 6 способів (0, 1, 2, 3, 4, 5).

Отже, кількість шуканих чисел дорівнює $5\cdot6\cdot6\cdot6 = 1080$.

в) Першою цифрою чотиризначного числа можуть бути 1, 2, 3, 4, 5 (5 способів), для другої та третьої цифр по 6 способів (0, 1, 2, 3, 4, 5), а останньої – 3 способи (1, 3, 5).

Отже, кількість шуканих непарних чисел дорівнює $5\cdot6\cdot6\cdot3 = 540$.

Задача 2. Із пункту А до пункту В можна проїхати трьома різними дорогами, а з В до С – двома. Скільки є різних маршрутів із пункту А до пункту С через пункт В?

Розв'язання. Кількість різних шляхів із пункту А до С дорівнює $3\cdot2 = 6$ тому, що для кожної з трьох можливих доріг із пункту А до В маємо дві можливі дороги з В до С.

Задача 3. Скількома способами можуть розміститись 5 чоловік у черзі до каси?

Розв'язання. Кількість різних способів розміщення п'яти чоловік у черзі, очевидно,

$P_5 = 5! = 1\cdot2\cdot3\cdot4\cdot5 = 120$.

Задача 4. Нехай є три елементи: $a,b,c\left(n=3\right)$. Скласти з них: а) усі можливі розміщення по два елементи $\left(k=2\right)$; б) комбінації (сполучення) по два елемента $\left(k=2\right)$.

Розв'язання. а) Складемо всі можливі розміщення по два елементи:

ab,ac,ba,bc,ca,cb.

За формулою $A_n^k=n\left(n-1\right)\left(n-2\right)...\left(n-k+1\right)$, отримаємо їх кількість: $A_3^2=3\cdot 2=6$.

б) Складемо всі можливі комбінації по два елементи: ab,ac,bc.

За формулою $C_n^k=\dfrac{n!}{k!\left(n-k\right)!}$, будемо мати: $C_3^2=\dfrac{3!}{2!\left(3-2\right)!}=\dfrac{3!}{2!\cdot 1!}=3$.

Задача 5. Скількома способами можна розділити наполовину групу з двадцяти чоловік?

Розв'язання. Потрібно відібрати десять чоловік з двадцяти. Оскільки послідовність відбирання значення не має, то йдеться про комбінації. Отже,

$C_{20}^{10}=\dfrac{20!}{10!\left(20-10\right)!}=\dfrac{20!}{10!\;10!}=\dfrac{10!\cdot 11\cdot 12\cdot 13\cdot 14\cdot 15\cdot 16\cdot 17\cdot 18\cdot 19\cdot 20}{10!\cdot 1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 5\cdot 6\cdot 7\cdot 8\cdot 9\cdot 10}=184756$ способів розділити навпіл групу з двадцяти чоловік.

Задача 6. В ящику міститься 20 радіоламп, серед яких 8 браковані. Скількома способами можна з 20 ламп вийняти 6 так, щоб серед них були 2 браковані?

Розв'язання. Оскільки з 20 ламп 8 – браковані, то 12 – якісні. Потрібно вибрати 4 якісних лампи з 12 можливих і 2 браковані з 8 можливих бракованих. Це можна зробити такою кількістю способів: $C_{12}^4 C_8^2=\dfrac{12!}{4!\cdot 8!}\cdot\dfrac{8!}{2!\cdot 6!}=13\,860$.

Задача 7. У списку є прізвища десяти чоловік, з яких потрібно обрати до президії трьох. Скількома способами це можна зробити, якщо: а) байдуже, які прізвища будуть у трьох обраних; б) потрібно назвати голову, його замісника та секретаря?

Розв'язання. а) Оскільки послідовність обирання значення не має, то кількість способів: $C_{10}^3=\dfrac{10!}{3!\cdot 7!}=\dfrac{7!\cdot 8\cdot 9\cdot 10}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 7!}=4\cdot 3\cdot 10=120$.

б) Оскільки послідовність обирання має значення, то кількість способів:

$A_{10}^3=\dfrac{10!}{7!}=\dfrac{7!\cdot 8\cdot 9\cdot 10}{7!}=720$.

Задача 8. Скільки різних варіантів хокейної команди можна скласти з восьми нападаючих, п'яти захисників та двох воротарів, якщо до складу команди повинні ввійти три нападаючих, два захисники й один воротар?

Розв'язання. Оскільки послідовність обирання хокеїстів значення не має, то три нападаючих можна вибрати з восьми C_8^3 способами, два захисники з п'яти – C_5^2, одного воротаря з двох C_2^1 способами. Отже, кількість різних способів вибору хокейної команди:

$C_8^3\cdot C_5^2\cdot C_2^1=\dfrac{8!}{3!\cdot 5!}\cdot\dfrac{5!}{2!\cdot 3!}\cdot 2=\dfrac{5!\cdot 6\cdot 7\cdot 8}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 5!}\cdot\dfrac{3!\cdot 4\cdot 5}{1\cdot 2\cdot 3!}\cdot 2=56\cdot 20=1\,120$.

1.2. Основні поняття теорії ймовірностей. Класичне та статистичне означення ймовірності

Теорія ймовірностей – математична наука, яка вивчає закономірності випадкових явищ. Знання закономірностей, яким підпорядковуються масові випадкові події, дозволяє передбачати, як ці події будуть протікати.

Одним із основних понять теорії ймовірностей є випадок. Випадок ніде не відіграє такої важливої ролі, як в азартних іграх. Тому не дивно, що теорія ймовірностей виникла як наука, що аналізує азартні ігри. Однак поняття «гра» ширше, ніж «азартна гра». Під грою можна розуміти досить далекі від азартних ігор події: військова стратегія, тактика, політичні переговори, ділові виробничі стосунки тощо. Теорія ймовірностей вже давно перейшла ці початкові рамки аналізу азартних ігор, стала всеосяжною наукою про випадок, про випадкові події.

Методи теорії ймовірностей широко застосовуються в різних галузях природознавства і техніки: в теорії надійності, теорії масового обслуговування, в теоретичній фізиці, геодезії, астрономії, теорії стрільби, теорії похибок спостережень, теорії автоматизованого управління, загальній теорії зв'язку та в багатьох інших теоретичних і прикладних науках.

Випадковою подією називається будь яке явище, яке при здійсненні певного комплексу умов може відбутися або не відбутися. Здійснення певного комплексу умов, який може бути відтворений необмежене число разів, називається ***випробуванням***.

Приклади. Кидання монети – випробування; поява герба – випадкова подія. Виготовлення деталі даного типу – випробування; відповідність деталі стандарту – випадкова подія. Спостереження за лічильником космічних частинок протягом певного проміжку часу – випробування; поява космічних частинок у лічильнику – випадкова подія.

Достовірною називається подія, яка в результаті випробування обов'язково відбудеться. ***Неможливою*** називається подія, яка в даному випробуванні ніколи не відбувається.

Декілька подій називаються ***несумісними*** в даному випробуванні, якщо вони не можуть настати одночасно, тобто поява однієї з цих подій виключає появу всіх інших подій. Декілька подій утворюють ***повну групу*** в даному випробуванні, якщо в результаті випробування обов'язково повинна настати хоча б одна з цих подій. Події в даному випробуванні називаються ***рівноможливими***, якщо є підстави вважати , що ні одна з цих подій не є об'єктивно більш можлива, ніж інша.

Якщо події A_1, A_2, ... , A_n мають всі три властивості, тобто є рівноможливими, несумісними і утворюють повну групу, то вони називаються ***випадками*** (або «шансами»), а про випробування кажуть, що воно зводиться до схеми випадків. Наприклад, поява на верхній грані 1, 2, 3, 4, 5, 6 очок при одному киданні грального кубика (однорідного правильної геометричної форми) є випадками.

Ймовірність випадкової події – це чисельна міра об'єктивної можливості настання цієї події. Ймовірність достовірної події вважають рівною одиниці, а ймовірність неможливої події – рівною нулю.

Ймовірність будь-якої випадкової події *A* (позначається *P*(*A*)) задовольняє умову

$$0 \le P(A) \le 1. \qquad (2.1)$$

Якщо випробування зводиться до схеми випадків, то ймовірність подій *A* можна обчислити, ґрунтуючись на ***класичному означенні***: ймовірність події *A* дорівнює відношенню числа *m* результатів випробування, що сприяють події *A*, до загального числа всіх рівноможливих несумісних результатів випробування, які утворюють повну групу

$$P(A) = \frac{m}{n}. \qquad (2.2)$$

Задача 2.1. На кожній із семи карток надрукована одна з літер: а, о, е, б, н, г, р. Навмання виймають по одній чотири картки і кладуть їх послідовно поряд. Знайти ймовірність того, що отримають слово «небо».

Розв'язання. Загальне число рівноможливих, несумісних результатів випробування, які утворюють повну групу, дорівнює числу розміщень із семи елементів по чотири, тобто $n = A_7^4 = 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 = 840$. Появі слова «небо» сприяє тільки один результат, тобто *m*=1.

Отже шукана ймовірність $P(B) = \frac{1}{840}$.

Задача 2.2. Книги деякого десятитомного видання творів розміщені на полиці навмання. Знайти ймовірність того, що перший, другий та третій томи будуть розміщені поряд в порядку зростання номерів.

Розв'язання. Число всіх способів, якими можна розмістити 10 книг на полиці, дорівнює числу перестановок з десяти елементів, тобто $n = P_{10} = 10!$ Ці способи рівноможливі, несумісні та утворюють повну групу. З них число випадків, коли дані томи розміщені на першому, другому та третьому місцях в порядку зростання номерів, дорівнює 7!, оскільки інші 7 томів можуть переставлятися всіма можливими способами. Різних положень перших трьох томів, коли вони розміщені поряд і в порядку зростання номерів, буде 8. Отже, число різних способів розміщення книг, при яких три дані томи будуть стояти поряд і в порядку зростання номерів, дорівнює $7! \cdot 8 = 8!$, тобто $m = 8!$.

Шукана ймовірність $P(A) = \frac{m}{n} = \frac{8!}{10!} = \frac{1}{90}$.

Задача 2.3. В партії з 25 деталей знаходиться 4 деталі бракованих. Знайти ймовірність того, що серед вибраних навмання для перевірки п'яти деталей виявиться дві браковані деталі.

Розв'язання. Загальне число можливих результатів випробовування дорівнює числу способів, якими можна вибирати 5 деталей з 25, тобто числу комбінацій з 25 елементів по 5 : $n = C_{25}^5$. Ці результати випробування рівноможливі, несумісні і утворюють повну групу. Підрахуємо число результатів, які сприяють події *A* (серед п'яти взятих навмання деталей виявляться дві браковані). Дві браковані деталі можна вибрати з чотирьох бракованих C_4^2 способами; інші три небраковані деталі можна взяти з 21 небракованої деталі C_{21}^3 способами. Отже, число результатів, які сприяють події *A*, $m = C_4^2 \cdot C_{21}^3$. Шукана ймовірність

$$P(A) = \frac{C_4^2 \cdot C_{21}^3}{C_{25}^5} = \frac{\frac{4!}{2!2!} \cdot \frac{21!}{3!18!}}{\frac{25!}{5!20!}} = \frac{\frac{4 \cdot 3}{2!} \cdot \frac{21 \cdot 20 \cdot 19}{3!}}{\frac{25 \cdot 24 \cdot 23 \cdot 22 \cdot 21}{5!}} \approx 0{,}15 .$$

Відносною частотою події *A* в даній серії випробувань називається відношення числа випробувань *m*, в яких подія *A* появилася, до загального числа *n* проведених випробувань

$$W(A) = \frac{m}{n} . \qquad (2.3)$$

При невеликій кількості випробувань відносна частота події має випадковий характер і може помітно змінюватись від однієї серії випробувань до іншої. Але при збільшенні числа випробувань відносна частота події втрачає свій випадковий характер, наближаючись з незначними коливаннями до деякого сталого числа, яке є ймовірністю події. Математичне формулювання цієї властивості стійкості відносної частоти вперше дав Я.Бернуллі.

Він довів, що при необмеженому збільшенні числа випробувань з практичною достовірністю можна стверджувати, що відносна частота події буде як завгодно мало відрізнятися від її ймовірності в окремому випробуванні. Тому використовують ***статистичне означення ймовірності події***: за ймовірність події приймають відносну частоту цієї події при великому числі випробовувань.

Отже, ***статистичною ймовірністю*** $P^*(A)$ події A називають відношення числа дослідів, за яких відбулася подія A, до числа всіх проведених дослідів:

$$P^*(A) = \frac{m}{n}.$$

У дослідах статистична ймовірність коливається близько якогось сталого числа, змінюючись мало і тим менше чим більше дослідів. Це стале число дістало назву класичної ймовірності.

Приклад. Французький природознавець Жорж-Луі Леклерк, граф де Бюффон (в XVIII ст.) кинув монету 4040 разів. Герб випав 2048 разів. Отже, статистична ймовірність випадіння герба:

$$P^*(A) = \frac{2048}{4040} = 0,50693...$$

Англійський математик Пірсон кинув монету 24000 разів. Герб випав 12012 разів. Отже, частота випадання герба у цьому прикладі:

$$P^*(A) = \frac{12012}{24000} = 0,5005...$$

Класична ймовірність випадання герба при киданні монети: $P(A) = 0,5$.

Розв'язування типових задач

Задача 1. Лотерея складається з 1000 білетів, серед яких 120 виграшних. Навмання виймається білет. Знайти ймовірність того, що він виграшний.

Розв'язання. Різних результатів у цьому випробуванні 1000 ($n = 1000$). Події А, що нас цікавить, сприяє 120 результатів, отже, $m = 120$. Таким чином, згідно з означенням

$$P(A) = \frac{m}{n} = \frac{120}{1000} = \frac{3}{25}.$$

Задача 2. Тричі підкидають монету. Знайти ймовірність подій:

А – герб випадає три рази;

В – герб випадає принаймні один раз;

С – герб випадає не менше ніж два рази.

Розв'язання: Опишемо простір елементарних подій:

ГГГ, ГГЦ, ГЦГ, ЦГГ, ЦЦГ, ЦГЦ, ГЦЦ, ЦЦЦ.

Зрозуміло, що ці вісім випадків рівноможливі.

Події А сприяє лише один результат – перший, тому $P(A) = \frac{1}{8}$.

Події В сприяють сім результатів ГГГ, ГГЦ, ГЦГ, ЦГГ, ЦЦГ, ЦГЦ, ГЦЦ, тому $P(B) = \frac{7}{8}$.

Події С сприяють результати ГГГ, ГГЦ, ГЦГ, ЦГГ, тому $P(C) = \frac{4}{8} = \frac{1}{2}$.

Задача 3. У ящику є 5 однакових кубики. На всіх гранях кожного кубика написана одна з таких букв: о, п, р, с, т . Знайти ймовірність того, що на вийнятих по одному і розміщених в одну лінію кубиках можна буде прочитати слово «спорт».

Розв'язання: Нехай А – подія, яка полягає у тому, що отримаємо слово «спорт». Тільки один наслідок сприяє появі цієї події, тобто $m = 1$. Наслідки випробування – це всі можливі групи по 5 елементів (літер), для яких суттєвий порядок розташування елементів, і їх число $n = 5! = 1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 5 = 120$. Отже,

$$P(A) = \frac{1}{120} \approx 0,00833.$$

Задача 4. На кожній із семи карток надрукована одна з таких букв: а н ц е р с о . Навмання беруть по одній п'ять карток і кладуть їх в одну лінію. Знайти ймовірність того, що отримаємо слово «сонце».

Розв'язання: Нехай B – подія, яка полягає у тому, що отримаємо слово «сонце». Тільки один наслідок сприяє появі цієї події, тобто $m = 1$. Наслідки випробування – це всі можливі групи по 5 елементів (літер), для яких суттєвий порядок розташування елементів, і їх число $n = A_7^5 = 7\cdot 6\cdot 5\cdot 4\cdot 3 = 2520$. Отже,

$$P(B) = \frac{1}{2520} \approx 0,000397.$$

Задача 5. Навісний замок із «секретом» має шість восьмикутних призм, кожна з яких повертається навколо своєї осі незалежно від інших. Бічні грані кожної з призм пронумеровані цифрами від 1 до 8. Замок відкривається, якщо обертанням призм на чільній стороні замка буде набрано певне шестизначне число. Знайти ймовірність того, що після довільного набору шестизначного числа на чільній стороні замок відкриється.

Розв'язання: Нехай А – подія, яка полягає у тому, що замок відкриється після довільного набору шестизначного числа. Для знаходження всіх наслідків випробування потрібно порахувати число всіх різних шестизначних чисел. Оскільки бічні грані кожної зі шести призм пронумеровані цифрами від 1 до 8 то, згідно з основним правилом комбінаторики, отримаємо $n = 8\cdot 8\cdot 8\cdot 8\cdot 8\cdot 8 = 8^6 = 262\,144$.

З усіх наслідків випробування тільки в одному замок відкривається (коли буде набрано секретне число), тому $m = 1$. Отже, $P(A) = \dfrac{1}{262\,144} \approx 0,0000038$.

Задача 6. В партії з 10 деталей 7 стандартних. Знайти ймовірність того, що серед шести взятих навмання деталей 4 стандартних.

Розв'язання. Загальне число можливих елементарних результатів випробування дорівнює числу способів, якими можна взяти 6 деталей з 10, тобто $n = C_{10}^6$.

Визначимо число результатів, що сприяють появі події А – серед шести взятих деталей 4 стандартних. Чотири стандартні деталі можна взяти з семи стандартних деталей C_7^4 способами, при цьому решта $6 - 4 = 2$ деталі мають бути нестандартними. Взяти дві нестандартні деталі з $10 - 7 = 3$ нестандартних деталей можна C_3^2 способами. Отже, число сприятливих результатів $m = C_7^4\, C_3^2$.

Шукана ймовірність $P(A) = \dfrac{C_7^4 C_3^2}{C_{10}^6} = \dfrac{\dfrac{7!}{4!\cdot 3!}\cdot\dfrac{3!}{2!\cdot 1!}}{\dfrac{10!}{6!\cdot 4!}} = \dfrac{7!\cdot 3!\cdot 6!\cdot 4!}{4!\cdot 3!\cdot 2!\cdot 1!\cdot 10!} = \dfrac{1}{2}$.

Задача 7. Відділ технічного контролю виявив 6 нестандартних деталей в партії з 300 деталей. Знайти відносну частоту появи нестандартних деталей.

Розв'язання. Нехай подія А – поява нестандартної деталі. Число виявлених нестандартних деталей $m = 6$, загальне число відібраних деталей $n = 300$. Отже, відносна частота появи нестандартних деталей $W\left(A\right) = \dfrac{6}{300} = 0,02$.

Задача 8. По цілі зробили 24 постріли, при цьому було 19 попадань. Знайти відносну частоту враження цілі.

Розв'язання. Нехай подія А – враження цілі. Число виявлених попадань $m = 19$, загальне число пострілів $n = 24$. Отже, відносна частота враження цілі

$$W\left(A\right) = \frac{19}{24} \approx 0,79167.$$

1.3. Геометричне означення ймовірності

Класичне означення ймовірності неможливо застосувати до випробування з нескінченною кількістю результатів. Для опису такої ситуації вводять геометричні ймовірності – ймовірності попадання точки в область (відрізок, частину площини і т.д.).

Нехай, наприклад, плоска фігура g є частиною плоскої фігури G. На фігуру G навмання кидають точку. Це означає виконання таких припущень: кинута точка може виявитися в будь-якій точці фігури G; ймовірність попадання кинутої точки на фігуру g пропорційна площі цієї фігури і не залежить ні від її розміщення відносно G, ні від форми фігури g.

При таких припущеннях ймовірність попадання точки у фігуру g визначається рівністю

$$P = \frac{\textit{площа } g}{\textit{площа } G}. \tag{3.1}$$

Це означення є частинним випадком загального означення геометричної ймовірності. Якщо позначити міру(довжину, площу, об'єм) області через mes, то ймовірність попадання точки, кинутої навмання (в поясненому вище змісті) в область g – частину області G, дорівнює

$$P = {mesg}/{mesG}. \tag{3.2}$$

Задача 3.1. На площині накреслено два концентричні кола, радіуси яких дорівнюють відповідно 15 см і 20 см. Знайти ймовірність того, що точка, кинута навмання у великий круг, попаде в кільце, утворене даними колами. Припускається, що ймовірність попадання точки в плоску фігуру пропорційна площі цієї фігури і не залежить від її розміщення відносно великого круга.

Розв'язання. Площа кільця (фігури g) $S_g = \pi\left(20^2 - 15^2\right) = 175\pi$.

Площа великого круга (фігури G) $S_G = \pi \cdot 20^2 = 400\pi$.

Шукана ймовірність $P = \dfrac{175\pi}{400\pi} = \dfrac{7}{16}$.

Задача 3.2. Два студенти домовились зустрітися в певному місці між 12 і 13 годинами дня. Студент, який прийде першим, чекає іншого протягом 15 хвилин, після чого покидає місце зустрічі. Знайти ймовірність того, що зустріч відбудеться, якщо кожен студент вибирає навмання момент свого приходу (в проміжку від 12 до13 години).

Розв'язання. Припустимо для простоти, що зустріч повинна відбутися між 0 і 1 годинами. Позначимо момент приходу першого та другого студента відповідно через x і y. За умовою задачі $0 \le x \le 1,\ 0 \le y \le 1.$

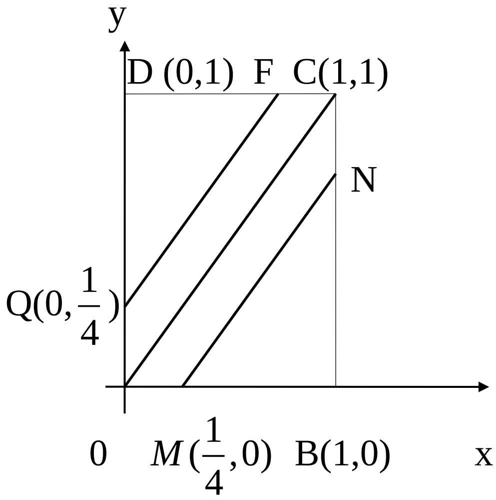


Рис.1

Введемо прямокутну декартову систему координат xOy. В цій системі координат задані подвійні нерівності задовольняють координати будь-якої точки квадрата OBCD. Таким чином, цей квадрат можна розглядати як фігуру G, координати точок якої представляють всі можливі значення моментів приходу студентів. Зустріч відбудеться, якщо $|y-x| \le \frac{1}{4}$, тобто $-\frac{1}{4} \le y-x \le \frac{1}{4}$. Звідси $x-\frac{1}{4} \le y \le x+\frac{1}{4}.$ (*)

Побудуємо прямі MN і QF, рівняння яких відповідно $y = x-\frac{1}{4}$ і $y = x+\frac{1}{4}.$

Координати будь-якої точки заштрихованого шестикутника OMNCFQ задовольняють систему нерівностей $(*)$. Таким чином, цей шестикутник можна розглядати як фігуру g, координати точок якої є сприятливими моментами часу x і y.

Шукана ймовірність $P = {S_g}/{S_G}$.

$S_G = 1;\quad S_g = 1-(1-\frac{1}{4})^2 = 1-(\frac{3}{4})^2 = \frac{7}{16};\quad P = \frac{7}{16}.$

1.4. Теореми додавання та множення ймовірностей

Сумою $A+B$ двох подій A та B називається подія, яка полягає в появі хоча б однієї із подій A і B. Наприклад, якщо зроблено два постріли і A – попадання при першому пострілі, B – попадання при другому пострілі, то $A+B$ – попадання при першому, або при другому, або при обох пострілах.

Якщо дві події A та B – несумісні, то їх сума $A+B$ – це подія, яка полягає в появі однієї із цих подій, байдуже якої.

Сумою декількох подій називають подію, яка полягає в появі хоча б однієї із цих подій.

Теорема додавання ймовірностей несумісних подій. Ймовірність суми двох несумісних подій дорівнює сумі ймовірностей цих подій:

$$P(A+B)=P(A)+P(B). \qquad (4.1)$$

Ця теорема справедлива для довільного числа несумісних подій:

$$P(A_1+A_2+...+A_n)=P(A_1)+P(A_2)+...+P(A_n). \qquad (4.2)$$

Задача 4.1. Стрілець стріляє по мішені, розділені на 3 області. Ймовірність попадання в першу область дорівнює 0,45, у другу 0,35. Знайти ймовірність того, що стрілець при одному пострілі попаде або в першу, або в другу область.

Розв'язання. Позначимо подію A – стрілець попав у першу область, а B – у другу. Дані події несумісні, тому можна застосувати теорему про додавання ймовірностей несумісних подій.

Шукана ймовірність $P(A+B)=P(A)+P(B)=0,45+0,35=0,8$.

Теорема. Сума ймовірностей подій $A_1, A_2, ..., A_n$, які утворюють повну групу, дорівнює одиниці:

$$P(A_1)+P(A_2)+...+P(A_n)=1. \qquad (4.3)$$

Доведення. Оскільки одна із подій повної групи – достовірна, а ймовірність достовірної події дорівнює одиниці, то $P(A_1+A_2+...+A_n)=1$. (1)

Будь-які дві події повної групи несумісні, тому можна застосувати теорему додавання

$$P(A_1+A_2+...+A_n)=P(A_1)+P(A_2)+...+P(A_n). \qquad (2)$$

Порівнюючи (1) та (2), отримаємо $P(A_1)+P(A_2)+...+P(A_n)=1$.

Задача 4.2. Консультаційний пункт університету отримує пакети з контрольними роботами з міст A, B і C. Ймовірність отримання контрольних з A дорівнює 0,7, з міста B – 0,2. Знайти ймовірність того, що наступний пакет контрольних надійде із міста C.

Розв'язання. Події «пакет надійде з міста A», «пакет надійде з міста B», «пакет надійде з міста C» утворюють повну групу, тому сума ймовірностей цих подій дорівнює одиниці:

$$0,7 + 0,2 + p = 1.$$

Звідси шукана ймовірність $p = 1 - 0,9 = 0,1$.

Протилежними подіями називаються дві несумісні події, які утворюють повну групу. Подію, протилежну до події *А*, позначають $\overline{A}$.

Приклад 1. Попадання і промах при пострілі по цілі – протилежні події.

Приклад 2. З ящика навмання вийняли деталь. Події «деталь виявилася стандартною» та «деталь виявилася нестандартною» – протилежні.

Теорема. Сума ймовірностей протилежних подій дорівнює одиниці:

$$P(A) + P(\overline{A}) = 1. \qquad (4.4)$$

Зауваження 1. Якщо ймовірність однієї з двох протилежних подій позначена через p, то ймовірність другої події позначають через q. Тоді за попередньою теоремою $p + q = 1$.

Зауваження 2. При розв'язуванні задач на знаходження ймовірності події A часто вигідніше спочатку знайти ймовірність події $\overline{A}$, а потім знайти шукану ймовірність за формулою

$$P(A) = 1 - P(\overline{A}).$$

Добутком *АВ* подій *А* та *В* називається подія, яка полягає у сумісній появі обох подій *А* і *В*. Наприклад, якщо A – деталь придатна, B – деталь пофарбована, то AB – деталь придатна і пофарбована.

Якщо події *А* та *В* несумісні, то їх добуток *АВ* є неможливою подією.

Добутком декількох подій називають подію, яка полягає в спільній появі всіх цих подій.

Умовною ймовірністю $P(A/B)$ події A називається ймовірність цієї події, обчислена в припущенні, що подія B відбулася. Аналогічно визначається умовна ймовірність $P(B/A)$.

Теорема множення ймовірностей. Ймовірність сумісної появи двох подій дорівнює добутку ймовірності однієї з них на умовну ймовірність іншої, обчислену в припущені, що перша подія вже відбулася:

$$P(AB)=P(A)\cdot P(B/A). \tag{4.5}$$

Наслідок. Ймовірність сумісної появи декількох подій дорівнює добутку ймовірності однієї з них на умовні ймовірності всіх інших, причому ймовірність кожної наступної події обчислюють у припущенні, що всі попередні події вже відбулися:

$$P(A_1A_2...A_n)=P(A_1)\cdot P(A_2/A_1)\cdot P(A_3/A_1A_2)\cdot...\cdot P(A_n/A_1A_2A_3...A_{n-1}). \tag{4.6}$$

Дві події називаються ***незалежними***, якщо поява однієї з них не змінює ймовірності появи іншої. Декілька подій називаються незалежними, якщо незалежні кожні дві з них і незалежні кожна подія і всі можливі добутки інших.

У випадку двох незалежних подій:

$$P(AB)=P(A)\cdot P(B), \tag{4.7}$$

тобто ймовірність сумісної появи двох незалежних подій дорівнює добутку ймовірностей цих подій.

Ймовірність сумісної появи декількох подій, незалежних у сукупності, дорівнює добутку ймовірностей цих подій:

$$P(A_1A_2...A_n)=P(A_1)\cdot P(A_2)\cdot P(A_3)\cdot...\cdot P(A_n). \tag{4.8}$$

Задача 4.3. В обмінному пункті є 10 банкнот 10-ти доларових купюр з них 4 нових. Обмінник навмання видає 2 купюри. Яка ймовірність того, що обидві купюри нові.

Розв'язання. Нехай A – подія, яка полягає у тому, що перша видана купюра нова; B – друга купюра нова;

Ймовірність того, що обидві купюри нові:

$$P(AB)=P(A)\cdot P(B/A)=\frac{4}{10}\cdot\frac{3}{9}=\frac{2}{5}\cdot\frac{1}{3}=\frac{2}{15}\approx 0{,}13.$$

Задача 4.4. В ящику 10 деталей, з них 8 стандартних. З ящика навмання виймають 3 деталі. Знайти ймовірність того, що всі вийняті деталі стандартні.

Розв'язання. Розглянемо подію A – всі три вийняті деталі стандартні.

Подія A є добутком трьох подій:

$A=A_1A_2A_3$,

де A_1, A_2, A_3 – подія, яка полягає в тому, що відповідно перша, друга, третя вийнята деталь стандартна.

За теоремою множення ймовірностей

$$P(A) = P(A_1) \cdot P(A_2/A_1)P(A_3/A_1A_2);$$

$$P(A_1) = \frac{8}{10} = \frac{4}{5}; \quad P(A_2/A_1) = \frac{7}{9}; \quad P(A_3/A_1A_2) = \frac{6}{8} = \frac{3}{4}.$$

Отже, шукана ймовірність $P(A) = \frac{4}{5} \cdot \frac{7}{9} \cdot \frac{3}{4} = \frac{7}{15} \approx 0,467$.

Дві події називаються ***сумісними***, якщо поява однієї з них не виключає появи іншої в одному випробуванні.

Теорема додавання сумісних подій. Ймовірність появи хоча б однієї із двох сумісних подій дорівнює сумі ймовірностей цих подій без ймовірності їх сумісної появи:

$$P(A+B) = P(A) + P(B) - P(AB). \tag{4.9}$$

Дана теорема може бути узагальнена на будь-яку скінченну кількість сумісних подій. Наприклад, для трьох сумісних подій:

$$P(A+B+C) = P(A) + P(B) + P(C) - P(AB) - P(AC) - P(BC) + P(ABC). \tag{4.10}$$

Задача 4.5. Ймовірність попадань в ціль при стрільбі з першої гармати 0,8, з другої 0,7. Знайти ймовірність попадання в ціль при стрільбі з двох гармат одночасно, якщо попаданням є попадання по крайній мірі з однієї гармати.

Розв'язання.
A – попадання в ціль з першої гармати.

B – попадання в ціль з другої гармати.

Ймовірність попадання в ціль принаймні з однієї гармати:
$$P(A+B) = P(A) + P(B) - P(AB) = 0,8 + 0,7 - 0,8 \cdot 0,7 = 1,5 - 0,56 = 0,94.$$

Задача 4.6. Пристрій складається з трьох елементів, які працюють незалежно. Ймовірності безвідмовної роботи за час t першого, другого і третього елементів відповідно дорівнюють 0,6; 0,7; 0,8. Знайти ймовірність того, що за час t безвідмовно будуть працювати: а) два елементи; б) хоча б один елемент.

Розв'язання. а) Розглянемо подію А, яка полягає в тому, що за час t будуть безвідмовно працювати два елементи. Ця подія може здійснитися такими способами:

можуть безвідмовно працювати перший та другий елементи, а третій елемент відмовити;

або можуть безвідмовно працювати перший та третій елементи, а другий елемент відмовити;

або можуть безвідмовно працювати другий та третій елементи, а перший елемент відмовити. Отже,

$$A = A_1 A_2 \overline{A}_3 + A_1 \overline{A}_2 A_3 + \overline{A}_1 A_2 A_3,$$

де A_1, A_2, A_3 – безвідмовна робота за час t відповідно першого, другого, третього елемента; $\overline{A}_1, \overline{A}_2, \overline{A}_3$ – відмова за час t відповідно першого, другого, третього елемента.

Події $B_1 = A_1 A_2 \overline{A}_3$; $B_2 = A_1 \overline{A}_2 A_3$; $B_3 = \overline{A}_1 A_2 A_3$ несумісні.

Оскільки події A_1, A_2, A_3 незалежні, то незалежні також події $A_1, A_2\ i\ \overline{A}_3$; $A_1, \overline{A}_2\ i\ A_3$; $\overline{A}_1, A_2\ i\ A_3$. Застосувавши теореми додавання та множення ймовірностей, отримаємо

$$P(A) = P(A_1)P(A_2)P(\overline{A}_3) + P(A_1)P(\overline{A}_2)P(A_3) + P(\overline{A}_1)P(A_2)P(A_3).$$

$$P(A_1) = 0,6;\ P(A_2) = 0,7;\ P(A_3) = 0,8.$$

$$P(\overline{A}_1) = 1 - 0,6 = 0,4;\ P(\overline{A}_2) = 1 - 0,7 = 0,3;\ P(\overline{A}_3) = 1 - 0,8 = 0,2$$

Остаточно $P(A) = 0,6 \cdot 0,7 \cdot 0,2 + 0,6 \cdot 0,3 \cdot 0,8 + 0,4 \cdot 0,7 \cdot 0,8 = 0,452$.

б) Розглянемо подію С, яка полягає в тому, що за час t буде працювати хоч би один елемент. Нехай $\overline{C}$ – протилежна подія до події C, тобто подія $\overline{C}$ полягає в тому, що за час t всі три елементи відмовлять. Очевидно, що $\overline{C} = \overline{A}_1 \overline{A}_2 \overline{A}_3$. За теоремою множення ймовірностей

$$P(\overline{C}) = P(\overline{A}_1)P(\overline{A}_2)P(\overline{A}_3) = 0,4 \cdot 0,3 \cdot 0,2 = 0,024.$$

Отже, отримаємо $P(C) = 1 - P(\overline{C}) = 1 - 0,024 = 0,976.$

Розв'язування типових задач

Задача 1. Партію зі 100 деталей піддали вибірковому контролю. Умовою непридатності всієї партії є наявність принаймні однієї бракованої деталі з п'яти, які обстежуються. Яка ймовірність для цієї партії бути прийнятою, якщо вона містить 5% непридатних деталей?

Розв'язання. Знайдемо ймовірність події A, яка полягає в тому, що партія деталей буде прийнята. Подія A є перетином подій A_1, A_2, A_3, A_4, A_5, якщо A_k – подія, яка полягає в тому, що k –та деталь придатна $\left(k = 1, 2, 3, 4, 5\right)$: $A = A_1 A_2 A_3 A_4 A_5$.

Ймовірність події A_1 визначається як $P\left(A_1\right) = \frac{95}{100}$, оскільки серед 100 деталей 5% браку, тобто п'ять бракованих деталей; $P\left(A_2 / A_1\right)$ – ймовірність появи другої придатної деталі за умови, що подія A_1 відбулась (перша деталь виявилася придатною), тобто із загальної кількості деталей, що дорівнює 100, спочатку вибрали одну, залишилось 99, з яких 94 придатні. Тому $P\left(A_2 / A_1\right) = \frac{94}{99}$. Аналогічно можна знайти такі умовні ймовірності:

$$P\left(A_3 / A_1 A_2\right) = \frac{93}{98}; \quad P\left(A_4 / A_1 A_2 A_3\right) = \frac{92}{97}; \quad P\left(A_5 / A_1 A_2 A_3 A_4\right) = \frac{91}{96}.$$

Отже, $P\left(A\right) = \frac{95}{100} \cdot \frac{94}{99} \cdot \frac{93}{98} \cdot \frac{92}{97} \cdot \frac{91}{96} \approx 0,77$.

Задача 2. У трьох ящиках є по 10 деталей. У першому ящику 8, у другому 7 і в третьому 9 стандартних деталей. Із кожного ящика навмання виймають по одній деталі. Знайти ймовірність того, що всі три вийняті деталі виявляться стандартними.

Розв'язання. Нехай A – подія, яка полягає у тому, що з першого ящика вийняли стандартну деталь; B – з другого ящика вийняли стандартну деталь; C – з третього ящика вийняли стандартну деталь.

Оскільки A, B та C незалежні події, то шукана ймовірність дорівнює

$$P\left(ABC\right) = P\left(A\right) P\left(B\right) P\left(C\right) = \frac{8}{10}\frac{7}{10}\frac{9}{10} = 0,504.$$

Задача 3. В шухляді є 11 карток розрізної абетки: 4 картки з літерою «и», 5 – з літерою «р» і 2 – «м». Навмання витягуються три картки і розкладаються на стіл зліва на право. Знайти ймовірність того, що в результаті отримають слово «мир».

Розв'язання. Нехай A – подія, яка полягає у тому, що отримають слово «мир»; A_1 – перша картка має літеру «м»; A_2 – друга картка має літеру «и»; A_3 – третя «р». Подія A відбудеться, якщо відбудеться і подія A_1, і подія A_2, і подія A_3, тобто $A = A_1A_2A_3$. Тоді за теоремою множення ймовірностей для залежних подій

$$P(A) = P(A_1A_2A_3) = P(A_1)\cdot P(A_2/A_1)\cdot P(A_3/A_1A_2) = \frac{2}{11}\cdot\frac{4}{10}\cdot\frac{5}{9} = \frac{4}{99}.$$

Задача 4. Два стрільці зробили по одному пострілу в мішень. Ймовірність влучення для першого стрільця дорівнює 0,8, для другого – 0,9. Знайти ймовірність того, що: а) обидва стрільці влучать у мішень; б) принаймні один зі стрільців влучить у мішень; в) лише один зі стрільців влучить у мішень; г) жоден не влучить.

Розв'язання. а) Позначимо через A – подію, яка полягає у тому, що обидва стрільці влучать у мішень; A_1 – перший стрілець влучить у мішень; A_2 – другий стрілець влучить у мішень. Подію A можна розглядати як перетин двох незалежних подій A_1 і A_2. За теоремою множення для незалежних подій

$$P(A) = P(A_1A_2) = P(A_1)\cdot P(A_2) = 0{,}8\cdot 0{,}9 = 0{,}72.$$

б) Позначимо через B – подію, яка полягає у тому, що принаймні один зі стрільців влучить у мішень. Вона являє собою суму двох сумісних подій A_1 і A_2

$$P(B) = P(A_1 + A_2) = P(A_1) + P(A_2) - P(A_1A_2) = 0{,}8 + 0{,}9 - 0{,}72 = 0{,}98.$$

в) Позначимо через C – подію, яка полягає у тому, що лише один зі стрільців влучить у мішень; C_1 – влучить тільки перший стрілець; C_2 – влучить тільки другий. Подія C являє собою суму двох несумісних подій C_1 та C_2.

Поява події C_1 рівносильна появі події $A_1\overline{A_2}$ (перший стрілець влучив і не влучив другий), тобто $C_1 = A_1\overline{A_2}$. Поява події C_2 рівносильна появі події $\overline{A_1}A_2$ (другий стрілець влучив і не влучив перший), тобто $C_2 = \overline{A_1}A_2$. Події C_1 та C_2 несумісні, тому за теоремою додавання несумісних подій:

$$P(C) = P(C_1 + C_2) = P(C_1) + P(C_2) = P\left(A_1\overline{A_2}\right) + P\left(\overline{A_1}A_2\right) =$$
$$= P(A_1)P\left(\overline{A_2}\right) + P\left(\overline{A_1}\right)P(A_2) = 0{,}8\cdot 0{,}1 + 0{,}2\cdot 0{,}9 = 0{,}26.$$

г) Позначимо через D – подію, яка полягає у тому, що жоден стрілець не влучить у мішень. Подію D можна розглядати як перетин двох незалежних подій $\overline{A_1}$ і $\overline{A_2}$. За теоремою множення для незалежних подій

$$P(D)=P\left(\overline{A_1}\,\overline{A_2}\right)=P\left(\overline{A_1}\right)\cdot P\left(\overline{A_2}\right)=0,2\cdot 0,1=0,02\,.$$

Зазначимо, що подія D протилежна події B, тому ймовірність події D можна знайти ще й так: $P(D)=1-P(B)=1-0,98=0,02$.

Задача 5. У зв'язці шість різних ключів, з яких тільки одним можна відкрити замок. Навмання вибирається ключ і робиться спроба відкрити ним замок. Ключ, що не підійшов, більше не використовується. Знайти ймовірність того, що для відкривання буде використано не більше трьох ключів.

Розв'язання. Позначимо $A_k\ (k=1,2,3)$ – замок буде відкрито k-тим за порядку відбору ключем, B – замок відкриється після використання не більше трьох ключів. Подія B відбудеться, якщо до замка підійде або перший ключ (відбудеться подія A_1), або другий (при цьому перший ключ не підійшов – відбудеться подія $\overline{A_1}\cdot A_2$), або третій (перший і другий ключі не підійшли – подія $\overline{A_1}\cdot\overline{A_2}\cdot A_3$). Тобто $B=A_1+\overline{A_1}A_2+\overline{A_1}\,\overline{A_2}A_3$.

Оскільки доданки є попарно несумісними подіями, то отримаємо

$$P(B)=P\left(A_1+\overline{A_1}A_2+\overline{A_1}\,\overline{A_2}A_3\right)=P(A_1)+P\left(\overline{A_1}A_2\right)+P\left(\overline{A_1}\,\overline{A_2}A_3\right)=$$

$$=P(A_1)+P\left(\overline{A_1}\right)P\left(A_2/\overline{A_1}\right)+P\left(\overline{A_1}\right)P\left(\overline{A_2}/\overline{A_1}\right)P\left(A_3/\overline{A_1}\,\overline{A_2}\right)=\frac{1}{6}+\frac{5}{6}\frac{1}{5}+\frac{5}{6}\frac{4}{5}\frac{1}{4}=0,5.$$

Задача 6. Екзаменаційний білет містить три питання. Ймовірність того, що студент відповість на перше і друге питання дорівнює по 0,85, на третє 0,8. Знайти ймовірність того, що студент здасть екзамен, якщо для цього необхідно відповісти: а) на всі питання; б) хоча б на два питання.

Розв'язання. а) Нехай подія A полягає у тому, що студент відповість на всі питання; $A_k\ (k=1,2,3)$ – студент відповість на k-те питання. Подія $A=A_1A_2A_3$. За теоремою про добуток незалежних подій отримаємо

$$P(A)=P(A_1)P(A_2)P(A_3)=0,85\cdot 0,85\cdot 0,8=0,578\,.$$

б) Нехай B – подія, яка полягає у тому, що студент відповість хоча б на два питання. Тоді $B=A_1A_2\overline{A_3}+A_1\overline{A_2}A_3+\overline{A_1}A_2A_3+A_1A_2A_3$.

$$P(B)=P(A_1)P(A_2)P\left(\overline{A_3}\right)+P(A_1)P\left(\overline{A_2}\right)P(A_3)+$$

$$+P\left(\overline{A_1}\right)P(A_2)P(A_3)+P(A_1)P(A_2)P(A_3)=$$

$$=0,85\cdot 0,85\cdot 0,2+0,85\cdot 0,15\cdot 0,8+0,15\cdot 0,85\cdot 0,8+0,578=0,927\,.$$

Задача 7. Для сигналізації про аварію встановлено три незалежно працюючих пристрої. Ймовірність того, що при необхідності запрацює перший пристрій дорівнює 0,8, другий 0,85, третій 0,95. Знайти ймовірність того, що при аварії запрацює:

а) тільки один пристрій;

б) тільки два пристрої;

в) хоча б один пристрій.

Розв'язання. а) Розглянемо подію A, яка полягає у тому, що при аварії запрацює тільки один пристрій. Ця подія може здійснитися такими способами: може працювати перший пристрій, а другий та третій пристрої відмовити; або може працювати другий, а перший та третій відмовлять; або третій працює, а перший та другий відмовлять. Позначимо A_k $(k = 1, 2, 3)$ – запрацює k-тий пристрій, тоді

$$A = A_1\overline{A_2}\,\overline{A_3} + \overline{A_1}A_2\overline{A_3} + \overline{A_1}\,\overline{A_2}A_3.$$

$$P(A) = 0,8 \cdot 0,15 \cdot 0,05 + 0,2 \cdot 0,85 \cdot 0,05 + 0,2 \cdot 0,15 \cdot 0,95 = 0,043.$$

б) Нехай B подія, яка полягає у тому, що запрацює тільки два пристрої, тоді

$$B = A_1A_2\overline{A_3} + A_1\overline{A_2}A_3 + \overline{A_1}A_2A_3.$$

$$P(B) = P(A_1)P(A_2)P(\overline{A_3}) + P(A_1)P(\overline{A_2})P(A_3) + P(\overline{A_1})P(A_2)P(A_3) =$$

$$= 0,8 \cdot 0,85 \cdot 0,05 + 0,8 \cdot 0,15 \cdot 0,95 + 0,2 \cdot 0,85 \cdot 0,95 = 0,3095.$$

в) Розглянемо подію C, яка полягає у тому, що при аварії запрацює хоча б один пристрій. Нехай $\overline{C}$ – протилежна до події C і означає, що при аварії жоден пристрій не працюватиме. Очевидно, що $\overline{C} = \overline{A_1}\,\overline{A_2}\,\overline{A_3}$, тоді

$$P(\overline{C}) = P(\overline{A_1})P(\overline{A_2})P(\overline{A_3}) = 0,2 \cdot 0,15 \cdot 0,05 = 0,0015.$$

Отже, шукана ймовірність $P(C) = 1 - 0,0015 = 0,9985$.

1.5. Формула повної ймовірності. Формула Бейєса

Якщо подія *A* може відбутися тільки разом з однією із несумісних подій (гіпотез) $H_1, H_2, ..., H_n$, які утворюють повну групу, то ймовірність події *A* дорівнює сумі добутків ймовірностей кожної із гіпотез і відповідних умовних ймовірностей події *A*:

$$P(A) = \sum_{i=1}^{n} P(H_i) \cdot P\left(A/H_i\right); \qquad (5.1)$$

де $\sum_{i=1}^{n} P(H_i) = 1$.

Ця формула називається формулою повної ймовірності.

З формулою повної ймовірності тісно пов'язана формула Бейєса, яка дозволяє переоцінити ймовірності гіпотез після того, як в результаті випробовувань появилася подія *A*. Умовна ймовірність гіпотези $H_к$ $P\left(H_k/A\right)$ обчислюється за формулою Бейєса

$$P(H_k / A) = \frac{P(H_k) \cdot P\left(A/H_k\right)}{\sum_{i=1}^{n} P(H_i) P(A/H_i)}; \qquad (5.2)$$

де $k = 1,2,...,n$.

Задача 5.1. На складання надходять деталі з трьох автоматів. Перший автомат дає 25%, другий 30% і третій 45% деталей, що надходять на складання. Перший автомат допускає 0,1% браку деталей, другий – 0,2%, третій – 0,3%. Знайти ймовірність того, що на складання надійде бракована деталь.

Розв'язання. Позначимо через *A* подію «на складання надійшла бракована деталь». Можна висунути три гіпотези: H_1 – деталь виготовлена першим автоматом; H_2 – деталь виготовлена другим автоматом; H_3 – деталь виготовлена третім автоматом. Згідно з умовою задачі $P(H_1)=0,25$, $P(H_2)=0,30$, $P(H_3)=0,45$. Умовна ймовірність $P(A/H_1)$ (ймовірність того, що деталь буде бракованою, якщо вона виготовлена першим автоматом) дорівнює 0,001; аналогічно $P(A/H_2) = 0,002$; $P(A/H_3) = 0,003$.

Шукану ймовірність того, що на складання надійде бракована деталь, обчислимо за формулою повної ймовірності (5.1):

$$P(A) = P(H_1) \cdot P(A/H_1) + P(H_2) \cdot P(A/H_2) + P(H_3) \cdot P(A/H_3) =$$
$$= 0,25 \cdot 0,001 + 0,30 \cdot 0,002 + 0,45 \cdot 0,003 = 0,0022.$$

Задача 5.2. Ймовірність того, що виріб деякого виробництва стандартний, дорівнює 0,96. Пропонується спрощена система перевірки на стандартність, яка дає позитивний результат з ймовірністю 0,98 для виробів, що відповідають стандарту, а для виробів з відхиленнями від стандарту – з ймовірністю 0,05. Знайти ймовірність того, що виріб, який при спрощеній системі перевірки визнаний стандартним, дійсно відповідає стандарту.

Розв'язання. Подію, яка полягає в тому, що при спрощеній системі перевірки виріб визнаний стандартним, позначимо через *A*. Розглянемо дві гіпотези: H_1 – виріб відповідає стандарту; H_2 – виріб має відхилення від стандарту. Події H_1 і H_2 несумісні та утворюють повну групу. $P(H_1)=0,96; P(H_2)=1-0,96=0,04$.

З умови задачі випливає, що $P(A/H_1)=0,98; P(A/H_2)=0,05.$

Шукану умовну ймовірність $P(H_1/A)$ знайдемо за формулою Бейєса (5.2):

$$P(H_1/A)=\frac{P(H_1)\cdot P(A/H_1)}{P(H_1)P(A/H_1)+P(H_2)\cdot P(A/H_2)}=\frac{0,96\cdot 0,98}{0,96\cdot 0,98+0,04\cdot 0,05}\approx 0,998.$$

Задача 5.3. Прилад складається з двох вузлів. Безвідмовна робота кожного вузла необхідна для функціонування приладу. Ймовірності безвідмовної роботи за час t для цих вузлів відповідно дорівнюють $p_1=0,8;\ \ p_2=0,7.$ Прилад вийшов з ладу на протязі часу t. Знайти ймовірність того, що: а) відмовив тільки другий вузол; б) відмовили обидва вузли.

Розв'язання. а) Позначимо через A подію, яка полягає в тому, що за час t прилад вийшов з ладу. Можливі чотири гіпотези:

H_1 – обидва вузли справні на протязі часу t;

H_2 – перший вузол відмовив, а другий справний на протязі часу t.

H_3 – перший вузол справний, а другий відмовив на протязі часу t.

H_4 – обидва вузли відмовили на протязі часу t.

Обчислимо ймовірності гіпотез.

$P(H_1)=p_1\cdot p_2=0,8\cdot 0,7=0,56$; $\qquad P(H_2)=(1-p_1)p_2=0,2\cdot 0,7=0,14$;

$P(H_3)=p_1(1-p_2)=0,8\cdot 0,3=0,24$; $\quad P(H_4)=(1-p_1)(1-p_2)=0,2\cdot 0,3=0,06$.

Оскільки при відмові хоч би одного з двох вузлів прилад виходить з ладу, то $P(A/H_1)=0; P(A/H_2)=P(A/H_3)=P(A/H_4)=1.$

Шукану умовну ймовірність $P(H_3/A)$ обчислимо за формулою Бейєса

$$P(H_3/A)=\frac{P(H_3)\cdot P(A/H_3)}{\sum_{i=1}^{4}P(H_i)P(A/H_i)}=\frac{0,24\cdot 1}{0,56\cdot 0+0,14\cdot 1+0,24\cdot 1+0,06\cdot 1}=\frac{0,24}{0,44}\approx 0,545.$$

б) Шукану умовну ймовірність $P(H_4/A)$ також обчислимо за формулою Бейєса:

$$P(H_4/A)=\frac{0,06\cdot 1}{0,44}\approx 0,136.$$

Розв'язування типових задач

Задача 1. На складання надходять деталі з чотирьох верстатів. Їх продуктивності $4:3:2:1$ відповідно. Серед деталей виготовлених на першому верстаті брак становить $1,5\%$, на другому – 1%, на третьому – 2%, на четвертому – 3%.

1) Знайти ймовірність того, що навмання взята деталь буде бракованою.

2) Вийнята навмання деталь виявилася бракованою. Знайти ймовірність того, що вона виготовлена на третьому верстаті.

Розв'язання. 1) Позначимо через A подію «вийнята деталь буде бракованою». Можна зробити чотири припущення (гіпотези):

B_1 – деталь виготовлена на першому верстаті, причому $P(B_1)=\frac{4}{10}=0,4$;

B_2 – деталь виготовлена на другому верстаті, причому $P(B_2)=\frac{3}{10}=0,3$;

B_3 – деталь виготовлена на третьому верстаті, причому $P(B_3)=\frac{2}{10}=0,2$;

B_4 – деталь виготовлена на четвертому верстаті, причому $P(B_4)=\frac{1}{10}=0,1$.

$\left(P(B_1)+P(B_2)+P(B_3)+P(B_4)=0,4+0,3+0,2+0,1=1.\right)$

Умовна ймовірність того, що деталь буде бракованою, якщо вона виготовлена на першому верстаті, $P(A/B_1)=0,015$. Умовна ймовірність того, що деталь буде бракованою, якщо вона виготовлена на другому верстаті, $P(A/B_2)=0,01$. Умовна ймовірність того, що деталь буде бракованою, якщо вона виготовлена на третьому верстаті, $P(A/B_3)=0,02$. Умовна ймовірність того, що деталь буде бракованою, якщо вона виготовлена на четвертому верстаті, $P(A/B_4)=0,03$.

Ймовірність того, що навмання взята деталь виявиться бракованою, за формулою повної ймовірності дорівнює

$$P(A)=P(B_1)\cdot P(A/B_1)+P(B_2)P(A/B_2)+P(B_3)P(A/B_3)+P(B_4)P(A/B_4)=$$
$$=0,4\cdot 0,015+0,3\cdot 0,01+0,2\cdot 0,02+0,1\cdot 0,03=0,006+0,003+0,004+0,003=0,016.$$

2) Шукана ймовірність того, що вийнята бракована деталь виготовлена на третьому верстаті, за формулою Бейєса дорівнює

$$P(B_3/A)=\frac{P(B_3)P(A/B_3)}{P(A)}=\frac{0,02\cdot 0,2}{0,016}=\frac{0,004}{0,016}=0,25.$$

Задача 2. У трьох урнах лежать білі і чорні кулі. У першій урні 5 білих і 2 чорних, у другій 8 білих і 7 чорних, у третій 10 білих і 5 чорних кулі. З навмання взятої урни виймають одну кулю. Знайти ймовірність того, що вона буде білою.

Розв'язання. Позначимо через A подію – вийняли білу кулю. Можна зробити три припущення (гіпотези):

B_1 – кулю вийняли з першої урни,

B_2 – кулю вийняли з другої урни,

B_3 – кулю вийняли з третьої урни.

Оскільки всього є три гіпотези, причому за умовою вони рівноможливі, і сума ймовірностей гіпотез дорівнює одиниці, то ймовірність кожної гіпотези $\frac{1}{3}$, тобто

$$P(B_1) = P(B_2) = P(B_3) = \frac{1}{3}.$$

Умовна ймовірність того, що виймуть білу кулю, якщо вибрали першу урну, $P(A/B_1) = \frac{5}{7}$.

Умовна ймовірність того, що виймуть білу кулю, якщо вибрали другу урну, $P(A/B_2) = \frac{8}{15}$.

Умовна ймовірність того, що виймуть білу кулю, якщо вибрали третю урну, $P(A/B_3) = \frac{10}{15}$.

Шукану ймовірність того, що виймуть білу кулю, знаходимо за формулою повної ймовірності

$$P(A) = P(B_1)\cdot P(A/B_1) + P(B_2)P(A/B_2) + P(B_3)P(A/B_3) =$$
$$= \frac{1}{3}\cdot\frac{5}{7} + \frac{1}{3}\cdot\frac{8}{15} + \frac{1}{3}\cdot\frac{10}{15} = \frac{1}{3}\left(\frac{5}{7} + \frac{18}{15}\right) = \frac{1}{3}\left(\frac{5}{7} + \frac{6}{5}\right) = \frac{1}{3}\cdot\frac{25+42}{35} = \frac{67}{105} \approx 0,638.$$

Задача 3. Із урни, що містить 3 білі і 2 чорні кулі, переклали 2 кулі до урни, яка містить 4 білі та 4 чорні кулі. Після цього із другої урни навмання виймають одну кулю. Яка ймовірність того, що вона буде білою?

Розв'язання. Позначимо через A подію – вийнята куля буде білою. Можна зробити три припущення (гіпотези) про колір двох куль перекладених із першої урни в другу: B_1 – переклали дві білі кулі, B_2 – переклали дві чорні кулі, B_3 – переклали одну білу й одну чорну кулю. Тоді ймовірності гіпотез відповідно дорівнюють

$$P(B_1) = \frac{3}{5}\cdot\frac{2}{4} = \frac{3}{10} = 0,3; \quad P(B_2) = \frac{2}{5}\cdot\frac{1}{4} = \frac{1}{10} = 0,1; \quad P(B_3) = \frac{3}{5}\cdot\frac{2}{4} + \frac{2}{5}\cdot\frac{3}{4} = \frac{6}{10} = 0,6.$$

Якщо переклали дві білі кулі (гіпотеза B_1), то в другій урні буде 6 білих куль та 4 чорні. Умовна ймовірність того, що виймуть білу кулю $P(A/B_1) = \frac{6}{10} = 0,6$.

Якщо переклали дві чорні кулі (гіпотеза B_2), то в другій урні буде 4 білих та 6 чорних куль. Умовна ймовірність того, що виймуть білу кулю $P(A/B_2) = \frac{4}{10} = 0,4$.

Якщо переклали одну білу й одну чорну кулі (гіпотеза B_3), то в другій урні буде 5 білих та 5 чорних куль. Умовна ймовірність того, що виймуть білу кулю $P\left(A/B_3\right)=\frac{5}{10}=0,5$.

Шукану ймовірність того, що виймуть білу кулю, знаходимо за формулою повної ймовірності

$$P\left(A\right)=P\left(B_1\right)\cdot P\left(A/B_1\right)+P\left(B_2\right)P\left(A/B_2\right)+P\left(B_3\right)P\left(A/B_3\right)=$$
$$=0,3\cdot 0,6+0,1\cdot 0,4+0,6\cdot 0,5=0,18+0,04+0,3=0,52.$$

Задача 4. Студент знає відповіді на 25 білетів із 30. В якому випадку ймовірність успішного складання іспиту більша, коли він візьме білет першим чи другим?

Розв'язання. Потрібно знайти ймовірність події A – «студент знає витягнутий білет» для двох випадків: 1) він іде першим; 2) він бере білет другим.

1) Нехай студент бере білет першим. Тоді ймовірність витягти той білет, який знає студент, за класичним означенням ймовірності

$$P\left(A\right)=\frac{m}{n}=\frac{25}{30}=\frac{5}{6}.$$

2) Нехай студент бере білет другим. Можливі дві гіпотези: B_1 – попередній студент взяв білет який знає другий; B_2 – попередній студент взяв білет який не знає другий.

Ймовірності гіпотез:

$$P\left(B_1\right)=\frac{25}{30}=\frac{5}{6};\ P\left(B_2\right)=\frac{5}{30}=\frac{1}{6}.$$

Відповідні умовні ймовірності:

$$P\left(A/B_1\right)=\frac{24}{29};\quad P\left(A/B_2\right)=\frac{25}{29}.$$

За формулою повної ймовірності, маємо:

$$P\left(A\right)=P\left(B_1\right)\cdot P\left(A/B_1\right)+P\left(B_2\right)P\left(A/B_2\right)=\frac{5}{6}\cdot\frac{24}{29}+\frac{1}{6}\cdot\frac{25}{29}=\frac{5\left(24+5\right)}{6\cdot 29}=\frac{5}{6}.$$

Отже, отримані ймовірності для обох випадків рівні, і для студента байдуже, брати білет першим чи другим. (Використовуючи формулу повної ймовірності, можна переконатися, що можливість витягти білет на який студент знає відповідь не залежить від того, коли студент складає іспит: першим, другим, третім, …. чи останнім.)

Задача 5. Є три однакові ящики: в першому – 14 стандартних і 6 нестандартних деталей, у другому – 17 стандартних і 3 нестандартних і в третьому – 9 стандартних та 1 нестандартна деталь. З навмання вибраного ящика вийняли одну деталь, вона виявилась стандартною. Знайти ймовірність того, що вона вийнята з першого ящика.

Розв'язання. Позначимо A – подія, яка полягає у тому, що навмання вийнята деталь виявилася стандартною. Можна зробити три припущення (гіпотези): B_1 – деталь вийнята з першого ящика, B_2 – деталь вийнята з другого ящика, B_3 – деталь вийнята з третього ящика.

Оскільки всього є три гіпотези, причому за умовою вони рівноможливі, і сума ймовірностей гіпотез дорівнює одиниці, то ймовірність кожної гіпотези $\frac{1}{3}$, тобто

$$P(B_1) = P(B_2) = P(B_3) = \frac{1}{3}.$$

Умовна ймовірність того, що виймуть стандартну деталь, якщо вибрали перший ящик, $P(A/B_1) = \frac{14}{20} = 0,7$.

Умовна ймовірність того, що виймуть стандартну деталь, якщо вибрали другий ящик, $P(A/B_2) = \frac{17}{20} = 0,85$.

Умовна ймовірність того, що виймуть стандартну деталь, якщо вибрали третій ящик, $P(A/B_3) = \frac{9}{10} = 0,9$.

Ймовірність того, що стандартну деталь вийняли з першого ящика знаходимо за формулою Бейєса

$$P(B_1/A) = \frac{P(B_1)\cdot P(A/B_1)}{P(B_1)\cdot P(A/B_1) + P(B_2)P(A/B_2) + P(B_3)P(A/B_3)} =$$

$$= \frac{\frac{1}{3}\cdot 0,7}{\frac{1}{3}\cdot 0,7 + \frac{1}{3}\cdot 0,85 + \frac{1}{3}\cdot 0,9} = \frac{0,7}{0,7 + 0,85 + 0,9} = \frac{0,7}{2,45} \approx 0,286.$$

Задача 6. Ймовірність влучити в мішень при одному пострілі для першого стрільця $0,6$, для другого – $0,5$, для третього – $0,4$. Стрільці зробили залп по мішені. Відомо, що дві кулі влучили в мішень. Що ймовірніше: влучив третій стрілець чи ні?

Розв'язання. Позначимо подію A – два влучення при трьох пострілах. Можливі дві гіпотези: B_1 – третій стрілець влучив, B_2 – третій стрілець не влучив. Потрібно порівняти $P\left(B_1 / A\right)$ та $P\left(B_2 / A\right)$.

Ймовірності гіпотез: $P\left(B_1\right) = 0,4$, $P\left(B_2\right) = 1 - 0,4 = 0,6$.

Умовна ймовірність того, що буде два влучення, якщо третій стрілець влучив і влучив перший або другий, $P\left(A / B_1\right) = 0,6 \cdot 0,5 + 0,4 \cdot 0,5 = 0,3 + 0,2 = 0,5$.

Умовна ймовірність того, що буде два влучення, якщо третій стрілець не влучив, $P\left(A / B_2\right) = 0,6 \cdot 0,5 = 0,3$.

Отже,

$$P\left(B_1 / A\right) = \frac{0,4 \cdot 0,5}{0,4 \cdot 0,5 + 0,6 \cdot 0,3} = \frac{0,20}{0,38} = \frac{10}{19};$$

$$P\left(B_2 / A\right) = \frac{0,6 \cdot 0,3}{0,4 \cdot 0,5 + 0,6 \cdot 0,3} = \frac{0,18}{0,38} = \frac{9}{19}.$$

Оскільки $P\left(B_1 / A\right) > P\left(B_2 / A\right)$, то ймовірніше, що третій стрілець влучив.

Задача7. У піраміді 5 гвинтівок, три з яких мають приціл. Ймовірність того, що стрілець влучить у мішень при пострілі з гвинтівки з оптичним прицілом, дорівнює 0,95; для гвинтівки без оптичного прицілу ця ймовірність дорівнює 0,7. Знайти ймовірність того, що мішень буде уражена, якщо стрілець зробить один постріл з гвинтівки яку він взяв із піраміди навмання.

Розв'язання. Позначимо подію A – мішень буде уражена. Можливі дві гіпотези: B_1 – стрілець вибере гвинтівку з оптичним прицілом; B_2 – стрілець вибере гвинтівку без оптичного прицілу.

$$P\left(B_1\right) = \frac{3}{5}; \qquad P\left(B_2\right) = \frac{2}{5};$$

$$P\left(A / B_1\right) = 0,95; \qquad P\left(A / B_2\right) = 0,7$$

Отже, ймовірність того, що мішень буде уражена

$$P\left(A\right) = \frac{3}{5} \cdot 0,95 + \frac{2}{5} \cdot 0,7 = \frac{1}{5}\left(3 \cdot 0,95 + 2 \cdot 0,7\right) = \frac{1}{5}\left(2,85 + 1,4\right) = \frac{1}{5} \cdot 4,25 = 0,85.$$

Задача 8. До магазину надходять вироби із двох заводів, при чому з першого заводу надходять у 4 рази більше виробів, ніж з другого. Перший завод випускає в середньому 0,5% бракованої продукції, другий 0,2%. Куплений в магазині виріб виявився придатним. Яка ймовірність того, що він був виготовлений на другому заводі.

Розв'язання. Позначимо подію A – виріб виявився придатним. Можливі дві гіпотези: B_1 – виріб виготовлений на першому заводі; B_2 – виріб виготовлений на другому заводі.

$$P(B_1)=\frac{4}{5};\ P(B_2)=\frac{1}{5}.$$

$$P(A/B_1)=1-0,005=0,995;\qquad P(A/B_2)=1-0,002=0,998.$$

Отже, ймовірність того, що куплений придатний виріб виготовлено на другому заводі

$$P(B_2/A)=\frac{\frac{1}{5}\cdot 0,998}{\frac{4}{5}\cdot 0,995+\frac{1}{5}\cdot 0,998}=\frac{0,998}{3,98+0,998}=\frac{0,998}{4,978}\approx 0,2.$$

Задача 9. На складі є три партії деталей по 20 деталей у кожній. Кількість стандартних деталей в першій, другій і третій партіях 20, 15, 10 відповідно. Із навмання вибраної партії навмання вийнята деталь виявилась стандартною. Деталь повертають в партію і повторно з цієї ж партії навмання виймають деталь, яка також виявилась стандартною. Знайти ймовірність того, що деталі були вийняті з третьої партії.

Розв'язання. Позначимо через A подію – в кожному з двох випробувань (з поверненням) було вийнято стандартну деталь. Можна зробити три припущення (гіпотези): B_1 – деталі виймали з першої партії, B_2 – деталі виймали з другої партії, B_3 – деталі виймали з третьої партії.

Оскільки всього є три гіпотези, причому за умовою вони рівноможливі, то

$$P(B_1)=P(B_2)=P(B_3)=\frac{1}{3}.$$

Знайдемо умовну ймовірність того, що з першої парії буде послідовно вийнято дві стандартні деталі. Ця подія достовірна, бо в першій партії всі деталі стандартні, тому $P(A/B_1)=1$.

Знайдемо умовну ймовірність того, що з другої партії буде послідовно вийнято (з поверненням) дві стандартні деталі:

$$P(A/B_2)=\frac{15}{20}\cdot\frac{15}{20}=\frac{9}{16}.$$

Знайдемо умовну ймовірність того, що з третьої партії буде послідовно вийнято (з поверненням) дві стандартні деталі:

$$P\left(A/B_3\right)=\frac{10}{20}\cdot\frac{10}{20}=\frac{1}{4}.$$

Шукана ймовірність того, що обидві стандартні деталі взяли з третьої партії, за формулою Бейєса дорівнює

$$P\left(B_3/A\right)=\frac{P\left(B_3\right)\cdot P\left(A/B_3\right)}{P\left(B_1\right)\cdot P\left(A/B_1\right)+P\left(B_2\right)P\left(A/B_2\right)+P\left(B_3\right)P\left(A/B_3\right)}=$$

$$=\frac{\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{4}}{\frac{1}{3}\cdot 1+\frac{1}{3}\cdot\frac{9}{16}+\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{4}}=\frac{4}{29}.$$

1.6. Повторення випробувань. Формула Бернуллі. Найімовірніше число появи події в незалежних випробуваннях

Декілька випробувань називаються незалежними, якщо ймовірність того чи іншого результату кожного з випробувань не залежить від результатів усіх інших випробувань.

Якщо в кожному з n незалежних випробувань ймовірність появи події A стала і дорівнює p $(0<p<1)$, то ймовірність того, що в цих n випробуваннях подія A настане m разів, обчислюється за формулою Бернуллі

$$P_n(m)=C_n^m p^m q^{n-m}, \qquad (6.1)$$

де $C_n^m=\dfrac{n!}{m!(n-m)!}; q=1-p.$

Число m_0 появи події A в n незалежних випробуваннях, в кожному з яких ймовірність настання події дорівнює p, називається найімовірнішим, якщо ймовірність того, що подія A появиться в цих випробуваннях m_0 разів, не менша від ймовірностей інших можливих результатів випробувань. Число m_0 визначається з подвійної нерівності

$$np-q\le m_0\le np+p. \qquad (6.2)$$

Слід зазначити, що різниця чисел $np+p$ і $np-q$ дорівнює одиниці. Якщо $np+p$ не є цілим числом, то існує одне найімовірніше число m_0. Зокрема, якщо np – ціле число, то $m_0 = np$. Якщо $np+p$ – ціле число, то існує два найімовірніших числа $m_o' = np-q$ і $m_o'' = np+p$.

Задача 6.1. Прилад складається із п’яти блоків. Ймовірність безвідмовної роботи на протязі часу t для кожного блоку p = 0,7. Блоки виходять з ладу незалежно один від одного. Знайти ймовірність того, що за час t будуть безвідмовно працювати: а) чотири блоки; б) не менше чотирьох блоків; в) не більше чотирьох блоків; г) хоч би один блок.

Розв’язання. а) за умовою задачі n = 5, m = 4, p = 0,7, q = 0,3. Скористуємося формулою Бернуллі (6.1): $P_5(4)=C_5^4\cdot p^4q=5\cdot 0,7^4\cdot 0,3\approx 0,360.$

б) Позначимо шукану ймовірність $P_5(m \ge 4)$. Те, що на протязі часу t будуть безвідмовно працювати не менше чотирьох блоків, означає, що будуть справними або чотири, або п'ять блоків.

Отже, $P_5(m \ge 4) = P_5(4) + P_5(5)$.

Ймовірність $P_5(4)$ обчислена в попередньому пункті. Ймовірність $P_5(5)$ також обчислимо за формулою Бернуллі

$$P_5(5) = C_5^5 \cdot p^5 q^0 = 1 \cdot 0,7^5 \approx 0,168$$

$$P_5(m \ge 4) = 0,360 + 0,168 = 0,528.$$

в) Ймовірність того, що будуть безвідмовно працювати не більше чотирьох блоків,

$$P_5(m \le 4) = P_5(0) + P_5(1) + P_5(2) + P_5(3) + P_5(4).$$

В цьому випадку простіше знайти ймовірність протилежної події (на протязі часу t будуть безвідмовно працювати п'ять блоків) і відняти її від одиниці:

$$P_5(m \le 4) = 1 - P_5(m > 4) = 1 - P_5(5) \approx 1 - 0,168 = 0,832.$$

г) Протилежною до події «на протязі часу t буде безвідмовно працювати хоч би один блок» є подія «на протязі часу t всі блоки вийдуть з ладу».

Тому $P_5(m \ge 1) = 1 - P_5(0) = 1 - C_5^0 p^0 q^5 = 1 - 1 \cdot 0,3^5 \approx 0,998.$

Задача 6.2. ВТК перевіряє партію із 10 деталей. Ймовірність того, що деталь стандартна, дорівнює 0,85. Знайти найімовірніше число стандартних деталей в цій партії.

Розв'язання. За умовою задачі $p = 0,85$, $n = 10$, $q = 1 - p = 0,15$. Число m_0 визначається з подвійної нерівності (6.2), тобто

$$10 \cdot 0,85 - 0,15 \le m_0 \le 10 \cdot 0,85 + 0,85,$$

$$8,35 \le m_0 \le 9,35.$$

Оскільки m_0 ціле число, то очевидно, що m_0=9.

Розв'язування типових задач

Задача 1. Ймовірність появи події A в кожному із n незалежних випробувань стала і дорівнює p. Знайти:

1) ймовірність того, що в n незалежних випробуваннях подія A з'явиться: а) m разів; б) не менше m разів; в) не більше m разів; г) хоча б один раз.

2) найімовірніше число появи події A в n незалежних випробуваннях і ймовірність найімовірнішого числа появи події A в цих випробуваннях.

$n = 5$, $m = 3$, $p = 0,8$.

Розв'язання: 1) а) $P_5\left(3\right) = C_5^3 \cdot 0,8^3 \cdot 0,2^2 = \dfrac{5!}{3!2!} \cdot 0,64 \cdot 0,8 \cdot 0,04 = 0,2048$.

б) $P_5\left(m \ge 3\right) = P_5\left(3\right) + P_5\left(4\right) + P_5\left(5\right)$.

$$P_5\left(4\right) = C_5^4 \cdot 0,8^4 \cdot 0,2 = 5 \cdot 0,64 \cdot 0,64 \cdot 0,2 = 0,4096;$$

$$P_5\left(5\right) = C_5^5 \cdot 0,8^5 \cdot 0,2^0 = 0,64 \cdot 0,64 \cdot 0,8 = 0,3277;$$

$$P_5\left(m \ge 3\right) = 0,2048 + 0,4096 + 0,3277 = 0,9421.$$

в) $P_5(m \le 3) = P_5(0) + P_5(1) + P_5(2) + P_5(3) = 1 - P_5(m > 3) = 1 - (P_5(4) + P_5(5)) =$

$= 1 - (0,4096 + 0,3277) = 1 - 0,7373 = 0,2627.$

г) $P_5(m \ge 1) = 1 - P_5(0) = 1 - 0,0003 = 0,9997$.

2) $p \cdot n - q \le m_0 \le p \cdot n + p$;

$0,8 \cdot 5 - 0,2 \le m_0 \le 0,8 \cdot 5 + 0,8;$

$4 - 0,2 \le m_0 \le 4 + 0,8;$

$3,8 \le m_0 \le 4,8$;

$m_0 = 4$.

$P_5(4) = 0,4096$

Задача 2. Два рівносильних шахісти грають в шахи. Що ймовірніше: виграти дві партії з чотирьох чи три партії із шести (нічиї до уваги не беруться)?

Розв'язання.

Оскільки шахісти рівносильні, то ймовірність виграшу $p = \frac{1}{2}$, а програшу також $p = \frac{1}{2}$.

$$P_4(2) = C_4^2 p^2 \cdot q^2 = \frac{4!}{2!2!} \cdot 0,5^2 \cdot 0,5^2 = \frac{6}{16};$$

$$P_6(3) = C_6^3 p^3 \cdot q^3 = \frac{6!}{3!3!} \cdot \frac{1}{2^3} \cdot \frac{1}{2^3} = \frac{4 \cdot 5 \cdot 6}{2 \cdot 3} \cdot \frac{1}{8} \cdot \frac{1}{8} = \frac{5}{16}.$$

Отже, ймовірніше виграти дві партії з чотирьох.

Задача 3. Товарознавець оглядає 24 зразки товару. Ймовірність того, що кожен із зразків буде визнано придатним для продажу, дорівнює 0,6. Знайти найімовірніше число зразків, які товарознавець признає придатними для продажу.

Розв'язання:

$p \cdot n - q \le m_0 \le p \cdot n + p;$

$24 \cdot 0,6 - 0,4 \le m_0 \le 14,4 + 0,6;$

$14 \le m_0 \le 15.$

Отже, найімовірніших чисел є два: 14 і 15.

Задача 4. Батарея зробила шість пострілів по об'єкту. Ймовірність попадання в об'єкт при одному пострілі дорівнює 0,3. Знайти: а) найімовірніше число попадань; б) ймовірність найімовірнішого числа попадань; в) ймовірність того, що об'єкт буде знищено, якщо для цього достатньо хоча б двох попадань.

Розв'язання. $n = 6$, $p = 0,3$, $q = 0,7$.

а) $p \cdot n - q \le m_0 \le p \cdot n + p$;

$6 \cdot 0,3 - 0,7 \le m_0 \le 6 \cdot 0,3 + 0,3$;

$1,8-0,7 \le m_0 \le 1,8+0,3$;

$1,1 \le m_0 \le 2,1$;

$m_0 = 2$.

б) $P_6(2) = C_6^2 \cdot p^2 \cdot q^4 = \dfrac{6!}{2!\cdot 4!} \cdot 0,3^2 \cdot 0,7^4 = \dfrac{5\cdot 6}{2} \cdot 0,09 \cdot 0,49 \cdot 0,49 = 15 \cdot 0,021609 = 0,324$.

в) A – об'єкт буде зруйновано

$P(A) = P_6(2) + P_6(3) + P_6(4) + P_6(5) + P_6(6)$.

B – жодного попадання або 1 попадання

$P(B) = P_6(0) + P_6(1) = C_6^0 \cdot p^0 \cdot q^6 + C_6^1 \cdot p^1 \cdot q^5 = \dfrac{6!}{0!6!} \cdot 0,7^6 + \dfrac{6!}{1!5!} \cdot 0,3 \cdot 0,7^5 =$

$= 0,49 \cdot 0,49 \cdot 0,49 + 1,8 \cdot 0,49 \cdot 0,49 \cdot 0,7 = 0,118 + 0,303 = 0,421$;

$P(A) = 1 - 0,421 = 0,579$.

Задача 5. З колоди 36 карт навмання виймають 107 разів одну карту. Яке найімовірніше число появи пікової дами?

Розв'язання. $n = 107$, $p = \dfrac{1}{36}$, $q = \dfrac{35}{36}$. $p \cdot n - q \le m_0 \le p \cdot n + p$;

$107 \cdot \dfrac{1}{36} - \dfrac{35}{36} \le m_0 \le 107 \cdot \dfrac{1}{36} + \dfrac{1}{36}$;

$\dfrac{72}{36} \le m_0 \le \dfrac{108}{36}$;

$2 \le m_0 \le 3$.

Отже, найімовірніших чисел є два: 2 і 3.

Задача 6. Під час передавання повідомлення ймовірність перекручення одного знаку дорівнює $\dfrac{1}{10}$. Знайти ймовірність того, що повідомлення з 10 знаків: а) не буде мати перекручень; б) містить рівно 3 перекручення; в) містить не більше 3 перекручень.

Розв'язання. $p = \dfrac{1}{10}$, $q = \dfrac{9}{10}$, $n = 10$.

а) $P_{10}(0) = C_{10}^0 \cdot p^0 q^{10} = \dfrac{10!}{0!10!} \left(\dfrac{1}{10}\right)^0 \cdot \dfrac{9^{10}}{10^{10}} = 0,9^{10} = 0,3487$.

б) $P_{10}(3) = C_{10}^3 \cdot p^3 q^7 = \dfrac{10!}{3!7!} \cdot 0,1^3 \cdot 0,9^7 = \dfrac{8 \cdot 9 \cdot 10}{2 \cdot 3} \cdot 0,001 \cdot 0,4783 = 0,057$.

в) $P_{10}(m \le 3) = P_{10}(0) + P_{10}(1) + P_{10}(2) + P_{10}(3)$.

$P_{10}(1) = \dfrac{10!}{1!9!} 0,1 \cdot 0,9^9 = 1 \cdot 0,387 = 0,387$;

$P_{10}(2) = \dfrac{10!}{2!8!} \cdot 0,1^2 \cdot 0,9^8 = \dfrac{9 \cdot 10}{2} \cdot 0,01 \cdot 0,43 = 0,194$;

$P_{10}(m \le 3) = 0,349 + 0,387 + 0,194 + 0,057 = 0,987$.

1.7. Локальна та інтегральна теореми Муавра-Лапласа. Формула Пуассона

Якщо число випробувань n велике, то застосування формули Бернуллі приводить до громіздких обчислень. Тому в таких випадках користуються асимптотичними формулами.

Локальна теорема Муавра – Лапласа. Якщо ймовірність p появи події A в кожному з n незалежних випробувань стала, причому $0 < p < 1$, а число випробувань досить велике, то ймовірність того, що в цих випробуваннях подія A настане m разів, визначається за формулою

$$P_n(m) \approx \frac{1}{\sqrt{npq}}\varphi(x), \tag{7.1}$$

де $\varphi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{x^2}{2}}, x = \frac{m-np}{\sqrt{npq}}; q = 1-p.$

Функція $\varphi(x)$ парна: $\varphi(-x) = \varphi(x)$. Є таблиці, в яких наведені значення функції $\varphi(x)$, що відповідають додатним значенням аргументу; для $x > 5$ приймають $\varphi(x) \approx 0$.

Інтегральна теорема Муавра – Лапласа. Якщо ймовірність p появи події A в кожному з n незалежних випробувань стала, причому $0 < p < 1$, а число випробувань досить велике, то ймовірність того, що в цих випробуваннях подія A настане не менше m_1 разів і не більше m_2 разів, визначається за формулою

$$P_n(m_1 \le m \le m_2) \approx \Phi(x_2) - \Phi(x_1), \tag{7.2}$$

де $\Phi(x)$ – функція Лапласа, $\Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_0^x e^{-\frac{t^2}{2}}dt; x_1 = \frac{m_1-np}{\sqrt{npq}}; x_2 = \frac{m_2-np}{\sqrt{npq}}$, $q = 1-p$.

Функція Лапласа непарна: $\Phi(-x) = -\Phi(x)$. Є таблиці значень цієї функції для додатних значень x; для $x > 5$ приймають $\Phi(x) \approx 0,5$.

Задача 7.1. Ймовірність виходу з ладу за час t одного конденсатора дорівнює 0,2. Знайти ймовірність того, що за час t із 100 конденсаторів вийдуть з ладу: а) 18 конденсаторів: б) не менше 16 і не більше 26 конденсаторів.

Розв'язання. а) За умовою $p = 0,2$; $n = 100$; $m = 18$; $q = 1- 0,2 = 0,8$. Оскільки $n = 100$ – досить велике число, то застосуємо локальну теорему Муавра – Лапласа. Обчислимо значення

$$x = \frac{18-20}{\sqrt{100 \cdot 0,2 \cdot 0,8}} = -0,5.$$

Шукана ймовірність $P_{100}(18) \approx \frac{1}{\sqrt{100 \cdot 0,2 \cdot 0,8}} \cdot \varphi(-0,5) = \frac{1}{4}\varphi(0,5).$

За таблицею значень функції $\varphi(x)$ знайдемо $\varphi(0,5) = 0,3521.$ Отже, $P_{100}(18) \approx 0,0880.$

б) За умовою задачі $m_1 = 16; m_2 = 26$; $n = 100$; $p = 0,2$; $q = 0,8$. Скористаємося інтегральною теоремою Муавра-Лапласа. Обчислимо значення

$$x_1 = \frac{16-20}{4} = -1; \quad x_2 = \frac{26-20}{4} = 1,5.$$

Враховуючи, що функція Лапласа непарна, отримуємо

$P_{100}(16 \le m \le 26) \approx \Phi(1,5) - \Phi(-1) = \Phi(1,5) + \Phi(1).$

За таблицею значень функцій Лапласа знайдемо $\Phi(1,5) = 0,4332;\ \ \Phi(1) = 0,3413.$

Шукана ймовірність $P_{100}(16 \le m \le 26) \approx 0,4332 + 0,3413 = 0,7745.$

Формула Пуассона. Якщо в кожному з n незалежних випробувань ймовірність p появи події A стала і мала $(p < 0,1)$, а число випробувань n досить велике, то ймовірність того, що подія A настане в цих випробуваннях m разів, визначається за формулою:

$$P_n(m) \approx \frac{\lambda^m e^{-\lambda}}{m!}, \tag{7.3}$$

де $\lambda = np$.

Для функції $\dfrac{\lambda^m e^{-\lambda}}{m!}$, яка є функцією двох змінних λ і m, складені таблиці.

Задача 7.2. Завод відправив споживачу партію із 1000 виробів. Ймовірність пошкодження в дорозі кожного із виробів дорівнює 0,004. Знайти ймовірність того, що споживач отримає 3 пошкодженні вироби.

Розв'язання. За умовою задачі n = 1000; m = 3; p = 0,004. Оскільки ймовірність появи подій в одному випробуванні мала, а число випробувань досить велике, то скористаємося формулою Пуассона (3).

$$\lambda = np = 4;\quad P_{1000}(3) \approx \frac{4^3 \cdot e^{-4}}{3!} \approx 0,1954.$$

Ймовірність відхилення відносної частоти події від її ймовірності в незалежних випробуваннях. Якщо ймовірність p появи події A в кожному з n незалежних випробувань стала, причому $0 < p < 1$, а число випробовувань досить велике, то ймовірність того, що відхилення відносної частоти $\dfrac{m}{n}$ події A від її ймовірності p по абсолютній величині не перевищить заданого числа $\varepsilon > 0$, визначається за формулою:

$$P\left(\left|\frac{m}{n} - p\right| \le \varepsilon\right) \approx 2\Phi\left(\varepsilon \cdot \sqrt{\frac{n}{pq}}\right). \tag{7.4}$$

Задача 7.3. Ймовірність того, що деталь стандартна, p = 0,9. Скільки потрібно взяти деталей, щоб з ймовірністю $\gamma = 0,9876$ можна було сподіватися, що відносна частота появи стандартних деталей серед відібраних буде відрізнятися від ймовірності p по абсолютній величині не більше ніж на 0,03?

Розв'язання. За умовою задачі p = 0,9; q = 0,1; $\varepsilon = 0,03$;

$$P\left(\left|\frac{m}{n} - p\right| \le 0,03\right) = \gamma\ .$$

Потрібно знайти n.

Скористаємося формулою (7.4). Позначимо $t=\varepsilon\cdot\sqrt{\frac{n}{pq}}$. Тоді $2\varPhi(t)=0,9876$, $\varPhi(t)=0,4938$.

За таблицею значень функції Лапласа знайдемо $\varPhi(2,5)=0,4938$.

Отже, t = 2,5, тобто $t=\varepsilon\cdot\sqrt{\frac{n}{pq}}=2,5.$

Для знаходження n одержимо рівняння $0,03\cdot\sqrt{\frac{n}{0,9\cdot 0,1}}=2,5.$

Шукане число деталей n = 625.

Розв'язування типових задач

Задача 1. Знайти ймовірність того, що в n незалежних випробувань подія A з'явиться m разів, якщо ймовірність появи події в кожному випробуванні стала і рівна p.

а) $n=400, m=290, p=0,7$.

б) $n=1000, m=4, p=0,006$.

Розв'язання.

а) $x=\frac{290-0,7\cdot 400}{\sqrt{400\cdot 0,7\cdot 0,3}}=\frac{10}{9,17}\approx 1,09$

$$P_{400}\left(290\right)=\frac{1}{\sqrt{400\cdot 0,7\cdot 0,3}}\cdot\varphi\left(1,09\right)\approx\frac{1}{9,17}\cdot 0,2203\approx 0,024.$$

б) $\lambda=1000\cdot 0,006=6$

$$P_{1000}\left(4\right)\approx\frac{6^4e^{-6}}{4!}\approx 0,1339.$$

Задача 2. Знайти ймовірність того, що в n незалежних випробувань подія A з'явиться:

а) не менше m_1 і не більше m_2 разів;

б) не менше m_4 разів;

в) не більше m_3 разів,

якщо ймовірність появи події в кожному випробуванні стала і рівна p.

$n=400, m_1=196, m_2=207, m_3=195, m_4=208, p=0,5$.

Розв'язання.

а) $P_{400}\left(196\le m\le 207\right)\approx\Phi\left(x_2\right)-\Phi\left(x_1\right)$;

$$x_1=\frac{196-400\cdot 0,5}{\sqrt{400\cdot 0,5\cdot 0,5}}=\frac{-4}{10}=-0,4; \qquad x_2=\frac{207-400\cdot 0,5}{\sqrt{400\cdot 0,5\cdot 0,5}}=\frac{7}{10}=0,7;$$

$$P_{400}\left(196\le m\le 207\right)\approx\Phi\left(0,7\right)+\Phi\left(0,4\right)=0,2580+0,1554=0,4134.$$

б) $P_{400}\left(208 \le m \le 400\right) \approx \Phi\left(x_2\right) - \Phi\left(x_1\right)$;

$$x_1 = \frac{208 - 400 \cdot 0,5}{\sqrt{400 \cdot 0,5 \cdot 0,5}} = 0,8; \qquad x_2 = \frac{400 - 400 \cdot 0,5}{\sqrt{400 \cdot 0,5 \cdot 0,5}} = 20;$$

$$P_{400}\left(208 \le m \le 400\right) \approx \Phi\left(20\right) - \Phi\left(0,8\right) = 0,5 - 0,2881 = 0,2119.$$

в) $P_{400}\left(0 \le m \le 195\right) \approx \Phi\left(x_2\right) - \Phi\left(x_1\right)$;

$$x_1 = \frac{0 - 400 \cdot 0,5}{\sqrt{400 \cdot 0,5 \cdot 0,5}} = -20; \qquad x_2 = \frac{195 - 400 \cdot 0,5}{\sqrt{400 \cdot 0,5 \cdot 0,5}} = -0,5;$$

$$P_{400}\left(0 \le m \le 195\right) \approx -\Phi\left(0,5\right) + \Phi\left(20\right) = -0,1915 + 0,5 = 0,3085.$$

Задача 3. Ймовірність появи події A в кожному із n незалежних випробувань дорівнює p. Знайти ймовірність того, що відносна частота появи події A буде відрізнятись від її ймовірності p по абсолютній величині не більше ніж на ε.

$n = 625, p = 0,7, \varepsilon = 0,03$.

Розв'язання.

$$P\left(\left|\frac{m}{n} - p\right| \le 0,03\right) \approx 2\Phi\left(0,03 \cdot \sqrt{\frac{625}{0,7 \cdot 0,3}}\right) = 2\Phi\left(1,6366\right) = 2 \cdot 0,4495 = 0,899.$$

Задача 4. Ймовірність появи події A в кожному із n незалежних випробувань дорівнює p. Скільки потрібно виконати випробувань, щоб можна було сподіватися з ймовірністю γ, що відносна частота появи події A буде відрізнятися від її ймовірності по абсолютній величині не більше ніж на ε?

$p = 0,6, \gamma = 0,92, \varepsilon = 0,02$

Розв'язання. $P\left(\left|\frac{m}{n} - p\right| \le 0,02\right) \approx 0,92$;

$$2\Phi\left(0,02 \cdot \sqrt{\frac{n}{0,6 \cdot 0,4}}\right) \approx 0,92;$$

$$\Phi\left(0,02 \cdot \sqrt{\frac{n}{0,24}}\right) \approx 0,46;$$

$$0,02 \cdot \sqrt{\frac{n}{0,24}} \approx 1,76;$$

$$\sqrt{\frac{n}{0,24}} \approx 88;$$

$$\frac{n}{0,24} \approx 7744;$$

$$n = 1859.$$

Задача 5. Ймовірність появи події A в кожному із n незалежних випробувань p. Знайти таке додатне ε, щоб можна було сподіватися з ймовірністю γ, що відносна частота появи події A буде відрізнятися від її ймовірності по абсолютній величині не більше ніж на ε.

$n = 700, p = 0,8, \gamma = 0,992$

Розв'язання. $P\left(\left|\frac{m}{n} - p\right| \le \varepsilon\right) \approx 0,992;$

$2\Phi\left(\varepsilon \cdot \sqrt{\frac{700}{0,8 \cdot 0,2}}\right) \approx 0,992; \quad \Phi\left(\varepsilon \cdot \sqrt{\frac{700}{0,16}}\right) \approx 0,496;$

$\varepsilon \cdot 66,14 \approx 2,65; \quad \varepsilon \approx 0,04.$

1.8. Найпростіший потік подій

Потоком подій називається послідовність подій, які відбуваються у випадкові моменти часу. Найпростішим називається потік подій, який має властивості стаціонарності, відсутності післядії та ординарності.

Властивість стаціонарності полягає в тому, що ймовірність появи m подій потоку за будь-який проміжок часу t залежить тільки від числа m і від тривалості часу t і не залежить від початку відліку часу.

Властивість відсутності після дії полягає в тому, що ймовірність появи m подій за будь-який проміжок часу не залежить від того, скільки подій появилось в попередні моменти часу.

Властивість ординарності, полягає в тому, що поява двох і більше подій за малий проміжок часу практично неможлива, тобто за малий проміжок часу може появитися не більше однієї події потоку.

Інтенсивністю λ потоку називається середнє число подій, які появляються за одиницю часу.

Якщо відома стала інтенсивність потоку то ймовірність появи m подій найпростішого потоку за час t визначається за формулою Пуассона:

$$P_t(m) = \frac{(\lambda t)^m e^{-\lambda t}}{m!}. \tag{8.1}$$

Задача 8.1. Середнє число викликів які, надходять на АТС за 1 хв., дорівнює двом. Знайти ймовірність того, що за 3 хв. на АТС надійде: а) чотири виклики; б) менше чотирьох викликів; в) не менше чотирьох викликів. Припускається, що потік викликів найпростіший.

Розв'язання. а) За умовою $\lambda = 2;\ t = 3;\ m = 4.$ Скористаємося формулою Пуассона (8.1). Ймовірність того, що за 3 хв. надійде чотири виклики,

$$P_3(4) = \frac{6^4 \cdot e^{-6}}{4!} = 0,133853.$$

При обчисленні $P_3(4)$ використано таблицю значень функцій Пуассона.

б) Подія «надійшло менше чотирьох викликів» відбудеться, якщо появиться одна з наступних несумісних подій: 1) не надійшло жодного виклику; 2) надійшов один виклик; 3) надійшло два виклики; 4) надійшло три виклики. Застосуємо теорему додавання ймовірностей для несумісних подій:

$$P_3(m<4)=P_3(0)+P_3(1)+P_3(2)+P_3(3)=e^{-6}+\frac{6e^{-6}}{1!}+\frac{6^2e^{-6}}{2!}+\frac{6^3e^{-6}}{3!}=$$
$$=0,002479+0,014873+0,044618+0,089236=0,151205.$$

в) Події «надійшло менше чотирьох викликів» та «надійшло не менше чотирьох викликів» протилежні, тому ймовірність того, що за 3 хв., надійде не менше чотирьох викликів,

$$P_3(m\geq 4)=1-P_3(m<4)=0,848795.$$

2. Випадкові величини

2.1. Випадкова величина. Закон розподілу дискретної випадкової величини

Випадковою називається величина, яка в результаті випробування прийме одне можливе значення, яке наперед невідоме і залежить від випадкових причин.

Випадкова величина називається ***дискретною***, якщо вона може приймати тільки скінченну або зчисленну множину значень.

Неперервною називається випадкова величина, можливі значення якої заповнюють деякий інтервал (скінченний або нескінченний).

Законом розподілу випадкової величини називається співвідношення, яке встановлює зв'язок між її можливими значеннями та відповідними ймовірностями.

Закон розподілу дискретної випадкової величини *X* може бути заданий таблицею, в якій записані можливі значення випадкової величини та відповідні ймовірності.

x_i	x_1	x_2	$\cdots$	x_n
p_i	p_1	p_2	$\cdots$	p_n

$$\sum_{i=1}^{n} p_i = 1.$$

Якщо множина можливих значень дискретної випадкової величини зчисленна: $x_1, x_2, ..., x_n$, то ряд $\sum_{i=1}^{\infty} p_i$ збігається і його сума дорівнює одиниці.

Така таблиця називається ***рядом розподілу*** дискретної випадкової величини *X*.

Закон розподілу дискретної випадкової величини *X* можна зобразити графічно: в прямокутній системі координат будують точки $M_1(x_1;p_1)$, $M_2(x_2;p_2)$,..., $M_n(x_n;p_n)$ і послідовно з'єднують їх відрізками прямих. Одержана фігура називається ***многокутником розподілу***.

Закон розподілу дискретної випадкової величини *X* можна задати аналітично (у вигляді формули): $P(X=x_i)=\Psi(x_i)$.

Задача 1.1. Ймовірність появи події A в кожному з n незалежних випробувань стала і дорівнює p. Нехай дискретна випадкова величина X – це число появи події A в цих випробуваннях. Можливі значення випадкової величини X : $x_1=0$, $x_2=1$, $x_3=2$, ... , $x_{n+1}= n$. Для знаходження ймовірностей цих можливих значень скористаємося формулою Бернуллі:

$$P(X=m)=C_n^m p^m q^{n-m}, \qquad (1.1)$$

де $m=0, 1, 2,.., n$; $q=1-p$.

Формула (1.1) є аналітичним виразом закону розподілу ймовірностей цієї випадкової величини X.

Закон розподілу ймовірностей, який визначається формулою Бернуллі називається ***біноміальним***. Цей закон назвали біноміальним тому, що праву частину рівності (1.1) можна розглядати як загальний член розкладу бінома Ньютона:

$$(p+q)^n = C_n^n p^n + C_n^{n-1} p^{n-1} q + ... + C_n^m p^m q^{n-m} + ... + C_n^0 q^n.$$

Таким чином, перший член розкладу p^n визначає ймовірність того, що в n незалежних випробуваннях подія A настане n разів: другий член $np^{n-1}q$ визначає ймовірність того, що подія A настане n-1 разів; ... ; останній член q^n визначає ймовірність того, що подія A не появиться жодного разу.

Задача 1.2. Нехай проводяться незалежні випробування, в кожному з яких ймовірність появи події A дорівнює p $(0<p<1)$. Випробовування закінчуються, як тільки появиться подія A. Позначимо через X дискретну випадкову величину – число випробувань, які потрібно провести до першої появи події A.

Можливими значеннями випадкової величини X є натуральні числа:

$$x_1=1, x_2=2, x_3=3, ... , x_n= n,...$$

Нехай в перших k-1 випробуваннях подія A не появилася, а в k-ому випробуванні вона настала. В цьому випадку $X=k$. За теоремою множення ймовірностей незалежних подій отримаємо

$$P(X=k)=q^{k-1}p, \qquad (1.2)$$

де $q=1-p$.

Підставляючи у формулу (1.2) $k=1, 2, 3, ..., n, ...$, одержимо геометричну прогресію з першим членом p і знаменником q $(0<q<1)$:

$$p, qp, q^2 p, ..., q^{n-1} p, ...$$

Тому закон розподілу ймовірностей, який визначається за формулою (1.2), називається ***геометричним***. Неважко перевірити, що ряд $p+qp+q^2p+...+q^{n-1}p+...$ збігається і його сума дорівнює 1.

Задача 1.3. Нехай в партії з N виробів є M стандартних $(M<N)$. З цієї партії навмання вибирають n виробів, причому вибраний виріб перед вибором наступного не повертається в партію. Позначимо через X дискретну випадкову величину – число стандартних виробів серед n вибраних. Можливі значення випадкової величини X: 0, 1, 2, ... , $min(M,n)$.

Знайдемо ймовірність того, що $X=m$, тобто, що серед n вибраних виробів буде m стандартних. Скористаємося для цього класичним означенням ймовірності. Загальне число всіх рівноможливих несумісних результатів випробування, які утворюють повну групу, дорівнює C_N^n. Число результатів, які сприяють появі події $X=m$ (серед взятих n виробів виявляються m стандартних і $n-m$ нестандартних виробів) дорівнює $C_M^m \cdot C_{N-M}^{n-m}$.

Отже,

$$P(X=m)=\frac{C_M^m \cdot C_{N-M}^{n-m}}{C_N^n}. \qquad (1.3)$$

Закон розподілу ймовірностей, який визначається формулою (1.3), називається ***гіпергеометричним***.

2.2. Функція розподілу ймовірностей випадкової величини

Як дискретну, так і неперервну випадкову величину можна задати функцією розподілу $F(x)$, яка визначає для кожного значення x ймовірність того, що випадкова величина X в результаті випробування прийме значення менше від x, тобто

$$F(x)=P(X<x). \qquad (2.1)$$

Функція розподілу будь-якої випадкової величини є неспадною функцією аргументу x, причому $0 \le F(x) \le 1$.

$$\lim_{x\to-\infty} F(x)=0; \quad \lim_{x\to+\infty} F(x)=1.$$

Якщо всі можливі значення випадкової величини X належать інтервалу (a,b), то $F(x)=0$ при $x \le a$, $F(x)=1$ при $x \ge b$.

Ймовірність того, що випадкова величина X в результаті випробування прийме значення, яке задовольняє подвійну нерівність $a \le X < b$,

$$P(a \le X < b)=F(b)-F(a). \qquad (2.2)$$

Можна уточнити означення неперервної випадкової величини: випадкова величина X називається ***неперервною***, якщо її функція розподілу $F(x)$ неперервна при всіх x, а похідна функції розподілу неперервна в усіх точках, крім, можливо, скінченного числа точок на будь-якому скінченному інтервалі.

Ймовірність того, що неперервна випадкова величина X прийме одне певне значення x_0, дорівнює нулю, тобто $P(X=x_0)=0$. Тому для неперервної випадкової величини X

$$P(a \le X < b)=P(a<X<b)=P(a<X\le b)=P(a\le X\le b).$$

Задача 2.1. Дискретна випадкова величина X задана законом розподілу

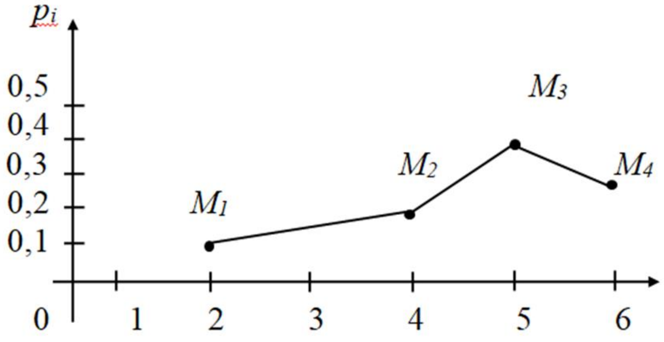
x_i	2	4	5	6
p_i	0,1	0,2	0,4	0,3

1. Побудувати многокутник розподілу.

2. Знайти функцію розподілу та побудувати її графік.

Розв'язання. 1. Побудуємо прямокутну систему координат, причому на осі абсцис будемо відкладати можливі значення x_i, а на осі ординат відповідні ймовірності p_i. Побудуємо точки $M_1(2;0,1)$, $M_2(4;0,2)$, $M_3(5;0,4)$, $M_4(6;0,3)$ та з'єднаємо їх послідовно відрізками прямих.

Одержимо шуканий многокутник розподілу.



2. За означенням функція розподілу $F(x) = F(X < x)$. Якщо $x \le 2$, то $F(x) = 0$, оскільки значень, які менші від 2, випадкова величина X не приймає.

Якщо $2 < x \le 4$, то $F(x) = 0,1$. Дійсно, X може прийняти тільки значення 2 з ймовірністю 0,1.

Якщо $4 < x \le 5$, то $F(x) = 0,1 + 0,2 = 0,3$. Дійсно, X може прийняти значення 2 з ймовірністю 0,1 і значення 4 з ймовірністю 0,2; отже, одне з цих значень випадкова величина X може прийняти з ймовірністю 0,3 (за теоремою додавання ймовірностей несумісних подій).

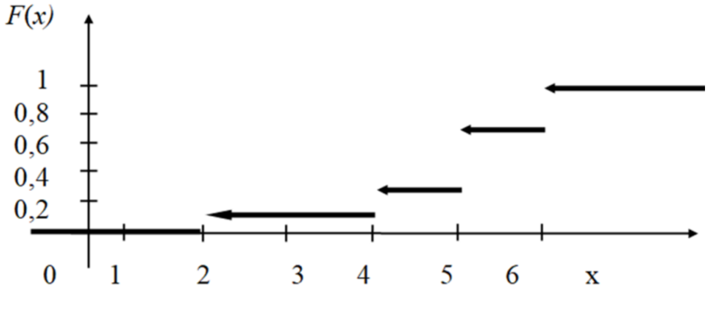
Якщо $5 < x \le 6$, то $F(x) = 0,1 + 0,2 + 0,4 = 0,7$ (пояснення аналогічне).

Якщо $5 < x$, то $F(x) = 1$, оскільки в цьому випадку подія $X < x$, є достовірною.

Отже, шукана функція розподілу має вигляд

$$F(x) = \begin{cases} 0 & при \quad x \le 2 \\ 0,1 & при \quad 2 < x \le 4 \\ 0,3 & при \quad 4 < x \le 5 \\ 0,7 & при \quad 5 < x \le 6 \\ 1 & при \quad x > 6 \end{cases}$$

Побудуємо графік цієї функції



Задача 2.2. Неперервна випадкова величина X задана на всій осі Ox функцією розподілу

$$F(x) = \frac{1}{2} + \frac{1}{\pi} arctgx.$$

1. Знайти ймовірність того, що в результаті випробування випадкова величина X прийме значення, яке належить інтервалу (-1,1).

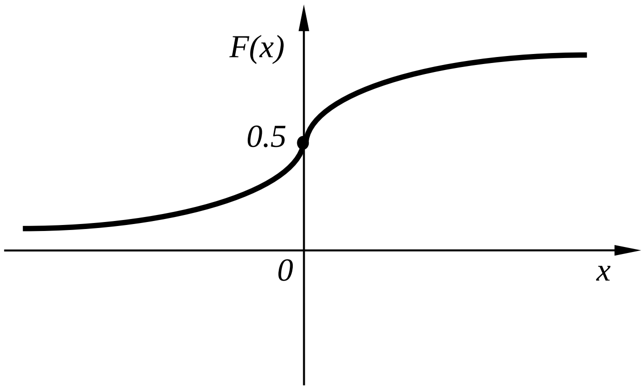
2. Побудувати графік функції $F(x)$.

Розв'язання. 1.

$$P(-1 < X < 1) = F(1) - F(-1) = \frac{1}{2} + \frac{1}{\pi} arctg1 - (\frac{1}{2} + \frac{1}{\pi} arctg(-1)) =$$

$$= \frac{2}{\pi} arctg1 = \frac{2}{\pi} \cdot \frac{\pi}{4} = 0,5.$$

2. Побудуємо графік функції розподілу $F(x)$.



2.3. Числові характеристики дискретних випадкових величин

Математичним сподіванням ДВВ X називається сума добутків усіх її можливих значень на відповідні ймовірності

$$M(X) = x_1 p_1 + x_2 p_2 + ... + x_n p_n. \qquad (3.1)$$

Якщо ДВВ X може приймати зчисленну множину значень $x_1, x_2, ..., x_n, ...$ з відповідними ймовірностями $p_1, p_2, ..., p_n, ...$, то $M(X) = \sum_{i=1}^{\infty} x_i p_i$ при умові, що цей ряд абсолютно збіжний.

Нехай виконано N випробувань і випадкова величина X прийняла в цих випробуваннях m_1 разів значення x_1, m_2 разів значення x_2, …, m_n разів значення x_n; $m_1 + m_2 + ... + m_n = N$. Обчислимо середнє арифметичне цих прийнятих значень:

$$\bar{X} = \frac{1}{N}\left(m_1 x_1 + m_2 x_2 + ... + m_n x_n\right) = \frac{m_1}{N} x_1 + \frac{m_2}{N} x_2 + ... + \frac{m_n}{N} x_n = w_1 x_1 + w_2 x_2 + ... + w_n x_n,$$

де w_i – відносна частота появи значення x_i у зроблених N випробуваннях $\left(i = 1, 2, ..., n\right)$.

Оскільки при великій кількості випробувань $w_1 \approx p_1, w_2 \approx p_2, ..., w_n \approx p_n$, то отримаємо

$$\bar{X} \approx p_1x_1 + p_2x_2 + ... + p_nx_n = M(X).$$

Отже, математичне сподівання наближено дорівнює середньому арифметичному значенню спостережуваних значень випадкової величини при досить великій кількості випробувань.

Властивості математичного сподівання

Властивість 1. Математичне сподівання сталої величини дорівнює цій сталій величині: $M(C) = C$.

Добутком сталої величини C на ДВВ X називається дискретна випадкова величина CX, можливі значення якої мають вигляд Cx_i $(i = 1, 2, ..., n)$, а відповідні ймовірності дорівнюють p_i $(i = 1, 2, ..., n)$.

Властивість 2. Сталий множник можна винести за знак математичного сподівання: $M(CX) = CM(X)$.

Дві випадкові величини називаються незалежними, якщо закон розподілу однієї з них не залежить від того, які можливі значення прийняла інша випадкова величина. Декілька випадкових величин називаються незалежними, якщо закони розподілу будь-якого числа з них не залежать від того, які можливі значення прийняли інші величини.

Добутком незалежних дискретних величин X і Y називається ДВВ XY, можливі значення якої дорівнюють добуткам кожного можливого значення .. на кожне можливе значення Y; ймовірності можливих значень XY дорівнюють добуткам ймовірностей відповідних можливих значень співмножників.

Властивість 3. Математичне сподівання добутку двох незалежних дискретних випадкових величин дорівнює добутку математичних сподівань цих величин: $M(XY) = M(X)M(Y)$.

Сумою дискретних випадкових величин X і Y називається ДВВ $X + Y$, можливі значення якої дорівнюють сумам кожного можливого значення X і кожного можливого значення Y; ймовірності можливих значень $X + Y$ для незалежних величин X і Y дорівнюють добуткам ймовірностей доданків, а для залежних величин X і Y – добуткам ймовірності одного доданка на умовну ймовірність іншого.

Властивість 4. Математичне сподівання суми двох дискретних випадкових величин дорівнює сумі математичних сподівань цих величин: $M(X+Y) = M(X) + M(Y)$.

Зауваження. Властивість 3 справджується для будь-якого скінченного числа незалежних випадкових величин, а властивість 4 – для будь-якого скінченного числа довільних випадкових величин (як незалежних, так і залежних).

Задача3.1. Незалежні ДВВ X і Y задані законом розподілу:

x_i	2	3
p_i	$0,4$	$0,6$

y_j	1	4
γ_j	$0,3$	$0,7$

Скласти закон розподілу дискретної випадкової величини XY.

Обчислити $M(X)$, $M(Y)$, $M(XY)$.

Розв'язання.

XY	2	3	8	12
p	0,12	0,18	0,28	0,42

$M(X) = 2 \cdot 0,4 + 3 \cdot 0,6 = 2,6$;

$M(Y) = 1 \cdot 0,3 + 4 \cdot 0,7 = 3,1$.

$M(XY)$ обчислимо безпосередньо і за властивістю 3.

а) $M(XY) = 2 \cdot 0,12 + 3 \cdot 0,18 + 8 \cdot 0,28 + 12 \cdot 0,42 = 8,06$;

б) $M(XY) = M(X) \cdot M(Y) = 2,6 \cdot 3,1 = 8,06$.

Дисперсією випадкової величини X називається математичне сподівання квадрата відхилення випадкової величини X від її математичного сподівання

$$D(X) = M\left[X - M(X)\right]^2. \qquad (3.2)$$

Дисперсія випадкової величини X є мірою розсіювання можливих значень випадкової величини навколо її математичного сподівання.

Якщо $x_1, x_2, ..., x_n$ – можливі значення ДВВ X; $p_1, p_2, ..., p_n$ – відповідні ймовірності можливих значень, то для обчислення дисперсії отримуємо формулу $D(X) = \sum_{i=1}^{n} \left[x_i - M(X)\right]^2 p_i$.

Але зручнішою формулою для обчислення дисперсії є така формула:

$D(X) = M(X^2) - \left[M(X)\right]^2$, тобто: $D(X) = \sum_{i=1}^{n} x_i^2 p_i - \left[M(X)\right]^2$.

Властивості дисперсії.

1. Дисперсія сталої величини C дорівнює нулю: $D(C) = 0$.

2. Сталий множник C можна винести за знак дисперсії, підносячи його до квадрата: $D(CX) = C^2 D(X)$.

3. Дисперсія суми двох незалежних дискретних випадкових величин дорівнює сумі дисперсій цих величин:

$D(X + Y) = D(X) + D(Y)$.

Ця властивість справджується для будь-якого скінченного числа незалежних випадкових величин.

Наслідок 1. Дисперсія суми сталої величини C і випадкової величини X дорівнює дисперсії випадкової величини X :

$D(C+X)=D(X)$.

Наслідок 2. Дисперсія різниці двох незалежних випадкових величин дорівнює сумі їхніх дисперсій:

$D(X-Y)=D(X)+D(Y)$.

Середнім квадратичним відхиленням випадкової величини X називається квадратний корінь із її дисперсії:

$$\sigma(X)=\sqrt{D(X)}. \quad (3.3)$$

Задача 3.2. Дискретна випадкова величина X задана законом розподілу:

x_i	-1	0	1	2	3
p_i	0,2	0,25	0,3	0,15	0,1

Знайти математичне сподівання, дисперсію та середнє квадратичне відхилення цієї випадкової величини.

Розв'язання.

$M(X)=-1\cdot 0,2+0\cdot 0,25+1\cdot 0,3+2\cdot 0,15+3\cdot 0,1=0,7$;

$$D(X)=M(X^2)-\left[M(X)\right]^2=(-1)^2\cdot 0,2+0^2\cdot 0,25+1^2\cdot 0,3+2^2\cdot 0,15+3^2\cdot 0,1-(0,7)^2=$$
$$=0,2+0,3+0,6+0,9-0,49=1,51.$$

$\sigma(X)=\sqrt{1,51}\approx 1,23$.

Задача3.3. ДВВ X може приймати тільки два значення: x_1 та x_2, при чому $x_1<x_2$.

Ймовірність того, що X прийме значення x_1, дорівнює p_1. Знайти закон розподілу випадкової величини X, якщо відомі її математичне сподівання $M(X)$ і дисперсія $D(X)$

$p_1=0,2$; $M(X)=3,6$; $D(X)=0,64$.

Розв'язання. Шуканий закон розподілу має вигляд:

x_i	x_1	x_2
p_i	0,2	p_2

Оскільки $p_1+p_2=1$, то $p_2=0,8$. Для знаходження x_1 та x_2 отримуємо систему рівнянь:

$$\begin{cases}0,2x_1+0,8x_2=3,6,\\ 0,2x_1^2+0,8x_2^2-12,96=0,64.\end{cases} \qquad \begin{cases}x_1+4x_2=18,\\ x_1^2+4x_2^2=68.\end{cases}$$

З першого рівняння визначимо x_1 і підставимо у друге рівняння.

$x_1=18-4x_2$;

$(18-4x_2)^2+4x_2^2=68$.

Після спрощень отримаємо:

$5x_2^2 - 36x_2 + 64 = 0$;

$D = 1296 - 1280 = 16$; $x_2' = \frac{36+4}{10} = 4$; $x_2'' = \frac{36-4}{10} = 3,2$. $x_1' = 2$; $x_1'' = 5,2$.

Оскільки повинна виконуватись умова $x_1 < x_2$, то одержуємо $x_1 = 2$; $x_2 = 4$, а закон розподілу ДВВ X набуває вигляду

x_i	2	4
p_i	0,2	0,8

Задача 3.4. В партії 25 деталей, серед яких є 6 нестандартних. Із цієї партії вибрані навмання для перевірки їх якості 3 деталі. Знайти математичне сподівання, дисперсію і середнє квадратичне відхилення дискретної випадкової величини X – числа нестандартних деталей, що містяться у вибірці.

Розв'язання. Можливі значення випадкової величини X : x_1=0, x_2=1, x_3=2, x_4=3. Ймовірність того, що в цій вибірці виявиться рівно m (m=0,1,2,3) нестандартних деталей, обчислюється за формулою

$$P(X = m) = \frac{C_6^m \cdot C_{19}^{3-m}}{C_{25}^3}.$$

Виконавши обчислення, отримаємо:

$p_1 = P(X = 0) \approx 0,42;$ $p_2 = P(X = 1) \approx 0,45;$

$p_3 = P(X = 2) \approx 0,12;$ $p_4 = P(X = 3) \approx 0,01;$

Одержали закон розподілу даної випадкової величини X .

x_i	0	1	2	3
p_i	0,42	0,45	0,12	0,01

Математичне сподівання випадкової величини X :

$M(X) = 0 \cdot 0,42 + 1 \cdot 0,45 + 2 \cdot 0,12 + 3 \cdot 0,01 = 0,72.$

Дисперсія випадкової величини X :

$D(X) = 0 \cdot 0,42 + 1 \cdot 0,45 + 4 \cdot 0,12 + 9 \cdot 0,01 - (0,72)^2 = 1,02 - 0,52 = 0,50.$

Середнє квадратичне відхилення випадкової величини X :

$\sigma(X) = \sqrt{0,50} \approx 0,71.$

Розв’язування типових задач

Задача 1. Монету підкидають 4 рази. Написати закон розподілу ДВВ X – кількості випадання герба.

Розв’язання. $p=\frac{1}{2},\ q=\frac{1}{2}$.

$P(X=0)=C_4^0\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^0\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^4=\frac{1}{16}$;

$P(X=1)=C_4^1\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^1\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^3=\frac{4!}{1!\cdot 3!}\cdot\frac{1}{16}=\frac{4}{16}=\frac{1}{4}$;

$P(X=2)=C_4^2\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^2\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^2=\frac{4!}{2!\cdot 2!}\cdot\frac{1}{16}=\frac{3\cdot 4}{2\cdot 16}=\frac{3}{8}$;

$P(X=3)=C_4^3\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^3\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^1=\frac{4!}{3!\cdot 1!}\cdot\frac{1}{16}=\frac{4}{16}=\frac{1}{4}$;

$P(X=4)=C_4^4\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^4\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^0=\frac{1}{16}$.

Отже,

x_i	0	1	2	3	4
p_i	$\frac{1}{16}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{16}$

Закон розподілу ймовірностей, який визначається формулою Бернуллі $P(X=m)=C_n^m\cdot p^m\cdot q^{n-m}$ називається ***біноміальним***.

Задача 2. З міномета стріляють по цілі до першого влучення. Ймовірність влучення в ціль дорівнює $0,6$. Скласти закон розподілу ДВВ X – кількості пострілів, при умові що їх не більше чотирьох.

Розв’язання.

$P(X=1)=p=0,6$;

$P(X=2)=qp=0,4\cdot 0,6=0,24$;

$P(X=3)=q^2p=0,4^2\cdot 0,6=0,096$;

$P(X=4)=q^3p+q^4=q^3(p+q)=q^3\cdot 1=0,4^3=0,064$.

Отже,

x_i	1	2	3	4
p_i	$0,6$	$0,24$	$0,096$	$0,064$

Закон розподілу ймовірностей, який визначається за формулою $P(X=k)=p\cdot q^{k-1}$, називається ***геометричним***.

Задача 3. В партії з 10 деталей є 6 стандартних. Навмання вибрали 3 деталі. Скласти закон розподілу кількості стандартних деталей серед вибраних.

Розв'язання.

$$P(X=0)=\frac{C_6^0\cdot C_4^3}{C_{10}^3}=\frac{1}{30};$$

$$P(X=1)=\frac{C_6^1\cdot C_4^2}{C_{10}^3}=\frac{3}{10};$$

$$P(X=2)=\frac{C_6^2\cdot C_4^1}{C_{10}^3}=\frac{1}{2};$$

$$P(X=3)=\frac{C_6^3\cdot C_4^0}{C_{10}^3}=\frac{1}{6}.$$

Отже,

x_i	0	1	2	3
p_i	$\frac{1}{30}$	$\frac{3}{10}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{6}$

Закон розподілу ймовірностей, який визначається за формулою $P(X=m)=\dfrac{C_M^m\cdot C_{N-M}^{n-m}}{C_N^n}$, називається ***гіпергеометричним***.

Задача 4. Ткаля обслуговує 1000 веретен. Ймовірність розриву нитки на одному веретені протягом однієї хвилини дорівнює 0,004. Знайти ймовірність того, що протягом однієї хвилини розрив ниток буде на п'яти веретенах.

Розв'язання. $n=1000,\ p=0,004$. $P_n(m)\approx\dfrac{\lambda^m e^{-\lambda}}{m!}$, $\lambda=np$. $\lambda=1000\cdot 0,004=4$.

Отже, $P_{1000}(5)\approx\dfrac{4^5 e^{-4}}{5!}\approx 0,1563$.

Формула $P_n(m)\approx\dfrac{\lambda^m e^{-\lambda}}{m!}$ виражає ***закон розподілу Пуассона*** ймовірностей масових і рідкісних подій.

Задача 5. Три стрільці роблять по одному пострілу в мішень. Ймовірність влучення в мішень для першого стрільця дорівнює $0,7$, для другого – $0,8$, для третього – $0,9$. Скласти закон розподілу дискретної випадкової величини X – числа влучень в мішень.

Розв'язання. Позначимо $p_1=0,7,\ p_2=0,8,\ p_3=0,9$. Обчислимо ймовірність промаху при одному пострілі для кожного стрільця: $q_1=1-p_1=0,3;\ q_2=1-p_2=0,2;\ q_3=1-p_3=0,1.$

$$P(X=0)=q_1q_2q_3=0,3\cdot 0,2\cdot 0,1=0,006;$$

$$P(X=1)=p_1q_2q_3+q_1p_2q_3+q_1q_2p_3=0,7\cdot 0,2\cdot 0,1+0,3\cdot 0,8\cdot 0,1+0,3\cdot 0,2\cdot 0,9=0,092;$$

$$P(X=2)=p_1p_2q_3+p_1q_2p_3+q_1p_2p_3=0,7\cdot 0,8\cdot 0,1+0,7\cdot 0,2\cdot 0,9+$$
$$+0,3\cdot 0,8\cdot 0,9=0,398;$$

$$P(X=3)=p_1p_2p_3=0,7\cdot 0,8\cdot 0,9=0,504.$$

Отже,

x_i	0	1	2	3
p_i	0,006	0,092	0,398	0,504

Задача 6. В лотереї на 100 білетів розігрують два призи вартістю 250 грн. та 150 грн. Скласти закон розподілу ДВВ X – суми виграшу для особи, яка має: а) один білет; б) два білети.

Розв'язання.

а) $P(X=0)=\frac{98}{100}=0,98$;

$$P(X=150)=\frac{1}{100}=0,01;$$

$$P(X=250)=\frac{1}{100}=0,01.$$

Отже,

x_i	0	150	250
p_i	0,98	0,01	0,01

б) $P(X=0)=\frac{98}{100}\cdot\frac{97}{99}\approx 0,9602$;

$$P(X=150)=P(X=250)=\frac{1}{100}\cdot\frac{98}{99}+\frac{98}{100}\cdot\frac{1}{99}\approx 0,0198;$$

$$P(X=400)=\frac{2}{100}\cdot\frac{1}{99}\approx 0,0002.$$

Отже,

x_i	0	150	250	400
p_i	0,9602	0,0198	0,0198	0,0002

Задача 7. Скласти закон розподілу ДВВ X – суми очок, які випадуть при киданні двох гральних кубиків за умови що ця сума непарна.

Розв'язання. При киданні двох гральних кубиків кількість результатів, які рівноможливі, несумісні та утворюють повну групу, дорівнює $6\cdot 6=36$. З них у 18 випадках сума очок, які випадуть на верхніх гранях, буде непарною. ДВВ X має такі можливі значення: 3, 5, 7, 9, 11. Відповідні ймовірності обчислимо за класичним означенням.

Сума очок дорівнюватиме 3, якщо на першому кубику випаде 1 очко і на другому кубику випаде 2 очки або навпаки, тобто $P(X=3)=\frac{2}{18}$.

Сума очок буде дорівнювати 5, якщо очки випадуть так: $(1,4)$; $(2,3)$; $(3,2)$; $(4,1)$. Тут в дужках на першому місці записані очки, що випадають на першому кубику, а на другому місці – на другому кубику. Тому $P(X=5)=\frac{4}{18}$.

Сума очок дорівнюватиме 7, якщо очки випадуть наступним чином: $(1,6)$; $(2,5)$; $(3,4)$; $(4,3)$; $(5,2)$; $(6,1)$. Отже, $P(X=7)=\frac{6}{18}$.

Аналогічно $P(X=9)=\frac{4}{18}$; $P(X=11)=\frac{2}{18}$.

Отже,

x_i	3	5	7	9	11
p_i	$\frac{1}{9}$	$\frac{2}{9}$	$\frac{3}{9}$	$\frac{2}{9}$	$\frac{1}{9}$

Задача 8. Дискретна випадкова величина X задана законом розподілу. Потрібно: а) побудувати многокутник розподілу; б) знайти функцію розподілу $F(x)$ і побудувати її графік; в) знайти математичне сподівання, дисперсію і середнє квадратичне відхилення випадкової величини X.

x_i	1	3	5	7	9
p_i	0,2	0,3	0,25	0,15	0,1

Розв'язання.

а) Побудуємо прямокутну систему координат, на осі абсцис будемо відкладати можливі значення x_i, а на осі ординат відповідні ймовірності p_i. Побудуємо точки $M_1(1;\,0,2)$, $M_2(3;\,0,3)$, $M_3(5;\,0,25)$, $M_4(7;\,0,15)$, $M_5(9;\,0,1)$ та з'єднаємо їх послідовно відрізками прямих.

Одержимо шуканий многокутник розподілу.

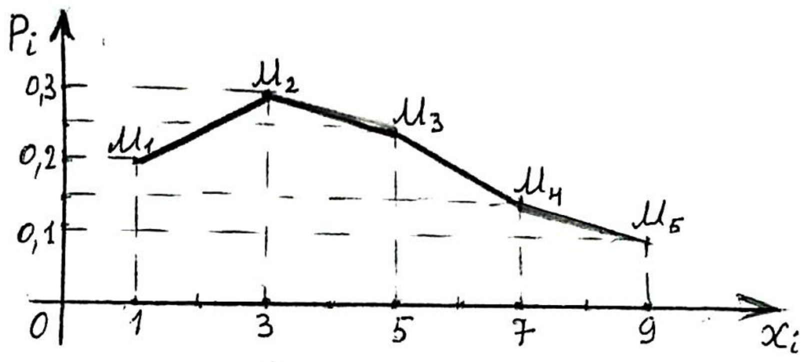


Рис.1

б) За означенням функція розподілу $F(x)=P(X<x)$.

Якщо $x\le 1$, то $F(x)=0$.

Якщо $1<x\le 3$, то $F(x)=0,2$.

Якщо $3<x\le 5$, то $F(x)=0,2+0,3=0,5$.

Якщо $5<x\le 7$, то $F(x)=0,2+0,3+0,25=0,75$.

Якщо $7<x\le 9$, то $F(x)=0,2+0,3+0,25+0,15=0,9$.

Якщо $x>9$, то $F(x)=1$.

Отже, шукана функція розподілу має вигляд

$$F(x)=\begin{cases} 0, & x\le 1; \\ 0,2, & 1<x\le 3; \\ 0,5, & 3<x\le 5; \\ 0,75, & 5<x\le 7; \\ 0,9, & 7<x\le 9; \\ 1, & x>9. \end{cases}$$

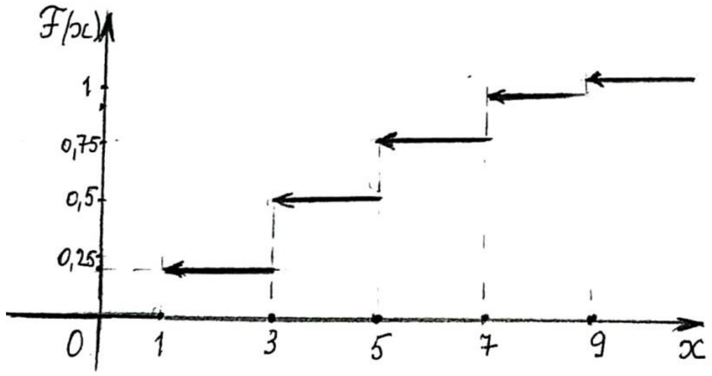


Рис. 2

в) $M(X)=x_1p_1+x_2p_2+...+x_np_n$.

$M(X)=1\cdot 0,2+3\cdot 0,3+5\cdot 0,25+7\cdot 0,15+9\cdot 0,1=0,2+0,9+1,25+1,05+0,9=4,3$.

$$D(X)=\sum_{i=1}^{n}x_i^2p_i-\left(M(X)\right)^2$$

$$D(X)=1\cdot 0,2+9\cdot 0,3+25\cdot 0,25+49\cdot 0,15+81\cdot 0,1-(4,3)^2=$$
$$=0,2+2,7+6,25+7,35+8,1-(4,3)^2=24,6-18,49=6,11.$$

$\sigma(X)=\sqrt{D(X)}$. $\sigma(X)=\sqrt{6,11}=2,47$.

Задача 9. Дискретна випадкова величина X може приймати тільки два значення: x_1 і x_2, причому $x_1 < x_2$. Ймовірність того, що X прийме значення x_1, дорівнює $p_1 = 0,3$. Знайти закон розподілу випадкової величини X, якщо відомі її математичне сподівання $M(X) = 3,4$ і дисперсія $D(X) = 0,84$.

Розв'язання.

x_i	x_1	x_2
p_i	$0,3$	p_2

Оскільки $p_1 + p_2 = 1$, то $p_2 = 0,7$.

Для знаходження x_1 та x_2 отримуємо систему рівнянь:

$$\begin{cases} 0,3x_1 + 0,7x_2 = 3,4; \\ 0,3x_1^2 + 0,7x_2^2 - 3,4^2 = 0,84. \end{cases}$$

$$\begin{cases} 3x_1 + 7x_2 = 34; \\ 3x_1^2 + 7x_2^2 = 124. \end{cases}$$

З першого рівняння визначимо x_1 і підставимо у друге рівняння.

$$x_1 = \frac{34 - 7x_2}{3};$$

$$3\left(\frac{34 - 7x_2}{3}\right)^2 + 7x_2^2 = 124.$$

Після спрощень отримаємо: $70x_2^2 - 476x_2 + 784 = 0$;

$D = 226576 - 219520 = 7056$; $x_2' = \frac{476 + 84}{140} = 4$; $x_2'' = \frac{476 - 84}{140} = 2,8$. $x_1' = 2$; $x_1'' = 4,8$.

Оскільки повинна виконуватись умова $x_1 < x_2$, то одержуємо $x_1 = 2;$ $x_2 = 4$, а закон розподілу ДВВ X набуває вигляду

x_i	2	4
p_i	$0,3$	0,7

Задача 10. Знайти математичне сподівання, дисперсію і середнє квадратичне відхилення ДВВ X – числа появи події A в n незалежних випробуваннях, якщо ймовірність появи події A в кожному випробуванні стала і дорівнює p.

Розв'язання. Можливі значення випадкової величини X: $0, 1, 2, ..., n$. Відповідні ймовірності обчислюються за формулою Бернуллі:

$P(X = m) = C_n^m p^m q^{n-m}$, де $q = 1 - p$ (біноміальний закон розподілу).

Шукані числові характеристики можна знайти іншим способом, не обчислюючи безпосередньо ймовірностей можливих значень.

Розглянемо такі дискретні випадкові величини: X_1 – число появи події A в першому випробуванні, X_2 – число появи події A в другому випробуванні, …, X_n – число появи події A в n-ому випробуванні. ДВВ $X_1, X_2, ..., X_n$ незалежні, оскільки проводяться незалежні випробування. Очевидно, що $X = X_1 + X_2 + ... + X_n$.

Випадкова величина X_1 може приймати тільки два значення: $x_1 = 1$ з ймовірністю p і $x_2 = 0$ з ймовірністю $q = 1 - p$. $M(X_1) = 1 \cdot p + 0 \cdot q = p$. Аналогічно обчислимо $M(X_2), M(X_3), \dots, M(X_n)$. Отже, $M(X_1) = M(X_2) = \dots = M(X_n) = p$. $M(X) = M(X_1) + M(X_2) + \dots + M(X_n) = np$.

$$D(X_1) = M(X_1^2) - (M(X_1))^2 = 1^2 \cdot p + 0^2 \cdot q - p^2 = p - p^2 = p(1-p) = pq.$$

Аналогічно обчислимо $D(X_2) = pq, \dots, D(X_n) = pq$. Оскільки $X_1, X_2, \dots, X_n$ – незалежні випадкові величини, то $D(X_1 + X_2 + \dots + X_n) = D(X_1) + D(X_2) + \dots + D(X_n)$.

Отримаємо: $D(X) = D(X_1) + D(X_2) + \dots + D(X_n) = npq$; $\sigma(X) = \sqrt{npq}$.

Отже, якщо ДВВ X розподілена за біноміальним законом, то $M(X) = np$, $D(X) = npq$, $\sigma(X) = \sqrt{npq}$.

Задача 11. Роблять 8 пострілів у мішень. Ймовірність влучення у мішень при кожному пострілі $p = 0,7$. Знайти математичне сподівання, дисперсію та середнє квадратичне відхилення випадкової величини X – числа влучень у мішень при цих пострілах.

Розв'язання. ДВВ X розподілена за біноміальним законом. Тому $M(X) = np$, $D(X) = npq$, $\sigma(X) = \sqrt{npq}$.

$n = 8$; $p = 0,7$; $q = 1 - p = 0,3$.

Отже, $M(X) = 8 \cdot 0,7 = 5,6$, $D(X) = 8 \cdot 0,7 \cdot 0,3 = 1,68$, $\sigma(X) = \sqrt{1,68} \approx 1,30$.

Задача 12. Знайти дисперсію ДВВ X – числа появи події A в двох незалежних випробуваннях, якщо ймовірності появи події A в цих випробуваннях однакові та відомо, що $M(X) = 0,9$.

Розв'язання. ДВВ X розподілена за біноміальним законом. $D(X) = npq$, $n = 2$.

Оскільки $M(X) = np$, то отримаємо $2p = 0,9$, $p = 0,45$. $q = 1 - p = 1 - 0,45 = 0,55$.

Отже, $D(X) = 2 \cdot 0,45 \cdot 0,55 = 0,495$.

Задача 13. Кидають три монети. Знайти математичне сподівання, дисперсію та середнє квадратичне відхилення ДВВ X – числа випадання герба на цих монетах.

Розв'язання. Випадкова величина X розподілена за біноміальним законом. При цьому

$$n = 3; \quad p = \frac{1}{2}; \quad q = 1 - p = \frac{1}{2};$$

$$M(X) = np = \frac{3}{2} = 1,5;$$

$$D(X) = npq = 3 \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{3}{4} = 0,75;$$

$$\sigma(X) = \sqrt{D(X)} = \sqrt{0,75} \approx 0,87.$$

Задача 14. Знайти математичне сподівання ДВВ X – добутку числа очок, які можуть випасти на верхніх гранях при одному киданні двох гральних кубиків.

Розв'язання. Розглянемо такі дискретні випадкові величини: X_1 – число очок, що випаде на першому кубику; X_2 – число очок, що випаде на другому кубику.

Ці випадкові величини незалежні. Можливі значення цих випадкових величин однакові і дорівнюють: 1, 2, 3, 4, 5, 6, причому ймовірність кожного з цих значень дорівнює $\frac{1}{6}$.

$$M\left(X_1\right)=1\cdot\frac{1}{6}+2\cdot\frac{1}{6}+3\cdot\frac{1}{6}+4\cdot\frac{1}{6}+5\cdot\frac{1}{6}+6\cdot\frac{1}{6}=\frac{1}{6}\cdot 21=\frac{7}{2}=3,5.$$

Очевидно, що $M\left(X_2\right)=3,5$.

Оскільки $X=X_1\cdot X_2$, то $M\left(X\right)=M\left(X_1\right)\cdot M\left(X_2\right)$.

Отже, $M\left(X\right)=3,5\cdot 3,5=12,25$.

Задача 15. Кидають три гральних кубики. Знайти математичне сподівання, дисперсію та середнє квадратичне відхилення ДВВ X – суми числа очок, які можуть появитися на усіх верхніх гранях.

Розв'язання. Позначимо через X_i $\left(i=1,2,3\right)$ дискретну випадкову величину – число очок, які випадуть на верхній грані i-го кубика. Тоді $X=X_1+X_2+X_3$. Ці випадкові величини X_1, X_2, X_3 незалежні.

$$M\left(X_1\right)=M\left(X_2\right)=M\left(X_3\right)=3,5.$$

$$M\left(X\right)=M\left(X_1\right)+M\left(X_2\right)+M\left(X_3\right)=3,5\cdot 3=10,5.$$

$D\left(X\right)=D\left(X_1\right)+D\left(X_2\right)+D\left(X_3\right)$. Обчислимо $D\left(X_1\right)$. Застосуємо формулу:

$$D\left(X_1\right)=M\left(X_1^2\right)-\left(M\left(X_1\right)\right)^2=1\cdot\frac{1}{6}+4\cdot\frac{1}{6}+9\cdot\frac{1}{6}+16\cdot\frac{1}{6}+25\cdot\frac{1}{6}+36\cdot\frac{1}{6}-\left(3,5\right)^2=$$
$$=\frac{91}{6}-\frac{49}{4}=\frac{35}{12}.$$

Очевидно, що $D\left(X_2\right)=D\left(X_3\right)=\frac{35}{12}$.

Отже, $D\left(X\right)=\frac{35}{12}\cdot 3=\frac{35}{4}=8,75$. $\sigma\left(X\right)=\sqrt{D\left(X\right)}=\sqrt{8,75}\approx 2,96$.

Задача 16. Дано n однаково розподілених незалежних випадкових величин: $X_1, X_2, ..., X_n$; $M\left(X_i\right)=a$, $D\left(X_i\right)=\sigma^2$ $\left(i=1,2,...,n\right)$. Знайти математичне сподівання, дисперсію та середнє квадратичне відхилення середнього арифметичного цих випадкових величин.

Розв'язання. Позначимо середнє арифметичне випадкових величин $X_1, X_2, ..., X_n$ через $\bar{X}$:

$$\bar{X}=\frac{1}{n}\left(X_1+X_2+...+X_n\right).$$

Використаємо властивості математичного сподівання та дисперсії.

$$M\left(\bar{X}\right)=\frac{1}{n}M\left(X_1+X_2+...+X_n\right)=\frac{1}{n}\left(M\left(X_1\right)+M\left(X_2\right)+...+M\left(X_n\right)\right)=\frac{1}{n}\cdot na=a.$$

$$D\left(\bar{X}\right)=\frac{1}{n^2}D\left(X_1+X_2+...+X_n\right)=\frac{1}{n^2}\left(D\left(X_1\right)+D\left(X_2\right)+...+D\left(X_n\right)\right)=\frac{1}{n^2}\cdot n\sigma^2=\frac{\sigma^2}{n}.$$

$$\sigma\left(\bar{X}\right)=\sqrt{D\left(\bar{X}\right)}=\frac{\sigma}{\sqrt{n}}.$$

Отже, $M\left(\bar{X}\right)=a$; $D\left(\bar{X}\right)=\frac{\sigma^2}{n}$; $\sigma\left(\bar{X}\right)=\frac{\sigma}{\sqrt{n}}$, тобто $M\left(\bar{X}\right)$ дорівнює математичному сподіванню a кожної з величин $X_1, X_2, ..., X_n$, $D\left(\bar{X}\right)$ в n разів менша від дисперсії кожної з величин, $\sigma\left(\bar{X}\right)$ в $\sqrt{n}$ разів менше від середнього квадратичного відхилення кожної з величин $X_1, X_2, ..., X_n$. Оскільки дисперсія є мірою розсіювання випадкової величини, то отримуємо висновок: середнє арифметичне досить великого числа незалежних однаково розподілених випадкових величин має значно менше розсіювання, ніж кожна окрема величина.

2.4. Неперервні випадкові величини. Числові характеристики неперервних випадкових величин

Густиною розподілу ймовірностей неперервної випадкової величини називається перша похідна від її функції розподілу

$$f(x)=F'(x). \qquad (4.1)$$

Густина розподілу ймовірностей існує тільки для неперервних випадкових величин.

Густина розподілу ймовірностей невід'ємна, тобто $f(x)\geq 0$, оскільки $F(x)$ – неспадна функція.

Ймовірність того, що неперервна випадкова величина X прийме значення, яке належить інтервалу (a,b),

$$P(a<X<b)=\int_a^b f(x)dx. \qquad (4.2)$$

Невласний інтеграл $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx=1$, оскільки він визначає ймовірність того, що неперервна випадкова величина X в результаті випробування прийме яке-небудь значення з інтервалу $(-\infty,+\infty)$.

Якщо задана густина розподілу ймовірностей $f(x)$ неперервної випадкової величини X, то її функція розподілу $F(x)$ визначається за формулою:

$$F(x)=\int_{-\infty}^{x} f(x)dx. \tag{4.3}$$

Задача 4.1. Неперервна випадкова величина X задана густиною розподілу ймовірностей

$$f(x)=\begin{cases} 0, & x\le\frac{\pi}{6}; \\ C\sin 3x, & \frac{\pi}{6}<x\le\frac{\pi}{3}; \\ 0, & x>\frac{\pi}{3}. \end{cases}$$

Знайти: а) сталий параметр C; б) функцію розподілу $F(x)$.

Розв'язання.

а) Густина розподілу $f(x)$ повинна задовольняти умову $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx=1$.

В даному випадку

$$C\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}}\sin 3xdx=1.$$

Оскільки $\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}}\sin 3xdx=-\frac{1}{3}\cos 3x\Big|_{\pi/6}^{\pi/3}=-\frac{1}{3}(\cos\pi-\cos\frac{\pi}{2})=\frac{1}{3}$, то C=3.

б) Для знаходження функції розподілу $F(x)$ використаємо формулу $F(x)=\int_{-\infty}^{x} f(x)dx$.

Якщо $x\le\frac{\pi}{6}$, то $F(x)=\int_{-\infty}^{x} 0dx=0.$

Якщо $\frac{\pi}{6}<x\le\frac{\pi}{3}$, то $F(x)=\int_{-\infty}^{\frac{\pi}{6}} 0dx+\int_{\frac{\pi}{6}}^{x} 3\sin 3xdx=-\cos 3x\Big|_{\pi/6}^{x}=-\cos 3x.$

Якщо $x>\frac{\pi}{3}$, то $F(x)=\int_{-\infty}^{\frac{\pi}{6}} 0dx+\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} 3\sin 3xdx+\int_{\frac{\pi}{3}}^{+\infty} 0\cdot dx=-\cos 3x\Big|_{\pi/6}^{\pi/3}=1.$

Отже, шукана функція розподілу

$$F(x)=\begin{cases}0, & x\le\frac{\pi}{6};\\ -\cos 3x, & \frac{\pi}{6}<x\le\frac{\pi}{3};\\ 1, & x>\frac{\pi}{3}.\end{cases}$$

Математичне сподівання неперервної випадкової величини *X*, можливі значення якої належать всій осі Ox, визначається рівністю

$$M(X)=\int_{-\infty}^{+\infty} xf(x)dx, \tag{4.4}$$

де $f(x)$ – густина розподілу ймовірностей випадкової величини *X*.

Припускається, що невласний інтеграл збігається абсолютно, тобто існує інтеграл $\int_{-\infty}^{+\infty}|x|\,f(x)dx.$

Зокрема, якщо всі можливі значення неперервної випадкової величини *X* належать інтервалу $(a;b)$, то

$$M(X)=\int_{a}^{b} xf(x)dx. \tag{4.5}$$

Дисперсія неперервної випадкової величини *X*, можливі значення якої належать всій осі Ox, визначається рівністю

$$D(X)=\int_{-\infty}^{+\infty} x^2 f(x)dx-\left[M(X)\right]^2. \tag{4.6}$$

Якщо можливі значення неперервної випадкової величини *X* належать інтервалу $(a;b)$, то

$$D(X)=\int_{a}^{b} x^2 f(x)dx-\left[M(X)\right]^2. \tag{4.7}$$

Середнім квадратичним відхиленням випадкової величини *X* називається квадратний корінь із її дисперсії $\sigma(X)=\sqrt{D(X)}$.

Задача 4.2. Неперервна випадкова величина *X* задана функцією розподілу

$$F(x)=\begin{cases}0 & при \quad x\le 0\\ \sin\frac{x}{2} & при \quad 0<x\le\pi\\ 1 & при \quad x>\pi\end{cases}$$

Знайти: 1) густину розподілу ймовірностей $f(x)$, 2) математичне сподівання, дисперсію та середнє квадратичне відхилення випадкової величини *X*. Побудувати графіки функцій $F(x)$ та $f(x)$.

Розв'язання. 1. Густина розподілу ймовірностей $f(x)$ дорівнює похідній від функції розподілу $F(x)$: $f(x)=F'(x)$. Отже,

$$f(x)=\begin{cases} 0 & при \quad x \le 0 \\ \frac{1}{2}\cos\frac{x}{2} & при \quad 0 < x \le \pi \\ 0 & при \quad x > \pi \end{cases}$$

2. Оскільки всі можливі значення випадкової величини *X* належать інтервалу $(0,\pi)$, то

$$M(X)=\frac{1}{2}\int_0^{\pi} x\cos\frac{x}{2}\,dx.$$

Інтегруючи за частинами, знаходимо

$$M(X)=x\sin\frac{x}{2}\Big|_0^{\pi}-\int_0^{\pi}\sin\frac{x}{2}\,dx=\left(x\sin\frac{x}{2}+2\cos\frac{x}{2}\right)\Big|_0^{\pi}=\pi-2\approx 1{,}14.$$

$$D(X)=\frac{1}{2}\int_0^{\pi} x^2\cos\frac{x}{2}\,dx-(\pi-2)^2.$$

Інтегруючи двічі за частинами, одержимо

$$\int_0^{\pi} x^2\cos\frac{x}{2}\,dx=2(\pi^2-8).$$

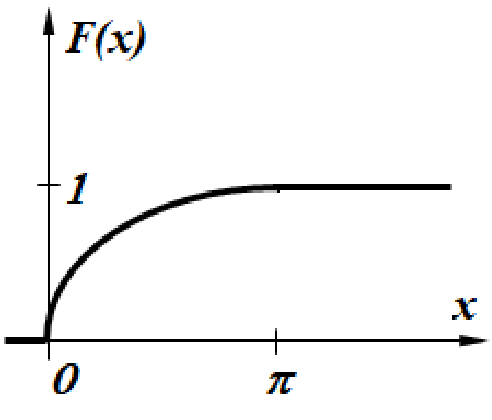
Остаточно отримаємо

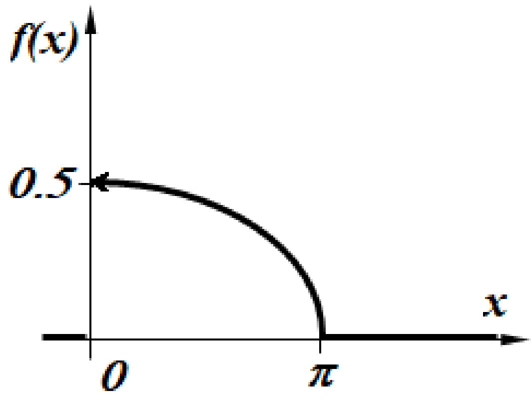
$$D(X)=\pi^2-8-(\pi-2)^2=4\pi-12\approx 0{,}57.$$

Середнє квадратичне відхилення

$$\sigma(X)=\sqrt{0{,}57}\approx 0{,}75.$$

Побудуємо графіки функції $F(x)$ і $f(x)$.





2.5. Рівномірний та показниковий закони розподілу неперервних випадкових величин

Розподіл ймовірностей неперервної випадкової величини X називається ***рівномірним*** в інтервалі (a,b), якщо всі її можливі значення містяться в цьому інтервалі і густина розподілу ймовірностей стала на цьому інтервалі.

Якщо неперервна випадкова величина X розподілена рівномірно в інтервалі (a,b), то її густина розподілу ймовірностей $f(x)$ має вигляд:

$$f(x)=\begin{cases} 0 & при \quad x\le a \\ \dfrac{1}{b-a} & при \quad a<x\le b \\ 0 & при \quad x>b \end{cases} \tag{5.1}$$

Користуючись формулою $F(x)=\int\limits_{-\infty}^{x} f(x)dx$, отримаємо функцію розподілу $F(x)$ цієї випадкової величини X:

$$F(x)=\begin{cases} 0 & при \quad x\le a \\ \dfrac{x-a}{b-a} & при \quad a<x\le b \\ 1 & при \quad x>b \end{cases} \tag{5.2}$$

Ймовірність того, що рівномірно розподілена на інтервалі (a,b) випадкова величина X прийме значення, яке належить інтервалу (α,β) $(\alpha\ge a;\beta\le b)$, обчислюється за формулою:

$$P(\alpha<X<\beta)=\frac{\beta-\alpha}{b-a}. \tag{5.3}$$

Математичне сподівання рівномірно розподіленої в інтервалі (a,b) випадкової величини X

$$M(X)=\frac{a+b}{2}.$$

Дисперсія цієї випадкової величини X

$$D(X)=\frac{(b-a)^2}{12}.$$

Задача 5.1. Ціна поділки шкали амперметра дорівнює 0,1 А. Покази амперметра заокруглюють до найближчої цілої поділки. Знайти ймовірність того, що при відрахунку буде зроблена помилка: а) менша ніж 0,01 А; б) більша ніж 0,03 А.

Розв'язання. а) Помилку заокруглення можна розглядати як випадкову величину X, яка розподілена рівномірно в інтервалі між двома сусідніми поділками шкали. В даній задачі довжина інтервалу, в якому містяться можливі значення випадкової величини X, дорівнює 0,1. Помилка відрахунку буде менша від 0,01 А, якщо $0<X<0{,}01$ або $0{,}09<X<0{,}1$.

Застосувавши формулу $P(\alpha < X < \beta) = \dfrac{\beta - \alpha}{b - a}$, отримаємо

$$P(0 < X < 0,01) + P(0,09 < X < 0,1) = \frac{0,01 - 0}{0,1} + \frac{0,1 - 0,09}{0,1} = 0,1 + 0,1 = 0,2.$$

б) Помилка відрахунку буде більша від 0,03 А, якщо $0,03 < X < 0,07.$

$$P(0,03 < X < 0,07) = \frac{0,07 - 0,03}{0,1} = \frac{0,04}{0,1} = 0,4.$$

Розподіл ймовірностей неперервної випадкової величини X називається ***показниковим***, якщо густина розподілу ймовірностей цієї випадкової величини має вигляд

$$f(x) = \begin{cases} 0 & при \quad x < 0 \\ \lambda e^{-\lambda x} & при \quad x \geq 0 \end{cases} \tag{5.4}$$

де λ – додатне число.

Функція розподілу показникового закону

$$F(x) = \begin{cases} 0 & при \quad x < 0 \\ 1 - e^{-\lambda x} & при \quad x \geq 0 \end{cases} \tag{5.5}$$

Ймовірність попадання в інтервал (α, β) неперервної випадкової величини *X*, яка розподілена за показниковим законом, обчислюється за формулою:

$$P(\alpha < x < \beta) = e^{-\lambda\alpha} - e^{-\lambda\beta}. \tag{5.6}$$

Математичне сподівання випадкової величини *X*, розподіленої за показниковим законом, $M(X) = \dfrac{1}{\lambda}$

Дисперсія цієї випадкової величини *X* $D(X) = \dfrac{1}{\lambda^2}$.

Середнє квадратичне відхилення $\sigma(X) = \dfrac{1}{\lambda}$.

Задача 5.2. Неперервна випадкова величина *T* – тривалість часу безвідмовної роботи пристрою розподілена за показниковим законом з функцією розподілу $F(t) = 1 - e^{-0,03t} (t \geq 0).$

Знайти ймовірність того, що за час тривалістю *t* = 100 год: а) пристрій відмовить; б) пристрій не відмовить.

Розв'язання.

а) Оскільки функція розподілу $F(t) = P(T < t),$ то вона визначає ймовірність того, що за час тривалістю *t* пристрій відмовить. Підставивши *t* = 100 у функцію розподілу, отримаємо ймовірність відмови пристрою за час тривалістю *t* = 100 год:

$$F(100) = 1 - e^{-3} \approx 0,95.$$

б) Події «пристрій відмовить за час тривалістю t = 100 год.» і «пристрій не відмовить за час тривалістю t = 100 год.» протилежні. Тому ймовірність того, що пристрій не відмовить за час тривалістю t = 100 год.

$$P = 1 - 0,95 = 0,05.$$

2.6. Нормальний закон розподілу. Правило трьох сигм. Поняття про центральну граничну теорему Ляпунова

Розподіл ймовірностей неперервної випадкової величини X називається ***нормальним***, якщо густина розподілу ймовірностей цієї випадкової величини має вигляд

$$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2}}. \qquad (6.1)$$

Нормальний закон розподілу визначається двома параметрами: a і σ.

Можна довести, що математичне сподівання нормально розподіленої випадкової величини X дорівнює a і середнє квадратичне відхилення цієї величини дорівнює σ: $M(X) = a$, $\sigma(X) = \sigma$.

Графік густини нормального розподілу називається нормальною кривою або кривою Гаусса.

Дослідимо функцію $y = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2}}$ та побудуємо її графік.

1. Ця функція визначена на всій числовій осі.
2. При всіх значеннях x функція приймає додатні значення.
3. $\lim\limits_{x\to\pm\infty} y = 0$, тобто вісь Ox є асимптотою графіка цієї функції.
4. Різниця $x-a$ міститься в аналітичному виразі даної функції у квадраті, тому графік функції симетричний відносно прямої $x = a$.
5. $y' = -\frac{x-a}{\sigma^3\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2}}$.

Очевидно, що $y' = 0$ при $x = a$, $y' > 0$ при $x < a$, $y' < 0$ при $x > a$. Отже, при $x = a$ функція має максимум; $f(a) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}$.

6. $y'' = -\frac{1}{\sigma^3\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2}} \left(1 - \frac{(x-a)^2}{\sigma^2}\right)$; $y'' = 0$ при $x_1 = a - \sigma$, $x_2 = a + \sigma$.

При переході через ці точки y'' змінює знак. Графік даної функції має дві точки перегину:

$$\left(a-\sigma;\ \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi e}}\right);\ \left(a+\sigma;\ \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi e}}\right).$$

Графік густини нормального розподілу зображений на рис.1.

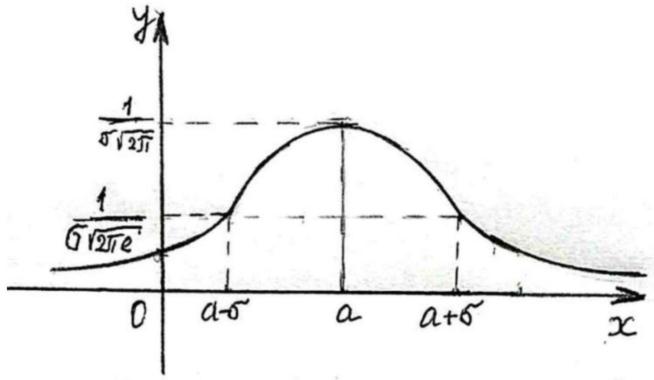


Рис. 1

Зауважимо, що зміна параметра a не змінює форми нормальної кривої, а призводить лише до її зсуву вздовж осі Ox. При зміні параметра σ форма нормальної кривої змінюється: при збільшенні σ максимальна ордината нормальної кривої зменшується, а крива стає більш пологою, тобто стискається до осі Ox; при зменшенні σ нормальна крива розтягується в додатньому напрямі осі Oy.

Ймовірність того, що нормально розподілена випадкова величина X в результаті випробовування прийме значення, яке належить інтервалу (α, β), обчислюється за формулою:

$$P(\alpha < X < \beta) = \Phi(\frac{\beta - a}{\sigma}) - \Phi(\frac{\alpha - a}{\sigma}), \qquad (6.2)$$

де $\Phi(x)$ – функція Лапласа, $\Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^x e^{-\frac{t^2}{2}} dt$.

Ймовірність того, що абсолютна величина відхилення нормально розподіленої випадкової величини X від її математичного сподівання буде меншою від заданого числа $\varepsilon > 0$,

$$P\left(\left|X - a\right| < \varepsilon\right) = 2\Phi(\frac{\varepsilon}{\sigma}). \qquad (6.3)$$

Візьмемо у даній формулі $\varepsilon = 3\sigma$:

$$P\left(\left|X - a\right| < 3\sigma\right) = 2\Phi\left(\frac{3\sigma}{\sigma}\right) = 2\Phi\left(3\right).$$

Оскільки $\Phi\left(3\right) = 0,49865$, то будемо мати:

$$P\left(\left|X - a\right| < 3\sigma\right) = 0,9973.$$

Отримана формула виражає суть ***правила трьох сигм***: якщо випадкова величина X розподілена за нормальним законом, то практично достовірно, що абсолютна величина її відхилення від математичного сподівання не перевищує потроєного середнього квадратичного відхилення.

Тобто з ймовірністю близькою до одиниці можна стверджувати, що значення нормально розподіленої випадкової величини X лежать в інтервалі $\left(a-3\sigma; a+3\sigma\right)$, довжина якого дорівнює 6σ.

Нормальний закон є законом розподілу, який найчастіше зустрічається на практиці. За цим законом розподілено багато випадкових величин, наприклад випадкові похибки вимірювань, відхилення розмірів деталей від номінального, відхилення точки падіння снаряду від цілі. Чим це пояснюється? Відповідь на це питання дає ***центральна гранична теорема Ляпунова***.

Теорема. Якщо випадкова величина *X* є сумою дуже великого числа незалежних випадкових величин, вплив кожної з яких на всю суму дуже малий, то випадкова величина *X* має розподіл, близький до нормального.

Сформулюємо центральну граничну теорему для однаково розподілених доданків: якщо X_1, X_2, ... ,X_n – незалежні випадкові величини, які мають однакові закони розподілу з математичним сподіванням *a* і дисперсією σ^2, то при необмеженому зростанні n закон розподілу суми $X = X_1 + X_2 + ... + X_n$ необмежено наближається до нормального.

Розглянемо середнє арифметичне цих випадкових величин $\bar{X} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i$.

При досить великому n випадкова величина $\bar{X}$ також має розподіл, близький до нормального. Оскільки $M(\bar{X}) = a$, $D(\bar{X}) = \frac{\sigma^2}{n}$, то ймовірність того, що в результаті випробування $\bar{X}$ прийме значення з інтервалу (α, β),

$$P(\alpha < \bar{X} < \beta) \approx \varPhi\left(\frac{(\beta - a)\sqrt{n}}{\sigma}\right) - \varPhi\left(\frac{(\alpha - a)\sqrt{n}}{\sigma}\right). \qquad (6.4)$$

Ймовірність того, що абсолютна величина відхилення середнього арифметичного $\bar{X}$ від математичного сподівання *a* буде меншою від заданого числа $\varepsilon > 0$,

$$P\left(\left|\bar{X} - a\right| < \varepsilon\right) \approx 2\varPhi\left(\frac{\varepsilon\sqrt{n}}{\sigma}\right). \qquad (6.5)$$

Задача 6.1. Математичне сподівання та середнє квадратичне відхилення нормально розподіленої випадкової величини *X* дорівнюють відповідно 10 і 4. Знайти ймовірність того, що в результаті випробування випадкова величина *X* прийме значення, яке знаходиться в інтервалі (8, 15).

Розв'язання. Скористаємося формулою (6.2).

Підставивши значення $\alpha = 8$, $\beta = 15$, $a = 10$, $\sigma = 4$, одержимо

$$P(8 < X < 15) = \varPhi(1,25) - \varPhi(-0,5) = \varPhi(1,25) + \varPhi(0,5).$$

За таблицею значень функції Лапласа знайдемо $\varPhi$(1,25)=0,3944; $\varPhi$(0,5)=0,1915.

Шукана ймовірність $P(8 < X < 15) = 0,5859$.

Задача 6.2. Вимірюють діаметр вала без систематичних похибок. Випадкові похибки вимірювання X підпорядковані нормальному закону з математичним сподіванням a=0 і середнім квадратичним відхиленням σ=20мм. Знайти ймовірність того, що із трьох незалежних вимірювань похибка хоч би одного не перевищить по абсолютній величині 10 мм.

Розв'язання. Спочатку знайдемо ймовірність того, що одне вимірювання буде виконане з похибкою, яка не перевищує по абсолютній величині 10 мм. Використаємо формулу (6.3) Підставивши значення a=0, $\sigma = 20$, $\varepsilon = 10$, отримаємо

$$P\left(\left|X\right| < 10\right) = 2\Phi(0,5) = 2 \cdot 0,1915 = 0,383.$$

Отже, p=0,383. Ймовірність того, що одне вимірювання буде виконане з похибкою, яка перевищує по абсолютній величині 10 мм, q=1-p=0,617.

Нехай подія A полягає в тому, що похибка хоч би одного з трьох незалежних вимірювань не перевищить по абсолютній величині 10 мм. Тоді $P(A) = 1 - P(\overline{A})$, де $\overline{A}$ – протилежна подія, яка полягає в тому, що похибки всіх трьох вимірювань перевищують по абсолютній величині 10 мм.

$$P(\overline{A}) = q^3 = 0,617^3 = 0,235.$$

Шукана ймовірність $P(A) = 1 - 0,235 = 0,765.$

Задача 6.3. Нехай X_1, X_2, ..., X_n – незалежні однаково розподілені випадкові величини з математичним сподіванням a і дисперсією $\sigma^2 = 3$; $\overline{X} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i$ – середнє арифметичне випадкових величин X_1, X_2, ..., X_n. Знайти таке додатне число ε, щоб з ймовірністю $\gamma = 0,95$ можна було чекати, що середнє арифметичне $\overline{X}$ відхилиться від математичного сподівання a по абсолютній величині менше ніж на ε, якщо n = 2700.

Розв'язання. Використаємо формулу (6.5)

$$P\left(\left|\overline{X} - a\right| < \varepsilon\right) \approx 2\Phi(\frac{\varepsilon\sqrt{n}}{\sigma}).$$

Позначимо $t = \frac{\varepsilon\sqrt{n}}{\sigma}$. Тоді $2\Phi(t) = 0,95;\ \Phi(t) = 0,475.$

За таблицею значень функції Лапласа знайдемо $\Phi(1,96) = 0,475.$

Отже, t =1,96, тобто $\frac{\varepsilon\sqrt{n}}{\sigma} = 1,96.$

Для знаходження ε одержали рівняння

$$\frac{\varepsilon\sqrt{2700}}{\sqrt{3}} = 1,96,$$

звідси ε =0,065.

2.7. Закон великих чисел

Як відомо, неможливо наперед передбачити, яке з можливих значень прийме випадкова величина в результаті випробування. Але виявляється, що при виконанні деяких умов поведінка суми досить великого числа випадкових величин майже втрачає випадковий характер. Теореми, в кожній з яких при виконанні деяких умов встановлюється факт наближення середніх характеристик великого числа випадкових величин до певних сталих величин, об'єднані під назвою «Закон великих чисел». До цих теорем відносяться теореми Чебишева і Бернуллі.

Теорема Чебишева. Якщо $X_1, X_2, ..., X_n, ...$ – попарно незалежні випадкові величини з математичними сподіваннями $M(X_1), M(X_2), ..., M(X_n), ...$ і їхні дисперсії рівномірно обмежені $\left(D(X_i) \le C,\ i = 1, 2, 3, ...\right)$, то, яким би малим не було число $\varepsilon > 0$, справджується рівність:

$$\lim_{n\to\infty} P\left(\left|\frac{X_1 + X_2 + ... + X_n}{n} - \frac{M(X_1) + M(X_2) + ... + M(X_n)}{n}\right| < \varepsilon\right) = 1.$$

На практиці часто трапляється, що випадкові величини мають однакові математичні сподівання: $M(X_i) = a,\ (i = 1, 2, 3, ..., n, ...)$. В цьому випадку отримаємо наслідок з теореми Чебишева:

Якщо $X_1, X_2, ..., X_n, ...$ – попарно незалежні випадкові величини з однаковими математичними сподіваннями $\left(M(X_i) = a\right)$ і їхні дисперсії рівномірно обмежені, то для довільного числа $\varepsilon > 0$ виконується рівність:

$$\lim_{n\to\infty} P\left(\left|\frac{X_1 + X_2 + ... + X_n}{n} - a\right| < \varepsilon\right) = 1.$$

Теорема Бернуллі. Нехай в кожному з n незалежних випробувань ймовірність появи події A стала і дорівнює p. Якщо подія A відбулася m разів в n випробуваннях, то для довільного числа $\varepsilon > 0$ справджується рівність:

$$\lim_{n\to\infty} P\left(\left|\frac{m}{n} - p\right| < \varepsilon\right) = 1.$$

Отже, теорема Бернуллі стверджує, що при необмеженому зростанні числа випробувань n відносна частота появи події A $\frac{m}{n}$ прямує по ймовірності до ймовірності p цієї події.

Розв'язування типових задач

Задача 1. Неперервна випадкова величина X задана функцією розподілу $F(x)$.

$$F(x)=\begin{cases}0, & x\le 2,\\ 0,5x-1, & 2<x\le 4,\\ 1, & x>4.\end{cases}$$

Знайти ймовірність того, що в результаті випробування X прийме значення: а) менше 1; б) менше 3; в) не менше 3; г) не менше 6; д) в інтервалі $(2,5;\ 3,8)$.

Розв'язання. а) $P(X<1)=F(1)=0$.

б) $P(X<3)=F(3)=0,5\cdot 3-1=0,5$.

в) $P(X\ge 3)=1-P(X<3)=1-0,5=0,5$.

г) $P(X\ge 6)=1-P(X<6)=1-F(6)=1-1=0$.

д) $P(2,5<X<3,8)=F(3,8)-F(2,5)=0,5\cdot 3,8-1-(0,5\cdot 2,5-1)=1,9-1,25=0,65$.

Задача 2. НВВ X задана функцією розподілу $F(x)=\frac{1}{2}+\frac{1}{\pi}arctg\,\frac{x}{2},\ \ -\infty<x<+\infty$.

Знайти: а) ймовірність того, що в результаті випробування випадкова величина X прийме значення, яке належить інтервалу $(0;2)$; б) густину розподілу ймовірностей $f(x)$.

Розв'язання.

а) $P(0<X<2)=F(2)-F(0)=\frac{1}{2}+\frac{1}{\pi}arctg1-\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{\pi}arctg0\right)=\frac{1}{\pi}\cdot\frac{\pi}{4}=\frac{1}{4}=0,25$.

б) $f(x)=F'(x)$.

$$f(x)=\frac{1}{\pi}\frac{1\cdot\frac{1}{2}}{1+\frac{x^2}{4}}=\frac{2}{\pi\left(x^2+4\right)}.$$

Отже, $f(x)=\frac{2}{\pi\left(x^2+4\right)}$ при $-\infty<x<+\infty$.

Задача 3. НВВ X задана густиною розподілу ймовірностей

$$f(x)=\begin{cases}0, & x\le -\dfrac{\pi}{2},\\ \dfrac{2}{\pi}\cos^2 x, & -\dfrac{\pi}{2}<x\le\dfrac{\pi}{2},\\ 0, & x>\dfrac{\pi}{2}.\end{cases}$$

Знайти ймовірність того, що в трьох незалежних випробуваннях випадкова величина X прийме рівно два рази значення, яке міститься в інтервалі $\left(0;\dfrac{\pi}{4}\right)$.

Розв'язання. Знайдемо спочатку ймовірність того, що в результаті одного випробування X прийме значення, яке належить інтервалу $\left(0;\dfrac{\pi}{4}\right)$.

$$P\left(0<X<\frac{\pi}{4}\right)=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{2}{\pi}\cos^2 x\,dx=\frac{2}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{1+\cos 2x}{2}dx=\frac{1}{\pi}\left(x+\frac{1}{2}\sin 2x\right)\Bigg|_0^{\frac{\pi}{4}}=$$
$$=\frac{1}{\pi}\left(\frac{\pi}{4}+\frac{1}{2}\right)=\frac{\pi+2}{4\pi}\approx 0,41.$$

Позначимо $p=\dfrac{\pi+2}{4\pi}\approx 0,41$ і застосуємо формулу Бернуллі:

$P_3(2)=C_3^2\,p^2\,q$, де $q=1-p=\dfrac{3\pi-2}{4\pi}\approx 0,59$.

Отже, $P_3(2)\approx 3\cdot(0,41)^2\cdot 0,59\approx 0,30$.

Задача 4. Неперервна випадкова величина X задана густиною розподілу ймовірностей $f(x)$. Знайти: а) сталий параметр c; б) функцію розподілу $F(x)$. Побудувати графіки функцій $F(x)$ та $f(x)$.

1) $$f(x)=\begin{cases}0, & x\le 0,\\ c\sin\dfrac{x}{3}, & 0<x\le\pi,\\ 0, & x>\pi.\end{cases}$$

Розв'язання: а) $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx=1$.

$$c\int_0^{\pi}\sin\frac{x}{3}dx=1.\quad \int_0^{\pi}\sin\frac{x}{3}dx=-3\cos\frac{x}{3}\Bigg|_0^{\pi}=-3\left(\frac{1}{2}-1\right)=\frac{3}{2}.$$

$$c \cdot \frac{3}{2} = 1, \quad c = \frac{2}{3}.$$

б) $F(x) = \int\limits_{-\infty}^{x} f(x)\,dx$.

Якщо $x \le 0$, то $F(x) = \int\limits_{-\infty}^{x} 0dx = 0$.

Якщо $0 < x \le \pi$, то $F(x) = \int\limits_{-\infty}^{0} 0dx + \frac{2}{3}\int\limits_{0}^{x} \sin\frac{x}{3}\,dx = -2\cos\frac{x}{3}\Big|_{0}^{x} = -2\cos\frac{x}{3} + 2$.

Якщо $x > \pi$, то $F(x) = \int\limits_{-\infty}^{0} 0dx + \frac{2}{3}\int\limits_{0}^{\pi} \sin\frac{x}{3}\,dx + \int\limits_{\pi}^{x} 0dx = \frac{2}{3}\cdot\frac{3}{2} = 1$.

Отже,

$$F(x) = \begin{cases} 0, & x \le 0, \\ -2\cos\frac{x}{3} + 2, & 0 < x \le \pi, \\ 1, & x > \pi. \end{cases}$$

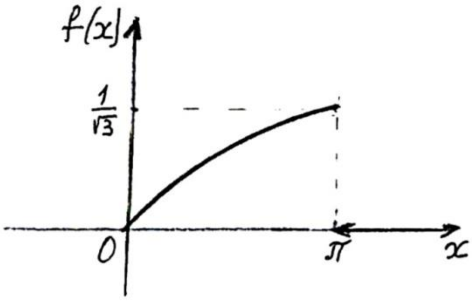


Рис. 1

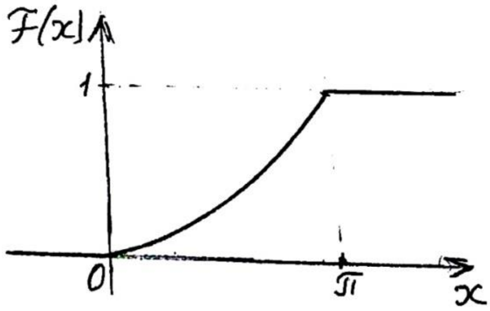


Рис. 2

2) $f(x) = \begin{cases} 0, & x < 0, \\ ce^{-\frac{x}{2}}, & x \ge 0. \end{cases}$

Розв'язання: а) $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx = 1$; $\int\limits_{0}^{+\infty} ce^{-\frac{x}{2}}dx = 1$; $c\int\limits_{0}^{+\infty} e^{-\frac{x}{2}}dx = 1$.

$$\int\limits_{0}^{+\infty} e^{-\frac{x}{2}}dx = \lim_{b\to+\infty}\int\limits_{0}^{b} e^{-\frac{x}{2}}dx = -2\lim_{b\to+\infty}\int\limits_{0}^{b} e^{-\frac{x}{2}}d\left(-\frac{x}{2}\right) = -2\lim_{b\to+\infty}\left(e^{-\frac{x}{2}}\Big|_{0}^{b}\right) =$$

$$= -2\lim_{b\to+\infty}\left(e^{-\frac{b}{2}} - 1\right) = -2(0-1) = 2.$$

Отже, $2c = 1;\ c = \dfrac{1}{2}$.

$$f(x) = \begin{cases} 0, & x < 0, \\ \dfrac{1}{2} e^{-\frac{x}{2}}, & x \geq 0. \end{cases}$$

б) $F(x) = \int\limits_{-\infty}^{x} f(x)\,dx$.

Якщо $x < 0$, то $F(x) = 0$.

При $x \geq 0$, то $F(x) = \int\limits_{-\infty}^{0} 0dx + \int\limits_{0}^{x} \dfrac{1}{2} e^{-\frac{x}{2}} dx = \left. \left(0 - e^{-\frac{x}{2}} \right) \right|_0^x = 1 - e^{-\frac{x}{2}}$.

Отже, $F(x) = \begin{cases} 0, & x < 0, \\ 1 - e^{-\frac{x}{2}}, & x \geq 0. \end{cases}$

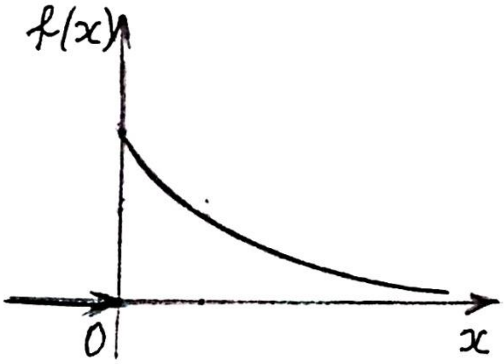


Рис. 3

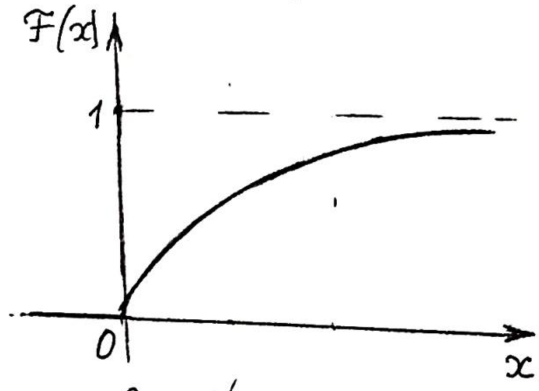


Рис. 4

Задача 5. Неперервна випадкова величина X задана функцією розподілу $F(x)$. Знайти: а) ймовірність того, що в результаті випробування величина X прийме значення, що знаходиться в інтервалі $(a;b)$; б) густину розподілу ймовірностей $f(x)$; в) математичне сподівання, дисперсію і середнє квадратичне відхилення ВВ X. Побудувати графіки функцій $F(x)$ і $f(x)$.

1) $F(x) = \begin{cases} 0, & x \leq -1, \\ \dfrac{1}{16}(x+1)^2, & -1 < x \leq 3, \\ 1, & x > 3. \end{cases} \quad a = 0,\ b = 2.$

Розв'язання: а) $P(a < X < b) = F(b) - F(a)$;

$P(0 < X < 2) = \dfrac{1}{16} \cdot (3)^2 - \dfrac{1}{16} = \dfrac{9}{16} - \dfrac{1}{16} = \dfrac{1}{2}$.

б) $f(x)=F'(x)$;

$$f(x)=\begin{cases}0, & x\le -1,\\ \frac{1}{8}(x+1), & -1<x\le 3,\\ 0, & x>3.\end{cases}$$

в) $M(X)=\int\limits_{-\infty}^{+\infty} xf(x)dx$; $\quad D(X)=\int\limits_{-\infty}^{+\infty} x^2 f(x)dx-\left[M(X)\right]^2$; $\quad \sigma(X)=\sqrt{D(X)}$.

$$M(X)=\frac{1}{8}\int\limits_{-1}^{3}\left(x^2+x\right)dx=\frac{1}{8}\left(\frac{1}{3}x^3+\frac{1}{2}x^2\right)\Bigg|_{-1}^{3}=\frac{1}{8}\left[9+\frac{9}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{2}\right]=\frac{5}{3};$$

$$D(X)=\frac{1}{8}\int\limits_{-1}^{3}\left(x^3+x^2\right)dx-\frac{25}{9}=\frac{1}{8}\left(\frac{1}{4}x^4+\frac{1}{3}x^3\right)\Bigg|_{-1}^{3}-\frac{25}{9}=\frac{1}{8}\left(\frac{81}{4}+9-\frac{1}{4}+\frac{1}{3}\right)-\frac{25}{9}=\frac{8}{9};$$

$$\sigma(X)=\sqrt{\frac{8}{9}}=\frac{2\sqrt{2}}{3}.$$

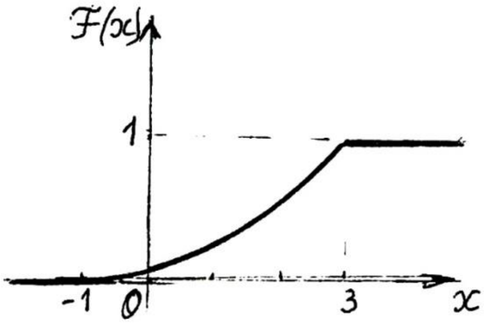


Рис. 5

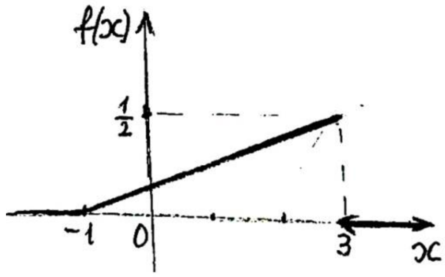


Рис. 6

2) $$F(x)=\begin{cases}0, & x\le 0,\\ \sin 2x, & 0<x\le\frac{\pi}{4},\\ 1, & x>\frac{\pi}{4}.\end{cases}\quad a=\frac{\pi}{12},\ b=\frac{\pi}{6}.$$

Розв'язання:

а) $P\left(\frac{\pi}{12}<X<\frac{\pi}{6}\right)=F\left(\frac{\pi}{6}\right)-F\left(\frac{\pi}{12}\right)=\sin\frac{\pi}{3}+\sin\frac{\pi}{6}=\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{1}{2}\approx 0,366$.

б) $f(x)=F'(x)$; $\quad f(x)=\begin{cases}0, & x\le 0,\\ 2\cos 2x, & 0<x\le\dfrac{\pi}{4},\\ 0, & x>\dfrac{\pi}{4}.\end{cases}$

в) $M(X)=\int\limits_{-\infty}^{+\infty} xf(x)\,dx$;

$$M(X)=\int\limits_0^{\frac{\pi}{4}} x\cdot 2\cos 2x\,dx=2\int\limits_0^{\frac{\pi}{4}} x\cos 2x\,dx=\begin{bmatrix}u=x, & du=dx\\ dv=\cos 2x\,dx, & v=\dfrac{1}{2}\sin 2x\end{bmatrix}=$$

$$=2\left(\frac{x}{2}\sin 2x\Big|_0^{\frac{\pi}{4}}-\frac{1}{2}\int\limits_0^{\frac{\pi}{4}}\sin 2x\,dx\right)=2\left(\frac{\pi}{8}+\frac{1}{4}\cos 2x\Big|_0^{\frac{\pi}{4}}\right)=2\left(\frac{\pi}{8}-\frac{1}{4}\right)=\frac{\pi-2}{4}\approx 0,285.$$

$D(X)=M\left(X^2\right)-\left[M(X)\right]^2$;

$$M\left(X^2\right)=2\int\limits_0^{\frac{\pi}{4}} x^2\cos 2x\,dx=\begin{bmatrix}u=x^2, & du=2xdx\\ dv=\cos 2x\,dx, & v=\dfrac{1}{2}\sin 2x\end{bmatrix}=$$

$$=2\left(\frac{x^2}{2}\sin 2x\Big|_0^{\frac{\pi}{4}}-\int\limits_0^{\frac{\pi}{4}} x\sin 2x\,dx\right)=2\left(\frac{\pi^2}{32}-\left(-\frac{x}{2}\cos 2x\Big|_0^{\frac{\pi}{4}}+\frac{1}{2}\int\limits_0^{\frac{\pi}{4}}\cos 2x\,dx\right)\right)=$$

$$=2\left(\frac{\pi^2}{32}-\frac{1}{4}\sin 2x\Big|_0^{\frac{\pi}{4}}\right)=2\left(\frac{\pi^2}{32}-\frac{1}{4}\right)=\frac{\pi^2-8}{16}.$$

$$D(X)=\frac{\pi^2-8}{16}-\left(\frac{\pi-2}{4}\right)^2=\frac{\pi^2-8-\left(\pi^2-4\pi+4\right)}{16}=\frac{4\pi-12}{16}\approx 0,035.$$

$\sigma(X)=\sqrt{D(X)}=\sqrt{0,035}\approx 0,187$.

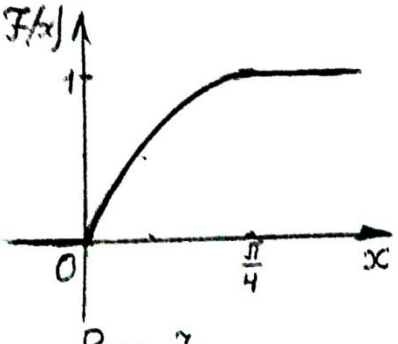


Рис. 7

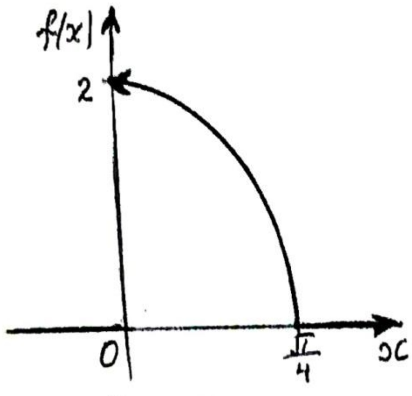


Рис. 8

Задача 6. Неперервна випадкова величина X задана функцією розподілу $F\left(x\right)$. Знайти: а) густину розподілу ймовірностей $f\left(x\right)$; б) математичне сподівання, дисперсію і середнє квадратичне відхилення випадкової величини X.

1) $F\left(x\right)=\begin{cases}0, & x<0,\\ 1-e^{-3x}, & x\geq 0.\end{cases}$

Розв'язання. а) $f\left(x\right)=F'\left(x\right)$.

$$f\left(x\right)=\begin{cases}0, & x<0,\\ 3e^{-3x}, & x\geq 0.\end{cases}$$

б) $M\left(X\right)=\int\limits_{-\infty}^{+\infty} xf\left(x\right)dx$;

$$M\left(X\right)=3\int\limits_{0}^{+\infty} xe^{-3x}dx=3\lim_{b\to+\infty}\int\limits_{0}^{b} xe^{-3x}dx=\begin{bmatrix}u=x, & du=dx\\ dv=e^{-3x}dx, & v=-\dfrac{1}{3}e^{-3x}\end{bmatrix}=$$

$$=3\lim_{b\to+\infty}\left(-\frac{x}{3}e^{-3x}\Big|_0^b+\frac{1}{3}\int\limits_0^b e^{-3x}dx\right)=$$

$$=3\lim_{b\to+\infty}\left(-\frac{x}{3}e^{-3x}-\frac{1}{9}e^{-3x}\right)\Bigg|_0^b=3\lim_{b\to+\infty}\left(-\frac{b}{3e^{3b}}-\frac{1}{9}\left(\frac{1}{e^{3b}}-1\right)\right)=3\cdot\frac{1}{9}=\frac{1}{3},$$

оскільки $\lim\limits_{b\to+\infty}\left(\dfrac{b}{3e^{3b}}\right)=0$, $\lim\limits_{b\to+\infty}\left(\dfrac{1}{e^{3b}}\right)=0$.

Отже, $M\left(X\right)=\dfrac{1}{3}$.

$$D\left(X\right)=\int\limits_{-\infty}^{+\infty}x^2 f\left(x\right)dx-\left[M\left(X\right)\right]^2;$$

$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty}x^2 f\left(x\right)dx=3\int\limits_{0}^{+\infty}x^2 e^{-3x}dx=3\lim_{b\to+\infty}\int\limits_0^b x^2 e^{-3x}dx=\begin{bmatrix}u=x^2, & du=2xdx\\ dv=e^{-3x}dx, & v=-\dfrac{1}{3}e^{-3x}\end{bmatrix}=$$

$$=3\lim_{b\to+\infty}\left(-\frac{x^2}{3}e^{-3x}+\frac{2}{3}\left(-\frac{x}{3}e^{-3x}-\frac{1}{9}e^{-3x}\right)\right)\Bigg|_0^b=$$

$$=3\lim_{b\to+\infty}\left(-\frac{b^2}{3e^{3b}}-\frac{2b}{9e^{3b}}-\frac{2}{27e^{3b}}+\frac{2}{27}\right)=\frac{2}{9},$$

оскільки перших три дроби у даному виразі прямують до нуля при $b\to+\infty$.

Таким чином, $D\left(X\right)=\dfrac{2}{9}-\dfrac{1}{9}=\dfrac{1}{9}$; $\sigma\left(X\right)=\sqrt{D\left(X\right)}=\dfrac{1}{3}$.

$$2)\ F(x)=\begin{cases}0, & x\le -2,\\ \dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{\pi}\arcsin\dfrac{x}{2}, & -2<x<2,\\ 1, & x\ge 2.\end{cases}$$

Розв'язання:

а) $f(x)=F'(x)$;

$$\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{\pi}\arcsin\frac{x}{2}\right)'=\frac{1}{\pi}\cdot\frac{1\cdot\frac{1}{2}}{\sqrt{1-\frac{x^2}{4}}}=\frac{1}{\pi\sqrt{4-x^2}}.$$

$$f(x)=\begin{cases}0, & x\le -2,\\ \dfrac{1}{\pi\sqrt{4-x^2}}, & -2<x<2,\\ 0, & x\ge 2.\end{cases}$$

б) $M(X)=\int\limits_{-\infty}^{+\infty}xf(x)dx$; $\quad M(X)=\dfrac{1}{\pi}\int\limits_{-2}^{2}\dfrac{xdx}{\sqrt{4-x^2}}.$

Враховуючи, що підінтегральна функція непарна і межі інтегрування симетричні відносно початку координат, робимо висновок, що цей інтеграл дорівнює нулю.

Отже, $M(X)=0$. Цей результат можна отримати іншим способом, якщо врахувати, що графік густини розподілу симетричний відносно прямої $x=0$ (тобто відносно осі Oy).

$$D(X)=M\left(X^2\right)-\left[M(X)\right]^2=\int\limits_{-\infty}^{+\infty}x^2f(x)dx=\int\limits_{-2}^{2}\frac{x^2dx}{\pi\sqrt{4-x^2}}=\frac{2}{\pi}\int\limits_{0}^{2}\frac{x^2dx}{\sqrt{4-x^2}},$$

оскільки підінтегральна функція є парною і межі інтегрування симетричні відносно початку координат.

Застосуємо підстановку

$$x=2\sin t;\ dx=2\cos t dt;\ t_1=0;\ t_2=\frac{\pi}{2};\ \sqrt{4-x^2}=2\cos t.$$

Отримаємо:

$$D(X)=\frac{2}{\pi}\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{4\sin^2 t\cdot 2\cos t\,dt}{2\cos t}=\frac{8}{\pi}\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^2 t\,dt=\frac{4}{\pi}\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}(1-\cos 2t)dt=$$

$$=\frac{4}{\pi}\left(t-\frac{1}{2}\sin 2t\right)\Bigg|_0^{\frac{\pi}{2}}=\frac{4}{\pi}\left(\frac{\pi}{2}+0\right)=2;$$

Отже, $M(X)=0,\ D(X)=2,\ \sigma(X)=\sqrt{2}$.

Задача 7. Знайти ймовірність попадання в заданий інтервал (α, β) нормально розподіленої випадкової величини X, якщо відомі її математичне сподівання a і середнє квадратичне відхилення σ.

$\alpha = 4, \beta = 15, a = 9, \sigma = 4$

Розв'язання.

$$P(\alpha < \mathrm{X} < \beta) = \Phi\left(\frac{\beta - a}{\sigma}\right) - \Phi\left(\frac{\alpha - a}{\sigma}\right);$$

$$P(4 < \mathrm{X} < 15) = \Phi\left(\frac{15-9}{4}\right) - \Phi\left(\frac{4-9}{4}\right) = \Phi(1{,}5) + \Phi(1{,}25) = 0{,}4332 + 0{,}3944 = 0{,}8276.$$

Задача 8. Вимірюють деяку фізичну величину без систематичних похибок. Випадкові похибки вимірювання X підпорядковані нормальному закону з математичним сподіванням $a = 0$ і середнім квадратичним відхиленням σ. Знайти ймовірність того, що:

а) одне вимірювання буде виконано з похибкою, яка не перевищує по абсолютній величині заданого додатного числа ε;

б) із n незалежних вимірювань похибка хоча б одного не перевищить по абсолютній величині числа ε.

$\sigma = 8, \varepsilon = 4, n = 3$.

Розв'язання:

а) $P\left(\left|\mathrm{X} - a\right| < \varepsilon\right) = 2\Phi\left(\frac{\varepsilon}{\sigma}\right)$; $\quad P\left(\left|\mathrm{X}\right| < 4\right) = 2\Phi\left(\frac{4}{8}\right) = 2\Phi(0{,}5) = 2 \cdot 0{,}1915 = 0{,}383.$

б) A – подія, яка полягає у тому, що похибка хоч би одного виміру не перевищує 4.

$P(A) = 1 - P(\overline{A})$,

$\overline{A}$ – похибки всіх трьох випробовувань перевищує 4.

$$P(\overline{A}) = q^3 = (1 - 0{,}383)^3 = 0{,}617^3 = 0{,}2349;$$

$$P(A) = 1 - 0{,}2349 = 0{,}7651.$$

Задача 9. Деталь, яку виготовляє автомат, вважається придатною, якщо відхилення її контрольованого розміру від проектного не перевищує 10 мм. Випадкові відхилення X контрольованого розміру від проектного розподілені за нормальним законом з математичним сподіванням $a = 0$ і середнім квадратичним відхиленням $\sigma = 5$ мм. Скільки відсотків придатних деталей виготовляє автомат?

Розв'язання. Застосуємо формулу

$$P\left(\left|X\right| < \varepsilon\right) = 2\Phi\left(\frac{\varepsilon}{\sigma}\right).$$

$$P\left(\left|X\right| < 10\right) = 2\Phi\left(\frac{10}{5}\right) = 2\Phi(2) = 2 \cdot 0{,}47725 = 0{,}95450 \approx 0{,}95.$$

Отже, автомат виготовляє приблизно 95% придатних деталей.

Задача 10. Випадкова величина X розподілена нормально з математичним сподіванням $a = 25$. Ймовірність попадання ВВ X в інтервал $(10;15)$ дорівнює 0,2. Знайти ймовірність попадання даної випадкової величини X в інтервал $(35;40)$.

Розв'язання.

$$P(a < X < b) = \int_a^b f(x)\,dx,$$

де $f(x)$ – густина розподілу ймовірностей неперервної випадкової величини.

Оскільки нормальна крива симетрична відносно прямої $x = a$ (в даному прикладі відносно прямої $x = 25$), то площі криволінійних трапецій, основами яких є відрізки $[10;15]$ і $[35;40]$, рівні між собою. Ці площі чисельно дорівнюють ймовірностям попадання ВВ X в інтервали $(10;15)$ і $(35;40)$.

Тому $P(35 < X < 40) = P(10 < X < 15) = 0,2$.

Задача 11. ВВ X розподілена нормально з математичним сподіванням $a = 10$ і середнім квадратичним відхиленням $\sigma = 5$. Знайти інтервал, симетричний відносно математичного сподівання, в який з ймовірністю $\gamma = 0,9973$ попаде X в результаті випробування.

Розв'язання. Застосуємо формулу $P(|X - a| < \varepsilon) = 2\Phi\left(\frac{\varepsilon}{\sigma}\right)$.

$2\Phi\left(\frac{\varepsilon}{\sigma}\right) = 0,9973$;

$\Phi\left(\frac{\varepsilon}{\sigma}\right) = 0,49865$;

$\frac{\varepsilon}{\sigma} = 3$;

$\varepsilon = 3\sigma$ (правило трьох сігм).

Шуканий інтервал має вигляд $(a - 3\sigma;\ a + 3\sigma)$, тобто $(-5;\ 25)$.

Задача 12. Бомбардувальник, який пролетів вздовж мосту з довжиною 30 м. і шириною 8 м., скинув бомби. Випадкові величини X і Y (відстані від точки падіння бомби до вертикальної та горизонтальної осей симетрії моста) незалежні і розподілені за нормальним законом із середніми квадратичними відхиленнями $\sigma_1 = 6$ м., $\sigma_2 = 4$ м. відповідно і математичними сподіваннями, рівними нулю. Знайти:

а) ймовірність влучення в міст однієї скинутої бомби;

б) ймовірність зруйнування мосту, якщо скинуто дві бомби, причому відомо, що для зруйнування мосту досить одного влучення.

Розв'язання.

а) Нехай A – подія, яка полягає в тому, що одна скинута бомба влучить в міст.

Подія A є добутком двох незалежних подій:

$A = A_1 \cdot A_2$;

A_1 – подія, яка полягає в тому, що $|X| < 15$;

A_2 – подія, яка полягає в тому, що $|Y| < 4$.

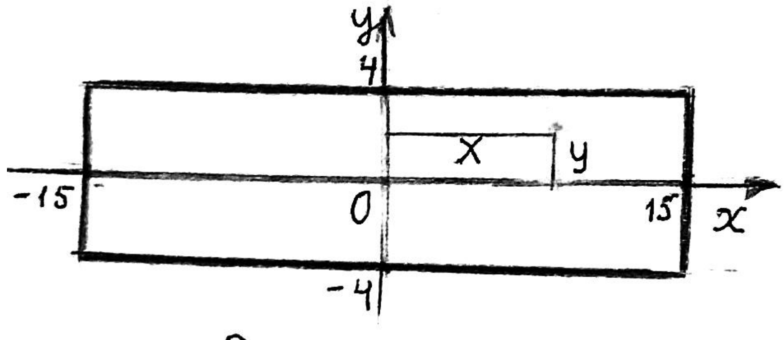


Рис. 1

$$P(A) = P(|X| < 15) \cdot P(|Y| < 4) = 2\Phi\left(\frac{15}{6}\right) \cdot 2\Phi\left(\frac{4}{4}\right) = 4\Phi(2,5) \cdot \Phi(1) =$$
$$= 4 \cdot 0,49379 \cdot 0,34134 \approx 0,674.$$

б) Нехай скинуто дві бомби. Міст буде зруйновано, якщо хоча б одна бомба влучить в нього. В пункті а) ми отримали $p = 0,674$. Ймовірність того, що одна скинута бомба не влучить в міст, $q = 1 - p = 0,326$.

$P_2(m \geq 1) = 1 - P_2(0) = 1 - q^2 = 1 - 0,326^2 \approx 0,894$.

Задача 13. $X_1, X_2, ... X_n$ – незалежні однаково розподілені випадкові величини з математичним сподіванням a і дисперсією σ^2, $\bar{X} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i$ – їх середнє арифметичне. Знайти ймовірність того, що середнє арифметичне $\bar{X}$ відхилиться від математичного сподівання a по абсолютній величині не більше ніж на ε.

$\varepsilon = 0,02, \sigma^2 = 2, n = 6025$.

Розв'язання.

$$P(|\bar{X} - a| < \varepsilon) \approx 2\Phi\left(\frac{\varepsilon\sqrt{n}}{\sigma}\right)$$

$$P(|\bar{X} - a| < 0,02) \approx 2\Phi\left(\frac{0,02 \cdot \sqrt{6025}}{\sqrt{2}}\right) \approx 2\Phi(1,1) \approx 2 \cdot 0,3643 = 0,7286.$$

Задача 14. $X_1, X_2, ... X_n$ – незалежні однаково розподілені випадкові величини з математичним сподіванням a і дисперсією σ^2, $\bar{X} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i$ – їх середнє арифметичне. Знайти ймовірність того, що середнє арифметичне $\bar{X}$ попаде в заданий інтервал (α, β).

$\alpha = 2,95, \beta = 3,05, a = 3, \sigma^2 = 3, n = 4600$.

Розв'язання.

$$P(\alpha < X < \beta) \approx \Phi\left(\frac{(\beta - a)\sqrt{n}}{\sigma}\right) - \Phi\left(\frac{(\alpha - a)\sqrt{n}}{\sigma}\right)$$

$$P(2,95 < X < 3,05) \approx \Phi\left(\frac{(3,05-3)\sqrt{4600}}{\sqrt{3}}\right) - \Phi\left(\frac{(2,95-3)\sqrt{4600}}{\sqrt{3}}\right) \approx$$

$$\approx \Phi(1,96) + \Phi(1,96) \approx 0,475 + 0,475 = 0,95.$$

Задача 15. $X_1, X_2, ...X_n$ – незалежні однакові розподілені випадкові величини з математичним сподіванням a і дисперсією σ^2, $\bar{X} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i$ – їх середнє арифметичне. Знайти таке число ε, щоб з ймовірністю γ можна було чекати, що середнє арифметичне $\bar{X}$ відхилиться від математичного сподівання a по абсолютній величині не більше ніж на ε.

$\gamma = 0,93, n = 6400, \sigma^2 = 4$.

Розв'язання:

$$P\left(\left|\bar{X} - a\right| < \varepsilon\right) \approx 2\Phi\left(\frac{\varepsilon\sqrt{n}}{\sigma}\right)$$

$$P\left(\left|\bar{X} - a\right| < \varepsilon\right) \approx 2\Phi\left(\frac{\varepsilon\sqrt{6400}}{2}\right) = 0,93$$

$$\Phi(\varepsilon \cdot 40) \approx 0,465$$

$$\varepsilon \cdot 40 = 1,81$$

$$\varepsilon = 0,04525.$$

3. Системи випадкових величин

3.1. Закон розподілу ймовірностей системи двох дискретних випадкових величин

Системою випадкових величин називається сукупність випадкових величин, яка розглядається як єдине ціле. Систему двох випадкових величин (X,Y) можна тлумачити як випадкову точку M(X,Y) на площині xOy або випадковий вектор $\overrightarrow{OM}$.

Законом розподілу ймовірностей системи випадкових величин називається співвідношення, яке встановлює зв'язок між можливими значеннями системи випадкових величин та їх ймовірностями.

Закон розподілу системи двох дискретних випадкових величин можна задати у вигляді таблиці.

Y \ X	x_1	x_2	…	x_i	…	x_n
y_1	p_{11}	p_{21}	…	p_{i1}	…	p_{n1}
y_2	p_{12}	p_{22}	…	p_{i2}	…	p_{n2}
…	…	…	…	…	…	…
y_j	p_{1j}	p_{2j}	…	p_{ij}	…	p_{nj}
…	…	…	…	…	…	…
y_m	p_{1m}	p_{2m}	…	p_{im}	…	p_{nm}

Табл. 1

Перший рядок таблиці містить всі можливі значення X, а перший стовпець – всі можливі значення складової Y. В клітинці, яка розміщена на перетині «стовпця x_i» та «рядка y_j» вказана ймовірність p_{ij} того, що система (X,Y) прийме значення (x_i,y_j) (i =1,2,….n; j =1,2…m). Всі можливі події $(X=x_i,Y=y_j)$ при i = 1,2…n; j = 1,2… m утворюють повну групу несумісних подій, тобто

$$\sum_{j=1}^{m}\sum_{i=1}^{n} p_{ij} = 1.$$

Знаючи закон розподілу системи двох дискретних випадкових величин, можна знайти закони розподілу її складових.

$$P(X=x_i)=\sum_{j=1}^{m} p_{ij}\ ; \qquad P(Y=y_j)=\sum_{i=1}^{n} p_{ij}\ , \tag{1.1}$$

(i = 1,2,..,n; j = 1,2,…,m).

Задача 1.1. Знайти закони розподілу складових системи двох дискретних випадкових величин, заданої законом розподілу

Y \ X	1	2	3
2	0,15	0,23	0,18
4	0,08	0,16	0,20

Розв'язання: Використаємо формули (1.1):

P(X=1)=0,15+0,08=0,23;

P(X=2)=0,23+0,16=0,39;
P(X=3)=0,18+0,20=0,38

Закон розподілу складової X запишеться так:

X	1	2	3
P	0,23	0,39	0,38

Закон розподілу складової Y:

Y	2	4
P	0,56	0,44

3.2. Функція розподілу системи двох випадкових величин

Функцією розподілу ймовірностей системи двох випадкових величин (X,Y) називають функцію $F(x,y)$, яка визначає для кожної пари чисел x, y ймовірність того, що X прийме значення, менше від x, і при цьому Y прийме значення, менше від y:

$$F(x,y) = P(X < x,\ Y < y) \qquad (2.1)$$

Якщо скористатись геометричним тлумаченням системи двох випадкових величин, то функція розподілу $F(x,y)$ є ймовірність попадання випадкової точки (X,Y) в нескінченний квадрат з вершиною в точці (x,y), який розміщений лівіше і нижче від неї.

Функція розподілу $F(x,y)$ має такі властивості:

а) $0 \le F(x,y) \le 1$.

б) $F(x,y)$ є неспадною функцією своїх аргументів

$F(x_2,y) \ge F(x_1,y)$, якщо $x_2 > x_1$;

$F(x,y_2) \ge F(x,y_1)$, якщо $y_2 > y_1$.

в) $\lim\limits_{x\to-\infty} F(x,y) = \lim\limits_{y\to-\infty} F(x,y) = \lim\limits_{\substack{x\to-\infty \\ y\to-\infty}} F(x,y) = 0$;

$\lim\limits_{\substack{x\to+\infty \\ y\to+\infty}} F(x,y) = 1$.

г) При $y \to +\infty$ функція розподілу системи стає функцією розподілу складової X:

$\lim\limits_{y\to+\infty} F(x,y) = F_1(x)$.

При $x \to +\infty$ функція розподілу системи стає функцією розподілу складової Y:

$\lim\limits_{x\to+\infty} F(x,y) = F_2(y)$.

Користуючись функцією розподілу, можна знайти ймовірність попадання випадкової точки (X,Y) в прямокутник $x_1 \le X < x_2,\ y_1 \le Y < y_2$:

$$P\left(x_1 \le X < x_2,\ y_1 \le Y < y_2\right) = F\left(x_2, y_2\right) - F\left(x_1, y_2\right) - \left[F\left(x_2, y_1\right) - F\left(x_1, y_1\right)\right]. \quad (2.2)$$

Функція розподілу системи існує для систем будь-яких випадкових величин (дискретних чи неперервних).

Задача 2.1. Знайти ймовірність попадання випадкової точки (X,Y) в прямокутник, обмежений прямими $x = 0,\ x = 4,\ y = 0,\ y = 5\sqrt{3}$, якщо відома функція розподілу

$$F\left(x, y\right) = \left(\frac{1}{\pi} arctg \frac{x}{4} + \frac{1}{2}\right)\left(\frac{1}{\pi} arctg \frac{y}{5} + \frac{1}{2}\right).$$

Розв'язання. Застосуємо формулу (2.2)

$$P\left(0 \le X < 4,\ 0 \le Y < 5\sqrt{3}\right) = F\left(4, 5\sqrt{3}\right) - F\left(0, 5\sqrt{3}\right) - \left[F\left(4, 0\right) - F\left(0, 0\right)\right] =$$

$$= \left(\frac{1}{\pi} arctg 1 + \frac{1}{2}\right)\left(\frac{1}{\pi} arctg \sqrt{3} + \frac{1}{2}\right) - \left(\frac{1}{\pi} arctg 0 + \frac{1}{2}\right)\left(\frac{1}{\pi} arctg \sqrt{3} + \frac{1}{2}\right) -$$

$$- \left[\left(\frac{1}{\pi} arctg 1 + \frac{1}{2}\right)\left(\frac{1}{\pi} arctg 0 + \frac{1}{2}\right) - \left(\frac{1}{\pi} arctg 0 + \frac{1}{2}\right)\left(\frac{1}{\pi} arctg 0 + \frac{1}{2}\right)\right] =$$

$$= \frac{3}{4} \cdot \frac{5}{6} - \frac{1}{2} \cdot \frac{5}{6} - \left(\frac{3}{4} \cdot \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2}\right) \approx 0,083.$$

3.3. Густина розподілу ймовірностей системи двох неперервних випадкових величин

Розподіл системи двох неперервних випадкових величин можна характеризувати як функцією розподілу, так і густиною розподілу ймовірностей. Густиною розподілу ймовірностей $f\left(x, y\right)$ системи двох неперервних випадкових величин називається мішана частинна похідна другого порядку від функції розподілу $F\left(x, y\right)$, тобто

$$f\left(x, y\right) = \frac{\partial^2 F\left(x, y\right)}{\partial x \partial y}. \quad (3.1)$$

Знаючи густину розподілу f(x,y), можна знайти функцію розподілу

$$F\left(x, y\right) = \int_{-\infty}^{y} \int_{-\infty}^{x} f\left(x, y\right) dx dy. \quad (3.2)$$

Ймовірність попадання випадкової точки (X,Y) в область D на площині xOy визначається рівністю

$$P\left(\left(X, Y\right) \in D\right) = \iint_D f\left(x, y\right) dx dy. \quad (3.3)$$

Густина розподілу ймовірностей $f\left(x, y\right)$ має такі властивості:

а) $f\left(x, y\right) \ge 0$;

б) подвійний невласний інтеграл з нескінченними межами інтегрування від густини розподілу ймовірностей $f\left(x,y\right)$ дорівнює одиниці

$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f\left(x,y\right)dxdy=1. \qquad (3.4)$$

Задача 3.1. Усередині квадрата, обмеженого прямими $x=0,\ x=\dfrac{\pi}{2},\ y=0,\ y=\dfrac{\pi}{2}$, густина розподілу ймовірностей системи двох неперервних випадкових величин $f\left(x,y\right)=C\sin\left(x+y\right)$. Поза цим квадратом $f\left(x,y\right)=0$.

Знайти:

а) сталий параметр C;

б)функцію розподілу $F\left(x,y\right)$ при $0\le x\le\dfrac{\pi}{2},\ 0\le y\le\dfrac{\pi}{2}$.

Розв'язання.

а) для знаходження параметра C скористаємося формулою (3.4).

$$C\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}dx\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}\sin(x+y)dy=1.$$

Оскільки $\displaystyle\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}dx\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}\sin(x+y)dy=\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}\left(-\cos\left(x+y\right)\Big|_0^{\pi/2}\right)dx=$

$$=\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}(\sin x+\cos x)dx=(-\cos x+\sin x)\Big|_0^{\pi/2}=2,\text{ то } C=\frac{1}{2}=0,5.$$

б) Оскільки $f\left(x,y\right)=0$ поза даним квадратом, то при $0\le x\le\dfrac{\pi}{2},\ 0\le y\le\dfrac{\pi}{2}$ функція розподілу

$$F\left(x,y\right)=0,5\int\limits_0^x dx\int\limits_0^y\sin(x+y)dy=0,5\int\limits_0^x(-\cos(x+y)\Big|_0^y)dx=0,5\int\limits_0^x(\cos x-\cos(x+y))dx=$$

$$=0,5(\sin x-\sin(x+y))\Big|_0^x=0,5(\sin x-\sin(x+y)+\sin y).$$

Отже, $F\left(x,y\right)=0,5(\sin x+\sin y-\sin(x+y))$ при $0\le x\le\dfrac{\pi}{2},\ 0\le y\le\dfrac{\pi}{2}$.

Задача 3.2. Задана густина розподілу ймовірностей системи двох неперервних величин

$$f\left(x,y\right)=\begin{cases}\dfrac{3}{63\pi}\left(4-\sqrt{x^2+y^2}\right) & \text{при} \quad x^2+y^2\le16;\\ 0 & \text{при} \quad x^2+y^2>16.\end{cases}$$

Знайти ймовірність попадання випадкової точки (X,Y) в область D: $x^2+y^2\le9$

Розв'язання. Застосуємо формулу (3.3). Ймовірність попадання випадкової точки (X,Y) в круг із радіусом $r=3$ і центром в початку координат (область D)

$$P\left[\left(X,Y\right)\in D\right]=\frac{3}{64\pi}\iint\limits_D(4-\sqrt{x^2+y^2})dxdy .$$

Перейдемо до полярних координат:

$$P\left[\left(X,Y\right)\in D\right]=\frac{3}{64\pi}\iint\limits_D(4-\rho)\rho d\rho d\varphi=$$

$$=\frac{3}{64\pi}\int\limits_0^{2\pi}d\varphi\int\limits_0^3\left(4\rho-\rho^2\right)d\rho=\frac{3}{64\pi}\cdot 2\pi\left(2\rho^2-\frac{\rho^3}{3}\right)\Bigg|_0^3=\frac{3}{32}\cdot 9\approx 0,84 .$$

Якщо відома густина розподілу ймовірностей $f\left(x,y\right)$ системи двох неперервних випадкових величин, то можна знайти густину розподілу ймовірностей кожної складової. Густина розподілу ймовірностей складової X.

$$f_1\left(x\right)=\int\limits_{-\infty}^{+\infty}f(x,y)dy ; \qquad (3.5)$$

густина розподілу складової Y

$$f_2\left(y\right)=\int\limits_{-\infty}^{+\infty}f(x,y)dx . \qquad (3.6)$$

Задача 3.3. Густина розподілу ймовірностей системи двох неперервних випадкових величин

$$f\left(x,y\right)=\frac{\sqrt{3}}{\pi}e^{-x^2-2xy-4y^2} .$$

Знайти густину розподілу ймовірностей складової Y.

Розв'язання. Скористаємось формулою (3.6).

$$f_2\left(y\right)=\frac{\sqrt{3}}{\pi}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}e^{-x^2-2xy-4y^2}dx=\frac{\sqrt{3}}{\pi}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}e^{-(x+y)^2-3y^2}dx=\frac{\sqrt{3}}{\pi}e^{-3y^2}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}e^{-(x+y)^2}d(x+y) .$$

Оскільки інтеграл Пуассона $\int\limits_{-\infty}^{+\infty}e^{-u^2}du=\sqrt{\pi}$, то остаточно отримаємо:

$$f_2\left(y\right)=\frac{\sqrt{3}}{\pi}e^{-3y^2}\cdot\sqrt{\pi}=\sqrt{\frac{3}{\pi}}e^{-3y^2} .$$

Отже густина розподілу ймовірностей випадкової величини Y

$$f_2\left(y\right)=\sqrt{\frac{3}{\pi}}e^{-3y^2} .$$

3.4. Умовні закони розподілу

Розглянемо систему двох дискретних випадкових величин (X,Y) із законом розподілу Табл.1.

Позначимо через $p\left(x_i/y_j\right)$ умовну ймовірність того, що X прийме значення x_i при умові, що складова Y прийняла значення y_j. Умовним розподілом складової X при $Y = y_j$ називають сукупність умовних ймовірностей $p\left(x_1/y_j\right),\ p\left(x_2/y_j\right),\ldots,\ p\left(x_n/y_j\right)$. Аналогічно визначається умовний розподіл складової Y.

Якщо відомий закон розподілу системи двох дискретних випадкових величин (X,Y), то можна знайти умовні закони розподілу складових. Умовні ймовірності складових X і Y обчислюються відповідно за формулами:

$$p\left(x_i/y_j\right) = \frac{p_{ij}}{P(Y = y_j)} = \frac{p_{ij}}{\sum\limits_{i=1}^{n} p_{ij}}; \tag{4.1}$$

$$p\left(y_j/x_i\right) = \frac{p_{ij}}{P(X = x_i)} = \frac{p_{ij}}{\sum\limits_{j=1}^{m} p_{ij}}. \tag{4.2}$$

Для контролю обчислень доцільно переконатися, що сума ймовірностей умовного розподілу дорівнює одиниці.

Задача 4.1. Втулки, що виробляють в цеху, сортують за відхиленнями їхнього внутрішнього діаметра від номінального розміру на чотири групи за значеннями 0,01; 0,02; 0,03; 0,04 і за овальністю – на чотири групи за значеннями 0,02; 0,04; 0,06; 0,08. Розподіл відхилень діаметра X та овальності Y наведені в таблиці

Y \ X	0,01	0,02	0,03	0,04
0,02	0,01	0,05	0,04	0,03
0,04	0,03	0,25	0,15	0,04
0,06	0,05	0,12	0,10	0,03
0,08	0,01	0,04	0,03	0,02

Знайти: а) безумовні закони розподілу складових; б) умовний закон розподілу складової X при умові, що складова Y прийняла значення y_3=0,06; в) умовний закон розподілу складової Y при умові, що X=x_1=0,01

Розв'язання: а) Додавши ймовірності «по стовпцях», отримаємо закон розподілу складової X:

X	0,01	0,02	0,03	0,04
p	0,10	0,46	0,32	0,12

Додавши ймовірності «по рядках», одержимо закон розподілу складової Y:

Y	0,02	0,04	0,06	0,08
p	0,13	0,47	0,30	0,10

б) Умовні ймовірності можливих значень X при умові, що складова Y прийняла значення $y_3 = 0,06$, обчислимо за формулою (4.1).

$$p(x_1/y_3) = \frac{p_{13}}{P(Y = y_3)} = \frac{0,05}{0,30} \approx 0,17;$$

$$p(x_2/y_3) = \frac{p_{23}}{P(Y = y_3)} = \frac{0,12}{0,30} = 0,40;$$

$$p(x_3/y_3) = \frac{p_{33}}{P(Y = y_3)} = \frac{0,10}{0,30} \approx 0,33;$$

$$p(x_4/y_3) = \frac{p_{43}}{P(Y = y_3)} = \frac{0,03}{0,30} = 0,10.$$

Запишемо шуканий умовний розподіл складової X:

X	0,01	0,02	0,03	0,04
$p(X/y_3)$	0,17	0,40	0,33	0,10

в) Умовні ймовірності можливих значень Y при умові, що складова X прийняла значення x_1=0,01 обчислимо за формулою (4.2).

$$p(y_1/x_1) = \frac{p_{11}}{P(X = x_1)} = \frac{0,01}{0,10} = 0,10;$$

$$p(y_2/x_1) = \frac{p_{12}}{P(X = x_1)} = \frac{0,03}{0,10} = 0,30;$$

$$p(y_3/x_1) = \frac{p_{13}}{P(X = x_1)} = \frac{0,05}{0,10} = 0,50;$$

$$p(y_4/x_1) = \frac{p_{14}}{P(X = x_1)} = \frac{0,01}{0,10} = 0,10.$$

Отже, шуканий умовний розподіл складової Y має вигляд:

Y	0,02	0,04	0,06	0,08
$p(Y/x_1)$	0,10	0,30	0,50	0,10

Якщо (X,Y) – система двох неперервних випадкових величин, то умовною густиною розподілу ймовірностей складової X при умові, що складова Y прийняла значення y, називається відношення густини розподілу системи (X,Y) до густини розподілу складової Y:

$$\varphi(x/y) = \frac{f(x,y)}{f_2(y)} = \frac{f(x,y)}{\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(x,y)dx}. \tag{4.3}$$

Аналогічно визначається умовна густина розподілу ймовірностей складової Y:

$$\psi(y/x) = \frac{f(x,y)}{f_1(x)} = \frac{f(x,y)}{\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(x,y)dy}. \tag{4.4}$$

Формули (4.3) і (4.4) можна записати у вигляді:

$$f(x,y) = f_2(y)\varphi(x/y), \quad f(x,y) = f_1(x)\psi(y/x). \tag{4.5}$$

Отже, густина розподілу системи двох неперервних випадкових величин дорівнює добутку густини розподілу однієї із величин на умовну густину розподілу ймовірностей іншої величини, обчислену в припущенні, що перша величина прийняла задане значення.

Для незалежних випадкових величин X і Y умовні густини розподілу ймовірностей дорівнюють їх безумовним густинам, тобто

$$\varphi(x/y) = f_1(x);\ \ \psi(y/x) = f_2(y) \tag{4.6}$$

У цьому випадку із формул (4.5) одержуємо:

$$f(x,y) = f_1(x)\, f_2(y), \tag{4.7}$$

тобто густина розподілу системи незалежних неперервних випадкових величин дорівнює добутку густин розподілу окремих величин, що входять у систему.

Задача 4.2. Усередині квадрата, обмеженого прямими $x=0,\ x=1,\ y=0,\ y=1$, густина розподілу ймовірностей системи двох неперервних випадкових величин $f(x,y) = 2-x-y$. Поза цим квадратом $f(x,y)=0$. Знайти умовні закони розподілу величин, які входять у систему, і встановити, чи є ці випадкові величини залежними.

Розв'язання. За формулами (3.5), (3.6) знайдемо густину розподілу ймовірностей кожної складової:

$$f_1(x) = \int_0^1 (2-x-y)dy = \left((2-x)y - \frac{y^2}{2} \right)\Bigg|_0^1 = \frac{3}{2} - x;$$

Отже, $$f_1(x) = \begin{cases} 0 & при \quad x<0; \\ \dfrac{3}{2} - x & при \quad 0 \le x \le 1; \\ 0 & при \quad x>1. \end{cases}$$

Аналогічно отримаємо:

$$f_2(y) = \begin{cases} 0 & при \quad y<0; \\ \dfrac{3}{2} - y & при \quad 0 \le y \le 1; \\ 0 & при \quad y>1. \end{cases}$$

Скориставшись формулами (4.3) та (4.4), одержимо:

$$\varphi(x/y) = \frac{2-x-y}{1{,}5-y},\ \ (0 \le x \le 1; 0 \le y \le 1);$$

$$\psi(y/x) = \frac{2-x-y}{\frac{3}{2}-x},\ \ (0 \le x \le 1; 0 \le y \le 1).$$

Оскільки $\varphi(x/y) \ne f_1(x)$, $\psi(y/x) \ne f_2(y)$, то випадкові величини X і Y залежні.

3.5. Умовне математичне сподівання

Важливою характеристикою умовного розподілу ймовірностей є умовне математичне сподівання.

Умовним математичним сподіванням M(Y/x) дискретної випадкової величини Y при $X = x$ (x – певне можливе значення дискретної випадкової величини X) називається сума добутків можливих значень Y на їхні умовні ймовірності:

$$M\left(Y/x\right) = \sum_{j=1}^{m} y_j p(y_j / x), \qquad (5.1)$$

де x – одне із можливих значень $x_1, x_2, \ldots, x_n$ випадкової величини X.

Для системи неперервних випадкових величин (X,Y) M(Y/x) визначається формулою:

$$M\left(Y/x\right) = \int_{-\infty}^{+\infty} y\psi(y / x)dy, \qquad (5.2)$$

де $\psi\left(y/x\right)$ – умовна густина розподілу ймовірностей випадкової величини Y при умові, що випадкова величина X прийняла значення x.

В обох випадках умовне математичне сподівання M(Y/x) є функцією від x:

$$M(Y/x)=f(x), \qquad (5.3)$$

яка називається регресією Y на X.

Графік цієї функції називається лінією регресії Y на X.

Аналогічно визначається умовне математичне сподівання M(X/y). Якщо випадкові величини X і Y дискретні, то

$$M\left(Y/x\right) = \sum_{i=1}^{n} x_i p(x_i / y), \qquad (5.4)$$

де y – одне з можливих значень $y_1, y_2, \ldots, y_m$ випадкової величини Y.

Для системи випадкових неперервних величин (X,Y).

$$M\left(X/y\right) = \int_{-\infty}^{+\infty} x\varphi(x / y)dx, \qquad (5.5)$$

де $\varphi\left(x/y\right)$ – умовна густина розподілу ймовірностей випадкової величини X при умові, що випадкова величина Y прийняла значення y.

Умовне математичне сподівання випадкової величини X є функцією від y:

$$M(X/y)=q(y). \qquad (5.6)$$

Функція q(y) називається регресією X на Y, а її графік – лінією регресії X на Y.

Задача 5.1. За законом розподілу системи двох випадкових величин, який розглядався у задачі 4.1., знайти умовне математичне сподівання випадкової величини Y при умові, що $X = x_4 = 0,04$.

Розв'язання. Застосуємо формулу (5.1).

$$M\left(Y/x_4\right) = \sum_{j=1}^{4} y_j p(y_j / x_4).$$

Обчислюємо умовні ймовірності $p(y_j/x_4)$, j = 1,2,3,4.

$p(y_1/x_4) = \frac{0,03}{0,12} = 0,25;$ $p(y_2/x_4) = \frac{0,04}{0,12} \approx 0,33$

$p(y_3/x_4) = \frac{0,03}{0,12} = 0,25$ $p(y_4/x_4) = \frac{0,02}{0,12} \approx 0,17$

Отже, $M\left(Y/x_4\right) = 0,02 \cdot 0,25 + 0,04 \cdot 0,33 + 0,06 \cdot 0,25 + 0,08 \cdot 0,17 \approx 0,047$.

3.6. Числові характеристики системи двох випадкових величин

Якщо (X,Y) – система двох дискретних випадкових величин, закон розподілу якої має вигляд Табл.1, то математичне сподівання для кожної складової системи визначається так:

$$M(X) = M\left(X\right) = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m} x_i p_{ij}; \quad M\left(Y\right) = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m} y_j p_{ij}. \qquad (6.1)$$

Математичне сподівання для складових системи двох неперервних випадкових величин визначається за формулами:

$$\begin{aligned} M(X) &= \int_{-\infty}^{+\infty} x f_1(x)dx = \int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} x f(x,y)dxdy; \\ M(Y) &= \int_{-\infty}^{+\infty} y f_2(y)dy = \int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} y f(x,y)dxdy; \end{aligned} \qquad (6.2)$$

де $f(x,y)$ – густина розподілу ймовірностей цієї системи.

Дисперсія кожної складової системи двох випадкових величин обчислюється за такими формулами:

а) у випадку дискретних випадкових величин

$$\begin{aligned} D(X) &= \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m} x_i^2 p_{ij} - \left[M(X)\right]^2; \\ D(Y) &= \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m} y_j^2 p_{ij} - \left[M(Y)\right]^2; \end{aligned} \qquad (6.3)$$

б) у випадку неперервних випадкових величин

$$\begin{aligned} D(X) &= \int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} x^2 f(x,y)dxdy - \left[M(X)\right]^2; \\ D(Y) &= \int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} y^2 f(x,y)dxdy - \left[M(Y)\right]^2. \end{aligned} \qquad (6.4)$$

Кореляційним моментом (моментом зв’язку) системи двох випадкових величин (X,Y) називається математичне сподівання добутку відхилень цих величин від своїх математичних сподівань

$$K_{xy} = M\left[(X - M(X))(Y - M(Y))\right]. \qquad (6.5)$$

Легко переконатися, що кореляційний момент можна записати у вигляді:

$$K_{xy} = M(XY) - M(X)M(Y).$$

Для обчислення кореляційного моменту дискретних випадкових величин користуються формулами:

$$K_{xy} = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m}\left(x_i - M\left(X\right)\right)\left(y_j - M\left(Y\right)\right)p_{ij};$$
$$K_{xy} = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m} x_i y_j p_{ij} - M(X)M(Y), \tag{6.6}$$

а для неперервних випадкових величин – формулами :

$$K_{xy} = \int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}\left(x - M\left(X\right)\right)\left(y - M\left(Y\right)\right)f(x,y)dxdy;$$
$$K_{xy} = \int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} xyf(x,y)dxdy - M(X)M(Y). \tag{6.7}$$

Коефіцієнтом кореляції r_{xy} випадкових величин X і Y називається відношення кореляційного моменту K_{xy} до добутку середніх квадратичних відхилень цих величин:

$$r_{xy} = r_{xy} = \frac{K_{xy}}{\sigma_x \sigma_y}. \tag{6.8}$$

Коефіцієнт кореляції r_{xy} має такі властивості:

а) якщо X і Y – незалежні випадкові величини, то $K_{xy}=0$ і $r_{xy}=0$;

б) абсолютна величина коефіцієнта кореляції не перевищує одиниці: $\left|r_{xy}\right| \le 1$;

в) якщо випадкові величини X і Y зв’язані лінійною функціональною залежністю Y=aX+b (a,b – дійсні числа), то $\left|r_{xy}\right| = 1$, причому $r_{xy}=1$ при a>0 і $r_{xy}=-1$ при a<0.

Коефіцієнт кореляції r_{xy} характеризує силу лінійного зв’язку між випадковими величинами X і Y: чим ближче абсолютна величина коефіцієнта кореляції до одиниці, тим тісніший лінійний зв’язок; чим ближче абсолютна величина коефіцієнта кореляції до нуля, тим лінійний зв’язок слабший.

Дві випадкові величини X і Y називаються корельованими, якщо їх коефіцієнт кореляції $r_{xy} \ne 0$; X і Y називаються некорельованими величинами, якщо $r_{xy}=0$.

Дві корельовані випадкові величини є також і залежними, але із залежності випадкових величин ще не випливає їх корельованість.

Із незалежності двох випадкових величин випливає їх некорельованість, але із некорельованості випадкових величин не можна зробити висновок про їх незалежність.

Задача 6.1. Густина розподілу ймовірностей системи неперервних випадкових величин (X,Y) (координат амплітуд коливань кузова автомобіля при русі) f(x,y)=0,5sin(x+y) в квадраті $0 \le x \le \frac{\pi}{2}, 0 \le y \le \frac{\pi}{2}$; поза цим квадратом f(x,y)=0. Знайти математичні сподівання та дисперсії складових системи.

Розв’язання. Застосувавши формули (6.2), обчислимо M(X) та M(Y).

$$M(X)=0,5\int_0^{\frac{\pi}{2}} xdx\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin(x+y)dy=0,5\int_0^{\frac{\pi}{2}} x(\sin x+\cos x)dx=$$

$$=0,5\left(x(\sin x-\cos x)\Big|_0^{\pi/2}-\int_0^{\frac{\pi}{2}}(\sin x-\cos x)\,d\,x\right)=$$

$$=0,5\left(\frac{\pi}{2}+(\sin x+\cos x)\Big|_0^{\pi/2}\right)=\frac{\pi}{4}\approx 0,79.$$

Для обчислення визначеного інтеграла ми використали метод інтегрування за частинами.

$$M(Y)=0,5\int_0^{\frac{\pi}{2}} ydy\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin(x+y)dx=\frac{\pi}{4}\approx 0,79.$$

Дисперсії складових X і Y знайдемо за формулами (6.4)

$$D(X)=0,5\int_0^{\frac{\pi}{2}} x^2dx\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin(x+y)dy-\frac{\pi^2}{16}=0,5\int_0^{\frac{\pi}{2}} x^2(\sin x+\cos x)dx-\frac{\pi^2}{16}.$$

Інтегруючи двічі за частинами, одержимо:

$$D(X)=\frac{\pi^2}{8}+\frac{\pi}{2}-2-\frac{\pi^2}{16}=\frac{\pi^2}{16}+\frac{\pi}{2}-2\approx 0,19;$$

$$D(Y)=0,5\int_0^{\frac{\pi}{2}} y^2dy\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin(x+y)dx=\frac{\pi^2}{16}+\frac{\pi}{2}-2\approx 0,19.$$

Задача 6.2. Система двох неперервних випадкових величин розподілена рівномірно в крузі $x^2+y^2\le r^2$. Довести, що X і Y – залежні випадкові величини, але некорельовані.

Розв'язання. Оскільки система (X,Y) розподілена рівномірно в крузі $x^2+y^2\le r^2$, то

$$f(x,y)=\begin{cases} C & при \quad x^2+y^2\le r^2; \\ 0 & при \quad x^2+y^2>r^2. \end{cases}$$

Скориставшись властивістю густини розподілу ймовірностей системи, одержимо: $C=\dfrac{1}{\pi r^2}$.

Знайдемо густину розподілу кожної складової за формулами (3.5) і (3.6)

$$f_1(x)=\int_{-\sqrt{r^2-x^2}}^{\sqrt{r^2-x^2}}\frac{1}{\pi r^2}dy=\frac{2\sqrt{r^2-x^2}}{\pi r^2};\quad -r\le x\le r\,.$$

Аналогічно отримаємо $f_2(y)=\dfrac{2\sqrt{r^2-y^2}}{\pi r^2};(-r\le y\le r)$

Умовну густину розподілу ймовірностей складової X $\varphi(x/y)$ знайдемо за формулою (4.3).

$$\varphi(x/y) = \frac{f(x,y)}{f_2(y)} = \frac{1}{2\sqrt{r^2 - y^2}};(-r < y < r).$$

Скориставшись співвідношенням (4.4), отримаємо:

$$\psi(y/x) = \frac{1}{2\sqrt{r^2 - x^2}};(-r < x < r).$$

Отже випадкові величини X і Y залежні.

Обчислимо кореляційний момент системи (X,Y) за другою із формул (6.7).

$K_{xy} = \iint\limits_D xy\frac{1}{\pi r^2}dxdy - M(X)M(Y),$ де область D – круг $x^2 + y^2 \le r^2$.

$$\frac{1}{\pi r^2}\iint\limits_D xydxdy = \frac{1}{\pi r^2}\int\limits_{-r}^{r} xdx \int\limits_{-\sqrt{r^2-x^2}}^{\sqrt{r^2-x^2}} ydy = 0.$$

M(X)=0, оскільки графік густини розподілу $f_1(x)$ величини X симетричний відносно прямої $x = 0$.

Аналогічно одержимо, що M(Y)=0.

Отже, кореляційний момент $K_{xy}=0$ і коефіцієнт кореляції $r_{xy}=0$, тобто випадкові величини X і Y некорельовані.

3.7. Нормальний закон розподілу системи двох неперервних випадкових величин

Розподіл ймовірностей системи (X,Y) називається нормальним, якщо густина розподілу має вигляд:

$$f(x,y) = \frac{1}{2\pi\sigma_x\sigma_y\sqrt{1-r_{xy}^2}} e^{-\frac{1}{2(1-r_{xy}^2)}\left[\frac{(x-a)^2}{\sigma_x^2} + \frac{(y-b)^2}{\sigma_y^2} - 2r_{xy}\frac{(x-a)(y-b)}{\sigma_x\sigma_y}\right]}, \qquad (7.1)$$

де *a*,*b* – математичні сподівання випадкових величин *X* і *Y*; σ_x, σ_y – їх середні квадратичні відхилення; r_{xy} – коефіцієнт кореляції величин *X* і *Y*.

Можна довести, що якщо система (X,Y) розподілена нормально з параметрами $a, b, \sigma_x, \sigma_y, r_{xy}$, то її складові також розподілені за нормальним законом з параметрами, рівними відповідно a, σ_x та b, σ_y.

Якщо складові *X* і *Y* некорельовані, тобто $r_{xy} = 0$, то

$$f(x,y) = \frac{1}{2\pi\sigma_x\sigma_y} e^{-\frac{1}{2}\left[\frac{(x-a)^2}{\sigma_x^2} + \frac{(y-b)^2}{\sigma_y^2}\right]} = \frac{1}{\sigma_x\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-a)^2}{2\sigma_x^2}} \frac{1}{\sigma_y\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(y-b)^2}{2\sigma_y^2}} = f_1(x)f_2(y); \qquad (7.2)$$

де f_1(x) і f_2(y) густини розподілу ймовірностей випадкових величин *X* і *Y*.

Отже, якщо складові нормально розподіленої системи випадкових величин (X,Y) некорельовані, то густина розподілу системи дорівнює добутку густин розподілу складових, а це означає, що випадкові величини X і Y – незалежні. Таким чином, для нормально розподілених складових системи двох випадкових величин поняття незалежності та некорельованості еквівалентні.

Задача 7.1. Координати (X,Y) випадкової точки на площині розподілені за нормальним законом з густиною

$$f(x,y)=\frac{1}{2\pi\sigma_x\sigma_y}e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x^2}{\sigma_x^2}+\frac{y^2}{\sigma_y^2}\right)}.$$

Визначити ймовірність того, що випадкова точка попаде в область, обмежену еліпсом з півосями $\lambda\sigma_x$ і $\lambda\sigma_y$, якщо осі симетрії еліпса співпадають з координатними осями Ox та Oy.

Розв'язання. Рівняння цього еліпса має вигляд: $\frac{x^2}{\lambda^2{\sigma_x}^2}+\frac{y^2}{\lambda^2\sigma_y^2}=1.$

Область, обмежену даним еліпсом, позначимо через E_λ. Застосувавши формулу (3.3), отримаємо:

$$P((X,Y)\in E_\lambda)=\iint\limits_{E_\lambda} f(x,y)dxdy=\frac{1}{2\pi\sigma_x\sigma_y}\iint\limits_{E_\lambda} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x^2}{\sigma_x^2}+\frac{y^2}{\sigma_y^2}\right)}dxdy\,. \qquad (7.3)$$

Перейдемо в інтегралі (7.3) до узагальнених полярних координат:

$$x=\sigma_x\rho\cos\varphi, y=\sigma_y\rho\sin\varphi. \qquad (7.4)$$

Якобіан перетворення (7.4)

$$J(\rho,\varphi)\begin{vmatrix}\frac{\partial x}{\partial p} & \frac{\partial x}{\partial\varphi}\\ \frac{\partial y}{\partial p} & \frac{\partial y}{\partial\varphi}\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}\sigma_x\cos\varphi & -\sigma_x\rho\sin\varphi\\ \sigma_y\sin\varphi & \sigma_y\rho\cos\varphi\end{vmatrix}=\sigma_x\sigma_y\rho. \qquad (7.5)$$

Виконавши заміну змінних, одержимо

$$P((X,Y)\in E_\lambda)=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}d\varphi\int_0^{\lambda}\rho e^{-\frac{\rho^2}{2}}d\rho=1-e^{-\frac{\lambda^2}{2}}.$$

Якщо, наприклад, $\lambda=2$, тобто еліпс має півосі $2\sigma_x, 2\sigma_y$, то $P((X,Y)\in E_\lambda)=1-e^{-2}\approx 0{,}865.$

4. Елементи математичної статистики

4.1. Генеральна сукупність та вибірка. Емпірична функція розподілу. Полігон та гістограма

Завдання математичної статистики полягає в створенні методів збирання, групування та аналізу експериментальних даних, отриманих в результаті спостереження масових випадкових явищ. Теоретичною основою математичної статистики є теорія ймовірностей.

Статистичною сукупністю називається група об'єктів, які об'єднані за деякою кількісною або якісною ознакою X . Наприклад, досліджується партія деталей. Якісною ознакою може бути стандартність, а кількісною – розмір або вага деталі. Інколи проводять дослідження кожного об'єкта. Але на практиці це роблять рідко. Наприклад, якщо сукупність містить досить велике число об'єктів, то проводити суцільне дослідження фізично неможливо. Якщо дослідження об'єкта зв'язане з його знищенням або вимагає великих матеріальних затрат, то проводити дослідження кожного об'єкта немає змісту.

Вибіркою називається сукупність випадково вибраних об'єктів.

Генеральною сукупністю називається статистична сукупність, з якої здійснюють вибірку. ***Повторною*** називається вибірка, при якій вибраний об'єкт (перед вибором наступного) повертається у генеральну сукупність. ***Безповторною*** називається вибірка, при якій вибраний об'єкт не повертається в генеральну сукупність. На практиці зазвичай користуються безповоротною вибіркою.

Основна вимога до вибірки: вибірка повинна бути репрезентативною, тобто правильно відображати пропорції генеральної сукупності. На основі закону великих чисел, можна стверджувати, що вибірка буде, репрезентативною, якщо її виконати випадково, тобто якщо всі об'єкти мають однакову можливість попасти у вибірку.

На практиці застосовуються різні способи вибору об'єктів. Ці способи можна поділити на два види:

1) вибір, який не вимагає розподілу сукупності на частини, сюди відносяться простий випадковий безповторний вибір та простий випадковий повторний вибір;
2) вибір, при якому генеральна сукупність ділиться на частини, сюди відносяться типовий, механічний і серійний вибір.

При ***простому випадковому*** виборі об'єкти виймають по одному зі всієї генеральної сукупності.

Типовим називається вибір, при якому об'єкти вибирають не з усієї генеральної сукупності, а з кожної її типової частини. Наприклад, якщо деталі виробляють на декількох верстатах, то вибір здійснюють з продукції кожного верстата окремо.

Механічним називається вибір, при якому генеральна сукупність ділиться «механічно» на стільки груп, скільки об'єктів повинно увійти у вибірку, і з кожної групи вибирають один об'єкт. Наприклад, якщо потрібно вибрати 10% виготовлених деталей, то вибирають кожну десяту деталь, якщо потрібно вибрати 5% виготовлених деталей – то кожну двадцяту.

Серійним називається вибір, при якому об'єкти вибирають з генеральної сукупності серіями і у вибраних серіях проводять суцільне дослідження. Наприклад, якщо вироби виготовляються великою групою однакових верстатів – автоматів, то суцільно досліджують продукцію тільки декількох автоматів.

Зазначимо, що на практиці часто застосовуються комбіновані методи вибору, які поєднують розглянуті способи.

Нехай для вивчення кількісної (дискретної або неперервної) ознаки X із генеральної сукупності зроблена вибірка об'єму n. Значення x_i ознаки X, які спостерігалися у вибірці, називають ***варіантами***; послідовність варіант, записаних в порядку зростання, називають ***варіаційним рядом***.

Якщо вибірка об'єму n містить k різних значень $x_1, x_2, ..., x_k$, причому значення x_i трапляється n_i разів ($i = 1, 2, ..., k$), то число n_i називається ***частотою варіанти*** x_i, а відношення $w_i = \dfrac{n_i}{n}$ називається ***відносною частотою варіанти*** x_i.

Очевидно, що

$$\sum_{i=1}^{k} n_i = n\,;\ \sum_{i=1}^{n} w_i = 1.$$

Статистичним розподілом вибірки у випадку дискретної ознаки X називають перелік варіант і відповідних частот або відносних частот.

Статистичним розподілом вибірки у випадку неперервної ознаки X називають перелік інтервалів і відповідних частот або відносних частот (за частоту, що відповідає інтервалу, приймають суму частот варіант, які попали в цей інтервал).

Емпіричною функцією розподілу називається функція $F^*(x)$, яка для кожного значення x визначає відносну частоту події $X < x$:

$$F^*(x) = \frac{n_x}{n}, \qquad (1.1)$$

де n_x – число варіант, менших від x; n – об'єм вибірки.

Емпірична функція розподілу $F^*(x)$ є оцінкою для невідомої функції розподілу $F(x)$ випадкової величини X.

Функція $F^*(x)$ має такі властивості:

а) значення емпіричної функції належать відрізку [0,1];

б) $F^*(x)$ – неспадна функція;

в) якщо x_1 – найменша, а x_k – найбільша варіанти, то $F^*(x) = 0$ при $x \le x_1$ і $F^*(x) = 1$ при $x > x_k$.

Задача 1.1. Знайти емпіричну функцію $F^*(x)$ за даним розподілом вибірки. Побудувати графік цієї функції.

x_i	1	3	4	5
n_i	6	8	6	5

Розв'язання: Об'єм вибірки $n = 6 + 8 + 6 + 5 = 25$.

Найменша варіанта 1, тому $F^*(x) = 0$ при $x \le 1$.

Значення $X<3$, а саме $x_1=1$, спостерігалось 6 разів. Отже, $F^*(x)=\frac{6}{25}=0,24$ при $1<x\leq 3$.

Якщо $3<x\leq 4$, то $F^*(x)=\frac{14}{25}=0,56$, оскільки значення $x_1=1$ і $x_2=3$ спостерігались $6+8=14$ разів.

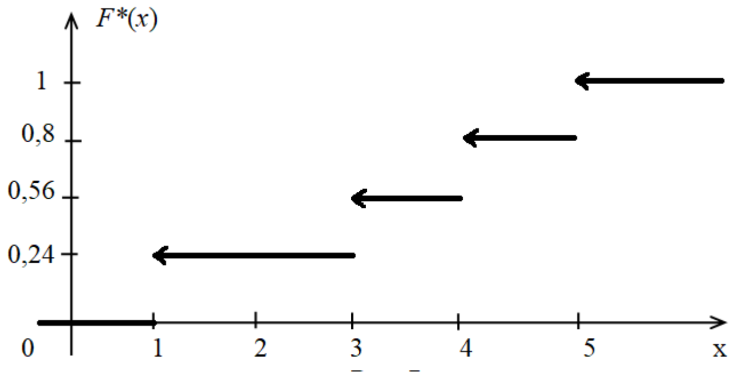
Якщо $4<x\leq 5$, то $F^*(x)=\frac{20}{25}=0,80$, оскільки в цьому випадку $n_x=6+8+6=20$.

Оскільки найбільша варіанта дорівнює 5, то $F^*(x)=1$ при $x>5$.

Таким чином:

$$F^*(x)=\begin{cases}0 & при \quad x\leq 1\\ 0,24 & при \quad 1<x\leq 3\\ 0,56 & при \quad 3<x\leq 4\\ 0,80 & при \quad 4<x\leq 5\\ 1 & при \quad x>5\end{cases}$$

Графік цієї функції зображений на рисунку.



Полігоном частот називають ламану, відрізки якої з'єднують точки $(x_1;n_1),(x_2;n_2),...,(x_k;n_k)$, де x_i – варіанти вибірки; n_i – відповідні частоти ($i=1,2,...,k$).

Полігоном відносних частот називають ламану, відрізки якої з'єднують точки $(x_1;\omega_1),(x_2;\omega_2),...,(x_k;\omega_k)$, де ω_i – відносні частоти, що відповідають варіантам x_i ($i=1,2,...,k$).

Задача 1.2. В результаті перевірки партії деталей одержані такі результати за сортами: 1, 2, 1, 2, 1, 1, 1, 3, 4, 1, 1, 2, 2, 3 ,1, 1,1, 2,1,1,4,2,2,1,1. Скласти статичний розподіл вибірки, побудувати полігон відносних частот.

Розв'язання. Розмістимо варіанти в порядку зростання і обчислимо частоти, що відповідають даним варіантам. Отримаємо:

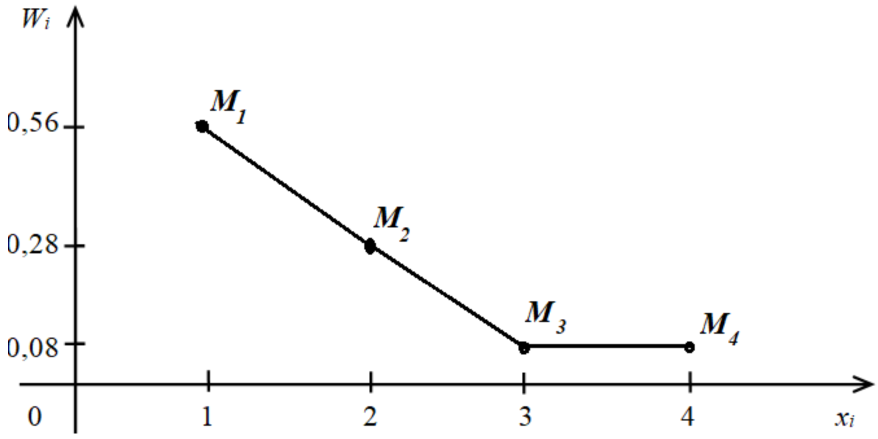
x_i	1	2	3	4
n_i	14	7	2	2

Знайдемо відносні частоти.

Оскільки об'єм вибірки n=14+7+2+2=25, то

$$w_1 = \frac{14}{25} = 0,56; \; w_2 = \frac{7}{25} = 0,28; \; w_3 = \frac{2}{25} = 0,08; \; w_4 = \frac{2}{25} = 0,08.$$

Побудувавши точки M_1(1; 0,56), M_2(2; 0,28), M_3(3; 0,08), M_4(4;0,08) і з'єднавши їх відрізками прямих, одержимо шуканий полігон відносних частот.



У випадку неперервної ознаки X інтервал, в якому містяться всі варіанти, ділять на часткові інтервали з довжиною h і знаходять n_i – суму частот варіант, що попали в i-ий інтервал.

Гістограмою частот називають фігуру, яка складається з прямокутників, основами яких є часткові інтервали з довжиною h, а висоти дорівнюють густині частоти $\frac{n_i}{h}$ ($i = 1, 2, ..., k$).

Площа гістограми частот дорівнює сумі всіх частот, тобто об'єму вибірки n.

Гістограмою відносних частот називають фігуру, яка складається з прямокутників, основами яких є часткові інтервали з довжиною h, а висоти дорівнюють густині відносної частоти $\frac{w_i}{h}$.

Площа гістограми відносних частот дорівнює сумі усіх відносних частот, тобто одиниці.

Задача 1.3. Із литва, що випускає завод, зроблена вибірка 50 штук литих деталей, зважування яких дало наступні результати (в кг):

99,2	101,5	99,5	102,2	99,7	101,1	100,2	98,8	99,3	100,4
100,9	100,5	99,8	102,1	101,7	100,8	101,1	99,9	99,6	99,1
100,3	102,4	98,9	98,8	100,4	99,7	97,6	101,2	99,4	98,2
100,1	98,3	100,7	101,2	97,2	99,9	101,3	100,6	100,7	101,6
102,7	98,6	99,6	99,7	98,2	100,7	101,2	99,6	100,3	99,8

Скласти статистичний розподіл вибірки та побудувати гістограму відносних частот.

Розв'язання. Найменша варіанта даної вибірки дорівнює 97,2, а найбільша 102,7. Інтервал (97,2; 102,7) поділимо, наприклад, на 5 часткових інтервалів.

Довжина кожного часткового інтервала $h = \dfrac{102,7 - 97,2}{5} = 1,1$.

Обчислимо суму частот варіант, які попали в кожний частковий інтервал, і складемо таблицю:

Номер інтервала	1	2	3	4	5
Частковий інтервал	(97,2; 98,3)	(98,3; 99,4)	(99,4; 100,5)	(100,5; 101,6)	(101,6; 102,7)
Сума частот варіант, які попали в частковий варіант	4	8	18	14	6

Обчислимо відносні частоти.

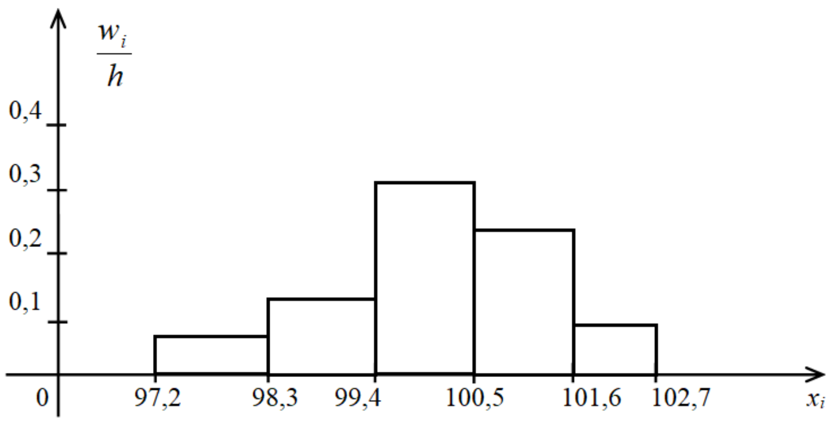
Оскільки об'єм вибірки n=50, то $w_1 = \dfrac{4}{50} = 0,08$; $w_2 = \dfrac{8}{50} = 0,16$; $w_3 = \dfrac{18}{50} = 0,36$; $w_4 = \dfrac{14}{50} = 0,28$; $w_5 = \dfrac{6}{50} = 0,12$.

Знайдемо густину відносних частот:

$\dfrac{w_1}{h} = 0,073$; $\dfrac{w_2}{h} = 0,146$; $\dfrac{w_3}{h} = 0,327$; $\dfrac{w_4}{h} = 0,254$; $\dfrac{w_5}{h} = 0,109$.

Побудуємо на осі абсцис часткові інтервали. Проведемо над кожним інтервалом відрізок, який паралельний до осі абсцис і знаходиться від неї на відстані, що дорівнює відповідній густині відносної частоти.

Шукана гістограма відносних частот зображена на рисунку.



Розв'язування типових задач

Задача 1. Дано статистичний розподіл вибірки. Потрібно:

1) знайти емпіричну функцію розподілу і побудувати її графік;

2) побудувати полігони частот і відносних частот.

x_i	2	4	6	8
n_i	3	7	8	2

Розв'язання. 1) Об'єм вибірки $n = 20$.

Найменша варіанта $x_1 = 2$, тому $F^*(x) = 0$ при $x \le 2$.

Якщо $2 < x \le 4$, то $n_x = 3$ і $F^*(x) = \frac{3}{20} = 0{,}15$.

Якщо $4 < x \le 6$, то $n_x = 3 + 7 = 10$ і $F^*(x) = \frac{10}{20} = 0{,}5$.

Якщо $6 < x \le 8$, то $n_x = 18$ і $F^*(x) = \frac{18}{20} = 0{,}9$.

При $x > 8$ $F^*(x) = \frac{20}{20} = 1$.

Отже,

$$F^*(x) = \begin{cases} 0 & \textit{при} \quad x \le 2, \\ 0{,}15 & \textit{при} \quad 2 < x \le 4, \\ 0{,}5 & \textit{при} \quad 4 < x \le 6, \\ 0{,}9 & \textit{при} \quad 6 < x \le 8, \\ 1 & \textit{при} \quad x > 8. \end{cases}$$

Графік цієї функції зображений на рисунку 1.

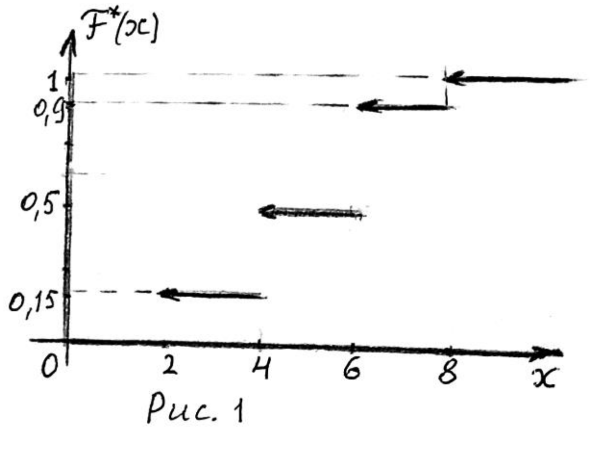


Рис. 1

2) Знайдемо відносні частоти:

$$w_1 = \frac{3}{20} = 0{,}15; \quad w_2 = \frac{7}{20} = 0{,}35; \quad w_3 = \frac{8}{20} = 0{,}4; \quad w_4 = \frac{2}{20} = 0{,}1.$$

Щоб одержати полігон частот, побудуємо точки $M_1(2;\ 3)$, $M_2(4;\ 7)$, $M_3(6;\ 8)$, $M_4(8;\ 2)$ і з'єднаємо їх відрізками прямих.

Побудувавши точки $M_1'(2;\ 0{,}15)$, $M_2'(4;\ 0{,}35)$, $M_3'(6;\ 0{,}4)$, $M_4'(8;\ 0{,}1)$ і з'єднавши їх відрізками, отримаємо полігон відносних частот.

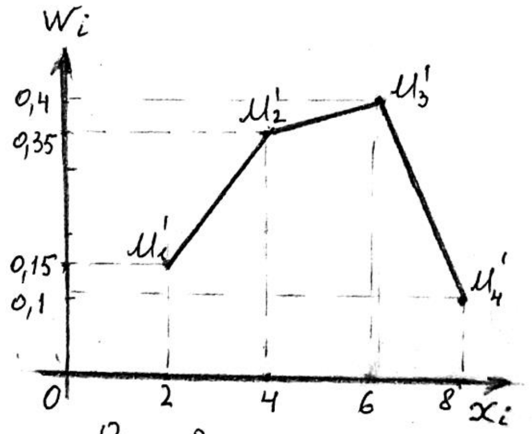


Рис. 2

Задача 2. Побудувати гістограми частот і відносних частот за даним розподілом вибірки (в першому рядку вказані часткові інтервали, в другому – відповідні частоти).

(1; 5)	(5; 9)	(9; 13)	(13; 17)	(17; 21)
6	10	22	8	4

Розв'язання. а) Побудуємо гістограму частот.

Довжина кожного часткового інтервала $h = 4$. Обчислимо густину частот:

$$\frac{n_1}{h} = \frac{6}{4} = 1{,}5; \quad \frac{n_2}{h} = \frac{10}{4} = 2{,}5; \quad \frac{n_3}{h} = \frac{22}{4} = 5{,}5; \quad \frac{n_4}{h} = \frac{8}{4} = 2; \quad \frac{n_5}{h} = \frac{4}{4} = 1.$$

Гістограмою частот називають фігуру, яка складається з прямокутників, основами яких є часткові інтервали з довжиною h, а висоти дорівнюють густині частот $\frac{n_i}{h}$ $(i = 1, 2, \ldots, n)$.

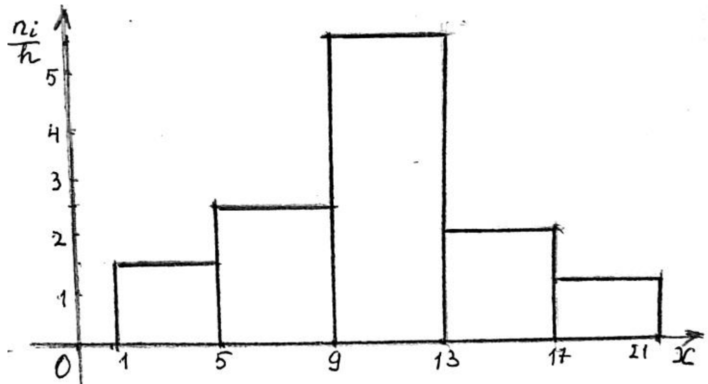


Рис. 3

б) Побудуємо гістограму відносних частот. Обчислимо відносні частоти і густину відносних частот.

Оскільки об'єм вибірки $n = 50$, то

$$w_1 = \frac{6}{50} = 0,12; \quad w_2 = \frac{10}{50} = 0,2; \quad w_3 = \frac{22}{50} = 0,44; \quad w_4 = \frac{8}{50} = 0,16; \quad w_5 = \frac{4}{50} = 0,08;$$

$$\frac{w_1}{h} = \frac{0,12}{4} = 0,03; \quad \frac{w_2}{h} = \frac{0,2}{4} = 0,05; \quad \frac{w_3}{h} = \frac{0,44}{4} = 0,11; \quad \frac{w_4}{h} = \frac{0,16}{4} = 0,04;$$

$$\frac{w_5}{h} = \frac{0,08}{4} = 0,02.$$

Гістограмою відносних частот називають фігуру, яка складається з прямокутників, основами яких є часткові інтервали з довжиною h, а висоти дорівнюють густині відносних частот $\frac{w_i}{h}$ $(i = 1, 2, ..., n)$.

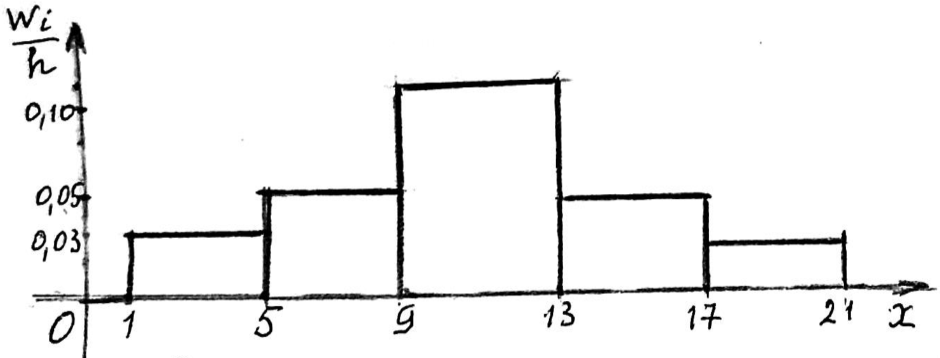


Рис. 4

4.2. Точкові оцінки невідомих параметрів розподілу

Нехай потрібно вивчити кількісну ознаку X генеральної сукупності. Припустимо, що з теоретичних міркувань вдалось встановити, який розподіл має ця ознака. Тому виникає завдання оцінити параметри, які визначають цей розподіл.

Статистичною оцінкою Θ^* невідомого параметра Θ теоретичного розподілу називають функцію від спостережуваних випадкових величин вибірки. ***Точковою*** називають статистичну оцінку, яка визначається одним числом

$\Theta^*=f(x_1,x_2,\dots,x_n)$, де $x_1, x_2, ..., x_n$ – значення ознаки X, що спостерігались у вибірці.

Незміщеною називають точкову оцінку, математичне сподівання якої при будь-якому об’ємі вибірки дорівнює параметру, який оцінюється. ***Зміщеною*** називають точкову оцінку, математичне сподівання якої не дорівнює параметру, що оцінюється.

Незміщеною оцінкою генеральної середньої (математичного сподівання випадкової величини X) є вибіркова середня

$$\overline{x_в} = \frac{\sum_{i=1}^{k} n_i x_i}{n}, \tag{2.1}$$

де $x_i (i=1,2,\dots,к)$ – варіанти вибірки; n_i $(i=1,2,\dots,к)$ – відповідні частоти; $n=\sum_{i=1}^{k} n_i$ – об’єм вибірки.

Зміщеною оцінкою генеральної дисперсії (дисперсії випадкової величини X) є вибіркова дисперсія

$$D_в = \frac{\sum_{i=1}^{k} n_i \left(x_i - \overline{x_B}\right)^2}{n}, \tag{2.2}$$

оскільки $M\left(D_в\right) = \dfrac{n-1}{n} D\left(X\right)$.

Для обчислення $D_в$ зручною є формула

$$D_в = \overline{x^2} - \left(\overline{x}\right)^2 = \frac{\sum_{i=1}^{k} n_i x_i^2}{n} - \left(\frac{\sum_{i=1}^{k} n_i x_i}{n}\right)^2 \tag{2.3}$$

Вибірковим середнім квадратичним відхиленням називають квадратний корінь із вибіркової дисперсії

$$\sigma_в = \sqrt{D_в} \tag{2.4}$$

Незміщеною оцінкою генеральної дисперсії є ***виправлена вибіркова дисперсія***

$$s^2 = \frac{n}{n-1} D_в = \frac{\sum_{i=1}^{k} n_i \left(x_i - \overline{x_в}\right)^2}{n-1} \tag{2.5}$$

Виправленим середнім квадратичним відхиленням називають квадратний корінь із виправленої вибіркової дисперсії.

Порівнюючи формули (2.2) і (2.5), бачимо, що вони відрізняються тільки знаменниками. Очевидно, що при досить великих значеннях n вибіркова і виправлена дисперсії незначно відрізняються одна від одної.

Задача 2.1. Із генеральної сукупності зроблена вибірка об'єму n=10;

x_i	6	7	9	10
n_i	2	3	4	1

Знайти: а) вибіркову середню $\overline{x_в}$; б) вибіркову дисперсію $D_в$ та вибіркове середнє квадратичне відхилення $\sigma_в$; в) виправлену вибіркову дисперсію s^2 та виправлене середнє квадратичне відхилення s.

Розв'язання: а) Скориставшись формулою (2.1), отримаємо:

$$\overline{x_в} = \frac{1}{10}\left(2\cdot 6 + 3\cdot 7 + 4\cdot 9 + 1\cdot 10\right) = 7{,}9 .$$

б) Для обчислення вибіркової дисперсії $D_в$ використаємо формулу (2.3):

$$D_в = \frac{1}{10}\left(2\cdot 36 + 3\cdot 49 + 4\cdot 81 + 1\cdot 100\right) - 7{,}9^2 = 64{,}3 - 62{,}41 = 1{,}89;$$

$$\sigma_в = \sqrt{1{,}89} \approx 1{,}37 .$$

в) Обчислимо виправлену вибіркову дисперсію:

$$s^2 = \frac{n}{n-1} D_в = \frac{10}{9}\cdot 1{,}89 = 2{,}10; \quad s = \sqrt{2{,}10} = 1{,}45.$$

Зауваження 1. Якщо варіанти x_i – великі числа, то для спрощення розрахунків доцільно зробити заміну $u_i = x_i - C$, за C вигідно прийняти варіанту, яка розміщена приблизно у середині варіаційного ряду.

Тоді $\overline{x}_в = \overline{u}_в + C$;

$$D_в(x) = D_в(u) = \frac{\sum_{i=1}^{k} n_i u_i^2}{n} - \left(\frac{\sum_{i=1}^{k} n_i u_i}{n}\right)^2;$$

$$S^2(x) = S^2(u).$$

Задача 2.2. Знайти виправлену вибіркову дисперсію за даним розподілом вибірки:

x_i	1250	1275	1280	1300
n_i	20	25	50	5

Розв'язання. Зробимо заміну $u_i = x_i - 1275$, тоді

u_i	-25	0	5	25
n_i	20	25	50	5

$n = 20 + 25 + 50 + 5 = 100$.

$\overline{u}_в = \dfrac{-25\cdot 20 + 0\cdot 25 + 5\cdot 50 + 25\cdot 5}{100} = \dfrac{-500 + 0 + 250 + 125}{100} = \dfrac{-125}{100} = -1,25$.

$D_в = \dfrac{(-25)^2\cdot 20 + 0\cdot 25 + 5^2\cdot 50 + (25)^2\cdot 5}{100} - (-1,25)^2 = 167,1875$.

$s^2 = \dfrac{n}{n-1} D_B = \dfrac{100}{99}\cdot 167,1875 = 168,8763$.

Зауваження 2. Якщо варіанти – це десяткові дроби з k знаками після коми, то варіанти домножають на $C = 10^k$: $\quad u_i = Cx_i$.

Тоді

$D_B(x) = \dfrac{D_B(u)}{C^2}$;

$S^2(x) = \dfrac{S^2(u)}{C^2}$.

Задача 3. Знайти вибіркову дисперсію за даним розподілом вибірки

x_i	0,01	0,04	0,08
n_i	5	3	2

Розв'язання. Зробимо заміну $u_i = x_i \cdot 100$, тоді

u_i	1	4	8
n_i	5	3	2

$n = 5 + 3 + 2 = 10$.

$\overline{u}_в = \dfrac{1\cdot 5 + 4\cdot 3 + 8\cdot 2}{10} = \dfrac{5 + 12 + 16}{10} = \dfrac{33}{10} = 3,3$.

$D_в(u) = \dfrac{1\cdot 5 + 16\cdot 3 + 64\cdot 2}{10} - (3,3)^2 = 7,21$.

$D_в(x) = \dfrac{D_в(u)}{C^2} = \dfrac{7,21}{10000} = 0,000721.$

Зауваження 3. У випадку рівновіддалених варіант для спрощення розрахунку доцільно перейти до умовних варіант $u_i = \dfrac{x_i - C}{h}$, де h – крок, тобто різниця між будь-якими двома сусідніми початковими варіантами; C – хибний нуль (C вибирається так само, як і в зауваженні 1). Тоді

$$\overline{x_в} = h\overline{u_в} + C; \quad D_в(X) = h^2 D_в(U). \qquad (2.6)$$

Задача 2.4. Перевірено 100 приладів на термін безвідмовної роботи. Отримано такі результати:

Термін безвідмовної роботи (год.)	300-304	304-308	308-312	312-316	316-320	320-324	324-328	328-332	332-336	336-340
К-сть приладів n_i	6	7	12	15	30	10	8	6	4	2

Обчислити середній термін $\overline{x_в}$ безвідмовної роботи приладів, а також вибіркову дисперсію $D_в$ та вибіркове середнє квадратичне відхилення $\sigma_в$.

Розв'язання. Знайдемо середини даних інтервалів і приймемо їх за варіанти. Одержимо такий розподіл вибірки:

x_i	302	306	310	314	318	322	326	330	334	338
n_i	6	7	12	15	30	10	8	6	4	2

Оскільки варіанти рівновіддалені, то перейдемо до умовних варіант u_i. Нехай $C = 318$ (варіанта 318 розміщена приблизно у середині варіаційного ряду). Згідно з умовою задачі $h = 4$, об'єм вибірки $n = 100$. Умовні варіанти обчислимо за формулою

$$u_i = \frac{x_i - 318}{4}$$

Для спрощення обчислень складемо розрахункову таблицю

x_i	n_i	u_i	$n_i u_i$	$n_i u_i^2$	$n_i(u_i+1)^2$
302	6	-4	-24	96	54
306	7	-3	-21	63	28
310	12	-2	-24	48	12
314	15	-1	-15	15	0
318	30	0	0	0	30
322	10	1	10	10	40
326	8	2	16	32	72
330	6	3	18	54	96
334	4	4	16	64	100
338	2	5	10	50	72
	n=100		$\sum n_i u_i = -14$	$\sum n_i u_i^2 = 432$	$\sum n_i(u_i+1)^2 = 504$

Для контролю обчислень скористаємось тотожністю:

$$\sum_{i=1}^{k} n_i\left(u_i+1\right)^2=\sum_{i=1}^{k} n_i u_i^2+2\sum_{i=1}^{k} n_i u_i+n.$$

В даному випадку

$$\sum_{i=1}^{10} n_i\left(u_i+1\right)^2=504, \qquad \sum_{i=1}^{10} n_i u_i^2+2\sum_{i=1}^{10} n_i u_i+n=432-28+100=504.$$

Отже, тотожність справджується.

Обчислимо $\overline{u_в}$ та $D_в\left(u\right)$

$$\overline{u_в}=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{10} n_i u_i=-0,14$$

$$D_в\left(u\right)=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{10} n_i u_i^2-\left(\overline{u_в}\right)^2=4,32-0,0196\approx 4,30.$$

Користуючись формулами (2.6), знаходимо

$\overline{x_в}=-0,14\cdot 4+318=318-0,56=317,44$;

$D_в\left(X\right)=4,30\cdot 16=68,80$;

$\sigma_в\left(X\right)=\sqrt{68,80}\approx 8,29.$

4.3. Метод довірчих інтервалів для оцінки невідомих параметрів розподілу

При вибірці малого об'єму точкова оцінка може значно відрізнятися від оцінюваного параметра, тобто приводити до великих похибок. Тому при невеликому об'ємі вибірки слід користуватися інтервальними ознаками.

Інтервальною називають статистичну оцінку, яка визначається двома числами – кінцями інтервала, що покриває невідомий параметр.

Нехай за даним розподілом вибірки знайдена статистична характеристика Θ^* служить оцінкою невідомого параметра Θ.

Зрозуміло, що Θ^* тим точніше визначає параметр Θ, чим менша абсолютна величина різниці $\left|\Theta-\Theta^*\right|$. Або, якщо $\varepsilon>0$ і $\left|\Theta-\Theta^*\right|<\varepsilon$, то чим менше число ε, тим оцінка точніша. Отже, додатне число ε характеризує точність оцінки.

Надійністю (***довірчою ймовірністю***) оцінки Θ по Θ^* називають ймовірність γ, з якою здійснюється нерівність $\left|\Theta-\Theta^*\right|<\varepsilon$ або рівносильна подвійна нерівність $\Theta^*-\varepsilon<\Theta<\Theta^*+\varepsilon$.

Отже, інтервальна оцінка має вигляд:

$$P\left(\Theta^*-\varepsilon<\Theta<\Theta^*+\varepsilon\right)=\gamma. \qquad (3.1)$$

Зазвичай надійність оцінки задається наперед, при чому в якості γ беруть число, близьке до 1. Найчастіше задають надійність, яка дорівнює 0,95; 0,99; 0,999.

Довірчим називають інтервал $\left(\Theta^* - \varepsilon, \Theta^* + \varepsilon\right)$, який покриває невідомий параметр Θ із заданою надійністю γ.

Інтервальною оцінкою з надійністю γ математичного сподівання a нормально розподіленої ознаки X за вибірковою середньою $\overline{x_в}$ при відомому генеральному середньому квадратичному відхиленні σ є довірчий інтервал

$$\overline{x_B} - \frac{t\sigma}{\sqrt{n}} < a < \overline{x_B} + \frac{t\sigma}{\sqrt{n}}, \qquad (3.2)$$

де $\frac{t\sigma}{\sqrt{n}} = \varepsilon$ – точність оцінки ; n – об’єм вибірки; t – значення аргументу функції Лапласа

$$\Phi(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^t e^{-\frac{x^2}{2}} dx \text{ , при якому } \Phi(t) = \frac{\gamma}{2}.$$

Зауваження 1. Оцінку $\left|\overline{x}_в - a\right| < \frac{t\sigma}{\sqrt{n}}$ називають класичною. З формули $\varepsilon = \frac{t\sigma}{\sqrt{n}}$, що визначає точність класичної оцінки можна зробити висновки:

1) При зростанні об’єму вибірки n число ε зменшується, а значить точність збільшується.
2) Збільшення надійності оцінки $\gamma = 2\Phi(t)$ приводить до збільшення t, а значить і до збільшення ε. Або, іншими словами, збільшення надійності класичної оцінки приводить до зменшення її точності.

Зауваження 2. Якщо потрібно оцінити математичне сподівання з наперед заданою точністю ε і надійністю γ, то мінімальний об’єм вибірки, який забезпечить цю точність, знаходять за формулою:

$$n = \frac{t^2\sigma^2}{\varepsilon^2} \quad \text{(із формули } \varepsilon = \frac{t\sigma}{\sqrt{n}}\text{)}$$

Задача 3.1. Знайти довірчий інтервал для оцінки з надійністю γ=0,99 невідомого математичного сподівання a нормально розподіленої ознаки X – розміру зовнішнього діаметра карданних валів, якщо відомі генеральне середнє квадратичне відхилення $\sigma = 2$ мм, вибіркова середня $\overline{x_в} = 41,35$ та об’єм вибірки $n = 16$.

Розв’язання. Потрібно знайти довірчий інтервал $\overline{x_в} - \frac{t\sigma}{\sqrt{n}} < a < \overline{x_в} + \frac{t\sigma}{\sqrt{n}}$.

Всі величини, крім t, відомі.

Із співвідношення $\Phi(t)$ = 0,99 / 2 = 0,495 знайдемо значення t.

За таблицею значень функції Лапласа знаходимо t = 2,58.

Підставивши $t = 2,58$; $\overline{x_в} = 41,35$; σ = 2; n = 16 у формулу, отримаємо довірчий інтервал

$40{,}06 < a < 42{,}64.$

Отже, інтервал (40,06; 42,64) покриває невідоме математичне сподівання a із надійністю $\gamma = 0{,}99$.

Задача 3.2. Знайти мінімальний об'єм вибірки, при якому з надійністю 0,95 точність оцінки математичного сподівання a нормально розподіленої ознаки X генеральної сукупності за вибірковою середньою $\varepsilon = 0{,}2$, якщо відоме середнє квадратичне відхилення ознаки X $\sigma = 1{,}3$.

Розв'язання. Точність оцінки з надійністю γ математичного сподівання a нормально розподіленої ознаки X за вибірковою середньою $\overline{x_B}$ визначається за формулою $\varepsilon = \dfrac{t\sigma}{\sqrt{n}}$. Звідси знаходимо, що $n = \dfrac{t^2\sigma^2}{\varepsilon^2}$.

За умовою задачі $\gamma = 0{,}95$, тому $\Phi(t) = (1/2)\cdot 0{,}95 = 0{,}475$.

За таблицею значень функції Лапласа знайдемо t = 1,96.

Підставивши t = 1,96; $\sigma = 1{,}3$; $\varepsilon = 0{,}2$ в дану формулу, отримаємо шуканий об'єм вибірки $n = 163$.

Якщо середнє квадратичне відхилення σ нормально розподіленої ознаки X генеральної сукупності невідоме, то інтервальною оцінкою з надійністю γ математичного сподівання a ознаки X є довірчий інтервал:

$$\overline{x_в} - t_\gamma \frac{s}{\sqrt{n}} < a < \overline{x_B} + t_\gamma \frac{s}{\sqrt{n}}, \qquad (3.3)$$

де s – виправлене середнє квадратичне відхилення; n – об'єм вибірки; t_γ знаходимо за таблицею значень $t_\gamma = t(\gamma, n)$ за даними γ та n.

Зауваження. Для знаходження довірчого інтервала (7) використовують той факт, що випадкова величина $T = \dfrac{\left(\overline{X_в} - a\right)\sqrt{n}}{S}$, де $\overline{X_в}$ – вибіркова середня, S – виправлене середнє квадратичне відхилення, має розподіл Стьюдента. Густина цього розподілу

$$S(t,n) = \frac{\Gamma(n/2)}{\sqrt{\pi(n-1)}\Gamma((n-1)/2)}\left(1 + \frac{t^2}{n-1}\right)^{-\frac{n}{2}}, \qquad (3.4)$$

де $\Gamma(x) = \int\limits_0^{+\infty} U^{x-1}e^{-U}dU$ гамма-функція.

При необмеженому зростанні об'єму вибірки n розподіл Стьюдента прямує до нормального розподілу. Тому при досить великих n можна замість розподілу Стьюдента користуватися нормальним розподілом.

Задача 3.3. Знайти довірчий інтервал для оцінки з надійністю γ=0,99 невідомого математичного сподівання a нормально розподіленої ознаки X генеральної сукупності, якщо відомі вибіркова середня $\overline{x_в} = 48,50$, виправлене середнє квадратичне відхилення S=4,00 та об'єм вибірки n = 25.

Розв'язання. Потрібно знайти довірчий інтервал

$$\overline{x_в} - t_\gamma \frac{s}{\sqrt{n}} < a < \overline{x_в} + t_\gamma \frac{s}{\sqrt{n}}.$$

Всі величини, крім t_γ, відомі.

За таблицею значень $t_\gamma = t(\gamma, n)$ для γ=0,99 і n = 25 знаходимо t_γ=2,797.

Підставивши $\overline{x_в} = 48,50$, s = 4,00; n = 25; t_γ= 2,797 у формулу, отримаємо шуканий довірчий інтервал

46,26 < a < 50,74.

Інтервальною оцінкою з надійністю γ середнього квадратичного відхилення σ нормально розподіленої ознаки X генеральної сукупності за виправленим середнім квадратичним відхиленням S є довірчий інтервал

$$S(1-q) < \sigma < S(1+q) \quad (при \;\; q < 1)$$

$$0 < \sigma < S(1+q) \quad (при \;\; q > 1)$$

де q знаходять за таблицею значень $q=q(\gamma, n)$.

Задача 3.4. Зроблено n=20 вимірювань одним приладом (без систематичних помилок) деякої фізичної величини. Виправлене середнє квадратичне відхилення S випадкових помилок вимірювання виявилось рівним 0,70. Знайти точність приладу з надійністю 0,95. Припускається, що результати вимірювань розподілені нормально.

Розв'язання. Точність приладу характеризується середнім квадратичним відхиленням випадкових помилок вимірювань. Тому задача зводиться до знаходження довірчого інтервала, який покриває σ із заданою надійністю γ=0,95.

За таблицею значень $q = q(\gamma, n)$ для γ=0,95 і n=20 знайдемо q=0,37.

Оскільки q<1, то довірчий інтервал має вигляд

$$S(1-q) < \sigma < S(1+q) \quad (при \;\; q < 1).$$

Підставивши s=0,70 та q=0,37, отримаємо шуканий довірчий інтервал

0,441<σ<0,959.

Розв'язування типових задач

Задача 1. Знайти довірчий інтервал для оцінки з надійністю γ=0,99 невідомого математичного сподівання a нормально розподіленої ознаки X, якщо відомі середнє квадратичне відхилення $\sigma = 3$, вибіркова середня $\overline{x_в} = 20,12$ та об'єм вибірки $n = 25$.

Розв'язання. В даному випадку довірчий інтервал має вигляд:

$$\overline{x_в} - \frac{t\sigma}{\sqrt{n}} < a < \overline{x_в} + \frac{t\sigma}{\sqrt{n}},$$

де t – значення аргумента функції Лапласа, при якому $\Phi(t) = \frac{\gamma}{2}$. $\Phi(t) = \frac{0,99}{2} = 0,495$.

За таблицею значень функції Лапласа знаходимо $t = 2,58$.

Отже,

$$20,12 - \frac{2,58 \cdot 3}{5} < a < 20,12 + \frac{2,58 \cdot 3}{5},$$

тобто

$$18,57 < a < 21,67.$$

Знайдений інтервал $(18,57;\ 21,67)$ покриває невідоме математичне сподівання a з надійністю γ =0,99.

Задача 2. Знайти мінімальний об'єм вибірки, при якому з надійністю $\gamma = 0,95$ точність оцінки математичного сподівання a нормально розподіленої ознаки X генеральної сукупності за вибірковою середньою $\varepsilon = 0,1$, якщо відоме середнє квадратичне відхилення ознаки X $\sigma = 1,5$.

Розв'язання. Точність оцінки з надійністю γ математичного сподівання a нормально розподіленої ознаки X за вибірковою середньою $\overline{x_в}$ визначається за формулою $\varepsilon = \frac{t\sigma}{\sqrt{n}}$. Звідси знаходимо, що $n = \frac{t^2\sigma^2}{\varepsilon^2}$.

Оскільки $\gamma = 0,95$, то $\Phi(t) = \frac{0,95}{2} = 0,475$.

За таблицею значень функції Лапласа знаходимо $t = 1,96$.

Отже,

$$n = \frac{1,96^2 \cdot 1,5^2}{0,1^2} = 864,36.$$

Оскільки n – ціле число, то потрібно взяти $n = 865$.

Задача 3. Відомі вибіркова середня $\overline{x_в} = 16,8$, виправлене середнє квадратичне відхилення $S = 1,5$ і об'єм вибірки $n = 12$. Знайти довірчий інтервал для оцінки з надійністю $\gamma = 0,95$ невідомого математичного сподівання a нормально розподіленої ознаки *X*.

Розв'язання. В даному випадку довірчий інтервал має вигляд:

$$\overline{x_в} - t_\gamma \frac{S}{\sqrt{n}} < a < \overline{x_в} + t_\gamma \frac{S}{\sqrt{n}};$$

значення t_γ знаходимо за таблицею значень $t_\gamma = t(\gamma, n)$ за даними γ та n. За даними значеннями $\gamma = 0,95$ і $n = 12$ отримуємо t_γ=2,20.

$$16,8 - 2,20 \cdot \frac{1,5}{\sqrt{12}} < a < 16,8 + 2,20 \cdot \frac{1,5}{\sqrt{12}}.$$

Виконавши обчислення, отримаємо шуканий довірчий інтервал:

$$15,85 < a < 17,75.$$

Задача 4. За даними $n = 16$ незалежних однаковоточних вимірювань фізичної величини знайдено: $\overline{x_в} = 23,161$ і $S = 0,400$. Знайти довірчі інтервали для оцінки точного значення a вимірюваної величини і точності вимірювань σ з надійністю 0,95.

Розв'язання. Результати окремих вимірювань є незалежними випадковими величинами, розподіленими за нормальним законом. Точне значення вимірюваної величини дорівнює її математичному сподіванню. Тому довірчий інтервал для оцінки точного значення a вимірюваної величини має вигляд:

$$\overline{x_в} - t_\gamma \frac{S}{\sqrt{n}} < a < \overline{x_в} + t_\gamma \frac{S}{\sqrt{n}}.$$

За таблицею значень $t_\gamma = t(\gamma, n)$ знаходимо t_γ=2,13.

Отже,

$$23,161 - 2,13 \cdot \frac{0,400}{4} < a < 23,161 + 2,13 \cdot \frac{0,400}{4},$$

тобто: $22,948 < a < 23,374$.

Точність вимірювань характеризується середнім квадратичним відхиленням σ випадкових похибок, які розподілені за нормальним законом. Довірчий інтервал, який покриває середнє квадратичне відхилення σ з надійністю γ, має вигляд:

$S(1-q) < \sigma < S(1+q)$ при $q < 1$;

$0 < \sigma < S(1+q)$ при $q > 1$,

де q знаходять за таблицею значень q=$q(\gamma, n)$.

За даними значеннями $\gamma = 0,95$ і $n = 16$ отримуємо $q = 0,44$. Оскільки $q < 1$, то одержимо:

$$0,400(1 - 0,44) < \sigma < 0,400(1 + 0,44).$$

Отже, $0,224 < \sigma < 0,576$.

Задача 5. За даними вибірки об'єму $n = 15$ з генеральної сукупності нормально розподіленої ознаки X обчислено виправлене середнє квадратичне відхилення $S = 3,4$. Знайти довірчий інтервал, який покриває генеральне середнє квадратичне відхилення σ з надійністю $\gamma = 0,999$.

Розв'язання. За таблицею значень $q = q(\gamma, n)$ для $\gamma = 0,999$ і $n = 15$ одержимо q =1,15. Оскільки $q > 1$, то шуканий довірчий інтервал має вигляд: $0 < \sigma < S(1+q)$, тобто $0 < \sigma < 3,4(1+1,15)$.

Отже, отримаємо: $0 < \sigma < 7,31$.

Задача 6. З генеральної сукупності зроблено вибірку об'єму $n = 10$:

x_i	-2	1	2	3	4	5
n_i	2	1	2	2	2	1

Знайти довірчий інтервал для оцінки з надійністю $\gamma = 0,95$ невідомого математичного сподівання *a* нормально розподіленої ознаки *X* генеральної сукупності.

Розв'язання. обчислимо вибіркову середню $\overline{x_в}$ і виправлене середнє квадратичне відхилення S

$$\overline{x_в} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{k} n_i x_i; \qquad D_в = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{k} n_i x_i^2 - \left(\overline{x_в}\right)^2; \qquad s^2 = \frac{n}{n-1} D_в.$$

$$\overline{x_в} = \frac{1}{10}(-4+1+4+6+8+5) = 2;$$

$$D_в = \frac{1}{10}(8+1+8+18+32+25) - 4 = 9,2 - 4 = 5,2;$$

$$S^2 = \frac{10 \cdot 5,2}{9} = 5,78; \quad S = \sqrt{5,78} \approx 2,40.$$

За таблицею значень $t_\gamma = t(\gamma, n)$ для $\gamma = 0,95$ і $n = 10$ знайдемо t_γ =2,26.

Отримаємо шуканий довірчий інтервал:

$$\overline{x_в} - t_\gamma \frac{S}{\sqrt{n}} < a < \overline{x_в} + t_\gamma \frac{S}{\sqrt{n}};$$

$$2 - 2,26 \cdot \frac{2,40}{\sqrt{10}} < a < 2 + 2,26 \cdot \frac{2,40}{\sqrt{10}};$$

$$0,28 < a < 3,72.$$

Отже, отриманий інтервал покриває невідоме математичне сподівання a з надійністю $\gamma = 0,95$.

4.4. Елементи теорії кореляції

У багатьох задачах потрібно встановити та оцінити залежність випадкової величини Y від однієї або декількох інших величин.

Розглянемо залежність Y від однієї величини X (випадкової чи не випадкової).

Дві випадкові величини можуть бути зв'язані або функціонально, або статистично, або бути незалежними.

Строга функціональна залежність реалізовується рідко, оскільки на обидві величини, або лише на одну з них діють випадкові фактори.

Статистичною називають залежність, при якій зміна однієї величини викликає зміну розподілу іншої. Зокрема, статистична залежність, при якій, зміна однієї випадкової величини викликає зміну середнього значення іншої випадкової величини, називається ***кореляційною***.

Одним із завдань математичної статистики є дослідження кореляційної залежності між випадковими величинами.

В якості умовного математичного сподівання приймають умовну середню, яку знаходять за даними спостережень (за вибіркою).

Умовною середньою $\overline{y}_x$ називається середнє арифметичне всіх значень ознаки Y, які відповідають значенню $X = x$.

Наприклад, якщо при $x_1 = 2$ величина Y прийняла значення $y_1 = 5;\ y_2 = 6;\ y_3 = 10$, то умовна середня $\overline{y}_{x_1} = \frac{5+6+10}{3} = 7$.

Аналогічно ***умовною середньою*** $\overline{x}_y$ називається середнє арифметичне значень X, які відповідають $Y = y$.

Умовна середня $\overline{y}_x$ є функцією від x, тобто $\overline{y}_x = f^*(x)$. Це рівняння називають ***вибірковим рівнянням регресії*** Y на *X*; функцію $f^*(x)$ називають ***вибірковою регресією*** Y на *X*, а її графік – ***вибірковою лінією регресії*** Y на *X*.

Аналогічно рівняння $\overline{x}_y = q^*(y)$ називають вибірковим рівнянням регресії X на Y; функцію $q^*(y)$ називають вибірковою регресією X на Y, а її графік – вибірковою лінією регресії X на Y.

Якщо обидві лінії регресії Y на X і X на Y є прямими, то кореляція називається ***лінійною***.

4.4.1. ***Знаходження параметрів вибіркового рівняння прямої лінії регресії за незгрупованими даними***

Нехай розглядається система двох кількісних ознак (X,Y).

В результаті n незалежних дослідів отримані n пар значень $(x_1;y_1)$, $(x_2;y_2)$, ..., $(x_n;y_n)$.

Будемо вважати, що величину Y можна наближено записати у вигляді лінійної функції від x:

$$y = \rho_{yx}x + b. \qquad (4.1)$$

(4.1) – ***вибіркове рівняння прямої лінії регресії*** Y на X.

Кутовий коефіцієнт вибіркової прямої лінії регресії Y на X називається ***вибірковим коефіцієнтом регресії*** Y на X і позначається ρ_{yx}.

Підберемо параметри ρ_{yx} та b так, щоб точки $(x_1;y_1)$, $(x_2;y_2)$, ..., $(x_n;y_n)$ лежали якомога ближче до прямої (4.1) на площині Oxy.

Скористаємось ***методом найменших квадратів***, тобто підберемо параметри так, щоб сума квадратів різниць $Y_i - y_i$ $(i = 1,2,...,n)$ була найменшою.

Тут Y_i – обчислена з рівняння (4.1) ордината, що відповідає значенню x_i; y_i – ордината, що відповідає x_i за даними спостережень.

Позначимо

$$F(\rho,b) = \sum_{i=1}^{n}(Y_i - y_i)^2,$$

або $$F(\rho,b) = \sum_{i=1}^{n}(\rho x_i + b - y_i)^2.$$

Для знаходження мінімуму прирівнюють до нуля відповідні частинні похідні:

$$\frac{\partial F}{\partial \rho} = 2\sum_{i=1}^{n}(\rho x_i + b - y_i)\cdot x_i = 0;$$

$$\frac{\partial F}{\partial b} = 2\sum_{i=1}^{n}(\rho x_i + b - y_i) = 0.$$

Виконавши елементарні перетворення отримаємо систему з двох лінійних рівнянь відносно двох невідомих ρ та b:

$$\begin{cases} \rho_{yx}\sum_{i=1}^{n} x_i^2 + b\sum_{i=1}^{n} x_i = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i; \\ \rho_{yx}\sum_{i=1}^{n} x_i + bn = \sum_{i=1}^{n} y_i. \end{cases} \quad (4.2)$$

Аналогічно можна знайти вибіркове рівняння прямої лінії регресії X на Y:

$x = \rho_{xy} y + c,$

де ρ_{xy} – кутовий коефіцієнт регресії X на Y.

Задача 4.1. Знайти вибіркове рівняння прямої лінії регресії Y на X за даними $n = 6$ спостережень.

x_i	1,5	2,0	3,0	3,5	4,5	5,0
y_i	1,3	2,0	2,1	2,7	2,6	3,3

Розв'язання. Складемо розрахункову таблицю.

x_i	y_i	x_i^2	$x_i y_i$
1,5	1,3	2,25	1,95
2,0	2,0	4,00	4,00
3,0	2,1	9,00	6,30
3,5	2,7	12,25	9,45
4,5	2,6	20,25	11,70
5,0	3,3	25,00	16,50
$\sum_{i=1}^{6} x_i = 19,5$	$\sum_{i=1}^{6} y_i = 14,0$	$\sum_{i=1}^{6} x_i^2 = 72,75$	$\sum_{i=1}^{6} x_i y_i = 49,90$

Для визначення параметрів ρ_{yx} і b одержуємо систему рівнянь,

$$72,75\ \rho + 19,5b = 49,90;$$

$$19,5\ \rho + 6b = 14.$$

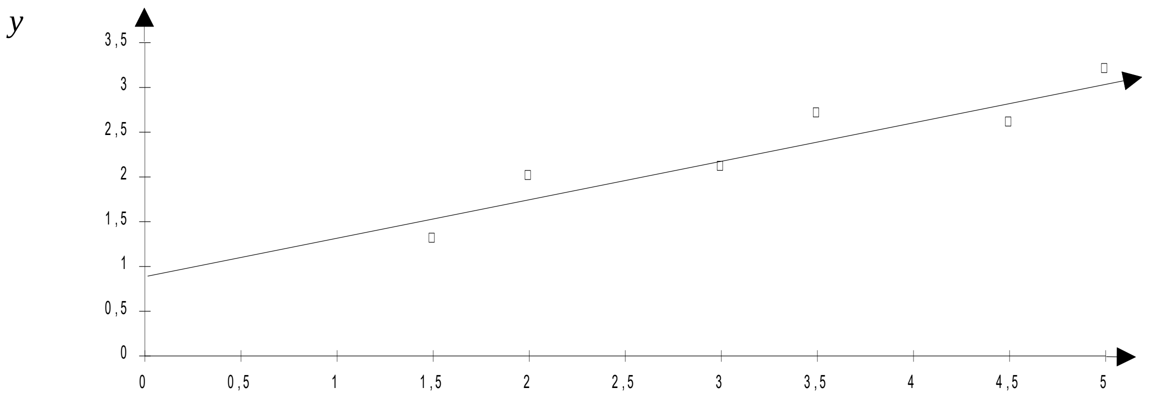
Розв'язавши цю систему отримаємо:

$$b \approx 0,81, \quad \rho_{yx} \approx 0,47.$$

Запишемо шукане рівняння прямої лінії регресії:

$$y = 0,47x + 0,81.$$

Зробимо рисунок, на якому в декартовій прямокутній системі координат побудуємо експериментальні точки і пряму лінію регресії:



4.4.2. ***Знаходження параметрів вибіркового рівняння прямої лінії регресії за згрупованими даними***

При великій кількості спостережень одне і те ж значення x може трапитися n_x разів, одне і те ж значення y – n_y разів, одна і та ж пара значень (x,y) може спостерігатися n_{xy} разів. Тому дані спостережень групують, тобто підраховують частоти n_x, n_y, n_{xy}.

Всі згруповані дані записують у вигляді таблиці, яку називають ***кореляційною***.

Позначимо $\overline{x}$, $\overline{y}$ – ***вибіркові середні*** ознак X і Y, σ_x^*, σ_y^* – ***вибіркові середні квадратичні відхилення*** цих ознак; n – ***об'єм вибірки***. Введемо також наступне позначення:

$$r_в = \rho_{yx} \frac{\sigma_x^*}{\sigma_y^*} . \tag{4.3}$$

$r_в$ називають ***вибірковим коефіцієнтом кореляції***.

Оскільки $\sum x_i = n\overline{x}, \sum y_i = n\overline{y}, \sum x_i^2 = n\overline{x^2}, \sum x_i y_i = n_{xy}xy$, то систему (4.2) можна записати у такому вигляді:

$$\begin{cases} n\overline{x^2}\rho_{yx} + n\overline{x}b = \sum n_{xy}xy \\ \overline{x}\rho_{yx} + b = \overline{y} \end{cases} \tag{4.4}$$

З другого рівняння цієї системи отримаємо

$$b = \overline{y} - \overline{x}\rho_{yx} . \tag{4.5}$$

Підставивши (4.5) в перше рівняння системи (4.4), знайдемо:

$$\rho_{yx} = \frac{\sum n_{xy}xy - n\overline{x}\overline{y}}{n\sigma_x^{*2}} \tag{4.6}$$

На підставі формули (4.3) одержимо:

$$r_в = \frac{\sum n_{xy} xy - n\overline{x}\overline{y}}{n\sigma_x^* \sigma_y^*}. \qquad (4.7)$$

Вибірковий коефіцієнт кореляції $r_в$ є оцінкою коефіцієнта кореляції r_{xy} генеральної сукупності і тому використовується для вимірювання тісноти лінійного кореляційного зв'язку між ознаками X і Y. Якщо вибірка репрезентативна і має досить великий об'єм, то висновок про тісноту лінійного зв'язку між ознаками, одержаний за даними вибірки, в певній мірі може бути поширений і на генеральну сукупність.

Враховуючи формули (4.3) і (4.5), ***вибіркове рівняння прямої лінії регресії*** Y на X (4.1) можна представити у вигляді:

$$\frac{\overline{y_x} - \overline{y}}{\sigma_y^*} = r_в \frac{x - \overline{x}}{\sigma_x^*} \qquad (4.8)$$

Вибіркове рівняння прямої лінії регресії X на Y має вигляд

$$\frac{\overline{x_y} - \overline{x}}{\sigma_x^*} = r_B \frac{y - \overline{y}}{\sigma_y^*} \qquad (4.9)$$

Якщо дані спостережень над ознаками X і Y задані у вигляді кореляційної таблиці з рівновіддаленими варіантами, то доцільно перейти до умовних варіант

$$u_i = \frac{x_i - C_1}{h_1}; \quad v_j = \frac{y_j - C_2}{h_2}, \qquad (4.10)$$

де C_1 – хибний нуль варіант ознаки X;

h_1 – крок, тобто різниця між двома сусідніми варіантами X;

C_2 – хибний нуль варіант ознаки Y;

h_2 – крок варіант Y.

У цьому випадку вибірковий коефіцієнт кореляції обчислюється за формулою:

$$r_в = \frac{\sum n_{uv} uv - n\overline{u}\overline{v}}{n\sigma_u \sigma_v}, \qquad (4.11)$$

де

$$\overline{v} = \frac{\sum n_v v}{n}; \quad \overline{u} = \frac{\sum n_u u}{n}; \quad \sigma_u = \sqrt{\overline{u}^2 - \left(\overline{u}\right)^2}; \qquad (4.12)$$

$$\sigma_v = \sqrt{\overline{v}^2 - \left(\overline{v}\right)^2}; \quad \overline{u}^2 = \frac{\sum n_u u^2}{n}; \quad \overline{v}^2 = \frac{\sum n_v v^2}{n}.$$

Знаючи $\bar{u}, \bar{v}, \sigma_u, \sigma_v$ можна визначити $\bar{x}, \bar{y}, \sigma_x^*, \sigma_y^*$.

$$\bar{x} = \bar{u}h_1 + C_1; \quad \bar{y} = \bar{v}h_2 + C_2; \quad \sigma_x^* = \sigma_u h_1; \quad \sigma_y^* = \sigma_v h_2. \qquad (4.13)$$

Задача 4.2. Задана кореляційна таблиця відхилень в міліметрах від номінального розміру штамповок кілець підшипників по діаметру під кутом 90° до площини роз'єднання штампа (*X*) і під кутом 45° до тієї ж площини (Y).

Знайти вибіркові рівняння прямих ліній регресії Y на X та X на Y за даними цієї кореляційної таблиці. Зробити рисунок, на якому в декартовій прямокутній системі координат побудувати умовні середні, обчислені за кореляційною таблицею, і прямі лінії регресії Y на X та X на Y.

Y \ X	(0,00; 0,10)	(0,10; 0,20)	(0,20; 0,30)	(0,30; 0,40)	n_y
(0,00; 0,12)	2	-	-	-	2
(0,12; 0,24)	5	4	1	-	10
(0,24; 0,36)	3	8	6	3	20
(0,36; 0,48)	-	3	6	6	15
(0,48; 0,60)	-	-	2	1	3
n_x	10	15	15	10	n=50

Розв'язання. Знайдемо середини даних інтервалів.

Для ознаки X отримаємо такі значення: 0,05; 0,15; 0,25; 0,35; для ознаки Y – наступні значення: 0,06; 0,18; 0,30; 0,42; 0,54.

Складемо кореляційну таблицю в умовних варіантах, вибравши хибними нулями C_1=0,15 і C_2=0,30. В даному прикладі h_1=0,10; h_2=0,12.

V \ U	- 1	0	1	2	n_v
-2	2	-	-	-	2
-1	5	4	1	-	10
0	3	8	6	3	20
1	-	3	6	6	15
2	-	-	2	1	3
n_u	10	15	15	10	n=50

За формулами (4.12) одержуємо:

$\bar{u}$ =(-10+15+20)/50=0,50;

$\bar{v}$ =(-4-10+15+6)/50=0,14;

$\overline{u^2}$ =(10+15+40)/50=1,30;

$\overline{v^2}$ =(8+10+15+12)/50=0,90;

$\sigma_u = \sqrt{1,30 - 0,25} = \sqrt{1,05} \approx 1,02;$

$\sigma_v = \sqrt{0,90 - 0,0196} = \sqrt{0,8804} \approx 0,94.$

Обчислюємо також

$$\sum n_{uv} \cdot uv = -1(-2\cdot 2 - 1\cdot 5) + 1(-1\cdot 1 + 1\cdot 6 + 2\cdot 2) + 2(1\cdot 6 + 2\cdot 1) = 34 .$$

Згідно з формулою (4.11) вибірковий коефіцієнт кореляції

$$r_e = \frac{34 - 50\cdot 0,50\cdot 0,14}{50\cdot 1,02\cdot 0,94} = 0,64 .$$

Обчислимо

$\overline{x} = \overline{u}h_1 + C_1 = 0,50\cdot 0,10 + 0,15 = 0,20$;

$\overline{y} = \overline{v}h_2 + C_2 = 0,14\cdot 0,12 + 0,30 = 0,32$;

$\sigma_x^* = \sigma_u h_1 = 1,02\cdot 0,10 \approx 0,100$;

$\sigma_y^* = \sigma_v h_2 = 1,94\cdot 0,12 \approx 0,113$.

Підставивши одержані значення у співвідношення (4.8), одержимо шукане рівняння прямої лінії регресії Y на X:

$$\frac{\overline{y_x} - 0,32}{0,113} = 0,64\frac{x - 0,20}{0,100}$$

або остаточно

$$\overline{y_x} = 0,72x + 0,18. \qquad \text{(I)}$$

Аналогічно отримаємо вибіркове рівняння прямої лінії регресії X на Y :

$$\frac{\overline{x_y} - 0,20}{0,100} = 0,64\frac{y - 0,32}{0,113},$$

Тобто

$$\overline{x_y} = 0,57y + 0,02. \qquad \text{(II)}$$

За даними кореляційної таблиці обчислимо умовні середні:

$\overline{y}_{0,05}$=(2 · 0,06+5 · 0,18+3 · 0,30)/10≈0,19;

$\overline{y}_{0,15}$=(4 · 0,18+8 · 0,30+3 · 0,42)/15≈0,29;

$\overline{y}_{0,25}$=(1 · 0,18+6 · 0,30+6 · 0,42+2 · 0,54)/15≈0,37;

$\overline{y}_{0,35}$=(3 · 0,30+6 · 0,42+1 · 0,54)/10≈0,40.

Аналогічно знайдемо:

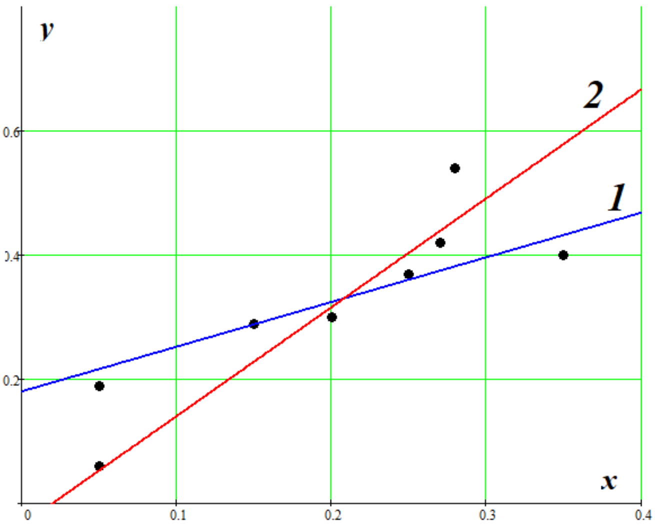
$\overline{x}_{0,06}$=0,05; $\overline{x}_{0,18}$ =(5 · 0,05+4 · 0,15+1 · 0,25)/10=0,11;

$\overline{x}_{0,30}$=(3 · 0,05+8 · 0,15+6 · 0,25+3 · 0,35)/20≈0,20;

$\overline{x}_{0,42}$=(3 · 0,15+6 · 0,25+6 · 0,35)/15=0,27;

$\overline{x}_{0,54}$=(2 · 0,25+1 · 0,35)/3≈0,28.

Одержані прямі лінії регресії Y на X та X на Y разом з обчисленими умовними середніми зображені на рисунку.



Розв'язування типових задач

Задача 1. Знайти вибіркове рівняння прямої лінії регресії Y на X за даними n = 5 спостережень. Зробити рисунок, на якому побудувати експериментальні точки і пряму лінію регресії.

x_i	1,00	1,50	2,50	3,50	4,00
y_i	1,95	2,25	2,35	2,92	3,60

Розв'язання. Шукане рівняння має вигляд: $y = \rho_{yx} x + b$. За допомогою методу найменших квадратів отримано систему лінійних рівнянь для визначення параметрів ρ_{yx} та b.

$$\begin{cases} \rho_{yx} \sum_{i=1}^{n} x_i^2 + b \sum_{i=1}^{n} x_i = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i; \\ \rho_{yx} \sum_{i=1}^{n} x_i + bn = \sum_{i=1}^{n} y_i. \end{cases} \quad (1)$$

Складемо розрахункову таблицю.

x_i	y_i	x_i^2	$x_i y_i$
1,00	1,95	1,00	1,95
1,50	2,25	2,25	3,38
2,50	2,35	6,25	5,88
3,50	2,92	12,25	10,22
4,00	3,60	16,00	14,40
$\sum_{i=1}^{5} x_i = 12,50$	$\sum_{i=1}^{5} y_i = 13,07$	$\sum_{i=1}^{5} x_i^2 = 37,75$	$\sum_{i=1}^{5} x_i y_i = 35,83$

Система (1) набуває вигляду:

$$\begin{cases} 37,75\rho_{yx} + 12,50b = 35,83, \\ 12,50\rho_{yx} + 5b = 13,07. \end{cases}$$

З другого рівняння маємо $b = 2,61 - 2,50\rho_{yx}$.

Тоді

$$37,75\rho_{yx} + 12,50\left(2,61 - 2,50\rho_{yx}\right) = 35,83.$$

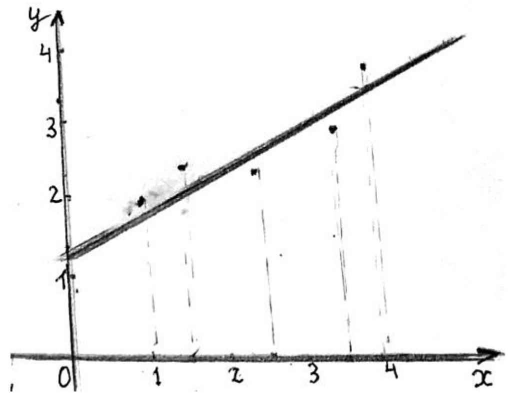
Звідси отримаємо:

$$\rho_{yx} = 0,49.$$

Обчислимо b:

$b = 2,61 - 2,50 \cdot 0,49 = 2,61 - 1,23 = 1,38$.

Отже, одержимо $y = 0,49x + 1,38$.



Задача 2. Знайти вибіркові рівняння прямих ліній регресії Y на X і X на Y за даними, що приведені в кореляційній таблиці. Зробити рисунок, на якому в декартовій прямокутній системі координат побудувати умовні середні, обчислені за кореляційною таблицею, і прямі лінії регресії Y на X та X на Y.

Y \ X	2	12	22	32	42	52	n_y
4	5	3	-	-	-	-	8
10	-	8	7	-	-	-	15
16	-	-	9	30	6	-	45
22	-	-	4	10	8	-	22
28	-	-	-	2	4	4	10
n_x	5	11	20	42	18	4	n =100

Розв'язання. Оскільки варіанти у кореляційній таблиці є рівновіддаленими, то доцільно перейти до умовних варіант.

$C_1 = 32$; $h_1 = 10$;

$C_2 = 16$; $h_2 = 6$.

$u_i = \dfrac{x_i - 32}{10}$; $v_i = \dfrac{y_i - 16}{6}$.

Складемо кореляційну таблицю в умовних варіантах.

$V \backslash U$	-3	-2	-1	0	1	2	n_v
-2	5	3	-	-	-	-	8
-1	-	8	7	-	-	-	15
0	-	-	9	30	6	-	45
1	-	-	4	10	8	-	22
2	-	-	-	2	4	4	10
n_u	5	11	20	42	18	4	n=100

Вибіркове рівняння прямої лінії регресії Y на X має вигляд:

$$\frac{\overline{y_x} - \overline{y}}{\sigma_y^*} = r_B \frac{x - \overline{x}}{\sigma_x^*} \qquad (1)$$

Вибіркове рівняння прямої лінії регресії X на Y можна записати у вигляді:

$$\frac{\overline{x_y} - \overline{x}}{\sigma_x^*} = r_B \frac{y - \overline{y}}{\sigma_y^*}, \qquad (2)$$

де r_B – вибірковий коефіцієнт кореляції, який обчислюється за формулою:

$$r_в = \frac{\sum n_{uv} uv - n\overline{u}\,\overline{v}}{n\sigma_u\sigma_v},$$

де $\overline{u} = \frac{1}{n}\sum n_u u$; $\overline{v} = \frac{1}{n}\sum n_v v$; $\sigma_u = \sqrt{\overline{u}^2 - (\overline{u})^2}$;

$\sigma_v = \sqrt{\overline{v}^2 - (\overline{v})^2}$; $\overline{u^2} = \frac{1}{n}\sum n_u u^2$; $\overline{v^2} = \frac{1}{n}\sum n_v v^2$.

$\overline{u} = \dfrac{1}{100}(-15 - 22 - 20 + 18 + 8) = -0,31$; $\overline{v} = \dfrac{1}{100}(-16 - 15 + 22 + 20) = 0,11$;

$\overline{u^2} = \dfrac{1}{100}(45 + 44 + 20 + 18 + 16) = 1,43$; $\overline{v^2} = \dfrac{1}{100}(32 + 15 + 22 + 40) = 1,09$;

$\sigma_u = \sqrt{1,43 - 0,0961} = \sqrt{1,3339} \approx 1,155$;

$\sigma_v = \sqrt{1,09 - 0,0121} = \sqrt{1,0779} \approx 1,038$.

$$\sum n_{uv}\, uv = -3(-2\cdot 5) - 2(-2\cdot 3 - 1\cdot 8) - 1(-1\cdot 7 + 1\cdot 4) + 1(1\cdot 8 + 2\cdot 4) + 2\cdot 2\cdot 4 =$$
$$= 30 + 28 + 3 + 16 + 16 = 93;$$

$$r_в = \frac{93-100(-0,31)\cdot 0,11}{100\cdot 1,15\cdot 1,04} \approx 0,81.$$

Обчислимо $\overline{x}, \overline{y}, \sigma_x^*, \sigma_y^*$.

$\overline{x} = \overline{u}h_1 + C_1$; $\quad \overline{y} = \overline{v}h_2 + C_2$;

$\overline{x} = -0,31\cdot 10 + 32 = 28,90$; $\qquad \overline{y} = 0,11\cdot 6 + 16 = 16,66$;

$\sigma_x^* = 10\cdot 1,155 = 11,55$; $\qquad \sigma_y^* = 6\cdot 1,038 = 6,23$.

Запишемо вибіркове рівняння прямої лінії регресії Y на X:

$$\frac{\overline{y_x} - 16,66}{6,23} = 0,81\frac{x-28,90}{11,55};$$

$$\overline{y_x} - 16,66 = 0,44(x-28,90).$$

$$\overline{y_x} = 0,44x + 3,94. \qquad (1)$$

Запишемо також вибіркове рівняння прямої лінії регресії X на Y:

$$\frac{\overline{x_y} - 28,90}{11,55} = 0,81\frac{y-16,66}{6,23};$$

$$\overline{x_y} - 28,90 = 1,50(y-16,66).$$

$$\overline{x_y} = 1,50y + 3,91. \qquad (2)$$

Обчислимо за кореляційною таблицею умовні середні.

$\overline{y}_2 = 4$; $\qquad \overline{y}_{12} = \frac{1}{11}(4\cdot 3 + 10\cdot 8) = 8,36$;

$$\overline{y}_{22} = \frac{1}{20}(10\cdot 7 + 16\cdot 9 + 22\cdot 4) = 16,50;$$

$$\overline{y}_{32} = \frac{1}{42}(16\cdot 30 + 22\cdot 10 + 28\cdot 2) = 18,00;$$

$$\overline{y}_{42} = \frac{1}{18}(16\cdot 6 + 22\cdot 8 + 28\cdot 4) = 21,33;$$

$$\overline{y}_{52} = 28.$$

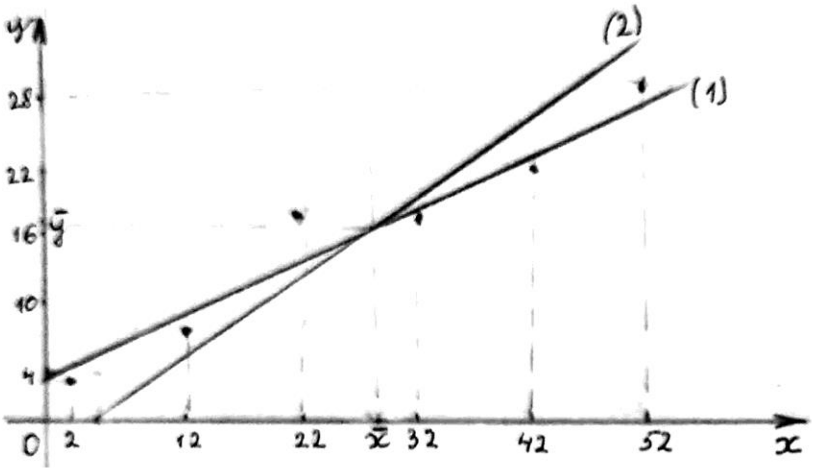
$$\overline{x}_4 = \frac{1}{8}(2\cdot 5 + 12\cdot 3) = 5,75;$$

$$\overline{x}_{10} = \frac{1}{15}\left(12\cdot 8 + 22\cdot 7\right) = 16,67\,;$$

$$\overline{x}_{16} = \frac{1}{45}\left(22\cdot 9 + 32\cdot 30 + 42\cdot 6\right) = 31,33\,;$$

$$\overline{x}_{22} = \frac{1}{22}\left(22\cdot 4 + 32\cdot 10 + 42\cdot 8\right) = 33,82\,;$$

$$\overline{x}_{28} = \frac{1}{10}\left(32\cdot 2 + 42\cdot 4 + 52\cdot 4\right) = 44,00\,.$$



Зауваження. На рисунку побудовані прямі лінії регресії Y на X та X на Y і умовні середні $\overline{y}_2$, $\overline{y}_{12}$, $\overline{y}_{22}$, $\overline{y}_{32}$, $\overline{y}_{42}$, $\overline{y}_{52}$.

4.5. Статистична перевірка статистичних гіпотез

4.5.1. Статистична гіпотеза. Критерії для перевірки нульової гіпотези. Критична область. Поняття про знаходження правосторонньої критичної області

Статистичною називають гіпотезу про вигляд невідомого розподілу або про параметри відомих розподілів. Наприклад, статистичними є наступні гіпотези:

1). генеральна сукупність розподілена за показниковим законом ;

2). дисперсії двох генеральних сукупностей, розподілених за нормальним законом, рівні між собою. Нульовою (основною) називають висунуту гіпотезу H_0.

Конкуруючою (альтернативною) називають гіпотезу H_1 , яка заперечує нульову гіпотезу.

Висунута гіпотеза може бути правильною або неправильною, тому виникає необхідність її перевірки. Оскільки перевірку проводять статистичними методами, то її називають статистичною. При перевірці гіпотези можуть бути допущені помилки двох родів.

Помилка першого роду полягає в тому, що буде відкинута правильна нульова гіпотеза. Ймовірність помилки першого роду називають рівнем значущості і позначають α. Найчастіше приймають $\alpha =$0,05; 0,01; 0,001.

Помилка другого роду полягає в тому, що буде прийнята неправильна нульова гіпотеза. Ймовірність помилки другого роду позначають β.

Статистичним критерієм (або просто критерієм) називають випадкову величину *К*, яку використовують для перевірки нульової гіпотези.

Спостережуваним значенням $К_{спост.}$ називають значення критерію, яке обчислене за даними вибірки.

Критичною областю називають сукупність значень критерію, при яких нульову гіпотезу відкидають.

Областю прийняття гіпотези (областю допустимих значень) називають сукупність значень критерію, при яких нульову гіпотезу приймають.

Основний принцип перевірки статистичних гіпотез можна сформулювати так: якщо спостережуване значення критерію належить критичній області, то нульову гіпотезу відкидають; якщо спостережуване значення критерію належить області прийняття гіпотези, то нульову гіпотезу приймають.

Критичними точками $К_{кр.}$ називають точки, які відділяють критичну область від області прийняття гіпотези.

Існують лівосторонні, правосторонні та двосторонні критичні області.

Розглянемо, наприклад, питання про знаходження правосторонньої критичної області. Правосторонньою називають критичну область, яка визначається нерівністю $К >$ $к_{кр.}$, де $к_{кр.}$- додатне число. Для знаходження правосторонньої критичної області потрібно знайти критичну точку. Для цього задають досить малу ймовірність – рівень значущості α. Потім шукають критичну точку $к_{кр.}$, виходячи з вимоги, щоб при умові справедливості нульової гіпотези ймовірність того, що критерій К прийме значення, більше від $к_{кр.}$, дорівнювала заданому рівню значущості, тобто

$$P(K>\kappa_{кр.})=\alpha \qquad (5.1)$$

Для кожного критерію складені відповідні таблиці, за якими знаходять критичну точку, що задовольняє цю вимогу.

Після того, як критична точка знайдена, обчислюють за даними вибірки спостережуване значення критерію і якщо виявиться, що $K_{спост.}>\kappa_{кр.}$,то нульову гіпотезу відкидають; якщо ж $K_{спост.}<\kappa_{кр.}$, то нульову гіпотезу приймають.

Пояснимо, чому правостороння критична область визначається таким способом. Оскільки ймовірність події $K>\kappa_{кр.}$ мала, то ця подія при справедливості нульової гіпотези не повинна появитися в одному випробуванні. Якщо ж ця подія все таки відбулася, то це можна пояснити тим, що нульова гіпотеза неправильна і повинна бути відкинута. Таким чином, вимога (1) визначає ті значення критерію, при яких нульова гіпотеза відкидається.

Зауважимо, що спостережуване значення критерію може бути більшим від $\kappa_{кр.}$ не тому, що нульова гіпотеза неправильна, а з інших причин (малий об'єм вибірки, недоліки методики експерименту та інше). В цьому випадку, відкинувши правильну нульову гіпотезу, роблять помилку першого роду. Ймовірність цієї помилки дорівнює рівню значущості α.

Нехай нульва гіпотеза прийнята; помилково думати, що вона доведена. Дійсно, один приклад, який підтверджує справедливість, деякого загального твердження, ще не доводить цього твердження. Тому правильніше говорити так: дані спостережень узгоджуються з нульовою гіпотезою і, отже, не дають підстав її відкинути.

Потужністю критерію називають ймовірність попадання критерію в критичну область при умові, що справедлива конкуруюча гіпотеза. Потужність критерію дорівнює ймовірності того, що нульова гіпотеза буде відкинута, якщо справедлива конкуруюча гіпотеза. Якщо ймовірність помилки другого роду позначити β, то потужність критерію дорівнює 1-β. Отже, потужність критерію дорівнює ймовірності того, що не буде допущена помилка другого роду. Якщо рівень значущості α вже вибраний, то критичну область слід будувати так, щоб потужність критерію була максимальною.

Зауважимо, що в літературі з контролю якості продукції ймовірність визнати непридатною партію придатних виробів називають «ризиком виробника», а ймовірність прийняти непридатну партію виробів – «ризиком споживача».

4.5.2. Перевірка гіпотези про нормальний розподіл генеральної сукупності. Критерій узгодження Пірсона

Критерієм узгодження називають статистичний критерій для перевірки гіпотези про передбачуваний закон невідомого розподілу.

Розглянемо застосування критерію узгодження χ^2(«хі квадрат») Пірсона до перевірки гіпотези про нормальний розподіл ознаки X генеральної сукупності.

Нехай з генеральної сукупності одержана вибірка об'єму n:

$$\begin{matrix} (x_1;x_2) & (x_2;x_3) & \ldots\ldots & (x_s;x_{s+1}) \\ n_1 & n_2 & \ldots\ldots & n_s \end{matrix} \qquad (5.2)$$

Тут в першому рядку вказані часткові інтервали $\left(x_i; x_{i+1}\right)$, в другому – відповідні частоти n_i; $\sum_{i=1}^{s} n_i = n$.

Нехай у припущенні нормального розподілу ознаки X генеральної сукупності обчислені теоретичні частоти n_i' ; i=1,2,3,...,s. При рівні значущості α потрібно перевірити нульову гіпотезу: генеральна сукупність розподілена за нормальним законом.

За критерій перевірки нульової гіпотези приймемо випадкову величину

$$\chi^2 = \frac{\sum_{i=1}^{s}\left(n_i - n_i'\right)^2}{n_i'} \qquad (5.3)$$

К.Пірсон довів, що при $n \to \infty$ закон розподілу випадкової величини (5.3) прямує до закону розподілу χ^2 з k степенями вільності. Густина цього розподілу має вигляд:

$$f(x,k) = \begin{cases} 0 & при \le 0 \\ \dfrac{e^{-\frac{x}{2}} x^{\frac{k}{2}-1}}{2^{\frac{k}{2}} \Gamma\left(\frac{k}{2}\right)} & при \; > 0 \end{cases}$$

Тому випадкова величина (5.3) позначена через χ^2, а сам критерій називається критерієм узгодження «хі квадрат». Число степенів вільності знаходять за формулою

$$k = s - 1 - r, \qquad (5.4)$$

де s – кількість часткових інтервалів вибірки; r – кількість параметрів передбачуваного розподілу. Зокрема, якщо передбачуваний розподіл є нормальним, то r=2. В цьому випадку κ=s-3.

Будуємо правосторонню критичну область, виходячи з вимоги, щоб у припущенні справедливості нульової гіпотези ймовірність попадання критерію в цю область дорівнювала прийнятому рівню значущості α:

$$P\left(\chi^2 > \chi^2_{кр.}(\alpha, k)\right) = \alpha .$$

Для того, щоб при заданому рівні значущості перевірити нульову гіпотезу H_0 (ознака X генеральної сукупності розподілена нормально), потрібно:

1) обчислити спостережуване значення критерію

$$\chi^2_{спост.} = \sum_{i=1}^{s}\left(n_i - n_i'\right)^2 / n_i'$$

2) за таблицею критичних точок розподілу χ^2 за прийнятим рівнем значущості α і числом степенів вільності κ=s-3 знайти критичну точку $\chi^2_{кр.}(\alpha, \kappa)$.

Якщо $\chi^2_{спост.} < \chi^2_{кр.}$, то немає підстав відкидати нульову гіпотезу, тобто дані спостережень узгоджуються з нульовою гіпотезою.

Якщо $\chi^2_{спост.} > \chi^2_{кр.}$, то нульову гіпотезу відкидають.

На закінчення цього параграфа розглянемо методику обчислення теоретичних частот нормального розподілу.

Нехай з генеральної сукупності зроблена вибірка об'єму n, статистичний розподіл якої має вигляд (2). Для того, щоб обчислити теоретичні частоти в припущенні, що ознака X генеральної сукупності розподілена нормально, потрібно:

а) обчислити вибіркову середню $\overline{x_в}$ і вибіркове середнє квадратичне відхилення $\sigma_в$, взявши за варіанти x_i^* (i=1,2,…,s) середини часткових інтервалів:

$$x_i^* = \left(x_i + x_{i+1}\right)\ /2; \tag{5.5}$$

б) пронормувати X, тобто перейти до випадкової величини $Z = \dfrac{X - \overline{x_в}}{\sigma_в}$, і обчислити кінці інтервалів(z_i,z_{i+1}):

$$z_i = \frac{\left(x_i - \overline{x_B}\right)}{\sigma_B}, \qquad z_{i+1} = \frac{\left(x_{i+1} - \overline{x_B}\right)}{\sigma_B}, \tag{5.6}$$

причому найменше значення випадкової величини Z, тобто z_1, прийняти рівним -∞, а найбільше її значення, тобто z_{s+1}, прийняти рівним +∞;

в) обчислити теоретичні ймовірності p_i попадання X в інтервали (x_i,x_{i+1}) за формулою

$$p_i=\Phi(z_{i+1})-\Phi(z_i), \quad i=1,2,\ldots,s. \tag{5.7}$$

де $\Phi(z)$– функція Лапласа, та знайти шукані теоретичні частоти

$$n_i' = n\,p_i\,. \tag{5.8}$$

Задача 5.1. Зроблено вибірку об'єму n=200 інструментів для нарізки різьби. Розмір, що перевіряється, виміряний з точністю до 1 мікрона. У таблиці наведені відхилення від номінального розміру. Використовуючи критерії Пірсона, при рівні значущості α=0,05 перевірити, чи узгоджується гіпотеза про нормальний розподіл генеральної сукупності із заданим статистичним розподілом вибірки.

Номер інтервала i	Частковий інтервал (x_i,x_{i+1})	Частота n_i	Номер інтервала i	Частковий інтервал (x_i,x_{i+1})	Частота n_i
1	(-20, -15)	7	6	(5, 10)	41
2	(-15, -10)	11	7	(10, 15)	26
3	(-10, -5)	15	8	(15, 20)	17
4	(-5, 0)	24	9	(20, 25)	7
5	(0, 5)	49	10	(25, 30)	3

Розв'язання. Знайдемо x_i^* (i=1,2,…,10) за формулою (5.5). Одержимо наступний розподіл:

x_i^*	-17,5	-12,5	-7,5	-2,5	2,5	7,5	12,5	17,5	22,5	27,5
n_i	7	11	15	24	49	41	26	17	7	3

Обчислимо вибіркову середню $\overline{x_в}$ та вибіркове середнє квадратичне відхилення $\sigma_в$

$\overline{x_B}$ =4,30 , σ_B =9,70.

Знайдемо інтервали (z_i, z_{i+1}), теоретичні ймовірності p_i та теоретичні частоти n_i за формулами (5.6), (5.7), (5.8). Для цього складемо розрахункову таблицю.

i	Інтервал (z_i,z_{i+1})	$\Phi(z_i)$	$\Phi(z_{i+1})$	p_i	$n_i'=200p_i$
1	(-∞ ;-1,99)	-0,5000	-0,4767	0,0233	4,66
2	(-1,99;-1,47)	-0,4767	-0,4292	0,0475	9,50
3	(-1,47;-0,96)	-0,4292	-0,3315	0,0977	19,54
4	(-0,96;-0,44)	-0,3315	-0,1700	0,1615	32,30
5	(-0,44;0,07)	-0,1700	0,0279	0,1979	39,58
6	(0,07;0,59)	0,0279	0,2224	0,1945	38,90
7	(0,59;1,10)	0,2224	0,3643	0,1419	28,38
8	(1,10;1,62)	0,3643	0,4474	0,0831	16,62
9	(1,62;2,13)	0,4474	0,4834	0,0360	7,20
10	(2,13;+∞)	0,4834	0,5000	0,0166	3,32
				$\sum p_i=1$	$\sum n_i'=200$

Обчислимо спостережуване значення критерію $\chi^2_{спост.}$. Для цього складемо наступну розрахункову таблицю (останній стовпець використовується для контролю обчислень).

i	n_i	n_i'	n_i-n_i'	$(n_i-n_i')^2$	$(n_i-n_i')^2/n_i'$	n_i^2/n_i'
1	7	4,66	2,34	5,4756	1,1750	10,5150
2	11	9,50	1,50	2,2500	0,2368	12,7368
3	15	19,54	-4,54	20,6116	1,0548	11,5148
4	24	32,30	-8,30	68,8900	2,1328	17,8328
5	49	39,58	9,42	88,7364	2,2420	60,6619
6	41	38,90	2,10	4,4100	0,1134	43,2134
7	26	28,38	-2,38	5,6644	0,1996	23,8196
8	17	16,62	0,38	0,1444	0,0087	17,3887
9	7	7,20	-0,20	0,0400	0,0056	6,8056
10	3	3,32	-0,32	0,1024	0,0308	2,7108
$\sum$	200	200			$\chi^2_{спост.}\approx 7,199$	207,199

Для контролю обчислень використаємо формулу

$$x^2_{спост.} = \sum_{i=1}^{s} \frac{\left(n_i - n_i'\right)^2}{n_i'} = \sum_{i=1}^{s} \left(\frac{n_i^2}{n_i'}\right) - n.$$

В даному випадку

$$\sum_{i=1}^{10} \left(\frac{n_i^2}{n_i'}\right) - n = 207{,}199 - 200 = 7{,}199 = \chi^2_{спост.}.$$

Отже, обчислення виконані правильно.

За таблицею критичних точок розподілу χ^2 за рівнем значущості α =0,05 і числом степенів вільності κ=10-3=7 знаходимо критичну точку правосторонньої критичної області $\chi^2_{кр.}\left(0{,}05;7\right) = 14{,}1$.

Оскільки $\chi^2_{спост.} < \chi^2_{кр.}$, то немає підстав відкидати нульову гіпотезу.

Отже, дані спостережень узгоджуються з гіпотезою про нормальний розподіл генеральної сукупності.

Додаток 1.

Таблиця значень функції $\varphi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}$

x	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	0,3989	3989	3989	3988	3986	3984	3982	3980	3977	3973
0,1	3970	3965	3961	3956	3951	3945	3939	3932	3925	3918
0,2	3910	3902	3894	3885	3876	3867	3857	3847	3836	3825
0,3	3814	3802	3790	3778	3765	3752	3739	3726	3712	3697
0,4	3683	3668	3653	3637	3621	3605	3589	3572	3555	3538
0,5	3521	3503	3485	3467	3448	3429	3410	3391	3372	3352
0,6	3332	3312	3292	3271	3251	3230	3209	3187	3166	3144
0,7	3123	3101	3079	3056	3034	3011	2989	2966	2943	2920
0,8	2897	2874	2850	2827	2803	2780	2756	2732	2709	2685
0,9	2661	2637	2613	2589	2565	2541	2516	2492	2468	2444
1	0,2420	2396	2371	2347	2323	2299	2275	2251	2227	2203
1,1	2179	2155	2131	2107	2083	2059	2036	2012	1989	1965
1,2	1942	1919	1895	1872	1849	1826	1804	1781	1758	1736
1,3	1714	1691	1669	1647	1626	1604	1582	1561	1539	1518
1,4	1497	1476	1456	1435	1415	1394	1374	1354	1334	1315
1,5	1295	1276	1257	1238	1219	1200	1182	1163	1145	1127
1,6	1109	1092	1074	1057	1040	1023	1006	0989	0973	0957
1,7	0940	0925	0909	0893	0878	0863	0848	0833	0818	0804
1,8	0790	0775	0761	0748	0734	0721	0707	0694	0681	0669
1,9	0656	0644	0632	0620	0608	0596	0584	0573	0562	0551
2	0,0540	0529	0519	0508	0498	0488	0478	0468	0459	0449
2,1	0440	0431	0422	0413	0404	0396	0387	0379	0371	0363
2,2	0355	0347	0339	0332	0325	0317	0310	0303	0297	0290
2,3	0283	0277	0270	0264	0258	0252	0246	0241	0235	0229
2,4	0224	0219	0213	0208	0203	0198	0194	0189	0184	0180
2,5	0175	0171	0167	0163	0158	0154	0151	0147	0143	0139
2,6	0136	0132	0129	0126	0122	0119	0116	0113	0110	0107
2,7	0104	0101	0099	0096	0093	0091	0088	0086	0084	0081
2,8	0079	0077	0075	0073	0071	0069	0067	0065	0063	0061
2,9	0060	0058	0056	0055	0053	0051	0050	0048	0047	0046
3	0,0044	0043	0042	0040	0039	0038	0037	0036	0035	0034
3,1	0033	0032	0031	0030	0029	0028	0027	0026	0025	0025
3,2	0024	0023	0022	0022	0021	0020	0020	0019	0018	0018
3,3	0017	0017	0016	0016	0015	0015	0014	0014	0013	0013
3,4	0012	0012	0012	0011	0011	0010	0010	0010	0009	0009
3,5	0009	0008	0008	0008	0008	0007	0007	0007	0007	0006
3,6	0006	0006	0006	0005	0005	0005	0005	0005	0005	0004
3,7	0004	0004	0004	0004	0004	0004	0003	0003	0003	0003
3,8	0003	0003	0003	0003	0003	0002	0002	0002	0002	0002
3,9	0002	0002	0002	0002	0002	0002	0002	0002	0001	0001

Додаток 2.

Таблиця значень функції $\Phi\left(x\right)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int\limits_{0}^{x}e^{-\frac{z^2}{2}}dz$

x	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	0,00000	00399	00798	01197	01595	01994	02392	02790	03188	03586
0,1	03983	04380	04776	05172	05567	05962	06356	06749	07142	07535
0,2	07926	08317	08706	09095	09483	09871	10257	10642	11026	11409
0,3	11791	12172	12552	12930	13307	13683	14058	14431	14803	15173
0,4	15542	15910	16276	16640	17003	17364	17724	18082	18439	18793
0,5	19146	19497	19847	20194	20540	20884	21226	21566	21904	22240
0,6	22575	22907	23237	23565	23891	24215	24537	24857	25175	25490
0,7	25804	26115	26424	26730	27035	27337	27637	27935	28230	28524
0,8	28814	29103	29389	29673	29955	30234	30511	30785	31057	31327
0,9	31594	31859	32121	32381	32639	32894	33147	33398	33646	33891
1	34134	34375	34614	34850	35083	35314	35543	35769	35993	36214
1,1	36433	36650	36864	37076	37286	37493	37698	37900	38100	38298
1,2	38493	38686	38877	39065	39251	39435	39617	39796	39973	40147
1,3	40320	40490	40658	40824	40988	41149	41309	41466	41621	41774
1,4	41924	42073	42220	42364	42507	42647	42786	42922	43056	43189
1,5	43319	43448	43574	43699	43822	43943	44062	44179	44295	44408
1,6	44520	44630	44738	44845	44950	45053	45154	45254	45352	45449
1,7	45543	45637	45728	45818	45907	45994	46080	46164	46246	46327
1,8	46407	46485	46562	46638	46712	46784	46856	46926	46995	47062
1,9	47128	47193	47257	47320	47381	47441	47500	47558	47615	47670
2	47725	47778	47831	47882	47932	47982	48030	48077	48124	48169
2,1	48214	48257	48300	48341	48382	48422	48461	48500	48537	48574
2,2	48610	48645	48679	48713	48745	48778	48809	48840	48870	48899
2,3	48928	48956	48983	49010	49036	49061	49086	49111	49134	49158
2,4	49180	49202	49224	49245	49266	49286	49305	49324	49343	49361
2,5	49397	49396	49413	49430	49446	49461	49477	49492	49506	49520
2,6	49534	49547	49560	49573	49585	49598	49609	49621	49632	49643
2,7	49653	49664	49674	49683	49693	49702	49711	49720	49728	49736
2,8	49744	49752	49760	49767	49774	49781	49788	49795	49801	49807
2,9	49813	49819	49825	49831	49836	49841	49846	49851	49856	49861
3	0,49865		3,1	49903	3,2	49931	3,3	49952	3,4	49966
3,5	49977		3,6	49984	3,7	49989	3,8	49993	3,9	49995
4,0	499968									
4,5	499997									
5,0	49999997									

Додаток 3.

Таблиця значень функції $P_m(\lambda) = \frac{\lambda^m e^{-\lambda}}{m!}$

$m \backslash \lambda$	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6
0	0,904837	0,818731	0,740818	0,670320	0,606531	0,548812
1	0,090484	0,163746	0,222245	0,268128	0,303265	0,329287
2	0,004524	0,016375	0,033337	0,053626	0,075816	0,098786
3	0,000151	0,001091	0,003334	0,007150	0,012636	0,019757
4	0,000004	0,000055	0,000250	0,000715	0,001580	0,002964
5		0,000002	0,000015	0,000057	0,000158	0,000356
6			0,000001	0,000004	0,000013	0,000035
7					0,000001	0,000003

$m \backslash \lambda$	0,7	0,8	0,9	1,0	2,0	3,0
0	0,496585	0,449329	0,406570	0,367879	0,135335	0,049787
1	0,347610	0,359463	0,365913	0,367879	0,270671	0,149361
2	0,121663	0,143785	0,164661	0,183940	0,270671	0,224042
3	0,028388	0,038343	0,049398	0,061313	0,180447	0,224042
4	0,004968	0,007669	0,011115	0,015328	0,090224	0,168031
5	0,000695	0,001227	0,002001	0,003066	0,036089	0,100819
6	0,000081	0,000164	0,000300	0,000511	0,012030	0,050409
7	0,000008	0,000019	0,000039	0,000073	0,003437	0,021604
8		0,000002	0,000004	0,000009	0,000859	0,008101
9				0,000001	0,000191	0,002701
10					0,000038	0,000810
11					0,000007	0,000221
12					0,000001	0,000055
13						0,000013
14						0,000003
15						0,000001

Продовження.

$m \backslash \lambda$	4,0	5,0	6,0	7,0	8,0	9,0
0	0,018316	0,006738	0,002479	0,000912	0,000335	0,000123
1	0,073263	0,033690	0,014873	0,006383	0,002684	0,001111
2	0,146525	0,084224	0,044618	0,022341	0,010735	0,004998
3	0,195367	0,140374	0,089235	0,052129	0,028626	0,014994
4	0,195367	0,175467	0,133853	0,091226	0,057252	0,033737
5	0,156293	0,175467	0,160623	0,127717	0,091604	0,060727
6	0,104194	0,146223	0,160623	0,149003	0,122138	0,091090
7	0,059540	0,104445	0,137677	0,149003	0,139587	0,117116
8	0,029770	0,065278	0,103258	0,130377	0,139587	0,131756
9	0,013231	0,036266	0,068838	0,101405	0,124077	0,131756
10	0,005292	0,018133	0,041303	0,070983	0,099262	0,118580
11	0,001925	0,008242	0,022529	0,045171	0,072190	0,097020
12	0,000642	0,003434	0,011262	0,026350	0,048127	0,072765
13	0,000197	0,001321	0,005199	0,014188	0,029616	0,050376
14	0,000056	0,000472	0,002228	0,007094	0,016294	0,032384
15	0,000015	0,000157	0,000891	0,003311	0,009026	0,019431
16	0,000004	0,000049	0,000334	0,001448	0,004513	0,010930
17	0,000001	0,000014	0,000118	0,000596	0,002124	0,005786
18		0,000004	0,000039	0,000232	0,000944	0,002893
19		0,000001	0,000012	0,000085	0,000397	0,001370
20			0,000004	0,000030	0,000159	0,000617
21			0,000001	0,000010	0,000061	0,000264
22				0,000003	0,000022	0,000108
23				0,000001	0,000008	0,000042
24					0,000003	0,000016
25					0,000001	0,000006
26						0,000002
27						0,000001

Додаток 4.

Таблиця значень $t_\gamma = t(\gamma, n)$

$n \backslash \gamma$	0,95	0,99	0,999		$n \backslash \gamma$	0,95	0,99	0,999
5	2,78	4,60	8,61		20	2,093	0,861	3,883
6	2,57	4,03	6,86		25	2,064	2,797	3,745
7	2,45	3,71	5,96		30	2,045	2,756	3,659
8	2,37	3,50	5,41		35	2,032	2,720	3,600
9	2,31	3,36	5,04		40	2,023	2,708	3,558
10	2,26	3,25	4,78		45	2,016	2,692	3,527
11	2,23	3,17	4,59		50	2,009	2,679	3,502
12	2,20	3,11	4,44		60	2,001	2,662	3,464
13	2,18	3,06	4,32		70	1,996	2,649	3,439
14	2,16	3,01	4,22		80	1,991	2,640	3,418
15	2,15	2,98	4,14		90	1,987	2,633	3,403
16	2,13	2,95	4,07		100	1,984	2,627	3,392
17	2,12	2,92	4,02		120	1,980	2,617	3,374
18	2,11	2,90	3,97		∞	1,960	2,576	3,291
19	2,10	2,88	3,92					

Додаток 5.

Таблиця значень функції $q = q(\gamma, n)$

$n \backslash \gamma$	0,95	0,99	0,999		$n \backslash \gamma$	0,95	0,99	0,999
5	1,37	2,67	5,64		20	0,37	0,58	0,88
6	1,09	2,01	3,88		25	0,32	0,49	0,73
7	0,92	1,62	2,98		30	0,28	0,43	0,63
8	0,80	1,38	2,42		35	0,26	0,38	0,56
9	0,71	1,20	2,06		40	0,24	0,35	0,50
10	0,65	1,08	1,80		45	0,22	0,32	0,46
11	0,59	0,98	1,60		50	0,21	0,30	0,43
12	0,55	0,90	1,45		60	0,188	0,269	0,38
13	0,52	0,83	1,33		70	0,174	0,245	0,34
14	0,48	0,78	1,23		80	0,161	0,226	0,31
15	0,46	0,73	1,15		90	0,151	0,211	0,29
16	0,44	0,70	1,07		100	0,143	0,198	0,27
17	0,42	0,66	1,01		150	0,115	0,160	0,211
18	0,40	0,63	0,96		200	0,099	0,136	0,185
19	0,39	0,60	0,92		250	0,089	0,120	0,162

Додаток 6.

Критичні точки розподілу χ^2.

Число степенів вільності k	Рівень значущості α					
	0,01	0,025	0,05	0,95	0,975	0,99
1	6,6	5,0	3,8	0,0039	0,00098	0,00016
2	9,2	7,4	6,0	0,103	0,051	0,020
3	11,3	9,4	7,8	0,352	0,216	0,115
4	13,3	11,1	9,5	0,711	0,484	0,297
5	15,1	12,8	11,1	1,15	0,831	0,554
6	16,8	14,4	12,6	1,64	1,24	0,872
7	18,5	16,0	14,1	2,17	1,69	1,24
8	20,1	17,5	15,5	2,73	2,18	1,65
9	21,7	19,0	16,9	3,33	2,70	2,09
10	23,2	20,5	18,3	3,94	3,25	2,56
11	24,7	21,9	19,7	4,57	3,82	3,05
12	26,2	23,3	21,0	5,23	4,40	3,57
13	27,7	24,7	22,4	5,89	5,01	4,11
14	29,1	26,1	23,7	6,57	5,63	4,66
15	30,6	27,5	25,0	7,26	6,26	5,23
16	32,0	28,8	26,3	7,96	6,91	5,81
17	33,4	30,2	27,6	8,67	7,56	6,41
18	34,8	31,5	28,9	9,39	8,23	7,01
19	36,2	32,9	30,1	10,1	8,91	7,63
20	37,6	34,2	31,4	10,9	9,59	8,26
21	38,9	35,5	32,7	11,6	10,3	8,90
22	40,3	36,8	33,9	12,3	11,0	9,54
23	41,6	38,1	35,2	13,1	11,7	10,2
24	43,0	39,4	36,4	13,8	12,4	10,9
25	44,3	40,6	37,7	14,6	13,1	11,5
26	45,6	41,9	38,9	15,4	13,8	12,2
27	47,0	43,2	40,1	16,2	14,6	12,9
28	48,3	44,5	41,3	16,9	15,3	13,6
29	49,6	45,7	42,6	17,7	16,0	14,3
30	50,9	47,0	43,8	18,5	16,8	15,0

ЛІТЕРАТУРА

1. Методичний посібник з курсу теорії ймовірностей та математичної статистики для студентів заочної форми навчання / Самборська О.М., Шелестовський Б.Г., Ясінський А.В. – Тернопіль: ТДТУ імені Івана Пулюя, 2000. – 76 с.
2. Функції комплексной змінної. Операційне числення. Теорія ймовірностей та математична статистика: Навчальний посібник / Шелестовський Б.Г., Фурсевич Л.В., Самборська О.М., Габрусєв Г.В. – Тернопіль: ТДТУ імені Івана Пулюя , 2009.
3. Овчинников П.П., Михайленко В.М**.** Вища математика: Підручник. У 2 ч.,Ч. 2: Диференціальні рівняння. Операційне числення. Ряди та їх застосування. Стійкість за Ляпуновим. Рівняння математичної фізики. Оптимізація і керування. Теорія ймовірностей. Числові методи / За заг. ред. П.П.Овчинникова .-3-тє вид., випр.-К.: Техніка, 2004 –792 с.
4. Вища математика:Збірник задач: У 2 ч.,Ч. 2: Звичайні диференційні рівняння. Операційне числення. Ряди. Рівняння математичної фізики. Стійкість за Ляпуновим. Елементи теорії ймовірностей і математичної статистики. /За заг. ред. д-ра техн. наук, проф. П.П.Овчинникова .-2-ге вид., стереотипне. – К.: Техніка, 2004. – 376 с.
5. Барковський В.В, Барковська Н.В., Лопатін О.К. Теорія ймовірностей та математична статистика: Навчальний посібник. – 3-тє вид. переробл. і доп. – К.: ЦУЛ, 2002.
6. Шефтель В. Теорія ймовірностей. – К.: Вища школа, 1994. – 192 с.

ЗМІСТ