УДК 681.5.09
О.Чуб; В.Копп, докт. техн. наук; В.Тараненко, докт. техн. наук
Севастопольський державний технічний університет

АНАЛІЗ ФУНКЦІЮВАННЯ ГНУЧКИХ ВИРОБНИЧИХ СИСТЕМ

Визначено аналітичні вирази для одержання функцій розподілу випадкових величин часу роботи гнучкої виробничої системи, що описують її функціювання з урахуванням відмов і часу переналагоджень для випадків апроксимації реальних законів розподілу відомими

Методологія побудови математичної моделі гнучкої виробничої системи (ГВС) [1-4] ґрунтується на алгоритмі послідовного виконання операцій розрідження потоків подій і дальшої їхньої суперпозиції. У випадку визначення функції розподілу часу відновлення перед застосуванням даних операцій використано перетворення ненадійного пристрою на еквівалентний абсолютно надійний. При визначенні функції розподілу часу переналагоджень послідовність операцій розрідження потоків подій і їхньої суперпозиції застосована двічі: при визначенні функції розподілу сумарного потоку переналагоджень для кожного виду продукції і при визначенні функції розподілу сумарного потоку переналагоджень для усіх видів продукції. Процеси функціювання ГВС можна подати як альтернативний процес відновлення з відомими функціями розподілу обслуговування вимог і переналагоджень [1-4]. Перевага побудованої моделі – відмова від апріорного припущення про експонентність законів розподілу випадкових величин, можливість використання довільних законів розподілу випадкових величин. Спростити подальше використання на практиці отриманих теоретичних результатів дозволяє застосування аналітичних виразів для функцій розподілу і числових характеристик випадкових величин (ВВ), отриманих при апроксимації реальних законів розподілу відомими, наприклад, експонентним, експонентним зі зсувом, узагальненим Ерланга другого порядку, узагальненим Ерланга другого порядку із зсувом [3, 4]. Далі визначаються аналітичні вирази, використовувані для функцій розподілу ВВ, отриманих при апроксимації реальних законів розподілу відомими.

Для експонентного закону розподілу функція, густина розподілу ВВ α і функція відновлення відповідно виглядають так:

$$F(t) = 1 - e^{-at}, \quad f(t) = a \cdot e^{-at}, \quad H(t) = a \cdot t,$$

де a – параметр експонентного закону розподілу.

Для взаємно незалежних ВВ $\alpha 1$, $\alpha 2$, що мають функції розподілу відповідно F1(t) і F2(t), функція розподілу суми s=α1+α2 задається інтегралом згортки вихідних функцій:

$$S(t) = \int_0^t F1(t-k)dF2(k).$$

Інтеграл згортки для випадку, коли F1(t)= F2(t)=F(t), набирає вигляду:

$$F^{*2}(t) = \int_0^t F(t-k)dF(k),$$

де (*2) – позначення операції 2-кратної згортки.

Інтеграл згортки другого порядку функції відновлення:

$$H^{*2}(t) = \int_0^t a(t-k) \cdot a \cdot dk = \frac{1}{2}t^2 \cdot a^2.$$

Згортка другого порядку функції розподілу ВВ α виглядає так:

$$F^{*2}(t) = \int_0^t (1 - e^{-a(t-k)})(a \cdot e^{-ak})dk = -(1+at)e^{-at} + 1.$$

Аналогічно згортка третього порядку функції розподілу ВВ α :

$$F^{*3}(t)=\int_0^t(-e^{-a(t-k)}(1+a(t-k))+1)(a\cdot e^{-ak})dk=-\frac{1}{2}(e^{-at})(2\cdot a\cdot t+t^2\cdot a^2+2)+1\,.$$

Згортка другого порядку густини розподілу ВВ α :

$$f^{*2}(t)=\int_0^t a\cdot e^{-a(t-k)}\cdot a\cdot e^{-ak}dk=t\cdot a^2\cdot e^{-at}\,.$$

Згортка третього порядку густини розподілу ВВ α :

$$f^{*3}(t)=\int_0^t(t-k)\cdot a^{2}\,e^{-a(t-k)}\cdot a\cdot e^{-ak}dk=\frac{1}{2}t^2\cdot a^3\cdot e^{-at}\,.$$

Для експонентного із зсувом закону розподілу функція і густина розподілу ВВ α :

$$F(t)=1-e^{-a(t-\tau)},\ f(t)=a\cdot e^{-a(t-\tau)}\,,$$

де τ – параметр зсуву.

У перетвореннях Лапласа функція і густина розподілу ВВ α виглядають так [6,7]:

$$F(s)=\frac{a}{s\cdot(s+a)}\cdot e^{-s\tau}\,,\quad f(s)=\frac{a}{s+a}\cdot e^{-s\tau}\,,$$

де s – комплексна змінна.

Перетворення Лапласа функції відновлення ВВ при H(0)=0 [5-7]:

$$H(s)=\frac{f(s)}{s(1-f(s))}=\frac{\frac{a}{s+a}\cdot e^{-s\tau}}{s\cdot(1-\frac{a}{s+a}\cdot e^{-s\tau})}=\frac{a\cdot e^{-s\tau}}{s\cdot(s+a-a\cdot e^{-s\tau})}\,.$$

Перетворення Лапласа густини функції відновлення ВВ [5-7]:

$$h(s)=\frac{f(s)}{1-f(s)}=\frac{\frac{a}{s+a}\cdot e^{-s\tau}}{1-\frac{a}{s+a}\cdot e^{-s\tau}}=\frac{a\cdot e^{-s\tau}}{s+a-a\cdot e^{-s\tau}}\,.$$

Згортка другого порядку функції відновлення H(s) у перетвореннях Лапласа [6,7] визначається як квадрат перетворення Лапласа густини функції відновлення *h(s)*, поділений на змінну *s*:

$$H^{*2}(s)=\frac{1}{s}\cdot h^2(s)=\frac{1}{s}\cdot(\frac{a\cdot e^{-s\tau}}{s+a-a\cdot e^{-s\tau}})^2\,. \qquad (1)$$

Оригінал $H^{*2}(s)$ отриманий після попереднього розкладання (1) в ряд Тейлора до шостого члена

$$H^{*2}(s)\approx\frac{a^2}{(1+a\cdot\tau)^2\cdot s^3}+\frac{\frac{a^3\cdot\tau^2}{(1+a\cdot\tau)^3}-\frac{2a^2\cdot\tau}{(1-a\cdot\tau)^2}}{s^2}+$$

$$+\frac{\frac{(\frac{-1}{3}(1+a\tau)\cdot a\tau^3+\frac{3}{4}a^2\tau^4)a^2}{(1+a\tau)^4}-\frac{2a^3\tau^3}{(1+a\tau)^3}+\frac{2a^2\tau^2}{(1+a\tau)^2}}{s}+$$

$$+a^2\,\frac{\frac{\frac{1}{12}a\tau^4+\frac{1}{4}a^2\tau^5}{(1+a\tau)^2}-\frac{a\tau^2(\frac{1}{3}a\tau^3+\frac{7}{12}a^2\tau^4)+\frac{a^2\tau^5}{12}(-4+5a\tau)}{(1+a\tau)^3}-\frac{2a^2\tau(-\frac{1}{3}a\tau^3+\frac{5}{12}a^2\tau^4)}{(1+a\tau)^2}}{(1+a\tau)^2}+$$

$$+\frac{2a^3\tau^4}{(1+a\tau)^3}-\frac{4}{3}\cdot\frac{a^2\tau^3}{(1+a\tau)^2}. \tag{2}$$

Зворотне перетворення Лапласа для (2) виглядає так:

$$H^{*2}(t)\approx\frac{a^2t^2}{2(1+a\tau)^2}+\left[\frac{a^3\tau^2}{(1+a\tau)^3}-\frac{2a^2\tau}{(1+a\tau)^2}\right]t+(-\frac{4}{12}a\tau^3+\frac{5}{12}a^2\tau^4)\frac{a^2}{(1+a\tau)^4}-$$

$$-\frac{2a^3\tau^3}{(1+a\tau)^3}+\frac{2a^2\tau^2}{(1+a\tau)^2}+$$

$$+\frac{a^2\left[\frac{1}{12}a\tau^4\frac{1+3a\tau}{(1+a\tau)^2}-\frac{a\tau^2}{(1+a\tau)^3}\left[\frac{1}{3}a\tau^3+\frac{7}{3}a^2\tau^4\right]+\frac{a^2\tau^5(-\frac{1}{3}+\frac{5}{12}a\tau)}{(1+a\tau)^2}\right]}{(1+a\tau)^3}\mathrm{Dirac}(t)-$$

$$-\frac{a^3\tau^4(-4+5a\tau)}{6(1+a\tau)^4}\mathrm{Dirac}(t)+\frac{2a^3\tau^4}{(1+a\tau)^3}\mathrm{Dirac}(t)-\frac{4a^2\tau^3}{3(1+a\tau)^2}\mathrm{Dirac}(t),$$

де Dirac(t) – функція Дірака (Dirac(t)=0, якщо $t\neq 0$ і $\int\limits_{-\infty}^{\infty}\mathrm{Dirac}(t)dt=1$).

Згортка другого порядку функції розподілу ВВ α у перетвореннях Лапласа виглядає так:

$$F^{*2}(s)=\frac{1}{s}\left[\frac{a\cdot e^{-s\tau}}{s+a}\right]^2. \tag{3}$$

Оригінал (3):

$$F^{*2}(t)=a^2\Phi(t-2\tau)\left[\frac{-e^{-a(t-2\tau)}}{a^2}-(t-2\tau)\cdot\frac{e^{-a(t-2\tau)}}{a}+\frac{1}{a^2}\right],$$

де $\Phi(t)$ – імпульсна функція Хевісайда (Φ(t)=0 при t<0, інакше Φ(t)=1).

Згортка третього порядку функції розподілу ВВ α у перетвореннях Лапласа виглядає так:

$$F^{*3}(s)=\frac{1}{s}\left[\frac{a\cdot e^{-s\tau}}{s+a}\right]^3. \tag{4}$$

Оригінал (4):

$$F^{*3}(t)=a^3\Phi(t-3\tau)\left[\frac{-e^{-a(t-3\tau)}}{a^3}-(t-3\tau)\cdot\frac{e^{-a(t-3\tau)}}{a^2}-\frac{1}{2}(t-3\tau)^2\cdot\frac{e^{-a(t-3\tau)}}{a}+\frac{1}{a^3}\right].$$

Згортка другого порядку густини функції розподілу в перетвореннях Лапласа виглядає так:

$$f^{*2}(s)=\left[\frac{a\cdot e^{-s\tau}}{s+a}\right]^2.$$

Згортка другого порядку густини розподілу ВВ α:

$$f^{*2}(t)=a^2\Phi(t-2\tau)\cdot(t-2\tau)\cdot e^{-a(t-2\tau)}.$$

Аналогічно згортка третього порядку:

$$f^{*3}(s)=\left[\frac{a\cdot e^{-s\tau}}{s+a}\right]^3. \tag{5}$$

Зворотне перетворення (5):

$$f^{*3}(t)=\frac{1}{2}a^3\Phi(t-3\tau)(t-3\tau)^2\cdot e^{-a(t-3\tau)}.$$

Для узагальненого закону Ерланга другого порядку функція і густина розподілу ВВ α відповідно виглядають так:

$$F(t)=\frac{\lambda_2\left[1-e^{-\lambda 1\cdot t}\right]-\lambda_1\left[1-e^{-\lambda_2\cdot t}\right]}{\lambda_2-\lambda_1},\quad f(t)=\frac{\lambda_2\cdot\lambda_1\left[e^{-\lambda_2\cdot t}-e^{-\lambda_1\cdot t}\right]}{\lambda_2-\lambda_1},\tag{6}$$

де λ_1, λ_2 – параметри узагальненого закону Ерланга другого порядку розподілу.

У перетвореннях Лапласа (6) виглядають так [5-7]:

$$F(s)=\frac{\lambda_1\cdot\lambda_2}{s\cdot(\lambda_1+s)(\lambda_2+s)},\quad f(s)=\frac{\lambda_1\cdot\lambda_2}{(\lambda_1+s)(\lambda_2+s)},$$

де s – комплексна змінна.

Перетворення Лапласа функції відновлення ВВ, розподіленої відповідно до узагальненого закону Ерланга другого порядку при H(0)=0 [6, 7]:

$$H(s)=\frac{f(s)}{s(1-f(s))}=\frac{\lambda_1\cdot\lambda_2}{(\lambda_1+s)(\lambda_2+s)s\left(1-\frac{\lambda_1\lambda_2}{(\lambda_1+s)(\lambda_2+s)}\right)}=$$

$$=\frac{\lambda_1\lambda_2}{(\lambda_1+\lambda_2+s)s^2}=\frac{A_1}{s}+\frac{A_2}{s^2}+\frac{A_3}{s+\lambda_1+\lambda_2}=\frac{A_1s(s+\lambda_1+\lambda_2)+A_2(s+\lambda_1+\lambda_2)+A_3s^2}{(s+\lambda_1+\lambda_2)s^2}.\tag{7}$$

Далі застосовано прийом розкладання на елементарні дроби, за допомогою розв’язку системи рівнянь:

$$\begin{cases}A_1+A_3=0\\ A_1\cdot\lambda_1+A_1\cdot\lambda_2+A_2=0\\ \lambda_1\lambda_2=A_2\cdot\lambda_1+A_2\cdot\lambda_2\end{cases}.$$

Тоді (7) виглядає так:

$$H(s)=-\frac{\lambda_1\lambda_2}{s(\lambda_1+\lambda_2)^2}+\frac{\lambda_1\lambda_2}{(\lambda_1+\lambda_2)s^2}+\frac{\lambda_1\lambda_2}{(\lambda_1+\lambda_2+s)(\lambda_1+\lambda_2)^2}.\tag{8}$$

Зворотне перетворення (8):

$$H(t)=-\frac{\lambda_1\lambda_2}{(\lambda_1+\lambda_2)^2}+\frac{\lambda_1\lambda_2t}{\lambda_1+\lambda_2}+\frac{\lambda_1\lambda_2e^{-(\lambda_1+\lambda_2)t}}{(\lambda_1+\lambda_2)^2}.\tag{9}$$

Справедливість (9) перевірялася з використанням асимптотичної властивості (при $t\to\infty$) процесу відновлення [5]:

$$\lim_{t\to\infty}\frac{H(t)}{t}=\frac{1}{M},\tag{10}$$

де $M=\frac{\lambda_1+\lambda_2}{\lambda_1\cdot\lambda_2}$ - математичне сподівання ВВ, розподіленої за узагальненим законом Ерланга другого порядку.

Виконаємо перевірку на збіжність (9):

$$\lim_{t\to\infty}\frac{H(t)}{t}=\lim_{t\to\infty}\frac{-\frac{\lambda_1\lambda_2}{(\lambda_1+\lambda_2)^2}+\frac{\lambda_1\lambda_2t}{\lambda_1+\lambda_2}+\frac{\lambda_1\lambda_2e^{-(\lambda_1+\lambda_2)t}}{(\lambda_1+\lambda_2)^2}}{t}=\frac{\lambda_1\cdot\lambda_2}{\lambda_1+\lambda_2}.$$

Умову (10) виконано.

Згортка другого порядку функції відновлення $H(s)$ у перетвореннях Лапласа визначається як квадрат перетворення Лапласа густини функції відновлення $h(s)$, поділений на змінну s:

$$H^{*2}(s) = \frac{1}{s} \cdot h^2(s) = \frac{f(s)^2}{s(1-f(s))^2} = \frac{\left(\frac{\lambda_1 \cdot \lambda_2}{(\lambda_1+s)(\lambda_2+s)}\right)^2}{s\left(1-\frac{\lambda_1 \cdot \lambda_2}{(\lambda_1+s)(\lambda_2+s)}\right)^2}. \quad (11)$$

Зворотне перетворення Лапласа для (11) виглядає так:

$$H^{*2}(t) = \frac{1}{2}\lambda_2^2\lambda_1^2 \frac{t^2(\lambda_2+\lambda_1)^2 - 2te^{-(\lambda_1+\lambda_2)t}(\lambda_2+\lambda_1) - 2\lambda_2 t - 6e^{-(\lambda_1+\lambda_2)t} - 4\lambda_1 t + 6}{2\lambda_1\lambda_2 + \lambda_2^2 + \lambda_1^2}.$$

Формула згортки другого порядку функції розподілу ВВ α у перетвореннях Лапласа виглядає так:

$$F^{*2}(s) = \frac{1}{s}\left(\frac{\lambda_1 \cdot \lambda_2}{(\lambda_1+s)(\lambda_2+s)}\right)^2. \quad (12)$$

Оригінал (12):

$$F^{*2}(t) = \lambda_2^2\lambda_1^2\Big(\frac{3 \cdot e^{-\lambda_1 t}}{(\lambda_2-\lambda_1)^3\lambda_1} - \frac{\lambda_2 \cdot e^{-\lambda_1 t}}{(\lambda_2-\lambda_1)^3\lambda_1^2} - \frac{t \cdot e^{-\lambda_1 t}}{(\lambda_2-\lambda_1)^2\lambda_1} + \frac{\lambda_2 \cdot e^{-\lambda_2 t}}{(\lambda_2-\lambda_1)^3\lambda_2^2} - \\ - \frac{3 \cdot e^{-\lambda_2 t}}{(\lambda_2-\lambda_1)^3\lambda_2} - \frac{t \cdot e^{-\lambda_2 t}}{(\lambda_2-\lambda_1)^2\lambda_2} + \frac{1}{\lambda_2^2 \cdot \lambda_1^2}\Big).$$

Аналогічно згортка третього порядку:

$$F^{*3}(t) = \lambda_2^3\lambda_1^3\Big(\frac{5 \cdot \lambda_2 e^{-\lambda_1 t}}{(\lambda_2-\lambda_1)^5\lambda_1^2} - \frac{10 \cdot e^{-\lambda_1 t}}{(\lambda_2-\lambda_1)^5\lambda_1} - \frac{\lambda_2^2 \cdot e^{-\lambda_1 t}}{(\lambda_2-\lambda_1)^5\lambda_1^3} - \\ - \frac{t \cdot \lambda_2 \cdot e^{-\lambda_1 t}}{(\lambda_2-\lambda_1)^4\lambda_1^2} + \frac{4 \cdot t \cdot e^{-\lambda_1 t}}{(\lambda_2-\lambda_1)^4\lambda_1} - \frac{t^2 \cdot e^{-\lambda_1 t}}{2(\lambda_2-\lambda_1)^3\lambda_1} + \frac{10 \cdot e^{-\lambda_2 t}}{(\lambda_2-\lambda_1)^5\lambda_2} - \frac{5 \cdot \lambda_1 \cdot e^{-\lambda_2 t}}{(\lambda_2-\lambda_1)^5\lambda_2^2} + \\ - \frac{\lambda_1^2 e^{-\lambda_2 t}}{(\lambda_2-\lambda_1)^5\lambda_2^3} + \frac{4 \cdot t \cdot e^{-\lambda_2 t}}{(\lambda_2-\lambda_1)^4\lambda_2} - \frac{t \cdot \lambda_1 \cdot e^{-\lambda_2 t}}{(\lambda_2-\lambda_1)^4\lambda_2^2} + \frac{t^2 \cdot e^{-\lambda_2 t}}{2(\lambda_2-\lambda_1)^3\lambda_2} + \frac{1}{\lambda_2^3 \cdot \lambda_1^3}\Big).$$

Згортка другого порядку густини функції розподілу ВВ α у перетвореннях Лапласа виглядає так:

$$f^{*2}(s) = \left(\frac{\lambda_1 \cdot \lambda_2}{(\lambda_1+s)(\lambda_2+s)}\right)^2. \quad (14)$$

Згортка другого порядку густини розподілу ВВ α:

$$f^{*2}(t) = \frac{-2 \cdot \lambda_2^2 \cdot \lambda_1^2 \cdot e^{-\lambda_1 t}}{3\lambda_1^2\lambda_2 - 3\lambda_2^2\lambda_1 - \lambda_1^3 + \lambda_2^3} - \frac{t \cdot \lambda_2^2 \cdot \lambda_1^2 \cdot e^{-\lambda_1 t}}{-2\lambda_2\lambda_1 + \lambda_1^2 + \lambda_2^2} + \\ + \frac{2 \cdot \lambda_2^2 \cdot \lambda_1^2 \cdot e^{-\lambda_2 t}}{3\lambda_1^2\lambda_2 - 3\lambda_2^2\lambda_1 - \lambda_1^3 + \lambda_2^3} + \frac{t \cdot \lambda_2^2 \cdot \lambda_1^2 \cdot e^{-\lambda_2 t}}{-2\lambda_2\lambda_1 + \lambda_1^2 + \lambda_2^2}.$$

Аналогічно згортка третього порядку ВВ α:

$$f^{*3}(t) = \lambda_2^3\lambda_1^3\Big(\frac{6 \cdot e^{-\lambda_1 t}}{(\lambda_2-\lambda_1)^5} - \frac{3 \cdot t \cdot e^{-\lambda_1 t}}{(\lambda_2-\lambda_1)^4} + \frac{t^2 \cdot e^{-\lambda_1 t}}{2(\lambda_2-\lambda_1)^3} - \\ - \frac{6 \cdot e^{-\lambda_2 t}}{(\lambda_2-\lambda_1)^5} - \frac{3 \cdot t \cdot e^{-\lambda_2 t}}{(\lambda_2-\lambda_1)^4} + \frac{t^2 \cdot e^{-\lambda_2 t}}{2(\lambda_2-\lambda_1)^3}\Big).$$

Для узагальненого закону Ерланга другого порядку із зсувом функція і густина розподілу ВВ α відповідно виглядають так:

$$F(t)=\frac{\lambda_2\left[1-e^{-\lambda 1\cdot(t-\tau)}\right]-\lambda_1\left[1-e^{-\lambda_2\cdot(t-\tau)}\right]}{\lambda_2-\lambda_1},\quad f(t)=\frac{\lambda_2\cdot\lambda_1\left[e^{-\lambda_2\cdot(t-\tau)}-e^{-\lambda_1\cdot(t-\tau)}\right]}{\lambda_2-\lambda_1},\tag{15}$$

де $\tau-$ параметр зсуву.

У перетвореннях Лапласа (15) виглядають так:

$$F(s)=\frac{\lambda_1\cdot\lambda_2\cdot e^{-s\tau}}{s\cdot(\lambda_1+s)(\lambda_2+s)},\quad f(s)=\frac{\lambda_1\cdot\lambda_2\cdot e^{-s\tau}}{(\lambda_1+s)(\lambda_2+s)}$$

Перетворення Лапласа густини, а також функції відновлення відповідно при $H(0)=0$:

$$h(s)=\frac{f(s)}{1-f(s)}=\frac{\dfrac{\lambda_1\cdot\lambda_2\cdot e^{-s\tau}}{(\lambda_1+s)(\lambda_2+s)}}{1-\dfrac{\lambda_1\cdot\lambda_2\cdot e^{-s\tau}}{(\lambda_1+s)(\lambda_2+s)}},H(s)=\frac{f(s)}{s(1-f(s))}=\frac{\dfrac{\lambda_1\cdot\lambda_2\cdot e^{-s\tau}}{(\lambda_1+s)(\lambda_2+s)}}{s\left(1-\dfrac{\lambda_1\cdot\lambda_2\cdot e^{-s\tau}}{(\lambda_1+s)(\lambda_2+s)}\right)}.$$

Згортка другого порядку $H(s)$ у перетвореннях Лапласа:

$$H^{*2}(s)=\frac{1}{s}\cdot h^2(s)=\frac{f(s)^2}{s(1-f(s))^2}=\frac{\left(\dfrac{\lambda_1\cdot\lambda_2\cdot e^{-s\tau}}{(\lambda_1+s)(\lambda_2+s)}\right)^2}{s\left(1-\dfrac{\lambda_1\cdot\lambda_2\cdot e^{-s\tau}}{(\lambda_1+s)(\lambda_2+s)}\right)^2}.\tag{16}$$

Оригінал $H^{*2}(s)$ отриманий після попереднього розкладання (16) в ряд Тейлора до шостого члена:

$$\mathrm{H}^{*2}(\mathrm{s})\approx\frac{\lambda_1^2\cdot\lambda_2^2}{\mathrm{s}^3(\lambda_1+\lambda_1+\tau\cdot\lambda_1\cdot\lambda_1)}+\frac{\dfrac{-2\lambda_1^2\cdot\lambda_2^2(1-\frac{1}{2}\lambda_1\cdot\lambda_2\cdot\tau^2)}{(\lambda_1+\lambda_1+\tau\cdot\lambda_1\cdot\lambda_2)^3}-\dfrac{2\lambda_1^2\cdot\lambda_2^2\cdot\tau}{(\lambda_1+\lambda_1+\tau\cdot\lambda_1\cdot\lambda_2)^2}}{\mathrm{s}^2}+$$

$$+\frac{\dfrac{\lambda_1^2\cdot\lambda_2^2(-\frac{\tau^3\cdot\lambda_1\cdot\lambda_2}{3}(\lambda_1+\lambda_2+\tau\cdot\lambda_1\cdot\lambda_2)-(1-\frac{\tau^2\cdot\lambda_1\cdot\lambda_1}{2})^2-2(-2+\tau^2\cdot\lambda_1\cdot\lambda_2)(1-\frac{\tau^2\cdot\lambda_1\cdot\lambda_2}{2}))}{(\lambda_1+\lambda_1+\tau\cdot\lambda_1\cdot\lambda_2)^4}}{\mathrm{s}}+$$

$$+\frac{4\cdot\lambda_1^2\cdot\lambda_2^2\dfrac{\tau(1-\frac{\tau^2\cdot\lambda_1\cdot\lambda_2}{2})}{(\lambda_1+\lambda_1+\tau\cdot\lambda_1\cdot\lambda_2)^3}+2\cdot\lambda_1^2\cdot\lambda_2^2\dfrac{\tau^2}{(\lambda_1+\lambda_1+\tau\cdot\lambda_1\cdot\lambda_2)^2}}{\mathrm{s}}+$$

$$+\lambda_1^2\cdot\lambda_2^2(\frac{-(-\frac{\tau^4\cdot\lambda_1\cdot\lambda_2}{12}(\lambda_1+\lambda_2+\tau\cdot\lambda_1\cdot\lambda_2)+\frac{\tau^3\cdot\lambda_1\cdot\lambda_2}{3}(1-\frac{\tau^2\cdot\lambda_1\cdot\lambda_2}{2})}{(\lambda_1+\lambda_1+\tau\cdot\lambda_1\cdot\lambda_2)^4}-$$

$$\frac{-(-2+\tau^2\lambda_1\lambda_2)(\frac{\tau^3\lambda_1\lambda_2}{3}(\lambda_1+\lambda_2+\tau\lambda_1\lambda_2)+(1-\frac{\tau^2\lambda_1\lambda_2}{2})^2}{(\lambda_1+\lambda_1+\tau\cdot\lambda_1\cdot\lambda_2)^5}-$$

$$-\frac{\frac{1}{6}(1-\frac{\tau^2\lambda_1\lambda_2}{2})(-4\tau^3\lambda_1^2\lambda_2-4\tau^3\lambda_1\lambda_2^2+5\tau^4\lambda_1^2\lambda_2^2+36-36\tau^2\lambda_1\lambda_2)}{(\lambda_1+\lambda_1+\tau\cdot\lambda_1\cdot\lambda_2)^5})-$$

$$-2\lambda_1^2\lambda_2^2\tau\frac{-\frac{\tau^3\lambda_1\lambda_2}{3}(\lambda_1+\lambda_2+\tau\lambda_1\lambda_2)-(1-\frac{\tau^2\lambda_1\lambda_2}{2})^2-2(-2+\tau^2\lambda_1\lambda_2)(1-\frac{\tau^2\lambda_1\lambda_2}{2})}{(\lambda_1+\lambda_1+\tau\cdot\lambda_1\cdot\lambda_2)^4}-$$

$$-\frac{4\lambda_1^2\lambda_2^2\tau^2(1-\frac{\tau^2\lambda_1\lambda_2}{2})}{(\lambda_1+\lambda_1+\tau\cdot\lambda_1\cdot\lambda_2)^3}-\frac{4}{3}\frac{\lambda_1^2\lambda_2^2\tau^3}{(\lambda_1+\lambda_1+\tau\cdot\lambda_1\cdot\lambda_2)^2}. \qquad (17)$$

Зворотне перетворення Лапласа для (17) виглядає так:

$$\mathrm{H}^{*2}(\mathrm{t})\approx\frac{\lambda_2^2\lambda_1^2\mathrm{t}^2}{2(\lambda_1\lambda_2\tau+\lambda_2^2+\lambda_1^2)^2}+\left[\frac{-\lambda_2^2\lambda_1^2(1-\frac{\tau^2\lambda_1\lambda_2}{2})}{(\lambda_1\lambda_2\tau+\lambda_2^2+\lambda_1^2)^3}-\frac{2\lambda_2^2\lambda_1^2\tau}{(\lambda_1\lambda_2\tau+\lambda_2^2+\lambda_1^2)^2}\right]\mathrm{t}+$$

$$+\frac{\lambda_2^2\lambda_1^2\mathrm{t}^2\left[-\lambda_2\lambda_1\tau^3\frac{1}{3}(\lambda_1+\lambda_2+\lambda_1\lambda_2\tau)-(1-\frac{\tau^2\lambda_1\lambda_2}{2})^2-2(1-\frac{\tau^2\lambda_1\lambda_2}{2})(-2+\frac{\tau^2\lambda_1\lambda_2}{2})\right]}{(\lambda_1\lambda_2\tau+\lambda_2^2+\lambda_1^2)^4}+$$

$$+\frac{4\tau^2\lambda_1\lambda_2(1-\frac{\tau^2\lambda_1\lambda_2}{2})}{(\lambda_1\lambda_2\tau+\lambda_2^2+\lambda_1^2)^3}+\frac{2\tau^2\lambda_1^2\lambda_2^2}{(\lambda_1\lambda_2\tau+\lambda_2^2+\lambda_1^2)^2}+$$

$$+\lambda_1^2\cdot\lambda_2^2(\frac{-(-\frac{\tau^4\cdot\lambda_1\cdot\lambda_2}{12}(\lambda_1+\lambda_2+\tau\cdot\lambda_1\cdot\lambda_2)+\frac{\tau^3\cdot\lambda_1\cdot\lambda_2}{3}(1-\frac{\tau^2\cdot\lambda_1\cdot\lambda_2}{2})}{(\lambda_1+\lambda_1+\tau\cdot\lambda_1\cdot\lambda_2)^4}-$$

$$+\frac{-(-2+\tau^2\lambda_1\lambda_2)(\frac{\tau^3\lambda_1\lambda_2}{3}(\lambda_1+\lambda_2+\tau\lambda_1\lambda_2)+(1-\frac{\tau^2\lambda_1\lambda_2}{2})^2}{(\lambda_1+\lambda_1+\tau\cdot\lambda_1\cdot\lambda_2)^5}-$$

$$-\frac{\frac{1}{6}(1-\frac{\tau^2\lambda_1\lambda_2}{2})(-4\tau^3\lambda_1^2\lambda_2-4\tau^3\lambda_1\lambda_2^2+5\tau^4\lambda_1^2\lambda_2^2+36-36\tau^2\lambda_1\lambda_2)}{(\lambda_1+\lambda_1+\tau\cdot\lambda_1\cdot\lambda_2)^5}\mathrm{Dirac}(\mathrm{t}))-$$

$$-2\lambda_1^2\lambda_2^2\tau\frac{-\frac{\tau^3\lambda_1\lambda_2}{3}(\lambda_1+\lambda_2+\tau\lambda_1\lambda_2)-(1-\frac{\tau^2\lambda_1\lambda_2}{2})^2-2(-2+\tau^2\lambda_1\lambda_2)(1-\frac{\tau^2\lambda_1\lambda_2}{2})}{(\lambda_1+\lambda_1+\tau\cdot\lambda_1\cdot\lambda_2)^4}\mathrm{Dirac}(\mathrm{t})-$$

$$-\frac{4\lambda_1^2\lambda_2^2\tau^2(1-\frac{\tau^2\lambda_1\lambda_2}{2})}{(\lambda_1+\lambda_1+\tau\cdot\lambda_1\cdot\lambda_2)^3}\mathrm{Dirac}(\mathrm{t})-\frac{4}{3}\frac{\lambda_1^2\lambda_2^2\tau^3}{(\lambda_1+\lambda_1+\tau\cdot\lambda_1\cdot\lambda_2)^2}\mathrm{Dirac}(\mathrm{t}).$$

Формула згортки другого порядку функції розподілу ВВ α у перетвореннях Лапласа виглядає так:

$$F^{*2}(s)=\frac{1}{s}\left(\frac{\lambda_1\cdot\lambda_2\cdot e^{-s\tau}}{(\lambda_1+s)(\lambda_2+s)}\right)^2. \qquad (18)$$

Оригінал (18):

$$F^{*2}(t)=\lambda_2^2\lambda_1^2\Phi(t-2\tau)(-\frac{2\cdot e^{-\lambda_1(t-2\tau)}}{3\lambda_2\lambda_1^2-3\lambda_1\lambda_2^2+\lambda_2^3-\lambda_1^3}+\frac{(t-2\tau)\cdot e^{-\lambda_1(t-2\tau)}}{-2\lambda_1\lambda_2^2+\lambda_2^2+\lambda_1^2}+$$

$$+\frac{2\cdot e^{-\lambda_2(t-2\tau)}}{3\lambda_2\lambda_1^2-3\lambda_1\lambda_2^2+\lambda_2^3-\lambda_1^3}+\frac{(t-2\tau)\cdot e^{-\lambda_2(t-2\tau)}}{-2\lambda_1\lambda_2^2+\lambda_2^2+\lambda_1^2}).$$

Аналогічно визначено, що:

$$F^{*3}(t)=\lambda_2^3\lambda_1^3\Phi(t-3\tau)(\frac{6\cdot e^{-\lambda_1(t-3\tau)}}{\lambda_2^{\,5}-5\lambda_1\lambda_2^{\,4}+10\lambda_1^{\,2}\lambda_2^{\,3}-10\lambda_1^{\,3}\lambda_2^{\,2}-\lambda_1^{\,5}+5\lambda_2\lambda_1^{\,4}}-$$

$$-\frac{3(t-3\tau)e^{-\lambda_1(t-3\tau)}}{\lambda_2^{\,4}-4\lambda_1\lambda_2^{\,3}+6\lambda_1^{\,2}\lambda_2^{\,2}+\lambda_1^{\,5}-4\lambda_2\lambda_1^{\,3}}+\frac{1}{2}\frac{(t-3\tau)^2e^{-\lambda_1(t-3\tau)}}{\lambda_2^{\,3}-3\lambda_1\lambda_2^{\,3}+3\lambda_1^{\,3}\lambda_2-\lambda_1^{\,3}}-$$

$$-\frac{6\cdot e^{-\lambda_2(t-3\tau)}}{\lambda_2^{\,5}-5\lambda_1\lambda_2^{\,4}+10\lambda_1^{\,2}\lambda_2^{\,3}-10\lambda_1^{\,3}\lambda_2^{\,2}-\lambda_1^{\,5}+5\lambda_2\lambda_1^{\,4}}-$$

$$-\frac{3(t-3\tau)e^{-\lambda_2(t-3\tau)}}{\lambda_2^{\,4}-4\lambda_1\lambda_2^{\,3}+6\lambda_1^{\,2}\lambda_2^{\,2}+\lambda_1^{\,5}-4\lambda_2\lambda_1^{\,3}}-\frac{1}{2}\frac{(t-3\tau)^2e^{-\lambda_2(t-3\tau)}}{\lambda_2^{\,3}-3\lambda_1\lambda_2^{\,3}+3\lambda_1^{\,3}\lambda_2-\lambda_1^{\,3}};$$

$$f^{*2}(t)=\lambda_2^2\cdot\lambda_1^2\Phi(t-2\tau)\Bigg[\frac{-2\cdot e^{-\lambda_1(t-2\tau)}}{3\lambda_1^{\,2}\lambda_2-3\lambda_2^{\,2}\lambda_1-\lambda_1^{\,3}+\lambda_2^3}+(t-2\tau)\frac{e^{-\lambda_1(t-2\tau)}}{-2\lambda_2\lambda_1+\lambda_1^{\,2}+\lambda_2^2}+$$

$$+\frac{2\cdot e^{-\lambda_2(t-2\tau)}}{3\lambda_1^{\,2}\lambda_2-3\lambda_2^{\,2}\lambda_1-\lambda_1^{\,3}+\lambda_2^3}+\frac{(t-2\tau)\cdot e^{-\lambda_2(t-2\tau)}}{-2\lambda_2\lambda_1+\lambda_1^{\,2}+\lambda_2^2};$$

$$f^{*3}(t)=\lambda_2^3\lambda_1^3\Phi(t-3\tau)(\frac{6\cdot e^{-\lambda_1(t-3\tau)}}{(\lambda_2-\lambda_1)^5}-\frac{3\cdot(t-3\tau)\cdot e^{-\lambda_1(t-3\tau)}}{(\lambda_2-\lambda_1)^4}+\frac{(t-3\tau)^2\cdot e^{-\lambda_1(t-3\tau)}}{2(\lambda_2-\lambda_1)^3}-$$

$$-\frac{6\cdot e^{-\lambda_2(t-3\tau)}}{(\lambda_2-\lambda_1)^5}-\frac{3\cdot(t-3\tau)\cdot e^{-\lambda_2(t-3\tau)}}{(\lambda_2-\lambda_1)^4}+\frac{(t-3\tau)^2\cdot e^{-\lambda_2(t-3\tau)}}{2(\lambda_2-\lambda_1)^3}).$$

Отже, знайдено аналітичні вирази для одержання функцій розподілу часу роботи ГВС з урахуванням відмов, відновлень і часу переналагоджень при апроксимації реальних законів розподілу відомими, у тому числі функції відновлення, згортки функцій другого і третього порядків. Для апроксимації реальних законів розподілу використовувалися такі закони: узагальнений Ерланга другого порядку, узагальнений Ерланга другого порядку із зсувом, експонентний, експонентний із зсувом. Причому ці закони розподілу ВВ дозволяють апроксимувати дуже широкий клас реальних процесів. Отримані результати дозволяють спростити дальше використання на практиці розроблених математичних моделей ГВС при визначенні продуктивності, надійності, частки втрат часу на переналагодження і відмову та ін., а також при розробці програмного забезпечення для автоматизації процесу математичного моделювання.

The analytical expressions for obtaining cumulative distribution functions of random times variables circumscribing operation of the floppy industrial system in view of refusals, time adjustment for cases of real laws approximating are defined.

Література

1. Копп В.Я., Чуб О.П., Обжерин Ю.Е. Математическая модель оценки влияния переналадок и отказов на производительность ГПС мелкосерийного производства// Оптимизация производственных процессов: Сб. науч. тр./ Севастоп. гос. техн. ун-т, 1999. - Вып.1.- С. 39-45.
2. Копп В.Я., Чуб О.П., Обжерин Ю.Е., Шипилов И.Ю. Анализ суперпозиции случайных процессов при описании функционирования различных структур ГПС// Оптимизация производственных процессов: Сб. науч. тр./ Севастоп. гос. техн. ун-т, 1999. - Вып.1.- С. 87-91.
3. Чуб О.П., Копп В.Я. Статистическая оценка параметров автоматизированных производственных систем переналаживаемого производства // Оптимизация производственных процессов: Сб. науч. тр./ Севастоп. гос. техн. ун-т, 2000. - Вып.3.- С. 89-94.
4. Копп В.Я., Чуб О.П., Обжерин Ю.Е, Карпов М.П. Статистическая оценка параметров гибких автоматизированных систем в мелкосерийном производстве // Оптимизация производственных процессов. - Севастополь: Севастоп. гос. техн. ун-т. - 1999. - Вып.2. - С. 36-39.
5. Байхельт Ф., Франкен П. Надежность и техническое обслуживание. Математический подход/ Пер. с нем. - М.: Радио и связь, 1988. - 392 с.: ил.
6. Корн Г., Корн Т. Справочник по математике для научных работников и инженеров: Определения, теоремы, формулы/ Пер. с англ. - М.: Наука, 1973. - 832 с.: ил.
7. Феллер В. Введение в теорию вероятностей и ее приложения. В 2-х томах / Пер. с англ. - М.: Мир, 1984.

Одержано 16.09.2001 р.