*УДК 519. 711*

**В.Ловейкін[1], докт. техн. наук; Ю.Човнюк[2], канд.техн.наук**

*[1] Київський національний університет будівництва і архітектури,*

*[2] Вища школа економіки та ділової адміністрації "АЖІО-Коледж", Київ*

# ЗАСТОСУВАННЯ МЕТОДУ ІНТЕГРАЛЬНИХ РІВНЯНЬ ДЛЯ ОПТИМАЛЬНОГО ПОЗИЦІЙНОГО КЕРУВАННЯ МЕХАНІЗМАМИ ПІДЙОМУ ВАНТАЖІВ КРАНІВ ТА РОБОТІВ-МАНІПУЛЯТОРІВ: СИСТЕМИ З СИМЕТРИЧНИМИ ОБМЕЖУВАЧАМИ РУХУ

*Розглянута задача позиційного керування механізмом підйому вантажів вантажопідйомних кранів та роботів-маніпуляторів. Для оптимізації даного виду керування, у випадку використання симетричних обмежувачів руху, використані методи інтегральних рівняннь і періодичні функції Гріна 2 роду.*

Як правило, якість роботи механізмів підйому вантажів вантажопідйомних кранів та роботів-маніпуляторів характеризує ціла низка вимог щодо руху певних точок системи.

У [1,2] перелічені основні обмеження, котрі слід приймати до уваги при конструюванні керованих механізмів (у т.ч. підйому вантажів). При цьому у ряді випадків з метою досягнення оптимальних параметрів, що описують режим руху як механізму, так і самого вантажу, слід розглядати систему: "вантаж-канат-механізм підйому вантажу", - як таку, що має розподілені параметри.

Так, програмоване позиційне керування, що реалізується у різноманітних транспортуючих пристроях, в тому числі й у механізмах підйому вантажів вантажопідйомних кранів та роботів-маніпуляторів, повинне забезпечувати переміщення виконуючого елементу у задану точку за фіксований (або мінімальний) час. Інакше кажучи, у системах з декількома ступенями вільності закон руху всіх елементів повинен визначатися рухом виконуючого елементу. При проектуванні оптимальних систем підйому вантажів (режимів роботи їх двигунів, приводів), захищених від коливань вантажів (та їх розгойдувань), намагаються мінімізувати переміщення чи прискорення деяких характерних точок об'єкту; структура самого об'єкту (безпосередньо механізму підйому вантажів) може бути задана, наприклад, експериментальними характеристиками (динамічними податливостями на певних частотах).

Таким чином, якість керованої системи характеризується рухом деяких точок, число котрих зазвичай менше числа ступенів вільності системи. З іншої сторони, основні труднощі обчислень при розв'язку задач оптимального керування коливаннями пов'язані з високим порядком рівнянь руху керованих систем (підйому вантажів). За традиційної постановки задач керування періодичними рухами динаміка системи описується диференціальними рівняннями, а умови періодичності можуть розглядатись як додаткові співвідношення, що зв'язують значення узагальнених координат і швидкостей на початку і в кінці періоду руху (вантажу). Необхідною умовою оптимальності залишається принцип максимуму, який сформульований безпосередньо для періодичних задач [3].

Така постановка нічим не відрізняється від традиційної задачі мінімізації функціоналу й вимагає розв'язку системи рівнянь принципу максимуму, у котрій крайові/граничні умови мають вид умов періодичності. При цьому у задачі керування системою (підйому вантажів) з $n$ ступенями вільності руху необхідно розв'язувати $4n$ рівнянь принципу максимуму незалежно від того, які узагальнені координати входять у функціонал й обмеження задачі.

Разом з тим можливий інший спосіб опису періодичних рухів вантажу, не пов'язаний із традиційним записом диференціальних рівнянь руху, який дозволяє відділити рівняння руху за однією чи декількома узагальненими координатами. Якщо система має лінійну частину (як правило, у механічних керованих системах підйому вантажів ця умова завжди виконується), то рух системи можна описувати інтегральними рівняннями періодичного руху [4-6], ядра котрих визначаються лінійною частиною системи рівнянь. Цей метод особливо ефективний у задачах оптимального керування, якщо обмеження та функціонал задачі залежать від траєкторії однієї характерної точки чи виконуючого ланцюга. При цьому часто вдається виділити одне інтегральне рівняння періодичного руху (вантажу) за координатою, що цікавить дослідника, незалежно від ступенів свободи системи, й звести задачу оптимального управління всім механізмом підйому вантажу у цілому до мінімізації функціоналу з обмеженнями у вигляді інтегральних рівнянь.

Мета даної роботи полягає у застосуванні методу інтегральних рівнянь для розв'язку типових задач оптимального позиційного управління механізмами підйому вантажів вантажопідйомних кранів та роботів-маніпуляторів за умови періодичних рухів самих вантажів.

Для сучасних вантажопідйомних кранів та роботів-маніпуляторів типовою є наступна постановка задачі: рух (системи в цілому або вантажу, що підіймається) формується під впливом управлінь, що синтезовані за певними законами, а зовнішні впливи грають роль збурюючих факторів. Для побудови програмних рухів виконуючих механізмів зазвичай слугує саме програмне керування, яке задається як функція часу.

Програмне керування застосовується й у всіляких транспортуючих механізмах, у тому числі й у маніпуляторах. Саме тут необхідно здійснювати керування, яке слугує для переміщення системи з одного положення в інше (звідси й назва – позиційне керування).

Нижче обмежимось однією з типових задач позиційного керування. Вважатимемо, що програма руху передбачає повернення системи (механізму підйому вантажу) у вихідне положення та багатократне повторення таких циклів. Такі типи рухів є також типовими у будівельній справі, у процедурах навантаження/розвантаження вантажів, а також для роботів-маніпуляторів, котрі використовуються у конвеєрному виробництві. Різноманітні постановки задач оптимального позиційного керування, наприклад, маніпуляторами, здійснені у [7-12].

Зрозуміло, що такий рух механізму підйому вантажу (МПВ) можна розглядати як періодичний, а кожний цикл – як рух на протязі одного періоду. Тривалість циклу, як правило, не задана й визначається з вимог швидкодії при фіксованих початковому й кінцевому положеннях виконуючого елементу МПВ. Положення (у просторі) проміжних ланцюгів МПВ на початку й у кінці періоду руху повинні бути узгоджені з положенням виконуючого елементу.

Розглянемо одну з задач організації руху елементів МПВ за циклом. Нехай рух точок транспортуючої системи, яка цікавить дослідника, описується рівняннями типу:

$$x_j = l^j(p)u, \quad j = 1,2,\ldots,m, \tag{1}$$

де $l^j(p) = m^j(p)/D(p)$ – оператори динамічних податливостей елементів, зведені до точки прикладання єдиного керуючого впливу $u(t)$; $x_j(t)$ – переміщення точок системи (МПВ).

Нехай система (надалі під цим терміном розуміємо МПВ) здійснює переміщення з положення $x_j = -\Delta_j$ у положення $x_j = \Delta_j$ й назад з гасінням швидкості у початковий й кінцевий моменти: $\dot{x}_j = v_j = 0$ при $x_j = \pm\Delta_j$. Це – спрощена постановка задачі про рух МПВ вантажопідйомних кранів чи багатоланцюгових роботів-маніпуляторів, бо зазвичай при досягненні кінцевих точок транспортуюча система зупиняється; тривалість у часі зупинки зумовлена технологією процесу (наприклад, будівельної справи). Крім того, у точках $x_j = \pm\Delta_j$ відбувається розвантаження чи завантаження системи, тобто її динамічні характеристики при русі у прямому чи зворотному напрямку відрізняються. Виключаючи із розгляду тривалість у часі зупинки, нехтуючи зміною динамічних характеристик та враховуючи антисиметричний характер руху, записуємо рівняння руху системи у формі [6]:

$$x_j(t) = \int_0^{T/2} \chi_2{}^j(t-s)\cdot u(s)ds,\ 0 < t < \frac{T}{2}. \qquad (2)$$

Тут $\chi_2{}^j$ – періодична функція Гріна другого роду. Рівняння (2) описує рух системи на першому інтервалі часу, при $0<t<T/2$, й може бути аналітично продовжене на другий інтервал, $T/2<t<T$, з урахуванням умов $x(t+T/2)=-x(t)$, $u(t+T/2)=-u(t)$, де $T$ - період руху системи. Тоді функціонал швидкодії можна представити у вигляді:

$$\Phi(u) = \int_0^{T/2} dt \Rightarrow min. \qquad (3)$$

Граничні умови, які фіксують початок та кінець інтервалу, мають вид:

$$\begin{cases} x_j(T/2) = -x_j(0) = \int_0^{T/2} \chi_2{}^j(T/2-s)\cdot u(s)ds = \Delta_j, \\ v_j(T/2) = -v_j(0) = -\int_0^{T/2} \chi_{2s}{}^j(T/2-s)\cdot u(s)ds = 0. \end{cases} \qquad (4)$$

Побудуємо керування $u(t)$, $|u| \le U$, яке переводить систему із початкового положення у кінцеве за найменший час. Включаючи ізопериметричні обмеження (4) у функціонал задачі, отримаємо:

$$\Phi(u) = \int_0^{T/2} \left\{ 1 + \sum_{j=1}^{m} \left[ \lambda^j \cdot \chi_2{}^j(T/2-s) + \mu^j \cdot \chi_{2s}{}^j(T/2-s) \right] u(s) \right\} ds. \qquad (5)$$

Задача, таким чином, зводиться до побудови управління *u(s)* МПВ, яке мінімізує функціонал (5) при умові (4). При цьому рівняння руху (2) не включають у число обмежень задачі.

У зв'язку з існуванням принципу максимуму отримаємо:

$$u(s) = U_0 \cdot sgn\left[ \sum_{j=1}^{m} \chi^j \cdot \chi_2{}^j\left(\frac{T}{2}-s\right) + \mu^j \cdot \chi_{2s}{}^j\left(\frac{T}{2}-s\right) \right]. \qquad (6)$$

Далі, для визначення коефіцієнтів $\mu^j, \lambda^j$, які фіксують точки перемикання, і періоду $T$ слугують рівняння (4) разом із умовою (3.22) [6]. Вирази (6) значно спрощуються, якщо обмеження накладаються тільки на рух одного виконуючого елементу МПВ ($j = 1$), а початкові положення та швидкості інших ланцюгів системи встановлюються у відповідності із умовами оптимальності та рівняннями (2). Тоді:

$$u = U_0 \cdot sgn\left[ \lambda^1 \cdot \chi_2{}^1\left(\frac{T}{2}-s\right) + \mu^1 \cdot \chi_{2s}{}^1\left(\frac{T}{2}-s\right) \right]. \qquad (7)$$

Якщо (7) підставити у (4), отримаємо:

$$v_1\left(\frac{T}{2}\right) = -U_0 \cdot \int_0^{T/2} \chi_{2s}{}^1\left(\frac{T}{2}-s\right)\cdot sgn\left[\lambda^1 \cdot \chi_2{}^1\left(\frac{T}{2}-s\right)+\mu^1 \cdot \chi_{2s}{}^1\left(\frac{T}{2}-s\right)\right]ds = 0. \qquad (8)$$

Звідси $\mu^1 = 0$, а:

$$u(s) = U_0 \cdot sgn(\lambda^1)\cdot sgn\left[\chi_2{}^1(T/2-s)\right]. \qquad (9)$$

Таким чином,

$$x_1(T/2) = U_0 \cdot \int_0^{T/2} \left|\chi_2{}^1\left(\frac{T}{2}-s\right)\right| ds \cdot sgn(\lambda^1) = \Delta_1 > 0. \qquad (10)$$

Із останнього співвідношення випливає, що $\lambda^1 > 0$ й період $T$ визначається рівнянням:

$$U_0 \cdot \int_0^{T/2} \left|\chi_2{}^1(t)\right| dt = \Delta. \qquad (11)$$

Умова (3.22) [6] може слугувати для обчислення $\lambda^1$. Координати й швидкості інших точок МПВ у моменти початку та закінчення процесу визначаються співвідношеннями:

$$\left\{ x_j(T/2) = U_0 \cdot \int_0^{T/2} \chi_2{}^j(T/2-s)\cdot sgn\left[\chi_2{}^1(T/2-s)\right]ds,\ x_j(0) = -x_j(T/2), \right. \qquad (12)$$

$$\left\{ v_j(T/2) = -U_0 \cdot \int_0^{T/2} \chi_{2s}{}^j(T/2-s)\cdot sgn\left[\chi_2{}^1(T/2-s)\right]ds,\ v_j(0) = -v_j(T/2). \right. \qquad (13)$$

Розглянемо приклад: управління найпростішою системою (МПВ) позиціювання (Рис. 1).

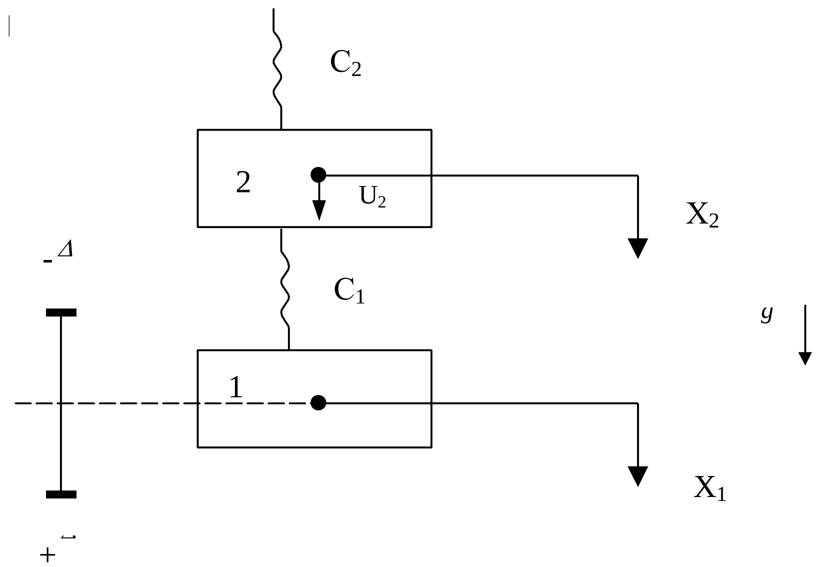


Рис. 1. Схема до розрахунку переміщення вантажу механізмом підйому.

Керуючий вплив у МПВ $u_2(t)$, $|u_2| \le U_2$, прикладений до ланцюга 2, який з'єднується пружнім зв'язком з виконуючим елементом 1 (вантажем). Розглядаючи кожний ланцюг як тверде тіло і нехтуючи властивостями двигуна (приводу), записуємо рівняння руху системи (МПВ) у вигляді:

$$\begin{cases} m_2 \cdot \ddot{x}_2 + c_2 \cdot x_2 + c_1 \cdot (x_2 - x_1) = u_2, \\ m_1 \cdot \ddot{x}_1 + c_1 \cdot (x_1 - x_2) = 0. \end{cases} \qquad (14)$$

Тут $m_1, m_2$ – маси ланцюгів МПВ, $c_1, c_2$ – жорсткості пружних елементів (канатів), $x_1, x_2$ – координати центрів мас ланцюгів, які відраховуються від положення рівноваги. Нехай виконуючий елемент (вантаж) здійснює зворотно-поступальний рух між двома симетрично розміщеними обмежувачами із координатами $x_1 = \pm\Delta$ (у будівельній справі це можуть бути, відповідно, горизонт фундаменту будівлі та її найвища точка на даний момент часу у процесі зведення споруди). При цьому МПВ входить і виходить із "обмежувача" з нульовою швидкістю $\dot{x}_1 = 0$ при $x_1 = \pm\Delta$ (крапка над $x_1$ означає, як завжди, диференціювання по часу t).

Виключаючи із рівнянь (14) змінну $x_2$, отримаємо:

$$\begin{cases} x_1 = l^1(p)u,\ l^1(p) = \gamma_1^{\,2} \cdot \Delta^{-1}(p), \\ \Delta(p) = (p^2 + \gamma_1^{\,2}) \cdot (p^2 + \gamma^2 + \gamma_2^{\,2}) - \gamma^2 \cdot \gamma_1^{\,2}, \\ \gamma_1^{\,2} = c_1 / m_1,\ \gamma_2^{\,2} = c_2 / m_2,\ \gamma^2 = c_2 / m_1,\ u = u_2 / m_2. \end{cases} \tag{15}$$

Періодична функція Гріна другого роду має для розглядуваного випадку наступний вид [6]:

$$\chi_2(t) = \beta_m \cdot \sum_{s=1}^{n} \frac{\prod_{q=1}^{m}(\gamma_q^{\,2} - \Omega_s^{\,2})}{2\Omega_s \cdot \prod_{r=1, r\neq s}^{n} {}^*(\Omega_r^{\,2} - \Omega_s^{\,2})} \cdot \frac{\sin[\Omega_s \cdot (t - T/4)]}{\cos[\Omega_s \cdot T/4]},\ 0 < t < \frac{T}{4}, \tag{16}$$

де $\beta_m -$ нормуючий коефіцієнт. Відповідно до даної задачі маємо:

$$\chi_2^{\,1}(t) = \frac{\gamma_1^{\,2}}{(\Omega_2^{\,2} - \Omega_1^{\,2})} \cdot \left[ \frac{1}{2\Omega_1} \cdot \frac{\sin[\Omega_1 \cdot (t - T/4)]}{\cos(\Omega_1 \cdot T/4)} - \frac{1}{2\Omega_2} \cdot \frac{\sin[\Omega_2 \cdot (t - T/4)]}{\cos(\Omega_2 \cdot T/4)} \right], \tag{17}$$

де $p = \pm i \cdot \Omega_1,\ \pm i \cdot \Omega_2 -$ корені характеристичного рівняння $\Delta(p) = 0,\ \Omega_1 < \Omega_2,\ i = \sqrt{-1}.$ Зрозуміло, що у системі (МПВ), яка є оптимальною за швидкодією, частота руху $\omega$ повинна бути вищою максимальної власної частоти системи (МПВ) $\Omega_2$ :

$$\omega > \Omega_2,\ T = 2 \cdot \pi / \omega < 2 \cdot \pi / \Omega_2. \tag{18}$$

Чим меншою є потужність двигуна МПВ ($U_2$), тим ближчим буде рух до резонансного, з частотою, яка лише трохи більша за $\Omega_2$.

Аналогічні висновки справедливі й для консервативних (внутрішнім та зовнішнім тертям МПВ нехтуємо) систем (МПВ) з будь-яким числом ступенів свободи руху. Нехай $\Omega_{1,2} < \omega$, тоді функція $\chi_2^{\,1}(T/2 - t) = -\chi_2^{\,1}(t)$ має єдиний корінь $t = T/4$ й оптимальне управління МПВ має (Рис. 2) одну точку перемикання (для реверсу руху):

$$u(t) = \begin{cases} U_0,\ 0 < t < T/4, \\ -U_0,\ T/4 < t < T/2,\ U_0 = U_2 / m_2. \end{cases} \tag{19}$$

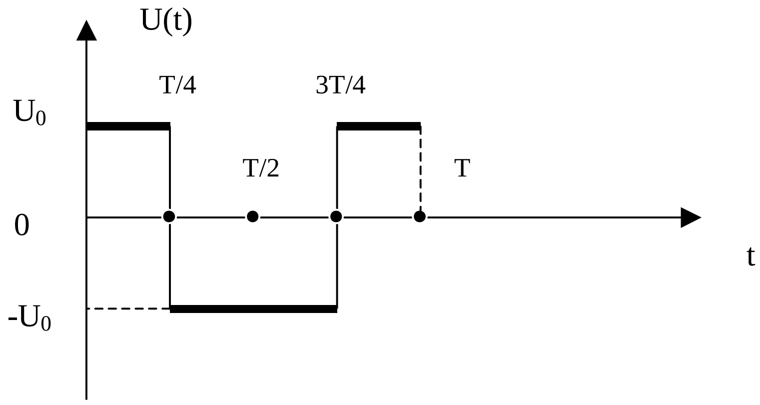


Рис. 2. Схема оптимального управління механізмом підйому вантажу.

Використовуючи (17) з (11) маємо рівняння для визначення періоду $T$ руху МПВ:

$$\frac{\gamma_1^{\;2}\cdot U_0}{(\Omega_2^{\;2}-\Omega_1^{\;2})}\cdot\left[\frac{1-cos(\Omega_1 T/4)}{\Omega_1^{\;2}\cdot cos(\Omega_1 T/4)}-\frac{1-cos(\Omega_2 T/4)}{\Omega_2^{\;2}\cdot cos(\Omega_2 T/4)}\right]=\Delta. \qquad (20)$$

Визначивши період $T$, необхідно перевірити умову (18) й встановити, чи достатня потужність двигуна МПВ для реалізації режиму руху із бажаним періодом.

Початкові та кінцеві положення виконуючого елементу 1 (вантажу) задані умовами контакту з "обмежувачем" руху, а на рух ведучого ланцюга 2 обмеження не накладаються. Разом з тим, щоб у системі реалізувався $T$ - періодичний режим, початкове положення та швидкість ланцюга 2 повинні бути обрані у відповідності до умов періодичності та узгоджені з рухом ланцюга 1.

Виходячи з системи (14), рух ведучого ланцюга 2 описується рівнянням:

$$x_2 = l^2(p)u,\; l^2(p)=\Delta^{-1}(p)\cdot(p^2+\gamma_1^{\;2})u, \qquad (21)$$

де $\Delta(p)-$ той самий вираз, що і у (15). Тоді:

$$\chi_2^{\;2}(t)=\frac{1}{(\Omega_2^{\;2}-\Omega_1^{\;2})}\cdot\left[\frac{(\gamma_1^{\;2}-\Omega_1^{\;2})}{2\cdot\Omega_1^{\;2}}\cdot\frac{sin[\Omega_1(t-T/4)]}{cos[\Omega_1 T/4]}-\frac{\gamma_1^{\;2}-\Omega_2^{\;2}}{2\cdot\Omega_2^{\;2}}\cdot\frac{sin[\Omega_2(t-T/4)]}{cos[\Omega_2 T/4]}\right]. \qquad (22)$$

Використовуючи (22) у (13), отримаємо:

$$v_2(0)=-v_2(T/2)=0,\; x_2(0)=-x_2(T/2), \qquad (23)$$

$$x_2(T/2)=\frac{U_0}{(\Omega_2^{\;2}-\Omega_1^{\;2})}\cdot\left[\frac{\gamma_1^{\;2}-\Omega_1^{\;2}}{\Omega_1^{\;2}}\cdot\frac{1-cos(\Omega_1 T/4)}{cos(\Omega_1 T/4)}-\frac{\gamma_1^{\;2}-\Omega_2^{\;2}}{\Omega_2^{\;2}}\cdot\frac{1-cos(\Omega_2 T/4)}{cos(\Omega_2 T/4)}\right]. \qquad (24)$$

Умови (23), (24) визначають початкове та кінцеве положення ланцюга 2 МПВ (Рис. 1), необхідні для реалізації оптимального $T$ - періодичного режиму руху.

*The problem of position control for the lifting gear of cranes and robots-manipulators is developed. One may use the method of integral equations and periodic Green's functions of the 2nd kind for the organization of such control for the case of so-called symmetric motion restrictors.*

## Література

1. Вейц В.Л., Коловский М.З., Кочура А.Е. Динамика управляемых машинных агрегатов. – М.: Наука, 1984.-352с.
2. Бутковский А.Г. Теория оптимального управления системами с распределенными параметрами. – М.: Наука, 1965. – 320с.
3. Gilbert E.G. Optimal periodic control: a general theory of necessary conditions// SIAM J. Control and Optimiz. – 1977. – V. 15, N5.- P.717-746.
4. Розенвассер Е.Н. Колебания нелинейных систем. –М.: Наука, 1969. – 576с.
5. Розенвассер Е.Н. Периодические нестационарные системы управления. – М.: Наука, 1973. – 512с.
6. Ковалева А.С. Управление колебательными и виброударными системами. –М.: Наука, 1990. – 256с.
7. Аветисян В.В., Акуленко Л.Д., Болотник Н.Н. Моделирование и оптимизация транспортных движений промышленного робота// Известия АН СССР. Техническая кибернетика. – 1986.-№3.
8. Аветисян В.В., Акуленко Л.Д., Болотник Н.Н. Оптимизация режимов управления манипуляционными роботами с учетом энергозатрат// Известия АН СССР. Техническая кибернетика. – 1986. - №3.
9. Акуленко Л.Д., Болотник Н.Н. Синтез оптимального управления транспортными движениями манипуляционных роботов// Известия АН СССР. Механика твердого тела. – 1986. - №4. –С. 21-29.
10. Бабицкий В.И., Ковалева А.С. Оптимальное управление в резонансных манипуляционных системах// Машиноведение. –1986.- №2.-С. 21-25.
11. Бабицкий В.И., Ковалева А.С. Управление резонансным манипулятором, минимизирующее затраты энергии// Известия АН СССР. Техническая кибернетика. – 1987.- №3. –С. 108-112.
12. Gommersal A., Farmer P. Robotics: The international bibliography with abstract. – New York, 1984. – 209p.

*Одержано 08.08.2001 р.*