УДК 681.3.06

О.Дуда

Тернопільський державний технічний університет імені Івана Пулюя

ВИЗНАЧЕННЯ МНОЖИНИ ЗАМКНЕНИХ КЛАСІВ, ДОСТАТНЬОЇ ДЛЯ ПОВНОЇ ХАРАКТЕРИСТИКИ КОЖНОЇ ЕЛЕМЕНТАРНОЇ ФУНКЦІЇ У НЕКЛАСИЧНІЙ ДВОЗНАЧНІЙ АЛГЕБРІ ЛОГІКИ

У статті аргументовано доведено, що чотирьох замкнених класів множини $\{T_{0s},\ T_{01s},\ T_{10s},\ T_{1s}\}$, з яких два замкнених класи T_{01s} і T_{10s} вперше запропонував автор статті, достатньо для повної характеристики окремо кожної з чотирнадцятьох елементарних функцій у некласичній двозначній алгебрі логіки (двозначній алгебрі логіки з урахуванням середовища реалізації).

Умовні позначення

$f(X,Q) \in \{0;\ 1\}$ - функція некласичної двозначної алгебри логіки, в якій:

1) $Q \in \{0;\ 1\}$ - середовище її реалізації;

2) $X = \{x_i\}$, де $x_i \in \{0;\ 1\}$ та $i = 1,\ 2,\ ...,\ n$ - вихідний алфавіт n змінних (аргументів);

$P_2(n, Q)$ - система, що містить усі функції некласичної двозначної алгебри логіки над змінними множини X;

перелік елементарних функцій некласичної двозначної алгебри логіки:

1) $Q * \lrcorner x_1$ і $Q * \neg x_1$ - функції *Повторення* і *Заперечення*, для яких $n = 1$;

2) $Q*(x_1 \rightarrow x_2)$, $Q*(x_1 \leftarrow x_2)$, $Q*(x_1 \not\rightarrow x_2)$ і $Q*(x_1 \not\leftarrow x_2)$ - відповідні функції *Імплікація*, "*Обернена імплікація*", *Антиімплікація* і "*Обернена антиімплікація*", для яких $n = 2$;

3) $Q * \coprod_{i=1}^{n} x_i$ і $Q * \prod_{i=1}^{n} x_i$ - функції "*Константа 0"* і "*Константа 1*", для яких $n \geq 1$;

4) $Q^{*}\overset{n}{\underset{i=1}{\wedge}} x_i$, $Q^{*}\overset{n}{\underset{i=1}{\vee}} x_i$, $Q^{*}\overset{n}{\underset{i=1}{\downarrow}} x_i$, $Q^{*}\overset{n}{\underset{i=1}{\mathrm{I}}} x_i$, $Q^{*}\overset{n}{\underset{i=1}{\leftarrow\!\mapsto}} x_i$ і $Q^{*}\overset{n}{\underset{i=1}{\leftrightarrow}} x_i$ - відповідні функції *Кон'юнкція*, *Диз'юнкція*, "*Стрілка Пірса*", "*Штрих Шефера*", *Антиеквівалентність* і *Еквівалентність,* для яких $n \geq 2$,

причому їх 14, а дійсність кожної з них підтверджена технічним розв'язком в обчислювальній техніці;

T_{0s}, T_{1s}, S_s, M_s, T_{01s} і T_{10s} - замкнені класи у некласичній двозначній алгебрі логіки.

У результаті досліджень у серії робіт [1-10] з некласичної двозначної алгебри логіки (двозначної алгебри логіки з урахуванням середовища реалізації) і їх порівняння з класичною двозначною алгеброю логіки з [11-14] доведено, що не можна нехтувати середовищем реалізації двозначної алгебри логіки при теоретичному зображенні і практичному використанні булевих функцій. При цьому в [4] доведено, що в некласичній двозначній алгебрі логіки елементарних функцій є чотирнадцять. Для їх повної характеристики достатньо, як у [7] - чотирьох замкнених класів множини $\{T_{0s}$, T_{1s}, S_s, $M_s\}$, а як у [9] - навіть і трьох замкнених класів мінімальної множини $\{T_{0s}$, T_{1s}, $S_s\}$ (табл. 1 і 2, де символ "+" означає, що елементарна функція належить класові, а символ "-" – елементарна функція не належить класові). Однак при використанні цих множин замкнених класів повна характеристика деяких елементарних функцій виконується групами. Зокрема, при використанні множини замкнених класів $\{T_{0s}$, T_{1s}, S_s, $M_s\}$ (табл. 1) є такі групи елементарних функцій: $Q^{*}(x_1 \rightarrow x_2)$, $Q^{*}(x_1 \leftarrow x_2)$ і $Q^{*}\overset{n}{\underset{i=1}{\leftrightarrow}} x_i$; $Q^{*}\overset{n}{\underset{i=1}{\wedge}} x_i$ і $Q^{*}\overset{n}{\underset{i=1}{\vee}} x_i$; $Q^{*}(x_1 \nrightarrow x_2)$, $Q^{*}(x_1 \nleftarrow x_2)$ і $Q^{*}\overset{n}{\underset{i=1}{\leftarrow\!\mapsto}} x_i$; $Q^{*}\overset{n}{\underset{i=1}{\downarrow}} x_i$ і $Q^{*}\overset{n}{\underset{i=1}{\mathrm{I}}} x_i$, а при використанні мінімальної множини замкнених класів $\{T_{0s}$, T_{1s}, $S_s\}$

Таблиця 1

Комбінації належності елементарних функцій некласичної двозначної алгебри логіки до замкнених класів множини $\{T_{0s}$, T_{1s}, S_s, $M_s\}$

№ пп	Класи				Функції
	T_{0s}	T_{1s}	S_s	M_s	
1	+	+	+	+	$Q^{*}\lrcorner x_1$
2	-	-	+	-	$Q^{*}\neg x_1$
3	+	-	-	+	$Q^{*}\coprod_{i=1}^{n} x_i$
4	-	+	-	+	$Q^{*}\prod_{i=1}^{n} x_i$
5	-	+	-	-	$Q^{*}(x_1 \rightarrow x_2)$, $Q^{*}(x_1 \leftarrow x_2)$, $Q^{*}\overset{n}{\underset{i=1}{\leftrightarrow}} x_i$
6	+	+	-	+	$Q^{*}\overset{n}{\underset{i=1}{\wedge}} x_i$, $Q^{*}\overset{n}{\underset{i=1}{\vee}} x_i$
7	+	-	-	-	$Q^{*}(x_1 \nrightarrow x_2)$, $Q^{*}(x_1 \nleftarrow x_2)$, $Q^{*}\overset{n}{\underset{i=1}{\leftarrow\!\mapsto}} x_i$
8	-	-	-	-	$Q^{*}\overset{n}{\underset{i=1}{\downarrow}} x_i$, $Q^{*}\overset{n}{\underset{i=1}{\mathrm{I}}} x_i$

Таблиця 2

Комбінації належності елементарних функцій некласичної двозначної алгебри логіки до замкнених класів мінімальної множини $\{T_{0s}, T_{1s}, S_s\}$

№ пп	*Класи*			Функції
	T_{0s}	T_{1s}	S_s	
1	+	+	+	$Q^* \lrcorner x_1$
2	-	-	+	$Q^* \neg x_1$
3	-	+	-	$Q^*(x_1 \to x_2)$, $Q^*(x_1 \leftarrow x_2)$, $Q^* \underset{i=1}{\overset{n}{\leftrightarrow}} x_i$, $Q^* \prod_{i=1}^{n} x_i$
4	+	+	-	$Q^* \underset{i=1}{\overset{n}{\wedge}} x_i$, $Q^* \underset{i=1}{\overset{n}{\vee}} x_i$
5	+	-	-	$Q^*(x_1 \not\rightarrow x_2)$, $Q^*(x_1 \not\leftarrow x_2)$, $Q^* \underset{i=1}{\overset{n}{\longleftarrow\!\!\mapsto}} x_i$, $Q^* \coprod_{i=1}^{n} x_i$
6	-	-	-	$Q^* \underset{i=1}{\overset{n}{\downarrow}} x_i$, $Q^* \underset{i=1}{\overset{n}{\mathrm{I}}} x_i$

(табл. 2) - такі групи елементарних функцій: $Q^*(x_1 \to x_2)$, $Q^*(x_1 \leftarrow x_2)$, $Q^* \underset{i=1}{\overset{n}{\leftrightarrow}} x_i$ і $Q^* \prod_{i=1}^{n} x_i$; $Q^* \underset{i=1}{\overset{n}{\wedge}} x_i$ і $Q^* \underset{i=1}{\overset{n}{\vee}} x_i$; $Q^*(x_1 \not\rightarrow x_2)$, $Q^*(x_1 \not\leftarrow x_2)$, $Q^* \underset{i=1}{\overset{n}{\longleftarrow\!\!\mapsto}} x_i$ і $Q^* \coprod_{i=1}^{n} x_i$; $Q^* \underset{i=1}{\overset{n}{\downarrow}} x_i$ і $Q^* \underset{i=1}{\overset{n}{\mathrm{I}}} x_i$. Але при цьому виникає запитання: яка ж множина замкнених класів потрібна в некласичній двозначній алгебрі логіки для повної характеристики окремо кожної з чотирнадцятьох елементарних функцій?

Метою статті є відповідь на це запитання.

У табл. 1 і 2 подано увесь перелік елементарних функцій некласичної двозначної алгебри логіки. При цьому для кожної з елементарних функцій визначено її належність до класів з множини $\{T_{0s}, T_{1s}, S_s, M_s\}$ (табл. 1) і класів з мінімальної множини $\{T_{0s}, T_{1s}, S_s\}$ (табл. 2). Проаналізуємо доцільність і результати використання замкнених класів множини $\{T_{0s}, T_{1s}, S_s, M_s\}$ у табл. 1 і замкнених класів мінімальної множини $\{T_{0s}, T_{1s}, S_s\}$ у табл. 2, а далі визначимо потрібну множину замкнених класів для повної характеристики окремо кожної з чотирнадцятьох елементарних функцій некласичної двозначної алгебри логіки.

Аналіз табл. 1 і 2. Кількість елементарних функцій у некласичній двозначній алгебрі логіки 14 [4]. Тому для повної характеристики окремо кожної з них найоптимальніший варіант - це використання деякої множини з чотирьох замкнених класів ($2^3 < 14 < 2^4$). Множина $\{T_{0s}, T_{1s}, S_s, M_s\}$ (табл. 1) хоч і складається з чотирьох замкнених класів, але не забезпечує, як і мінімальна множина $\{T_{0s}, T_{1s}, S_s\}$ (табл. 2) з трьох замкнених класів, повної характеристики окремо кожної з цих чотирнадцятьох елементарних функцій. Причиною такого незабезпечення є, на наш погляд, неоднакова кількість елементарних функцій некласичної двозначної алгебри логіки, що належать і не належать до деяких з замкнених класів з множини $\{T_{0s}, T_{1s}, S_s, M_s\}$. Зокрема, кількість елементарних функцій, що належать і не належать до кожного із замкнених класів T_{0s} і T_{1s}, однакова, а котрі належать і не належать до кожного із замкнених класів S_s і M_s -

неоднакова. Так, замкненому класові T_{0s} належить сім елементарних функцій $f(X,1)$ ($Q^*\lrcorner x_1$, $Q^*(x_1 \nrightarrow x_2)$, $Q^*(x_1 \nleftarrow x_2)$, $Q^*\coprod_{i=1}^{n} x_i$, $Q^*\overset{n}{\underset{i=1}{\leftarrow\!\mapsto}} x_i$, $Q^*\overset{n}{\underset{i=1}{\wedge}} x_i$ і $Q^*\overset{n}{\underset{i=1}{\vee}} x_i$), для яких властива рівність $f(\widetilde{0},0,1) = 0$, і не належить також сім елементарних функцій $f(X,1)$ ($Q^*\neg x_1$, $Q^*(x_1 \to x_2)$, $Q^*(x_1 \leftarrow x_2)$, $Q^*\prod_{i=1}^{n} x_i$, $Q^*\overset{n}{\underset{i=1}{\mathrm{I}}} x_i$, $Q^*\overset{n}{\underset{i=1}{\downarrow}} x_i$ і $Q^*\overset{n}{\underset{i=1}{\leftrightarrow}} x_i$), для яких $f(\widetilde{0},0,1) \neq 0$, а замкненому класові T_{1s} також належить сім елементарних функцій $f(X,1)$ ($Q^*\lrcorner x_1$, $Q^*(x_1 \leftarrow x_2)$, $Q^*(x_1 \to x_2)$, $Q^*\prod_{i=1}^{n} x_i$, $Q^*\overset{n}{\underset{i=1}{\leftrightarrow}} x_i$, $Q^*\overset{n}{\underset{i=1}{\wedge}} x_i$ і $Q^*\overset{n}{\underset{i=1}{\vee}} x_i$), для яких властива рівність $f(\widetilde{1},1,1) = 1$, і не належить сім елементарних функцій $f(X,1)$ ($Q^*\neg x_1$, $Q^*(x_1 \nrightarrow x_2)$, $Q^*(x_1 \nleftarrow x_2)$ $Q^*\coprod_{i=1}^{n} x_i$, $Q^*\overset{n}{\underset{i=1}{\leftarrow\!\mapsto}} x_i$, $Q^*\overset{n}{\underset{i=1}{\mathrm{I}}} x_i$ і $Q^*\overset{n}{\underset{i=1}{\downarrow}} x_i$), для яких $f(\widetilde{1},1,1) \neq 1$, де $\widetilde{0} = 0,0,...,0,0$ і $\widetilde{1} = 1,1,...,1,1$ - це набори значень змінних $x_1, x_2, ..., x_{n-2}, x_{n-1}$ множини $X = \{x_i\}$, $x_i \in \{0;\ 1\}$ та $i = 1,\ 2,\ ...,\ n$, а значить, $\widetilde{0},0 = 0,0,...,0,0,0$ і $\widetilde{1},1 = 1,1,...,1,1,1$ - це набори значень змінних $x_1, x_2, ..., x_{n-2}, x_{n-1}, x_n$ цієї ж множини. Замкненому класові S_s належить дві елементарні функції $f(x_1,1)$ ($Q^*\lrcorner x_1$ і $Q^*\neg x_1$), для яких властива тотожність $f(x_1,1) = \neg f(\neg x_1,1)$, і не належить дванадцять елементарних функцій $f(X,1)$ ($Q^*\coprod_{i=1}^{n} x_i$, $Q^*\overset{n}{\underset{i=1}{\leftarrow\!\mapsto}} x_i$, $Q^*\overset{n}{\underset{i=1}{\mathrm{I}}} x_i$, $Q^*\overset{n}{\underset{i=1}{\downarrow}} x_i$, $Q^*\prod_{i=1}^{n} x_i$, $Q^*\overset{n}{\underset{i=1}{\leftrightarrow}} x_i$, $Q^*\overset{n}{\underset{i=1}{\wedge}} x_i$, $Q^*\overset{n}{\underset{i=1}{\vee}} x_i$, $Q^*(x_1 \to x_2)$, $Q^*(x_1 \leftarrow x_2)$, $Q^*(x_1 \nrightarrow x_2)$ і $Q^*(x_1 \nleftarrow x_2)$), для яких не властива тотожність $f(x_1, x_2, ..., x_n, 1) = \neg f(\neg x_1, \neg x_2, ..., \neg x_n, 1)$, а замкненому класові M_s належить п'ять елементарних функцій $f(X,1)$ ($Q^*\coprod_{i=1}^{n} x_i$, $Q^*\prod_{i=1}^{n} x_i$, $Q^*\overset{n}{\underset{i=1}{\wedge}} x_i$ і $Q^*\overset{n}{\underset{i=1}{\vee}} x_i$, $Q^*\lrcorner x_1$), для яких виконується умова $f(\widetilde{\beta},1) \geq f(\widetilde{\alpha},1)$ при $\widetilde{\beta} > \widetilde{\alpha}$ і не належить дев'ять елементарних функцій $f(X,1)$ ($Q^*\neg x_1$, $Q^*(x_1 \to x_2)$, $Q^*(x_1 \leftarrow x_2)$, $Q^*(x_1 \nrightarrow x_2)$, $Q^*(x_1 \nleftarrow x_2)$, $Q^*\overset{n}{\underset{i=1}{\leftrightarrow}} x_i$, $Q^*\overset{n}{\underset{i=1}{\leftarrow\!\mapsto}} x_i$, $Q^*\overset{n}{\underset{i=1}{\downarrow}} x_i$ і $Q^*\overset{n}{\underset{i=1}{\mathrm{I}}} x_i$), для яких не виконується умова $f(\widetilde{\beta},1) \geq f(\widetilde{\alpha},1)$ при $\widetilde{\beta} > \widetilde{\alpha}$, де $\widetilde{\beta}$ і $\widetilde{\alpha}$ - два набори довжини n значень з множини X.

Таким чином, замкнені класи T_{0s}, T_{1s} характеризують конкретні значення елементарних функцій при відповідних наборах змінних, і кожному з них однакова кількість елементарних функцій належить і не належить. Тому замкнені класи T_{0s} і T_{1s} обов'язково повинні використовуватися при дослідженні окремо кожної з елементарних функцій некласичної двозначної алгебри логіки. Поряд з цим, замкнені класи S_s і M_s не характеризують конкретних числових значень елементарних функцій при відповідних наборах змінних. а характеризують тільки зміни значень елементарних функцій залежно від зміни значень наборів змінних у цих функціях. Крім цього, замкнений клас S_s, як доведено у [7, 9], характеризує ще й кількість змінних в елементарних функціях ($n = 1$, $n \geq 1$ і $n \geq 2$). Однак неоднакова кількість елементарних функцій належить і не належить кожному із замкнених класів S_s і M_s, а тому ці класи

Таблиця 3

Належність усіх елементарних функцій некласичної двозначної алгебри логіки до замкнених класів множини $\{T_{0s}, T_{01s}, T_{10s}, T_{1s}\}$

№ пп	Функція	Класи			
		T_{0s}	T_{01s}	T_{10s}	T_{1s}
1	$Q^* {\leftarrow\!\rfloor} x_1$	+	-	-	+
2	$Q^* \neg x_1$	-	+	+	-
3	$Q^* \coprod_{i=1}^{n} x_i$	+	+	-	-
4	$Q^* \prod_{i=1}^{n} x_i$	-	-	+	+
5	$Q^*(x_1 \not\rightarrow x_2)$	+	+	+	-
6	$Q^*(x_1 \not\leftarrow x_2)$	+	-	-	-
7	$Q^*(x_1 \rightarrow x_2)$	-	-	-	+
8	$Q^*(x_1 \leftarrow x_2)$	-	+	+	+
9	$Q^* \mathop{\leftrightarrow}_{i=1}^{n} x_i$	-	+	-	+
10	$Q^* \mathop{\leftarrow\!\!\mapsto}_{i=1}^{n} x_i$	+	-	+	-
11	$Q^* \mathop{\wedge}_{i=1}^{n} x_i$	+	+	-	+
12	$Q^* \mathop{\vee}_{i=1}^{n} x_i$	+	-	+	+
13	$Q^* \mathop{\mathrm{I}}_{i=1}^{n} x_i$	-	-	+	-
14	$Q^* \mathop{\downarrow}_{i=1}^{n} x_i$	-	+	-	-

Таблиця 4

Комбінації належності елементарних функцій некласичної двозначної алгебри логіки до замкнених класів множини $\{T_{0s}, T_{01s}, T_{10s}, T_{1s}\}$

№ пп	Класи				Функція
	T_{0s}	T_{01s}	T_{10s}	T_{1s}	
1	-	+	-	-	$Q^* \mathop{\downarrow}_{i=1}^{n} x_i$
2	-	+	-	+	$Q^* \mathop{\leftrightarrow}_{i=1}^{n} x_i$
3	-	-	+	-	$Q^* \mathop{\mathrm{I}}_{i=1}^{n} x_i$
4	+	+	-	+	$Q^* \mathop{\wedge}_{i=1}^{n} x_i$
5	+	-	+	-	$Q^* \mathop{\leftarrow\!\!\mapsto}_{i=1}^{n} x_i$
6	+	-	+	+	$Q^* \mathop{\vee}_{i=1}^{n} x_i$
7	-	-	+	+	$Q^* \prod_{i=1}^{n} x_i$
8	+	+	-	-	$Q^* \coprod_{i=1}^{n} x_i$
9	-	-	-	+	$Q^*(x_1 \rightarrow x_2)$
10	-	+	+	+	$Q^*(x_1 \leftarrow x_2)$
11	+	+	+	-	$Q^*(x_1 \not\rightarrow x_2)$
12	+	-	-	-	$Q^*(x_1 \not\leftarrow x_2)$
13	+	+	+	+	$Q^* {\leftarrow\!\rfloor} x_1$
14	-	-	-	-	$Q^* \neg x_1$
15	+	-	-	+	$Q^* {\leftarrow\!\rfloor} x_2$
16	-	+	+	-	$Q^* \neg x_2$

не повинні використовуватися при дослідженні окремо кожної з елементарних функцій некласичної двозначної апгебри логіки. **Аналіз табл. 1 і 2 завершено**.

У зв'язку з тим, що для повної характеристики окремо кожної з чотирнадцятьох елементарних функцій некласичної двозначної алгебри логіки найоптимальнішим варіантом було б використання деякої множини з чотирьох замкнених класів, до якої, як уже сказано, мають обов'язково належати замкнені класи T_{0s} і T_{1s}, впровадимо до цієї множини ще й нові, вперше запропоновані автором статті, два замкнених класи T_{01s} і T_{10s}. які описують таким визначенням.

Визначення. *Для функції* $f(X,1)$ *якщо* $f(\widetilde{0},1,1) = 0$, *то* $f(X,1) \in T_{01s}$, *а якщо* $f(\widetilde{0},1,1) = 1$, *то* $f(X,1) \notin T_{01s}$, *і якщо* $f(\widetilde{1},0,1) = 1$, *то* $f(X,1) \in T_{10s}$, *а якщо* $f(\widetilde{1},0,1) = 0$, *то* $f(X,1) \notin T_{10s}$, *де* $\widetilde{0} = 0,0,...,0,0$ *і* $\widetilde{1} = 1,1,...,1,1$ *- це набори значень змінних*

$x_1, x_2, ..., x_{n-2}, x_{n-1}$ *множини* $X = \{x_i\}$, $x_i \in \{0;\ 1\}$ *та* $i = 1,\ 2,\ ...,\ n$, *а отже* $\widetilde{0},1 = 0,0,...,0,0,1$ *і* $\widetilde{1},0 = 1,1,...,1,1,0$ - *це набори значень змінних* $x_1, x_2, ..., x_{n-2}, x_{n-1}, x_n$ *цієї ж множини.*

З даного визначення випливає (табл. 3):

1. Елементарні функції $Q^*\coprod\limits_{i=1}^{n} x_i$, $Q^*\overset{n}{\underset{i=1}{\leftrightarrow}} x_i$, $Q^*\overset{n}{\underset{i=1}{\wedge}} x_i$, $Q^*\overset{n}{\underset{i=1}{\downarrow}} x_i$, $Q^*(x_1 \not\to x_2)$, $Q^*(x_1 \leftarrow x_2)$ і $Q^*\neg x_1$, належать до класу T_{01s}, а елементарні функції $Q^*(x_1 \not\leftarrow x_2)$, $Q^*(x_1 \to x_2)$, $Q^*\lrcorner x_1$, $Q^*\prod\limits_{i=1}^{n} x_i$, $Q^*\overset{n}{\underset{i=1}{\leftarrow\!\mapsto}} x_i$, $Q^*\overset{n}{\underset{i=1}{\vee}} x_i$ і $Q^*\overset{n}{\underset{i=1}{\mathrm{I}}} x_i$ не належать до цього класу, тобто кількість елементарних функцій некласичної двозначної алгебри логіки, котрі належать і не належать до класу T_{01s}, однакова і дорівнює семи.

2. Елементарні функції $Q^*\prod\limits_{i=1}^{n} x_i$, $Q^*\overset{n}{\underset{i=1}{\leftarrow\!\mapsto}} x_i$, $Q^*\overset{n}{\underset{i=1}{\vee}} x_i$, $Q^*\overset{n}{\underset{i=1}{\mathrm{I}}} x_i$, $Q^*(x_1 \not\to x_2)$, $Q^*(x_1 \leftarrow x_2)$ і $Q^*\neg x_1$ належать до класу T_{10s}, а елементарні функції $Q^*(x_1 \not\leftarrow x_2)$, $Q^*(x_1 \to x_2)$, $Q^*\lrcorner x_1$, $Q^*\coprod\limits_{i=1}^{n} x_i$, $Q^*\overset{n}{\underset{i=1}{\leftrightarrow}} x_i$, $Q^*\overset{n}{\underset{i=1}{\wedge}} x_i$ і $Q^*\overset{n}{\underset{i=1}{\downarrow}} x_i$ не належать до цього класу, тобто кількість елементарних функцій некласичної двозначної алгебри логіки, котрі належать і не належать до класу T_{10s}, однакова і дорівнює семи.

Покажемо, що класи T_{01s} і T_{10s} - замкнені класи.

Для класу T_{01s}. Оскільки T_{01s} містить тотожну функцію, то для забезпечення замкненості T_{01s} досить показати, що функція $\Phi = f(f_1, ..., f_m, 1, 1)$ належить до T_{10s}, якщо f, f_1 …, f_m належать до класу T_{01s}. Останнє випливає із ланцюга рівностей

$$\Phi(0,...,0,1,1) = f(f_1(0,...,0,1,1),..., f_m(0,...,0,1,1),1,1) = f(0,...,0,1,1) = 0.$$

Для класу T_{10s} аналогічно. Зокрема, T_{10s} також містить тотожну функцію і для забезпечення замкненості T_{10s} розглядаємо функцію $\Phi = f(f_1, ..., f_m, 0, 1)$, котра належить до T_{10s} і в якій f, f_1 …, f_m також належать до класу T_{10s}. Тому тут властивий ланцюг рівностей

$$\Phi(1,...,1,0,1) = f(f_1(1,...,1,0,1),..., f_m(1,...,1,0,1),0,1) = f(1,...,1,0,1) = 1.$$

Але при використанні замкнених класів множини $\{T_{0s},\ T_{01s},\ T_{10s},\ T_{1s}\}$ виникає запитання: чи достатньо цієї множини замкнених класів для повної характеристики окремо кожної з чотирнадцятьох елементарних функцій некласичної двозначної алгебри логіки?

Визначення множини замнених класів, достатньої для повної характеристики окремо кожної з чотирнадцятьох елементарних функцій некласичної двозначної алгебри логіки, виконаємо згідно з однойменним методом, суть якого така:

1. Відповідно до множини замкнених класів $\{T_{0s},\ T_{01s},\ T_{10s},\ T_{1s}\}$, необхідної для повної характеристики окремо кожної з чотирнадцятьох елементарних функцій, визначаємо кількість можливих комбіінацій належності функцій до цих класів.

2. Відповідно до п.1 для кожної комбінації з'ясовуємо існування булевої функції з такою належністю до замкнених класів заданої множини.

3. У випадку існування функції визначаємо, є дана функція елементарною чи складною і можливу її назву.

4. Після виконання пп. 2 і 3 складаємо знайдений перелік булевих функцій.

5. Порівнюємо знайдений перелік булевих функцій з переліком елементарних функцій некласичної двозначної алгебри логіки.

6. Якщо знайдений перелік булевих функцій ідентичний перелікові елементарних функцій некласичної двозначної алгебри логіки, то випливає висновок, що заданої множини замкнених класів достатньо для повної характеристики окремо кожної з чотирнадцятьох елементарних функцій даної алгебри логіки, якщо ж ні, то заданої множини замкнених класів недостатньо для повної характеристики окремо кожної з елементарних функцій цієї алгебри логіки.

Згідно з цим методом визначимо, чи достатньо множини замкнених класів $\{T_{0s}$, T_{01s}, T_{10s}, $T_{1s}\}$ для повної характеристики окремо кожної з чотирнадцятьох елементарних функцій некласичної двозначної алгебри логіки.

Множини замкнених класів $\{T_{0s}, T_{01s}, T_{10s}, T_{1s}\}$ може бути достатньо для повної характеристики кожної з чотирнадцятьох елементарних функцій тільки тоді, коли за заданими належностями до класів вказаної множини можна визначити увесь поданий у табл. 3 перелік елементарних функцій некласичної двозначної алгебри логіки. Ця множина складається з чотирьої замкнених класів, до кожного з яких може належати або не належати відповідна булева функція f. При цьому можна утворити $1+\sum_{i=1}^{4} C_4^i = 16$ комбінацій належності булевих функцій до замкнених класів даної множини, де C_4^i - сполучення з 4 елементів по i, зокрема:

1. $f \notin \{T_{0s}, T_{01s}, T_{10s}, T_{1s}\}$.
2. $f \notin \{T_{0s}, T_{01s}, T_{10s}\}$ і $f \in T_{1s}$.
3. $f \notin \{T_{0s}, T_{01s}, T_{1s}\}$ і $f \in T_{10s}$.
4. $f \notin \{T_{0s}, T_{01s}\}$ і $f \in \{T_{10s}, T_{1s}\}$.
5. $f \notin \{T_{0s}, T_{10s}, T_{1s}\}$ і $f \in T_{01s}$.
6. $f \notin \{T_{0s}, T_{10s}\}$ і $f \in \{T_{01s}, T_{1s}\}$.
7. $f \notin \{T_{0s}, T_{1s}\}$ і $f \in \{T_{01s}, T_{10s}\}$.
8. $f \notin T_{0s}$ і $f \in \{T_{01s}, T_{10s}, T_{1s}\}$.
9. $f \in T_{0s}$ і $f \notin \{T_{01s}, T_{10s}, T_{1s}\}$.
10. $f \in \{T_{0s}, T_{1s}\}$ і $f \notin \{T_{01s}, T_{10s}\}$.
11. $f \in \{T_{0s}, T_{10s}\}$ і $f \notin \{T_{01s}, T_{1s}\}$.
12. $f \in \{T_{0s}, T_{10s}, T_{1s}\}$ і $f \notin T_{01s}$.
13. $f \in \{T_{0s}, T_{01s}\}$ і $f \notin \{T_{10s}, T_{1s}\}$.
14. $f \in \{T_{0s}, T_{01s}, T_{1s}\}$ і $f \notin T_{10s}$.
15. $f \in \{T_{0s}, T_{01s}, T_{10s}\}$ і $f \notin T_{1s}$.
16. $f \in \{T_{0s}, T_{01s}, T_{10s}, T_{1s}\}$.

З них необхідно виділити комбінації, при яких існують булеві функції, а також визначити назви цих функцій. Тут властиві такі твердження.

Твердження 1. *($\forall$ $n \geq 2$) множини X, де $X = \{x_i\}$, $x_i \in \{0;\ 1\}$ та $i = 1,\ 2,\ ...,$ n, якщо:*

а) $f \notin \{T_{0s}\ T_{10s}, T_{1s}\}$ *і* $f \in T_{01s}$, *то* $\exists\ f = Q * \overset{n}{\underset{i=1}{\downarrow}} x_i$;

б) $f \notin \{T_{0s}, T_{10s}\}$ *і* $f \in \{T_{01s}, T_{1s}\}$, *то* $\exists\ f = Q * \overset{n}{\underset{i=1}{\leftrightarrow}} x_i$;

в) $f \notin \{T_{0s}, T_{01s}, T_{1s}\}$ *і* $f \in T_{10s}$, *то* $\exists\ f = Q * \overset{n}{\underset{i=1}{\mathrm{I}}} x_i$;

г) $f \in \{T_{0s},\ T_{01s},\ T_{1s}\}$ *і* $f \notin T_{10s}$, *то* $\exists\ f = Q * \bigwedge_{i=1}^{n} x_i$;

д) $f \in \{T_{0s},\ T_{10s}\}$ *і* $f \notin \{T_{01s},\ T_{1s}\}$, *то* $\exists\ f = Q * \overset{n}{\underset{i=1}{\longleftrightarrow}} x_i$;

е) $f \in \{T_{0s},\ T_{10s},\ T_{1s}\}$ *і* $f \notin T_{01s}$, *то* $\exists\ f = Q * \bigvee_{i=1}^{n} x_i$.

Доведення. При $Q = 1$ ($\forall\ n > 1$) множини X має місце така група значень функції $f(X, Q)$:

$$\begin{array}{lll} 1.\ f(\widetilde{0},0,1) = 0, \text{ якщо } f \in T_{0s}. & 2.\ f(\widetilde{0},0,1) = 1, \text{ якщо } f \notin T_{0s}. & \\ 3.\ f(\widetilde{0},1,1) = 0, \text{ якщо } f \in T_{01s}. & 4.\ f(\widetilde{0},1,1) = 1, \text{ якщо } f \notin T_{01s}. & \\ 5.\ f(\widetilde{1},0,1) = 1, \text{ якщо } f \in T_{10s}. & 6.\ f(\widetilde{1},0,1) = 0, \text{ якщо } f \notin T_{10s}. & (1) \\ 7.\ f(\widetilde{1},1,1) = 1, \text{ якщо } f \in T_{1s}. & 8.\ f(\widetilde{1},1,1) = 0, \text{ якщо } f \notin T_{1s}. & \end{array}$$

Тоді:

а) якщо $f \notin \{T_{0s}\ T_{10s},\ T_{1s}\}$ і $f \in T_{01s}$, то властиві значення функції $f(X,1)$ п. 2, 6, 8 і 3 групи (1), а тому при

$$n = 2 \text{ є набори значень змінних } x_1, x_2 = \{0{,}0;\ 0{,}1;\ 1{,}0;\ 1{,}1\} \qquad (2)$$

і значення функції $f(x_1, x_2, 1) = \{1;\ 0;\ 0;\ 0\}$. Але при цих наборах значень змінних і функції, при $Q = 1$ ($\exists\ Q * (x_1 \downarrow x_2) = \{1;\ 0;\ 0;\ 0\}$), причому значення цієї функції залежать від значень змінних x_1 і x_2. Тому $f(x_1, x_2, 1) = Q * (x_1 \downarrow x_2)$.

У зв'язку з тим, що ($\forall\ n \geq 2$) множини X ($\exists\ f = Q * \overset{n}{\underset{i=1}{\downarrow}} x_i$), $f \notin \{T_{0s}\ T_{10s},\ T_{1s}\}$ і $f \in T_{01s}$, то при $f \notin \{T_{0s}\ \ T_{10s},\ T_{1s}\}$ і $f \in T_{01s}$ для ($\forall\ n \geq 2$) множини X ($\exists$ $f = Q * \overset{n}{\underset{i=1}{\downarrow}} x_i$), де $x_i \in \{0;\ 1\}$;

б) аналогічно можна довести, що для множини X, де $X = \{x_i\}$, $x_i \in \{0;\ 1\}$ та $i = 1,\ 2,\ \ldots,\ n$, ($\forall\ n \geq 2$): якщо $f \notin \{T_{0s},\ T_{10s}\}$ і $f \in \{T_{01s},\ T_{1s}\}$, то ($\exists\ f = Q * \overset{n}{\underset{i=1}{\leftrightarrow}} x_i$); якщо $f \notin \{T_{0s},\ T_{01s},\ T_{1s}\}$ і $f \in T_{10s}$, то ($\exists\ f = Q * \overset{n}{\underset{i=1}{\mathrm{I}}} x_i$); якщо $f \in \{T_{0s},\ T_{01s},\ T_{1s}\}$ і $f \notin T_{10s}$, то ($\exists\ f = Q * \bigwedge_{i=1}^{n} x_i$); якщо $f \in \{T_{0s},\ T_{10s}\}$ і $f \notin \{T_{01s},\ T_{1s}\}$, то ($\exists$ $f = Q * \overset{n}{\underset{i=1}{\longleftrightarrow}} x_i$), а якщо $f \in \{T_{0s},\ T_{10s},\ T_{1s}\}$ і $f \notin T_{01s}$, то ($\exists\ f = Q * \bigvee_{i=1}^{n} x_i$).

Твердження 1 доведено.

Твердження 2. *(*$\forall\ n \geq 1$*) множини* X*, де* $X = \{x_i\}$, $x_i \in \{0;\ 1\}$ *та* $i = 1,\ 2,\ \ldots,$ n*, якщо:*

а) $f \notin \{T_{0s},\ T_{01s}\}$ *і* $f \in \{T_{10s},\ T_{1s}\}$, *то* $\exists\ f = Q * \prod_{i=1}^{n} x_i$;

б) $f \in \{T_{0s},\ T_{01s}\}$ *і* $f \notin \{T_{10s},\ T_{1s}\}$, *то* $\exists\ f = Q * \coprod_{i=1}^{n} x_i$.

Доведення:

а) у випадку, коли $f \notin \{T_{0s},\ T_{01s}\}$ і $f \in \{T_{10s},\ T_{1s}\}$, то існують значення функції $f(X,1)$ п. 2, 4, 5 і 7 групи (1), а тому при (2) властиві значення функції $f(x_1, x_2, 1) = \{1;$

$1;\ 1;\ 1\}$. Але при цих наборах значень змінних і функції, при $Q=1$ ($\exists$ $Q^*(x_1 \prod x_2)=\{1;\ 1;\ 1;\ 1\}$), причому значення цієї функції не залежать від значень змінних x_1 і x_2. Тому функція $f(x_1,x_2,1)=Q^*(x_1 \prod x_2)$.

У зв'язку з тим, що ($\forall$ $n \geq 1$) множини X ($\exists$ $f=Q^*\prod_{i=1}^{n} x_i$), $f \notin \{T_{0s},\ T_{01s}\}$ і $f \in \{T_{10s},\ T_{1s}\}$, то при $f \notin \{T_{0s},\ T_{01s}\}$ і $f \in \{T_{10s},\ T_{1s}\}$ для ($\forall$ $n \geq 1$) множини X ($\exists$ $f=Q^*\prod_{i=1}^{n} x_i$), де $x_i \in \{0;\ 1\}$;

б) аналогічно можна довести, що при $f \in \{T_{0s},\ T_{01s}\}$ і $f \notin \{T_{10s},\ T_{1s}\}$ для ($\forall$ $n \geq 1$) множини X ($\exists$ $f=Q^*\coprod_{i=1}^{n} x_i$), де $x_i \in \{0;\ 1\}$.

Твердження 2 доведено.

Твердження 3. *Для змінних, наприклад,* x_1 *і* x_2, *де* $x_i \in \{0;\ 1\}$ *та* $i=1$ *і* 2, *якщо:*

а) $f \notin \{T_{0s},\ T_{01s},\ T_{10s}\}$ *і* $f \in T_{1s}$, *то* $\exists$ $f=Q^*(x_1 \to x_2)$;

б) $f \notin T_{0s}$ *і* $f \in \{T_{01s},\ T_{10s},\ T_{1s}\}$, *то* $\exists$ $f=Q^*(x_1 \leftarrow x_2)$;

в) $f \in \{T_{0s},\ T_{01s},\ T_{10s}\}$ *і* $f \notin T_{1s}$, *то* $\exists$ $f=Q^*(x_1 \not\to x_2)$;

г) $f \in T_{0s}$ *і* $f \notin \{T_{01s},\ T_{10s},\ T_{1s}\}$, *то* $\exists$ $f=Q^*(x_1 \not\leftarrow x_2)$.

Доведення:

а) якщо $f \notin \{T_{0s},\ T_{01s},\ T_{10s}\}$ і $f \in T_{1s}$, то є значення функції $f(X,1)$ п. 2, 4, 6 і 7 групи (1), а тому при (2) маємо значення функції $f(x_1,x_2,1)=\{1;\ 1;\ 0;\ 1\}$. Але при цих наборах значень змінних і функції, при $Q=1$ ($\exists$ $Q^*(x_1 \to x_2)=\{1;\ 1;\ 0;\ 1\}$), причому значення такої функції залежать від значень змінних x_1 і x_2. Тому функція $f(x_1,x_2,1)=Q^*(x_1 \to x_2)$.

Оскільки для множини X тільки при $n=2$ ($\exists$ $f=Q^*(x_1 \to x_2)$), $f \notin \{T_{0s},\ T_{01s},\ T_{10s}\}$ і $f \in T_{1s}$, то при $f \notin \{T_{0s},\ T_{01s},\ T_{10s}\}$ і $f \in T_{1s}$ для множини X при $n=2$ ($\exists$ $f=Q^*(x_1 \to x_2)$), де $x_i \in \{0;\ 1\}$;

б) аналогічно можна довести, що для множини X, де $X=\{x_i\}$, $x_i \in \{0;\ 1\}$ та $i=1,\ 2$: якщо $f \notin T_{0s}$ і $f \in \{T_{01s},\ T_{10s},\ T_{1s}\}$, то ($\exists$ $f=Q^*(x_1 \leftarrow x_2)$); якщо $f \in \{T_{0s},\ T_{01s},\ T_{10s}\}$ і $f \notin T_{1s}$, то ($\exists$ $f=Q^*(x_1 \not\to x_2)$), а якщо $f \in T_{0s}$ і $f \notin \{T_{01s},\ T_{10s},\ T_{1s}\}$, то ($\exists$ $f=Q^*(x_1 \not\leftarrow x_2)$).

Твердження 3 доведено.

Твердження 4. *Для змінної, наприклад,* x_1, *де* $x_1 \in \{0;\ 1\}$, *якщо:*

а) $f \in \{T_{0s},\ T_{01s},\ T_{10s},\ T_{1s}\}$, *то* $\exists$ $f=Q^* \lrcorner x_1$;

б) $f \notin \{T_{0s},\ T_{01s},\ T_{10s},\ T_{1s}\}$, *то* $\exists$ $f=Q^* \neg x_1$.

Доведення:

а) якщо $f \in \{T_{0s},\ T_{01s},\ T_{10s},\ T_{1s}\}$, то властиві значення функції $f(X,1)$ п. 1, 3, 5 і 7 групи (1), а тому при (2) є значення функції $f(x_1,x_2,1)=\{0;\ 0;\ 1;\ 1\}$. Але при цих наборах значень змінних і функції, при $Q=1$ ($\exists$ $Q^* \lrcorner x_1=\{0;\ 1\}$), причому значення цієї функції залежать тільки від значення змінної x_1 і не залежать від значення змінної x_2, внаслідок чого $n = 1$. Тому функція $f(x_1, x_2, 1) = f(x_1, 1) = Q^* \lrcorner x_1$.

Таким чином, при $f \in \{T_{0s},\ T_{01s},\ T_{10s},\ T_{1s}\}$ для, наприклад, змінної x_1 ($\exists$ $f = Q^* \lrcorner x_1$), де $x_1 \in \{0;\ 1\}$;

б) якщо $f \notin \{T_{0s},\ T_{01s},\ T_{10s},\ T_{1s}\}$, то отримуємо значення функції $f(X, 1)$ п. 2, 4, 6 і 8 групи (1), а тому при (2) маємо значення функції $f(x_1, x_2, 1) = \{1;\ 1;\ 0;\ 0\}$. Але при цих наборах значень змінних і функції, при $Q = 1$ ($\exists$ $Q^* \neg x_1 = \{1; 0\}$), причому значення цієї функції залежать тільки від значення змінної x_1 і не залежать від значення змінної x_2, внаслідок чого $n = 1$. Тому функція $f(x_1, x_2, 1) = f(x_1, 1) = Q^* \neg x_1$.

Отже, при $f \notin \{T_{0s},\ T_{01s},\ T_{10s},\ T_{1s}\}$ для, наприклад, змінної x_1 ($\exists$ $f = Q^* \neg x_1$), де $x_1 \in \{0;\ 1\}$.

Твердження 4 доведено.

Аналогічно твердженню 4 можна довести наступне твердження.

Твердження 5. *Для змінної, наприклад,* x_2, *де* $x_2 \in \{0;\ 1\}$, *якщо:*

а) $f \in \{T_{0s},\ T_{1s}\}$ *і* $f \notin \{T_{01s},\ T_{10s}\}$, *то* $\exists$ $f = Q^* \lrcorner x_2$;

б) $f \notin \{T_{0s},\ T_{1s}\}$ *і* $f \in \{T_{01s},\ T_{10s}\}$, *то* $\exists$ $f = Q^* \neg x_2$.

Таким чином, для кожної із 16-ьох розглянутих комбінацій належності булевих функцій до замкнених класів множини $\{T_{0s},\ T_{01s},\ T_{10s},\ T_{1s}\}$ існують булеві функції табл. 4. Ці функції є елементарними функціями некласичної двозначної алгебри логіки, зокрема функції $Q^* \neg x_1$, $Q^* \neg x_2$. $Q^*(x_1 \to x_2)$, $Q^*(x_1 \leftarrow x_2)$, $Q^*(x_1 \not\to x_2)$, $Q^* \lrcorner x_1$, $Q^* \overset{n}{\underset{i=1}{\wedge}} x_i$, $Q^* \overset{n}{\underset{i=1}{\vee}} x_i$, $Q^* \overset{n}{\underset{i=1}{\downarrow}} x_i$, $Q^* \overset{n}{\underset{i=1}{\mathrm{I}}} x_i$, $Q^* \coprod_{i=1}^{n} x_i$, $Q^* \prod_{i=1}^{n} x_i$, $Q^* \overset{n}{\underset{i=1}{\leftrightarrow}} x_i$, $Q^* \overset{n}{\underset{i=1}{\leftarrow\!\!\mapsto}} x_i$, $Q^*(x_1 \not\leftarrow x_2)$ і $Q^* \lrcorner x_2$. Перелік назв цих функцій ідентичний переліковi чотирнадцятьох елементарних функцій некласичної двозначної алгебри логіки, причому тут для відповідних змінних x_1 і x_2 функції $Q^* \neg x_1$ і $Q^* \neg x_2$ - це елементарна функція *Заперечення,* а функції $Q^* \lrcorner x_1$ і $Q^* \lrcorner x_2$ - це елементарна функція *Повторення*. Внаслідок цього, за належністю функцій до замкнених класів множини $\{T_{0s},\ T_{01s},\ T_{10s},\ T_{1s}\}$ визначається увесь перелік елементарних функцій такої алгебри логіки. Тому чотирьох замкнених класів множини $\{T_{0s},\ T_{01s},\ T_{10s},\ T_{1s}\}$ достатньо для повної характеристики окремо кожної з чотирнадцятьох елементарних функцій у некласичній двозначній алгебрі логіки.

Визначення множини замкнених класів, достатньої для повної характеристики окремо кожної з чотирнадцятьох елементарних функцій в некласичній двозначній алгебрі логіки, завершено.

Наслідок 2. Чотирьох замкнених класів множини $\{T_{0s},\ T_{01s},\ T_{10s},\ T_{1s}\}$ достатньо для повної характеристики окремо кожної з чотирнадцятьох елементарних функцій у некласичній двозначній алгебрі логіки.

Висновок

У некласичній двозначній алгебрі логіки (двозначній алгебрі логіки з урахуванням середовища реалізації) для повної характеристики окремо кожної з чотирнадцятьох елементарних функцій достатньо чотирьох замкнених класів множини $\{T_{0s},\ T_{01s},\ T_{10s},\ T_{1s}\}$.

In the article threre has been reasonably proved the fact that four closed-end classes of set $\{T_{0s}, T_{01s}, T_{10s}, T_{1s}\}$*, while two of closed-end classes* T_{01s} *and* T_{10s} *were firstly suggested by the author, are sufficient for complete characterictics of each of every fourteen elementary functions in non-classic two-digit logics algebra (two-digit logics algebra with taking into consideration of realization medium).*

Література

1. Дуда О.М., Дуда М.О. Змінні та функції в середовищі реалізації двозначної алгебри логіки // Вісник Тернопільського державного технічного університету імені Івана Пулюя. - 1999. – Том 4. - Число 1. – С. 62 - 69.
2. Дуда О.М., Дуда М.О., Бубняк М.М. Використання теорії про істотні та фіктивні змінні в булевих і лінійних функціях // Вісник Тернопільського державного технічного університету імені Івана Пулюя. - 1999. – Том 4. - Число 2. – С. 5 - 11.
3. Дуда М.О., Дуда О.М. Нетрадиційні підходи. Проблемна стаття. Проблема - сенсація! Дослідження причини неправильності однієї з головних теорем двозначної алгебри логіки – теореми Поста-Кузнєцова-Яблонського про функціональну повноту // Вісник Тернопільської академії народного господарства. - 2000. – Випуск 10. – С. 15 - 23.
4. Дуда О.М., Дуда М.О., Чирка М.І. Елементарні функції в некласичній двозначній алгебрі логіки // Вісник Чернівецького держуніверситету “Фізика. Електроніка”. - 2001. – №1. – С. 101 - 108.
5. Дуда М.О., Дуда О.М. Про доцільність використання в курсі "Дискретна математика" нової теорії про функціональну повноту // Використання персональних ЕОМ в навчальному процесі вищого навчального закладу: Тези другої української науково-методичної конференції. - Львів, 1993. – С. 49 - 51.
6. Дуда О.М. Практикум по вивченню електронних таблиць // Тези доповіді студентської наукової конференції, присвяченої 150-річчю від дня народження Івана Пулюя / Природничі та гуманітарні науки. Актуальні проблеми. - Тернопіль, 1995. – С. 190.
7. Дуда О.М., Дуда М.О., Чірка М.І., Ніконенко В.В. Визначення множини замкнених класів, що достатня для повної характеристики елементарних функцій в некласичній двозначній алгебрі логіки // Автоматика. Автоматизация. Электротехнические комплексы и системы. - 2000. - №1 (6). - С. 80 - 90.
8. Дуда О.М., Дуда М.О., Іващук Д.В. Теорема про функціональну повноту булевих систем у некласичній двозначній алгебрі логіки // Вісник Тернопільського державного технічного університету імені Івана Пулюя. - 2000. – Том 5. - №3. – С. 102 - 110.
9. Дуда О.М. Визначення мінімальної множини замкнених класів, достатньої для повної характеристики елементарних функцій у некласичній двозначній алгебрі логіки // Вісник Тернопільського державного технічного університету імені Івана Пулюя. - 2001. – Том 6. - №2. – С. 123 -132.
10. Дуда О.М. Теорема про необхідні і достатні умови функціональної повноти булевих систем в некласичній двозначній алгебрі логіки // Автоматика. Автоматизация. Электротехнические комплексы и системы. - 2001. - №1 (8). - С. 43 - 52.
11. Яблонский С.В. Введение в дискретную математику: Учебн. пособие для вузов. 2-е изд., перераб. и доп. – М.: Наука, 1986. - 384 с.
12. Цейтлін Г.О. Алгебра логіки та конструювання програм. Елементи дискретної математики. – Київ: Наукова думка, 1994. – 84 с.
13. Глушков В.М., Цейтлин Г.Е., Ющенко Е.А. Алгебра. Языки. Программирование. 3-е изд. (дополненное и переработанное). – Киев: Наук. думка, 1989. – 340 с.
14. Гаврилов Г.П. Функциональные системы дискретной математики: Текст лекций. - М.: Изд-во Моск. ун-та, 1985. - 40 с.

Одержано 15.05.2001 р.