

Міністерство освіти і науки України

Тернопільський національний технічний університет
імені Івана Пулюя

*Кафедра технічної механіки та
сільськогосподарських машин*

**ОПІР МАТЕРІАЛІВ
КОНКУРСНІ ЗАДАЧІ
з прикладами розв'язування
розтяг-стиск, кручення,
геометричні характеристики плоских
перетинів, складний опір, стійкість**

НАВЧАЛЬНИЙ ПОСІБНИК

Частина 2

для студентів спеціальностей

«Прикладна механіка», «Галузеве машинобудування»,
«Будівництво», «Автомобільний транспорт», «Агроінженерія»

Тернопіль
2023

УДК 620.10
Д 58

Автори:

Т.А. Довбуш, кандидат технічних наук, доцент кафедри технічної механіки та сільськогосподарських машин

Н.І. Хомик, кандидат технічних наук, доцент, доцент кафедри технічної механіки та сільськогосподарських машин

А.Д. Довбуш, старший викладач кафедри технічної механіки та сільськогосподарських машин

Рецензенти:

Ріпецький Є.Й., д.т.н., професор, професор кафедри геодезії та землеустрою Івано-Франківського національного технічного університету нафти і газу

Гевко І.Б., д.т.н., професор, професор кафедри автомобілів Тернопільського національного технічного університету імені Івана Пулюя

Розглянуто на засіданні кафедри технічної механіки та сільськогосподарських машин, протокол № 7 від 28.02.2023 р.

Схвалено й рекомендовано до друку та впровадження у навчальний процес на засіданні вченої ради ТНТУ імені Івана Пулюя, протокол № 4 від 24.04.2023 р.

Довбуш Т.А.

Д 58 Довбуш Т.А., Хомик Н.І., Довбуш А.Д. Опір матеріалів. Конкурсні задачі з прикладами розв'язування: навчальний посібник. Частина 2. Тернопіль: ФОП Паляниця В.М, 2023. 192 с.

Посібник розроблено для поглибленого вивчення дисципліни «Опір матеріалів» для студентів спеціальностей «Прикладна механіка», «Галузеве машинобудування», «Будівництво», «Автомобільний транспорт», «Агроінженерія».

Мета посібника – надати практичну допомогу студентам при вивченні окремих розділів дисципліни «Опір матеріалів» на основі конкурсних задач. У посібнику в короткій формі в кожному з розділів, а саме: розтяг-стиск, зсув і кручення; геометричні характеристики плоских перетинів; складний опір та стійкість центрально стиснених стрижнів, викладено основні поняття опору матеріалів. Наведено приклади розв'язування задач, а також задачі, призначені для самостійного розв'язування до кожного із цих розділів, які вибрані із завдань всеукраїнських олімпіад з опору матеріалів. Посібник рекомендований для підготовки талановитих студентів до участі в олімпіадах з опору матеріалів, може бути використаний для самостійної роботи студентів під час вивчення цієї дисципліни; наведені у ньому рекомендації можуть бути застосовані при виконанні індивідуальних творчих завдань з інженерних дисциплін.

© Довбуш Т. А.,
Хомик Н. І.,
Довбуш А. Д., 2023

ЗМІСТ

	стр.
ВСТУП	4
1. ОСНОВНІ ПОНЯТТЯ ОПОРУ МАТЕРІАЛІВ	5
2. ЦЕНТРАЛЬНИЙ РОЗТЯГ І СТИСК ПРЯМИХ СТРИЖНІВ	16
<i>ПРИКЛАДИ</i>	28
Задачі для самостійного розв'язування	53
3. ЗСУВ І КРУЧЕННЯ СТРИЖНІВ	59
<i>ПРИКЛАДИ</i>	66
Задачі для самостійного розв'язування.....	95
4. ГЕОМЕТРИЧНІ ХАРАКТЕРИСТИКИ ПЛОСКИХ ПЕРЕТИНІВ	100
<i>ПРИКЛАДИ</i>	104
Задачі для самостійного розв'язування.....	118
5. СКЛАДНИЙ ОПІР	122
<i>ПРИКЛАДИ</i>	131
Задачі для самостійного розв'язування.....	145
6. СТІЙКІСТЬ ЦЕНТРАЛЬНО– СТИСНЕНИХ СТРИЖНІВ	146
<i>ПРИКЛАДИ</i>	153
Задачі для самостійного розв'язування.....	160
7. КОМПЛЕКСНІ ЗАДАЧІ	161
<i>ПРИКЛАДИ</i>	161
Задачі для самостійного розв'язування.....	183
Перелік використаної і рекомендованої літератури.....	186
Додатки.....	188

ВСТУП

«Опір матеріалів» є однією із фундаментальних дисциплін для майбутніх інженерів-механіків та інженерів-будівельників. Він є основою для вивчення решти інженерних дисциплін, зокрема, будівельної механіки, деталей машин та інших.

Розроблений посібник є продовженням навчального посібника «Опір матеріалів. Конкурсні задачі, приклади розв'язування», який вийшов друком у 2020 році.

Студенти нашого закладу вищої освіти, починаючи із 1975 року, регулярно, до 2019 року, брали участь у Всеукраїнських олімпіадах з опору матеріалів. Ці олімпіади відбувалися у різних закладах вищої освіти (ЗВО), наприклад, у Харківському політехнічному інституті, Одеській державній академії будівництва та архітектури, Київському національному університеті будівництва та архітектури, Полтавському національному технічному університеті імені Юрія Кондратюка та інших ЗВО.

Результати участі в олімпіадах (Додатки А, Б, В, Д) залежать від ретельності підготовки учасників, яка пов'язана з їх працелюбністю та наполегливістю, а також від професійності викладання матеріалу.

Посібник розроблений з метою допомоги студентам в оволодінні методикою розв'язування нетипових, тобто конкурсних задач.

Посібник містить такі розділи: центральний розтяг і стиск прямих стрижнів, зсув і кручення стрижнів, геометричні характеристики плоских перетинів, складний опір, стійкість центрально-стиснених стрижнів. Окремо виділені комплексні задачі, які поєднують кілька видів деформації. Посібник структурно побудований так, що для зручності у підході до розв'язування задач на початку кожного розділу вміщені короткі теоретичні відомості, далі наведені приклади розв'язування олімпіадних задач до кожного з розділів із детальними роз'ясненнями та поетапними графічними побудовами, які розкривають суть задач, даючи уяву про явища та процеси, які відбуваються у стрижнях при різних видах навантажень та деформацій. Кожен розділ завершується підбіркою задач для самостійного розв'язування. Ці задачі взяті із запропонованих на олімпіадах з опору матеріалів у різні роки за весь період їх проведення (з 1975 р. до 2019 р.).

Автори вважають, що запропонований посібник дасть можливість кращим студентам ТНТУ відповідних спеціальностей спробувати свої сили у поглибленому вивченні опору матеріалів, заохотити їх до участі в університетській олімпіаді та у Всеукраїнській олімпіаді при відновленні її проведення.

1. ОСНОВНІ ПОНЯТТЯ ОПОРУ МАТЕРІАЛІВ

Задачі опору матеріалів і об'єкт вивчення

Розрахунок будь-якої деталі чи споруди, тобто визначення напружень, деформацій та переміщень здійснюють з допомогою **механіки твердого деформованого тіла**. Цей предмет поділяють на такі розділи: опір матеріалів, теорія пружності та будівельна механіка.

Опір матеріалів – наука про інженерні методи розрахунків на міцність, жорсткість і стійкість елементів машин і конструкцій.

Конструкції – усі матеріальні об'єкти техніки, їх частини й деталі.

Міцність – здатність матеріалу чи конструкції витримувати механічне навантаження не руйнуючись

$$p_{\max} \leq [p],$$

де p_{\max} – максимальне напруження;

$[p]$ – допустиме напруження.

Жорсткість – здатність конструкції та її елементів протидіяти пружним деформаціям, тобто здатність сприймати зовнішнє навантаження без зміни геометричних розмірів та форми

$$f_{\max} \leq [f],$$

де f_{\max} – максимальна деформація (переміщення);

$[f]$ – допустима деформація (переміщення).

Стійкість – здатність конструкції або її елементів зберігати під дією заданих сил початкову форму пружної рівноваги.

Мета курсу опір матеріалів:

а) навчитися за розрахунковою схемою правильно визначати вид деформації, на який працює деталь чи конструкція;

б) визначити найнебезпечніший перетин, попередньо побудувавши епюри внутрішніх силових факторів;

в) за відповідною умовою міцності чи жорсткості визначити розміри поперечного перетину, а в деяких задачах допустиме навантаження чи максимальні напруження, і виконати перевірку міцності.

Теорія пружності – це частина загальної науки про міцність, жорсткість і стійкість споруд. В опорі матеріалів виконують розрахунки в основному у стрижневих систем на основі спрощених допущень.

В теорії пружності використовують загальні гіпотези і для розробки методів розрахунку застосовують складніший математичний апарат. Це дозволяє отримати точніші розв'язки порівняно з опором матеріалів, а також розглядати задачі, які не можна розв'язати методами опору матеріалів (зокрема, розрахунок масивних тіл, пластинок і оболонок).

Об'єкти розрахунку в опорі матеріалів

Усі елементи машинобудівних і будівельних конструкцій можна звести до таких типових спрощених елементів: стрижні (бруси), диски, оболонки, пластини, масивні тіла.

Стрижень (брус) – тіло призматичної форми (рис. 1.1а), в якого один розмір (довжина) набагато перевищує два інших (поперечних) розміри.

Тонкостінні стрижні (швелери, кутники, двотаври) – тіла, в яких товщина стінки значно менша за габаритні розміри поперечного перетину.

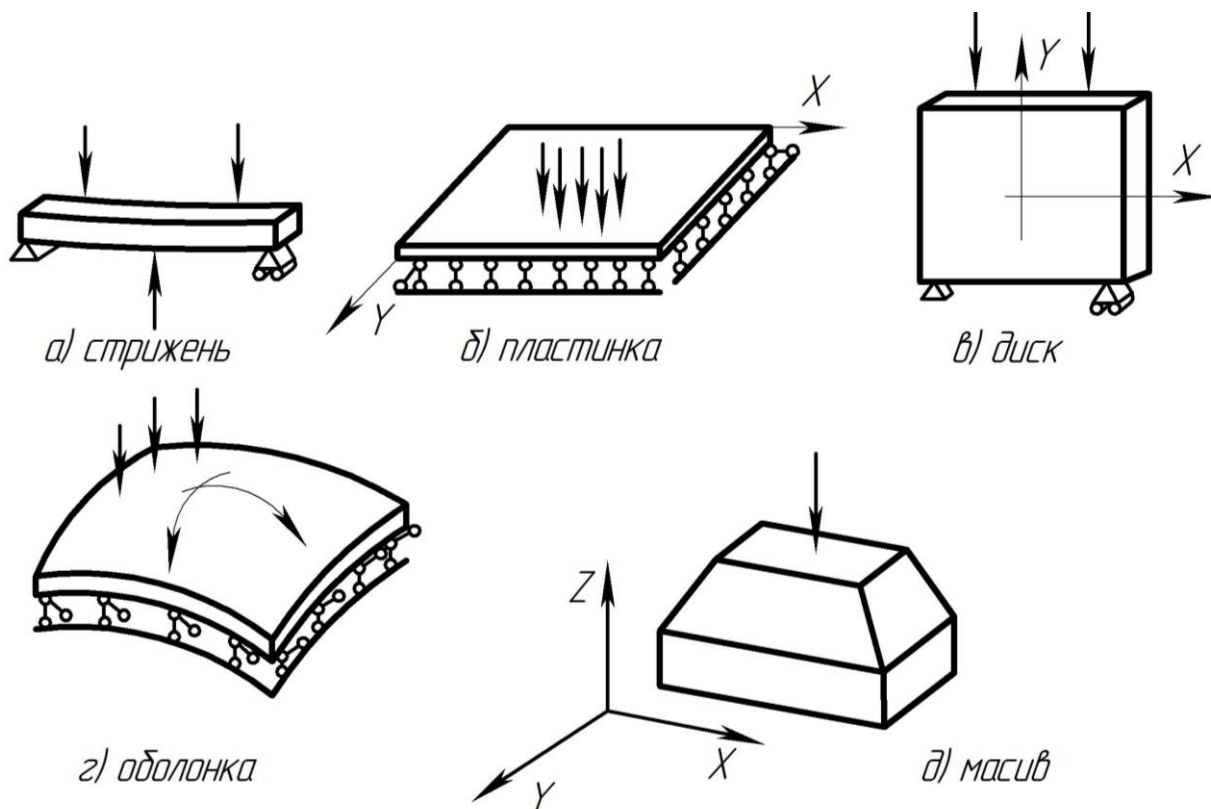


Рисунок 1.1

Приклади стрижнів: вали, осі, балки, труби, рейки, елементи криволінійної форми (гвинтові пружини, гаки, елементи ланцюгів).

Пластинка – призматичне (циліндричне) тіло (рис. 1.1б), в якого один розмір (товщина) набагато менший за два інших. До пластин відносять і диски (рис. 1.1в).

Приклади пластин: плоскі дніща й кришки резервуарів, апаратів хімічних виробництв, плити перекриттів.

Оболонка – тіло (рис. 1.1г), обмежене двома криволінійними поверхнями, відстань між якими (товщина) мала порівняно з іншими розмірами. Це пластинка з викривленою серединною поверхнею.

Приклади оболонки: стінки тонкостінних резервуарів, стінки котлів, куполи будівельних споруд, корпуси літаків, ракет, підводних човнів.

Масив (масивне тіло) – тіло (рисунок 1.1d), розміри якого в усіх (трьох) напрямках одного порядку. Приклади: блоки фундаментних споруд, підпирні стінки, основи потужних пресів і верстатів.

В опорі матеріалів розглядають стрижні, тобто тіла, що пролягають в одному напрямку, а в теорії пружності – складніші об'єкти, що пролягають у двох напрямках (рис. 1б, в, з) або в трьох (рис. 1d). Математичний апарат теорії пружності складніший, ніж в опорі матеріалів, тому що напружено-деформований стан таких тіл описують функціями двох або трьох змінних.

Основні гіпотези (допущення) і принципи

В опорі матеріалів використовують ряд допущень (гіпотез), які спрощують розрахунки. Ці гіпотези, підтверджені на практиці, тому їх можна використовувати під час розв'язування більшості задач.

Опір матеріалів (як і класична або лінійна теорія пружності) заснований на таких **гіпотезах**:

1. Матеріал конструкції є **суцільним**, тобто його властивості не залежать від форми і розмірів тіла і однакові у всіх його точках. (Ця гіпотеза не враховує дискретну структуру, зумовлену молекулярною будовою речовини і т.ін.). Суцільність передбачає відсутність розривів і пустот у процесі деформування.

2. Матеріал конструкції є **однорідним** (усі механічні властивості однакові у будь-якій точці тіла).

3. Матеріал конструкції є **ізотропним**, тобто усі його механічні властивості у всіх напрямках однакові (виняток дерево).

4. Матеріал конструкції має властивість **ідеальної лінійної пружності**, тобто повністю відновлювати свою форму і розміри після зняття навантаження (підкоряється закону Гука). Або деформація матеріалу конструкції в кожній точці прямо пропорційна напруженню у цій точці. Ця гіпотеза вперше сформульована Робертом Гуком (Ця гіпотеза має свої обмеження).

5. **Переміщення точок тіла дуже малі** порівняно з його розмірами. Ця гіпотеза разом із четвертою дозволяє застосовувати **принцип незалежності дії сил**.

6. Матеріал конструкції має **початковий напружений стан**. При відсутності зовнішніх навантажень відсутні напруження і деформації (початкові напруження, які виникають під час виготовлення конструкції не враховують).

Під час розв'язування окремих задач застосовують додаткові припущення опору матеріалів.

Принцип незалежності дії сил (принцип накладання або принцип суперпозиції).

Принцип незалежності дії сил є справедливим за умови, що переміщення точок тіла, яке навантажується зовнішніми силами, є малими порівняно з його розмірами, матеріал тіла працює пружно, всі параметри напружено-деформівного стану (надалі НДС) тіла – переміщення, деформації, внутрішні зусилля, напруження – пов'язані між собою лінійною залежністю.

Згідно з цим принципом – результат одночасної дії на тіло кількох зовнішніх навантажень дорівнює сумі результатів дії кожного з цих навантажень.

Принцип Сен-Венана (принцип локальності ефекту самозрівноважених навантажень)

Сен-Венан у 1855 р. для спрощення розрахунків на міцність запропонував положення, яке в сучасній інженерній практиці використовують у такому формулюванні:

Якщо тіло навантажується статично еквівалентними системами сил, тобто такими, в яких головний вектор та головний момент однакові, й при цьому розміри зони прикладання навантаження невеликі порівняно з розмірами тіла, то в перерізах, які достатньо віддалені від місць прикладання сил, компоненти напружено-деформованого стану (напруження, деформації, переміщення) мало залежать від способу навантажування.

Інакше кажучи, принцип Сен-Венана або принцип локальності полягає в тому, що на достатній відстані від місця прикладання навантаження конкретний спосіб здійснення цього навантажування можна не враховувати.

Відповідно до цього принципу результат дії самозрівноважених навантажень прикладених до малої ділянки тіл, швидко зникає при віддаленні від цієї ділянки.

Точне дослідження локальних напружень і деформацій навколо зони прикладання навантаження є досить складною задачею. Принцип Сен-Венана дозволяє уникнути розв'язання цієї задачі і отримати прийнятне рішення без детального вивчення локальних особливостей навантажування.

Принцип початкових розмірів

При складанні умов рівноваги реального тіла його вважають абсолютно твердим.

У дійсності при навантажуванні форма і розміри тіла змінюються, тому точки прикладання навантажень і лінії їх дії теж змінюються. Врахування цих змін дає поправку у четвертому-п'ятому знаках чисельного результату, тому цим можна знехтувати.

Якщо відмовитись від однієї з декількох гіпотез, отримаємо дуже складні варіанти. Наприклад, відмова від четвертої гіпотези може привести до теорії пластичності або повзучості, відмова від п'ятої гіпотези – до геометрично нелінійної теорії пружності і т.ін.

Лінійна теорія пружності – найбільш простий варіант механіки твердого деформівного тіла.

Класифікація зовнішніх навантажень та розрахункова схема

Зовнішні навантаження класифікують:

1. За характером дії – статичні, динамічні.

Статичні – це навантаження, значення, напрям і місце прикладання яких залишаються постійними.

Динамічні – це навантаження, які характеризуються швидкими змінами їх значення в часі, напрямі чи місці прикладання.

Всі навантаження, що діють на тіло, можна розділити на **об'ємні** і **поверхневі**.

Об'ємні навантаження діють у кожній точці тіла (сила тяжіння, сила інерції, сили магнітного притягання). Ці сили вимірюють інтенсивністю – силою, що припадає на одиницю об'єму. Її зручно представити у вигляді складових вздовж осей X, Y, Z . **Поверхневі навантаження виникають у результаті контакту з іншими тілами** – тиск ґрунту на підпірну стінку, тиск води на греблю та ін. Інтенсивність поверхневого навантаження – це величина сили, що припадає на одиницю площі поверхні. Положення площадки визначають нормаллю до неї.

2. За характером прикладання поверхневі навантаження поділяють на (рис. 1.2):

- а) F, Q, R – зосереджені сили [Н, кН, МН];
- б) M, T – зосереджені моменти [Нм, кНм, МНм];
- в) q – розподілені на лінії [Н/м, кН/м].

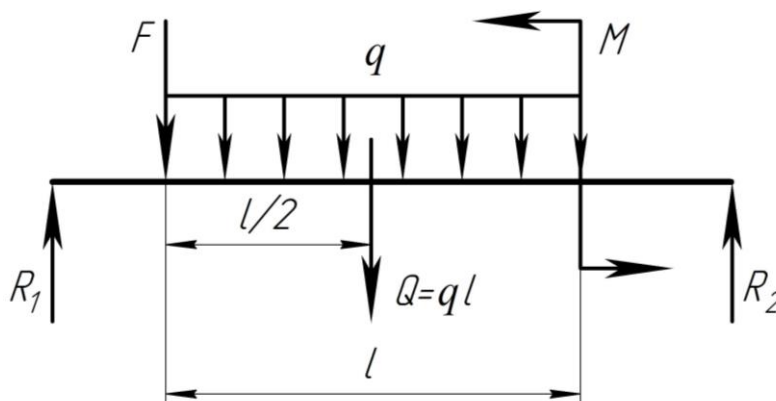


Рисунок 1.2

В опорі матеріалів, а також і у теорії пружності, дослідження реального об'єкту починають з обрання розрахункової схеми.

Розрахункова схема – це реальний об'єкт, звільнений від несуттєвих особливостей.

Для одного і того ж об'єкта може бути створена не одна розрахункова схема, що залежить від особливостей навантаження і умов роботи.

Для одного і того ж об'єкту може бути запропоновано кілька розрахункових схем залежно від особливостей навантаження, умов роботи, потрібної точності і від того, яка сторона явища цікавить дослідника в конкретному випадку.

Справедливо і зворотне: *одній розрахунковій схемі може бути поставлено у відповідність багато реальних об'єктів*. Ця обставина є дуже важливою тому, що досліджуючи якусь одну схему можна отримати розв'язок для цілого класу реальних задач, які можна звести до цієї схеми. Перехід від реального об'єкту до розрахункової схеми здійснюють *схематизацією* властивостей матеріалу, навантажень, геометрії реального об'єкту, типів опорних пристроїв і т. ін.

Основні види деформацій

Реальні тіла (споруди) не є абсолютно твердими і тому під дією прикладених навантажень змінюють свої початкові розміри і форму, тобто *деформуються*.

Деформації бувають *пружними*, тобто такими, що зникають після припинення дії сил, які спричинили їх, та *пластичними*, або *залишковими*, – такими, що не зникають після розвантаження тіла.

Усі існуючі тіла під впливом зовнішніх сил здатні змінювати свої розміри і форму, тобто деформуватися.

В опорі матеріалів розрізняють деформації розтягу (стиску), зсуву (зрізу), кручення і згину. При різних видах деформації у поперечних перетинах тіла виникають різні внутрішні силові фактори.

1. **Розтяг-стиск** – такий вид деформації, при якому у поперечних перетинах прямого бруса виникає тільки *поздовжня (осьова) сила N* . Брус, що працює на розтяг (стиск), називають **стрижнем**.

Розтягу зазнають такі елементи конструкцій, як канати, болти, троси, стержні ферм, штоки поршневі машин. На стиск працюють фундаменти, цегляна кладка будинків, колони, пуансони штампів.

2. **Зсув (зріз)** – такий вид деформації, при якому у поперечних перетинах бруса діє тільки *поперечна (перерізуюча) сила Q* . Деформація зсуву доведена до руйнування матеріалу – зріз.

Зсуву зазнають заклепки, болти, шпонки, шви зварних з'єднань.

3. **Кручення** – такий вид деформації, при якому у поперечних перетинах бруса діє тільки **крутний момент** M_{KP} . Брус круглого поперечного перетину, який передає потужність під час обертального руху, називають **валом**. Кручення часто супроводжується згином або іншим видом деформації.

4. **Прямий поперечний згин** – такий вид деформації, при якому у поперечних перетинах бруса виникає **згинальний момент** $M_{зГ}$ та поперечна сила Q . Брус, який працює на згин, називають **балкою**.

Згину зазнають осі, балки міжповерхових перекриттів і мостів, зуби зубчастих коліс, листові ресори.

5. **Складний опір** – це поєднання двох або більше простих видів деформацій, а саме: **згин + кручення; стиск + згин** і т.д.

Внутрішні силові фактори. Метод перетинів. Епюра

Між сусідніми частками тіла завжди діють певні сили взаємодії, тобто **внутрішні сили**. Ці сили намагаються зберегти тіло, як єдине ціле, протидіють усякій спробі змінити взаємне розташування його частин.

В опорі матеріалів не розглядають та не беруть до уваги внутрішні сили, що діють в тілі, яке перебуває в своєму природному (ненавантаженому) стані, а **вивчають і визначають тільки ті додаткові внутрішні сили, які виникають внаслідок навантаження тіла ззовні**.

Внутрішні силові фактори – це внутрішні сили взаємодії між частинками тіла, які виникають при дії на тіло зовнішніх сил, і перешкоджають зміні відстаней між частинками й руйнуванню тіла. Їх називають **зусиллями**. Зовнішні силові дії, прикладені до елемента конструкції, і реакції в місцях кріплення опор, тобто активні й реактивні сили називають **навантаженнями**.

Для встановлення величини внутрішніх зусиль (силових факторів), що виникають у перетині стержнів, застосовують **метод перетинів**.

Перетин, перпендикулярний до осі бруса, називають **нормальним** або **поперечним**; перетин, проведений під будь-яким іншим кутом, називають **косим** або **похилим**.

Метод перетинів полягає в тому, що пружне тіло (брус), що перебуває у рівновазі під дією системи зовнішніх сил, уявно розрізають площиною на дві частини (рис. 1.3а). Будь-яку з них відкидають. Залишену частину розглядають як самостійне тіло, що перебуває в рівновазі, приклавши до неї внутрішні сили взаємодії (зусилля), що виникають між обома частинами тіла під впливом зовнішніх сил (рис. 1.3б). Внутрішні сили замінюють вплив відкинutoї частини бруса на залишену. Принципово не важливо, яку із частин тіла відкинути.

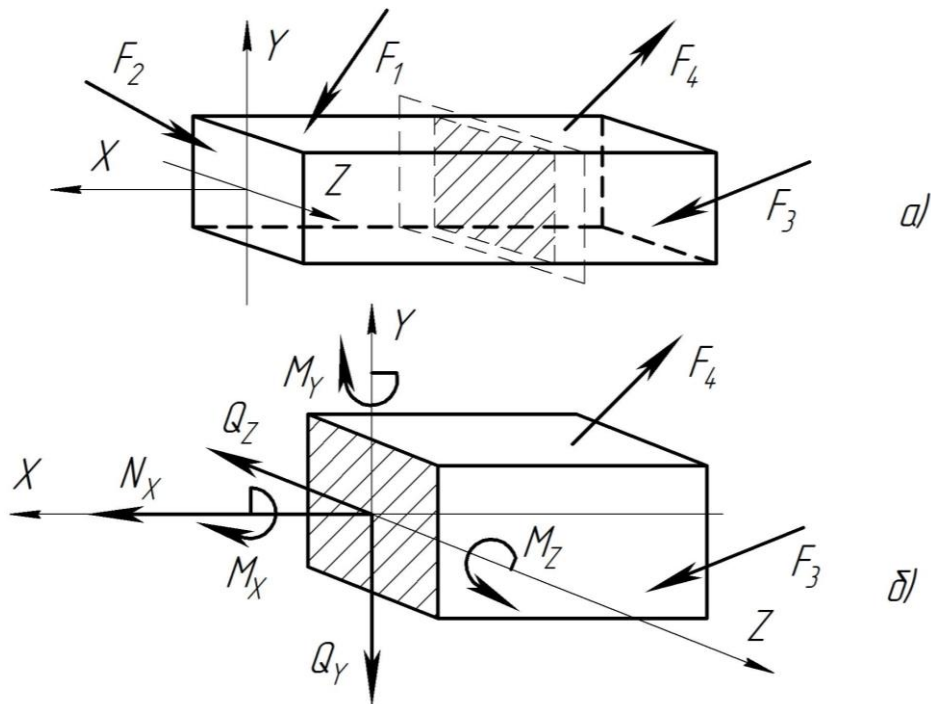


Рисунок 1.3

У загальному випадку навантаження бруса у його поперечному перетині виникає **шість внутрішніх силових факторів**:

N_X – **поздовжня** (нормальна) **сила**, діє вздовж осі бруса, перпендикулярна до площини перетину;

Q_Y , Q_Z – **поперечні сили**, дотичні до площини перетину, намагаються зсунути одну частину бруса відносно іншої у напрямках осей OY , OZ ;

M_Y , M_Z – моменти, що повертають перетин навколо осей OY , OZ , намагаються зігнути стрижень у площинах XZ та XY , тобто **згинальні моменти**, $M_Y = M_{Z\Gamma.Y}$; $M_Z = M_{Y\Gamma.Z}$;

M_X – момент, що діє у площині перетину і спричиняє поворот перетину відносно поздовжньої осі бруса OX , тобто скручує брус, називають його **крутним моментом**, $M_X = M_{KP}$.

Кожен із внутрішніх силових факторів пов'язаний з певним видом деформації.

Для визначення внутрішніх силових факторів у загальному вигляді, відповідно до методу перетинів, записують **шість умов рівноваги сил**, що діють на залишену частину бруса (використовують **шість рівнянь статички**). Прирівнюють до нуля алгебраїчні суми проєкцій усіх сил, прикладених до цієї частини на осі OX , OY , OZ , і алгебраїчні суми моментів цих сил відносно тих самих осей:

$$\begin{aligned} \sum X &= 0; & N_X + \sum F_{iX} &= 0; \\ \sum Y &= 0; & Q_Y + \sum F_{iY} &= 0; \\ \sum Z &= 0; & Q_Z + \sum F_{iZ} &= 0; \\ \sum M_X &= 0; & M_{KP} + \sum M_X(F_i) &= 0; \\ \sum M_Y &= 0; & M_{3\Gamma.Y} + \sum M_Y(F_i) &= 0; \\ \sum M_Z &= 0; & M_{3\Gamma.Z} + \sum M_Z(F_i) &= 0. \end{aligned}$$

Епюра – це графік, який показує розподіл внутрішніх силових факторів або переміщень уздовж осі стрижня (бруса). **Епюри штрихують лініями, перпендикулярними до осі бруса.**

Правила, які застосовують під час побудови епюр в стрижнях:

Вісь (базу), на якій будують епюру, завжди вибирають так, щоб вона була паралельна, або збігалася з віссю стрижня.

Ординати епюри відкладають перпендикулярно до осі епюри.

Епюри штрихують лініями перпендикулярними до осі (бази).

Для зусиль та моментів вибирають певний масштаб. Ординати відкладають в масштабі. На епюрах проставляють числа, що показують значення характерних ординат, а в полі епюри ставлять знак зусилля, який вписують у коло.

Приклад запису умов рівноваги для плоскої системи сил (рис. 1.4). Використовуючи метод перетинів, запишемо три рівняння рівноваги:

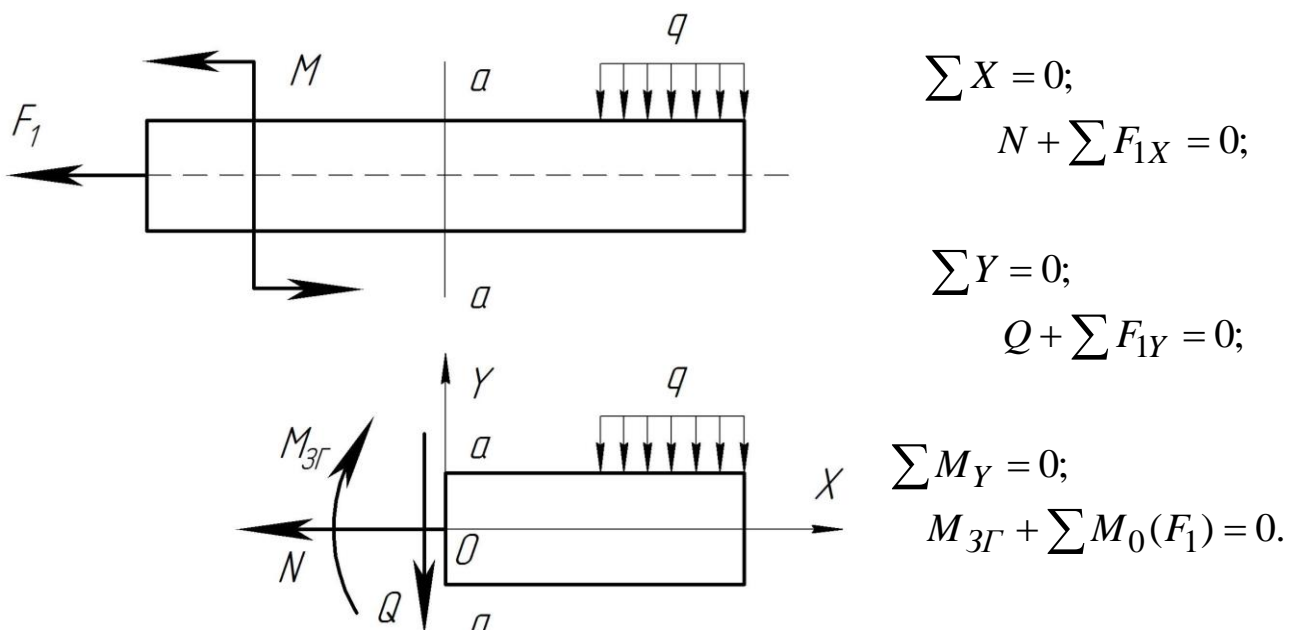


Рисунок 1.4

Напруження. Зв'язок напружень з внутрішніми силовими факторами

Напруження – величина, яка характеризує інтенсивність внутрішніх сил. Розглянемо деяке тіло, що перебуває у рівновазі під дією заданих навантажень. Використовуючи метод перетинів умовно розріжемо його деякою площиною і відкинемо одну з частин. Розглянемо рівновагу залишеної частини тіла (рис. 1.5). На кожній елементарній площадці ΔA виникає внутрішня сила ΔR , інтенсивність (**напруження**) якої p визначають за формулою

$$p = \lim_{\Delta A \rightarrow 0} \frac{\Delta R}{\Delta A},$$

де ΔR – внутрішня сила, тобто зусилля, прикладене до виділеної площі;
 ΔA – елементарна площа перетину, на якій виникає зусилля ΔR .

Ця інтенсивність і є **повним напруженням** на даній площадці. Тобто **напруження** – це внутрішня сила, що припадає на одиницю площі перетину.

Внутрішню силу ΔR можна розкласти на дві складові: одна направлена перпендикулярно до перетину ΔN ; друга лежить у площині перетину ΔQ . Напруження, що виникають у перетині від цих складових, називають **нормальним** і **дотичним**.

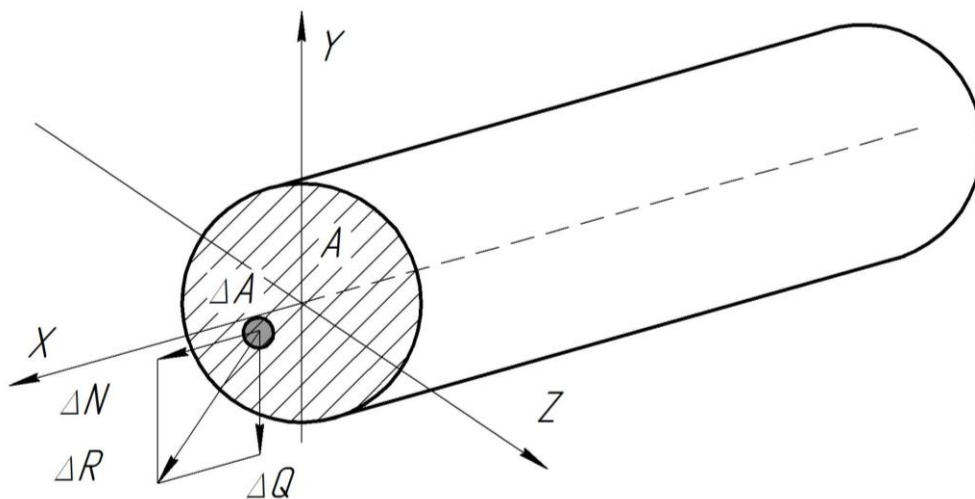


Рисунок 1.5

Нормальне напруження – це інтенсивність нормальних сил у даній точці перетину

Дотичне напруження – це інтенсивність дотичних сил у даній точці перетину

Повне напруження у точці визначають за формулою

$$\sigma = \lim_{\Delta A \rightarrow 0} \frac{\Delta N}{\Delta A}.$$

$$\tau = \lim_{\Delta A \rightarrow 0} \frac{\Delta Q}{\Delta A}.$$

$$p = \sqrt{\sigma^2 + \tau^2}.$$

Розмірність напружень, $1 \text{ Па} = 1 \text{ Н/м}^2$; $1 \text{ МПа} = 10^6 \text{ Па} = 1 \text{ Н/мм}^2$.

Зв'язок напружень з внутрішніми силовими факторами

Сукупність напружень σ і τ , які діють на різних площадках елементарного кубика з елементарними площами граней dA (рис. 1.6), створюють напружений стан:

$$\sigma dA = dN;$$

$$\tau_Y dA = dQ_Y;$$

$$\tau_Z dA = dQ_Z.$$

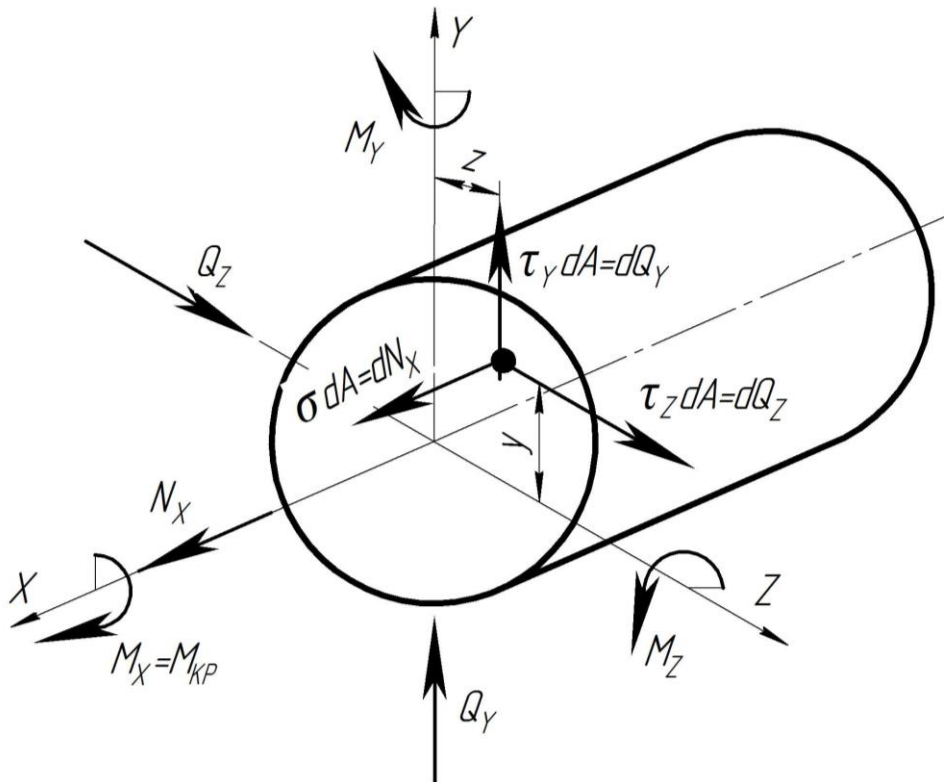


Рисунок 1.6

Нормальні і дотичні напруження безпосередньо пов'язані з внутрішніми силовими факторами, що виникають у перетині:

$$N_X = \int_A \sigma dA;$$

$$Q_Y = \int_A \tau_Y dA;$$

$$Q_Z = \int_A \tau_Z dA;$$

$$M_{KP} = \int_A (\tau_Y \cdot y - \tau_Y \cdot z) dA;$$

$$M_Y = \int_A \sigma \cdot z dA;$$

$$M_Z = \int_A \sigma \cdot y dA.$$

2. ЦЕНТРАЛЬНИЙ РОЗТЯГ І СТИСК ПРЯМОГО СТРИЖНЯ

Центральний розтяг і стиск. Побудова епюр нормальних сил

Центральний (осьовий) розтяг або стиск виникає від сил, прикладених уздовж центральної осі бруса. Напружений стан, викликаний такими силами, називають простим або лінійним.

Розтяг (стиск) – це такий вид деформації (вид опору), при якому в поперечних перетинах бруса виникає тільки **поздовжня (осьова, нормальна) сила** – N або N_x , спрямована вздовж осі бруса і прикладена в центрі ваги перетину. Визначають її з умови рівноваги, використовуючи **метод перетинів**, починаючи з вільного кінця стрижня.

Поздовжня сила у довільному поперечному перетині бруса дорівнює алгебраїчній сумі проекцій на його поздовжню вісь Ox усіх зовнішніх сил, прикладених до залишеної частини.

При розтягу поздовжня сила направлена від перетину і вважається **додатною**, при стиску вона спрямована до перетину і вважається **від'ємною**.

Для оцінювання навантаженості бруса, у випадку, коли поздовжні сили у різних поперечних перетинах бруса неоднакові, будують епюри. При побудові епюр брус розділяють на ділянки. Епюру будують для того, щоб використати її при розрахунку на міцність. Вона дає можливість визначити найбільше значення поздовжньої сили і перетин, у якому вона виникає, тобто небезпечний (щодо міцності) перетин.

Приклад. Побудувати епюру нормальних сил для бруса зображеного на рис. 2.1а (власною вагою бруса знехтувати).

Розбиваємо брус на ділянки. Границі ділянок: початок та закріплення бруса; перетини, в яких прикладені зосередженні сили.

Використовуючи метод перетинів, визначаємо значення нормальних сил на кожній ділянці, починаючи з вільного кінця.

Нормальна сила – це алгебраїчна сума всіх зовнішніх сил з одного боку перетину. Запишемо їх значення (рис. 2.1б) на кожній з ділянок, розглядаючи стрижень з вільного кінця:

$$N_1 = F_1 = 20 \text{ кН};$$

$$N_2 = F_1 - F_2 = 20 - 50 = -30 \text{ кН};$$

$$N_3 = F_1 - F_2 + F_3 = -30 + 40 = 10 \text{ кН}.$$

За отриманими результатами будують епюру нормальних сил N (рис. 2.1в).

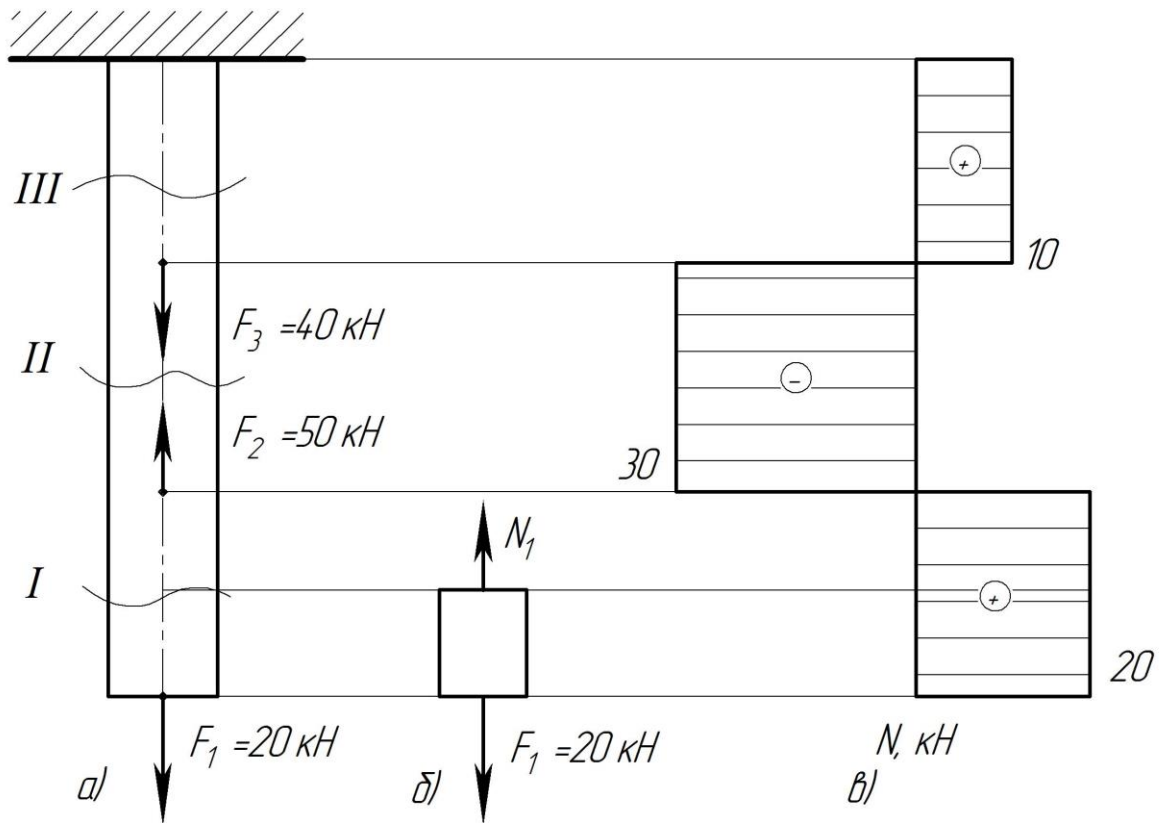


Рисунок 2.1

Напруження у поперечних перетинах стрижня

При розтягу (стиску) бруса у його поперечних перетинах виникають тільки **нормальні напруження**.

При розтягу (стиску) бруса нормальні напруження на його поперечному перетині **розподілені рівномірно**.

Між поздовжньою (нормальною) силою N і нормальним напруженням σ (рис. 2.2) існує залежність

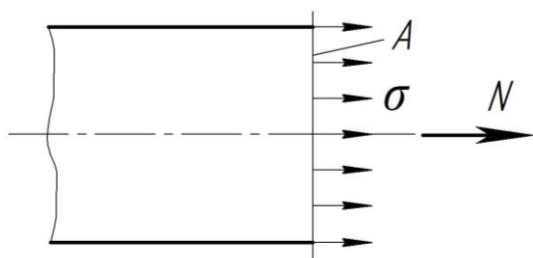


Рисунок 2.2

$$N = \int_A \sigma \cdot dA.$$

Використовуючи принцип Сен-Венана, вважаємо, що $\sigma = const$, тоді

$$N = \sigma \cdot A,$$

Звідки

$$\sigma = \frac{N}{A}.$$

Нормальні напруження додатні, якщо розтягують матеріал стрижня, від'ємні, – якщо стискають.

Якщо нормальні напруження у різних поперечних перетинах бруса неоднакові, доцільно показувати закон їх зміни на довжині бруса у вигляді графіка – епюри нормальних напружень.

Дотичні напруження додатні, якщо вектор τ обходить елементи матеріалу за годинниковою стрілкою.

Поздовжні й поперечні деформації

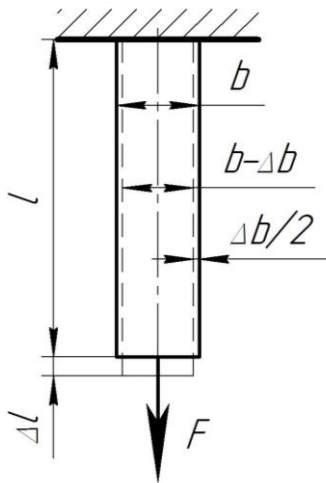
Розглянемо деформацію стрижня, навантаженого осьовою силою F (рис. 2.3):

Δl – повне поздовжнє видовження стрижня (абсолютна поздовжня деформація, лінійне видовження, лінійна деформація);

Δb – абсолютна поперечна деформація (лінійна деформація);

ε – відносна поздовжня деформація, $\varepsilon = \Delta l/l$;

ε' – відносна поперечна деформація, $\varepsilon' = \Delta b/b$.



До певної величини сили деформації пружного тіла пропорційні силі. При розтягу (стиску) існує лінійна залежність між видовженням стрижня і поздовжньою силою.

Експериментально доведено, що напруження у матеріалі стрижня залежать від деформації й механічних характеристик матеріалу. Описується ця залежність як **закон Гука при розтягу (стиску)**

Рисунок 2.3

$$\sigma = \varepsilon \cdot E; \quad \Delta l = \frac{N \cdot l}{E \cdot A},$$

де E – модуль пружності (модуль пружності I-го роду, модуль Юнга, модуль нормальної пружності, модуль поздовжньої пружності).

Експериментально встановлено, що при простому розтягу або стиску відношення поперечної деформації до поздовжньої величина постійна для даного матеріалу. Це відношення, взяте за абсолютним значенням, називають коефіцієнтом поперечної деформації або **коефіцієнтом Пуассона**

$$\mu = |\varepsilon' / \varepsilon|.$$

E , μ – механічні характеристики матеріалу, визначають його пружні властивості. Для сталі $E = 2 \cdot 10^5$ МПа; $\mu = 0,3$.

Закон Гука справедливий лише до певної величини напруженого стану матеріалу, яке називають *границею пропорційності* даного матеріалу.

Діаграма розтягу пластичних матеріалів (сталі)

Механічні характеристики матеріалів, тобто величини, які визначають їх міцність, пластичність, а також пружні постійні E та μ , необхідні інженеру–конструктору для вибору матеріалу деталі та її розрахунку на міцність і жорсткість. Ці характеристики отримують експериментально. Для цього використовують лабораторне обладнання, на якому до взірця (рис. 2.4б) прикладають статичне навантаження на розтяг (стиск) і замірюють сили й деформації. Щоб виключити вплив абсолютних розмірів досліджуваного взірця, будують так звану умовну діаграму розтягу в координатах: відносне видовження ε , нормальне напруження σ . **Сталі однаково сприймають навантаження розтягу і стиску**, тому діаграма стиску ідентична, у дзеркальному відображенні, діаграмі розтягу для сталі тієї ж марки.

Для маловуглецевої сталі діаграма розтягу (стиску) зображена на рис. 2.4а.

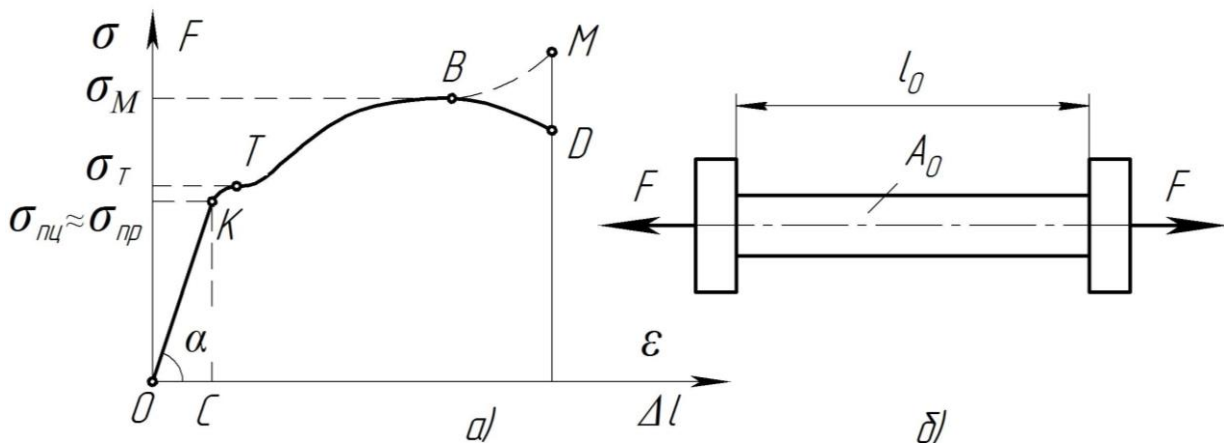


Рисунок 2.4

Позначення на діаграмі такі:

σ_{ν} – **границя пропорційності**, на даній ділянці деформація пропорційна навантаженню, найбільше напруження, при досягненні якого справедливий закон Гука,

$$\sigma_{\nu} = \frac{F_{\nu}}{A_0};$$

σ_{np} – **границя пружності**, до цього напруження матеріал зберігає пружні властивості (у збірці не виникає залишкових деформацій при знятті навантаження),

$$\sigma_{np} = \frac{F_{np}}{A_0};$$

σ_T – **границя текучості** – напруження, при якому відбувається ріст пластичних деформацій збірці при постійному навантаженні, це – основна механічна характеристика для оцінювання міцності пластичних матеріалів (сталей),

$$\sigma_T = \frac{F_T}{A_0};$$

σ_M – **границя міцності** – напруження, при якому відбувається руйнування матеріалу збірці, тобто умовне напруження, що відповідає найбільшому навантаженню, яке витримує збірець до руйнування,

$$\sigma_M = \frac{F_{max}}{A_0}.$$

Тут A_0 – початкова площа поперечного перетину зразка, що піддається розтягу; F_{nc} , F_{np} , F_T – зростання величини сили розтягу, F_{max} – максимальна сила навантаження без врахування звуження перетину.

На ділянці ОК діаграми розтягу (див. рис. 2.4а) стверджується закон Гука $E = \sigma/\varepsilon$.

Діаграма розтягу–стиску крихких матеріалів (чавуни)

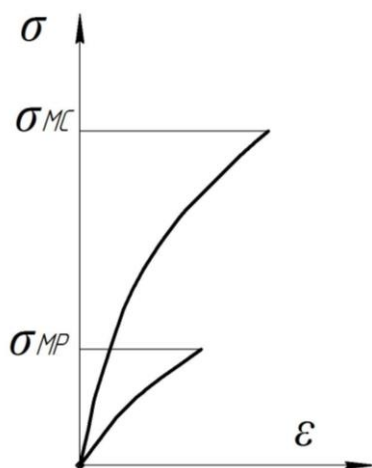


Рисунок 2.5

Крихкі матеріали (чавуни, бетон, цегла) добре сприймають навантаження стиску і значно гірше навантаження розтягу. На рис. 2.5 зображено діаграми розтягу і стиску крихкого матеріалу. Так як на діаграмах розтягу-стиску крихких матеріалів відсутні прямолінійні ділянки, то закон Гука для визначення лінійних деформацій Δl набуває приблизних значень.

Для крихких матеріалів характерні лише напруження руйнування:

σ_{MC} – границя міцності на стиск;

σ_{MP} – границя міцності на розтяг.

Потенціальна енергія деформацій

При статичному розтягу стрижня (взірця) в межах застосування закону Гука сила F поступово збільшується від нуля до якогось значення, взірець деформується на величину Δl (див. рис. 2.3) і при цьому здійснює роботу W . Ця робота акумулюється у деформованому взірці у вигляді потенціальної енергії деформації, тобто $W=U$.

Якщо діаграма розтягу (див. рис. 2.4а) побудована в координатах (F , Δl), то робота рівна площі трикутника OSK :

$$W = U = \frac{1}{2} \cdot F \cdot \Delta l,$$

$$\text{де } \Delta l = \frac{F \cdot l}{E \cdot A}; \quad F = N.$$

Тоді

$$W = U = \frac{F^2 \cdot l}{2F \cdot A} = \frac{\sigma^2 \cdot A \cdot l}{2E} = \frac{\sigma^2 \cdot V}{2E},$$

де F – сила, що розтягує взірець, $F = \sigma \cdot A$;

V – об'єм тіла, тобто взірця, $V = A \cdot l$;

A – площа поперечного перетину взірця.

Питома потенціальна енергія – це енергія деформації, яка припадає на одиницю об'єму

$$U = \frac{W}{V} = \frac{\sigma^2}{2E}.$$

Допустимі напруження. Розрахунок на міцність

В опорі матеріалів розрізняють три види нормальних (і дотичних) напружень: **робочі, граничні, допустимі**.

Робочі (фактичні) напруження – це ті, що дійсно мають місце в елементі конструкції і визначаються розрахунками чи експериментально.

Граничні напруження – це ті, при яких матеріал руйнується, або в ньому виникають помітні залишкові деформації.

Для забезпечення міцності деталей необхідно, щоб напруження, які виникли у процесі їх експлуатації, були меншими за граничні. Але якщо робочі напруження дуже близькі до граничних (хоча й менші за них), то міцність деталі гарантувати не можна. Тому *при розрахунках на міцність робочі напруження порівнюють не з граничними, а з допустимими*.

Допустимі напруження – це такі, при яких гарантована безпечна робота деталі. Позначають їх $[\sigma]$ чи $[\tau]$ і визначають як деяку частину від граничних напружень, щоб гарантувати запас міцності:

а) для пластичних матеріалів (сталі)

$$[\sigma] = \frac{\sigma_T}{n},$$

де $[\sigma]$ – допустиме напруження на розтяг і стиск;

n – коефіцієнт запасу міцності;

б) для крихких матеріалів (чавуни)

$$[\sigma]_P = \frac{\sigma_{MP}}{n}; \quad [\sigma]_C = \frac{\sigma_{MC}}{n},$$

де $[\sigma]_P$ – допустиме напруження на розтяг;

σ_{MP} – границя міцності на розтяг;

$[\sigma]_C$ – допустиме напруження на стиск;

σ_{MC} – границя міцності на стиск.

Коефіцієнт запасу міцності для пластичних матеріалів $n = 1,2 \dots 2,5$;
для крихких матеріалів $n = 2 \dots 5$.

Умова міцності при розтягу–стиску

$$\sigma = \frac{N}{A} \leq [\sigma].$$

При розрахунках деталей на міцність основними є три види задач.

1. **Проектний розрахунок**, за яким визначають розміри поперечного перетину

$$A \geq \frac{N_{\max}}{[\sigma]},$$

де N_{\max} – максимальне значення поздовжньої сили, беруть з епюри N .

2. **Перевірний розрахунок**, за яким визначають робочі (фактичні) напруження і порівнюють з допустимим

$$\sigma = \frac{N_{\max}}{A} \leq [\sigma].$$

3. **Визначення допустимих навантажень**

$$[N] \leq [\sigma] \cdot A.$$

Статично невизначені системи

Розв'язуючи задачі на міцність стрижнів та стрижневих систем, розглядають їх під дією зовнішніх сил, до яких відносять і сили реакцій зв'язків (в'язей). Реакції в'язей визначають з умов рівноваги стрижня чи системи стрижнів за рівняннями статки. Для плоскої системи сил, у загальному випадку, рівнянь статки є три, а саме: $\sum X = 0$, $\sum Y = 0$, $\sum M_0 = 0$. Якщо кількість невідомих сил реакцій дорівнює кількості рівнянь статки, то такі системи стрижнів чи стрижень є статично визначеними. Сили реакцій визначають у таких випадках з рівнянь статки без особливих ускладнень.

Якщо кількість невідомих опорних реакцій більша за кількість рівнянь статки, то у таких випадках визначення опорних реакцій неможливе і такі стрижні чи стрижневі системи є **статично невизначеними**.

Розглянемо стрижневі системи зображені на рис. 2.6.

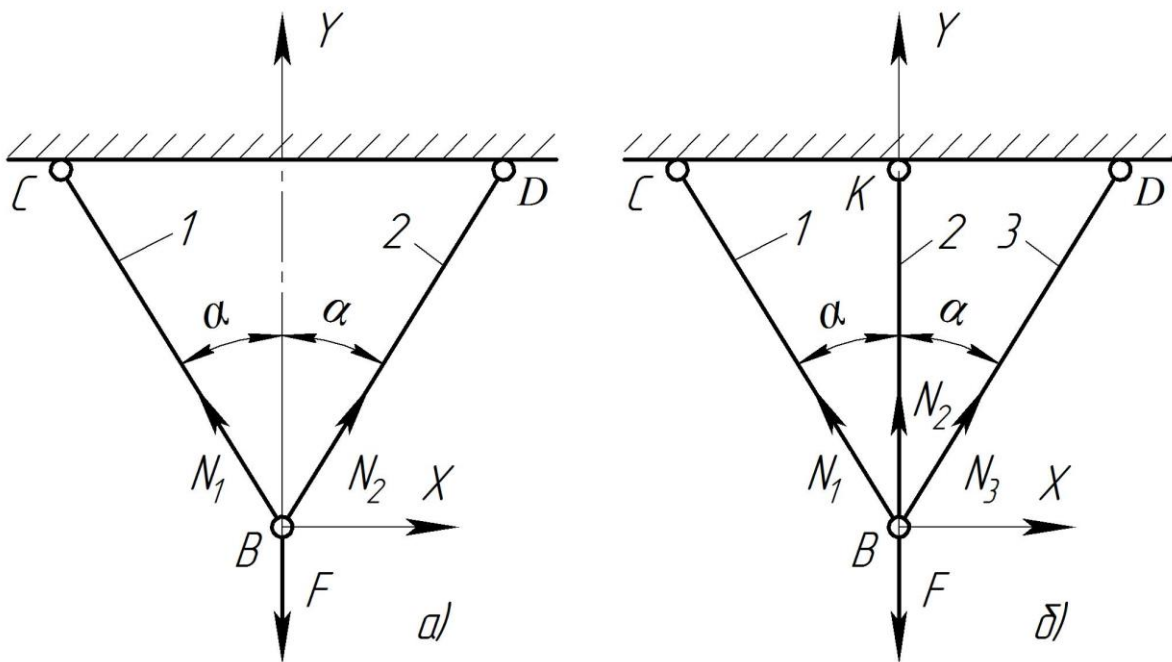


Рисунок 2.6

Для обох випадків розглядаємо рівновагу вузла B , в якому прикладена зовнішня сила F і сходяться невідомі сили реакцій стрижнів – зусилля N_1 , N_2 та N_3 (рис. 2.6а, б).

Запишемо рівняння статки для схеми (рис. 2.6а)

$$\sum X = 0, \quad -N_1 \cdot \sin \alpha + N_2 \cdot \sin \alpha = 0;$$

$$\sum Y = 0, \quad N_1 \cdot \cos \alpha + N_2 \cdot \cos \alpha - F = 0.$$

Кількість невідомих сил реакцій (зусиль) – дві, N_1 і N_2 , рівнянь статички два, відповідно стрижнева система статично визначена.

Складаємо рівняння рівноваги для схеми (рис. 2.6б):

$$\sum X = 0, \quad -N_1 \cdot \sin \alpha + N_3 \cdot \sin \alpha = 0;$$

$$\sum Y = 0, \quad N_1 \cdot \cos \alpha + N_2 + N_3 \cdot \cos \alpha - F = 0.$$

Невідомих зусиль три – N_1 , N_2 і N_3 , рівнянь статички два. Задана стрижнева система $3-2=1$ раз статично невизначена.

Невідомі зусилля (реакції) в елементах статично невизначених стрижневих систем визначають додаванням до рівнянь статички додаткових рівнянь, отриманих шляхом розгляду пружних деформацій стрижня чи стрижневої системи (див. приклади розв'язку).

Розрахунок статично невизначуваної стрижневої системи при розтягу-стиску

Для заданої стрижневої системи (рис. 2.7а), до якої прикладена сила $F = 50$ кН, визначити діаметри стрижнів DE і KH , якщо відоме відношення їх площ $A_{DE} = k \cdot A_{KH}$, $k = 3$. Брус, до якого прикладена зовнішня сила F , вважати абсолютно жорстким. Матеріал стрижнів і бруса – сталь Ст.3; $[\sigma] = 160$ МПа; $a = 1$ м.

Розв'язування

При навантаженні системи силою F у стрижнях DE і KH виникають нормальні зусилля, в даному випадку – стискаючі. Площі поперечних перетинів стрижнів при стиску визначаємо з умови міцності на розтяг-стиск

$$\sigma = \frac{N_i}{A_i} \leq [\sigma], \quad \text{звідки} \quad A_i \geq \frac{N_i}{[\sigma]}. \quad (1.1)$$

Для визначення зусиль у стрижнях DE і KH складаємо рівняння рівноваги бруса (рис. 2.7б):

$$\sum X = 0; \quad -N_{DE} \cdot \cos \alpha + B_X = 0; \quad (1.2)$$

$$\sum Y = 0; \quad -F + N_{DE} \cdot \sin \alpha + B_Y - N_{KH} = 0; \quad (1.3)$$

$$\sum M_B = 0; \quad F \cdot 3a - N_{DE} \cdot 2a \cdot \sin \alpha - N_{KH} \cdot a = 0, \quad (1.4)$$

де N_{DE} , N_{KH} – нормальні сили, що виникають в стрижнях DE і KH ;

B_X , B_Y – складові сили реакції опори B .

У системі є чотири невідомі зусилля та реакції (N_{DE} , N_{KH} , B_X , B_Y), а рівнянь рівноваги – три. Отже, система $4-3=1$ раз статично невизначена.

Складаємо додаткове рівняння – рівняння сумісності переміщень (деформацій).

Після прикладання сили F стрижні DE і KH деформуються, і система займе положення, яке показане на рис. 2.7в. З подібності трикутників DD_1B і KK_1B випливає, що

$$\frac{DD_1}{KK_1} = \frac{DB}{KB} = \frac{2a}{a} = 2. \quad (1.5)$$

У даному випадку

$$DD_1 = \frac{\Delta L_{DE}}{\sin \alpha}; \quad KK_1 = \Delta L_{KH}, \quad (1.6)$$

де ΔL_{KH} , ΔL_{DE} – абсолютні деформації стрижнів KH і DE .

Деформації стрижнів запишемо через закон Гука у вигляді:

$$\Delta L_{KH} = \frac{N_{KH} \cdot 1,5a}{E \cdot A_{KH}}; \quad \Delta L_{DE} = \frac{N_{DE} \cdot 2a}{E \cdot A_{DE} \cdot \sin \alpha}.$$

Підставивши значення ΔL_{KH} і ΔL_{DE} у вирази (1.5) і (1.6), отримаємо

$$\frac{N_{DE} \cdot 2a \cdot E \cdot A_{KH}}{N_{KH} \cdot 1,5a \cdot E \cdot A_{DE} \cdot \sin^2 \alpha} = 2.$$

Враховавши, що $A_{DE} = 3A_{KH}$, отримаємо

$$N_{DE} = 4,5N_{KH} \cdot \sin^2 \alpha.$$

У даному випадку $\alpha=45^\circ$ (див. рис. 2.7а), тоді

$$N_{DE} = 4,5N_{KH} \cdot \sin^2 45^\circ = 2,25N_{KH}. \quad (1.7)$$

Розв'язуючи сумісно рівняння (1.4) і (1.7), визначаємо невідомі зусилля в стрижнях

$$\begin{cases} 3F - 2N_{DE} \cdot \sin 45^\circ - N_{KH} = 0; \\ N_{DE} = 2,25N_{KH}, \end{cases}$$

звідки

$$N_{KH} = \frac{3F}{4,5 \sin 45^\circ + 1} = \frac{3 \cdot 50}{4,5 \cdot 0,7 + 1} = 35,9 \text{ кН},$$

відповідно

$$N_{DE} = 2,25 \cdot 35,9 = 80,8 \text{ кН}.$$

Надалі рівняння (1.2) і (1.3) при розв'язуванні задачі не використовуємо, так як невідомі зусилля в стрижнях визначені, а за умовою задачі непотрібно визначати реакцію в опорі B .

Площу поперечного перетину стрижня KH визначаємо з умови міцності на розтяг-стиск (1.1)

$$A_{KH} \geq \frac{N_{KH}}{[\sigma]} = \frac{35,9 \cdot 10^{-3}}{160} = 2,24 \cdot 10^{-4} \text{ м}^2,$$

площу поперечного перетину стрижня DE – зі співвідношення

$$A_{DE} = 3A_{KH} = 3 \cdot 2,24 \cdot 10^{-4} = 6,72 \cdot 10^{-4} \text{ м}^2.$$

Перевіряємо стрижень DE на міцність

$$\sigma_{DE} = \frac{N_{DE}}{A_{DE}} = \frac{80,8 \cdot 10^{-3}}{6,72 \cdot 10^{-4}} = 120 \text{ МПа} \leq [\sigma] = 160 \text{ МПа}.$$

Умова міцності забезпечена. В іншому випадку площу поперечного перетину стрижня DE необхідно було б визначити з умови міцності, а стрижня KH – зі співвідношення.

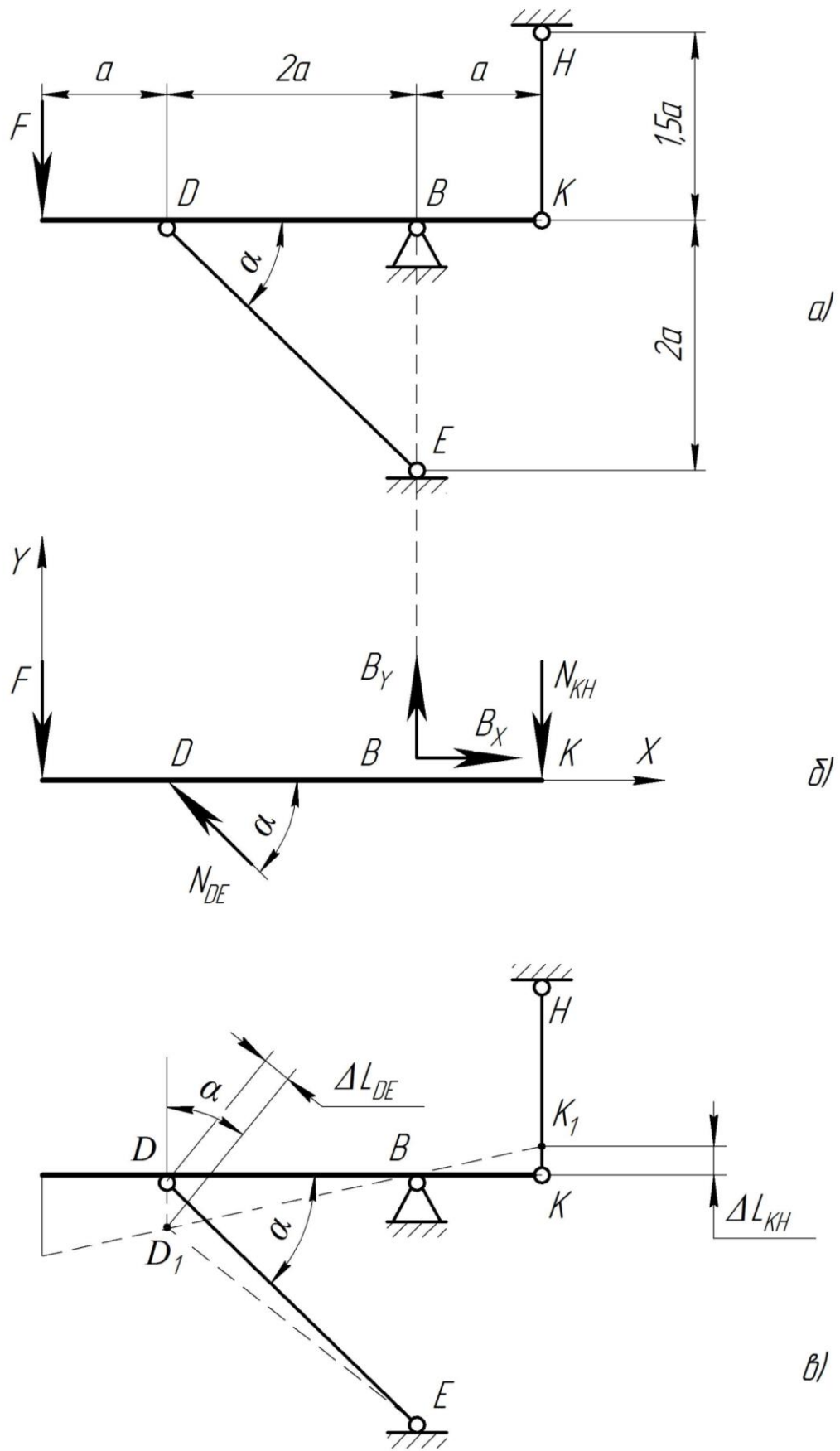


Рисунок 2.7

ПРИКЛАДИ

Приклад 2.1. Визначити зусилля в стрижні від горизонтального переміщення опор (рис. 2.8а).

Розв'язування

Під час переміщення опор $B \rightarrow B_1$, $C \rightarrow C_1$ (рис. 2.8а, б, в) стрижень BC зазнає деформації розтягу і в ньому виникає внутрішнє зусилля

$$N = R_X, \quad (1)$$

де R_X – горизонтальна складова опорних реакцій $R_{CX} = R_{BX} = R_X$.

Визначити внутрішнє зусилля з рівняння (1) не можемо, оскільки складові опорних реакцій невідомі.

Запишемо рівняння сумісності деформацій для розглядуваної схеми (див. рис. 2.8а, в)

$$\delta_C = \delta_B + \Delta l_N, \quad (2)$$

де δ_C – деформація стрижня викликана переміщенням опори C ;

δ_B – деформація стрижня викликана переміщенням опори B ;

Δl_N – абсолютна лінійна деформація стрижня BC , згідно закону Гука

$$\Delta l_N = \frac{N \cdot l}{E \cdot A},$$

де l – довжина стрижня BC ;

A – площа поперечного перетину стрижня BC ;

E – модуль пружності матеріалу стрижня BC ;

$E \cdot A$ – жорсткість стрижня BC .

Тоді

$$\delta_C = \delta_B + \frac{N \cdot l}{E \cdot A},$$

звідки зусилля у стрижні

$$N = \frac{\delta_C - \delta_B}{l} \cdot E \cdot A = \varepsilon_{BC} \cdot E \cdot A,$$

де ε_{BC} – відносна лінійна деформація стрижня BC .

Відповідь: зусилля у стрижні $N = \varepsilon_{BC} \cdot E \cdot A$.

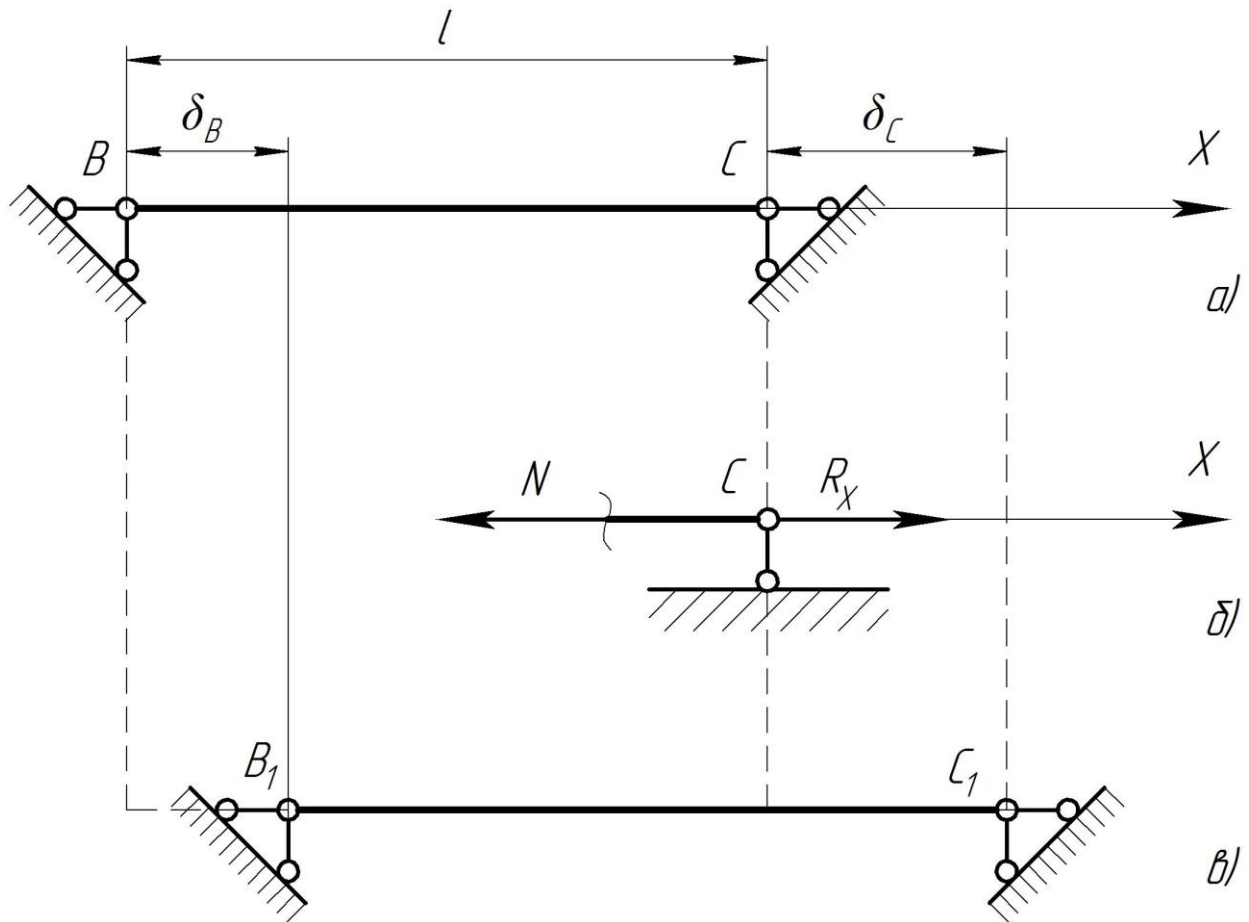


Рисунок 2.8

Приклад 2.2. Визначити величину вертикального переміщення u_B точки B після прикладання сили F (рис. 2.9а). Вважаємо, що радіус шківів надзвичайно малий порівняно із довжиною троса l . Жорсткість троса на всіх ділянках однакова, $E \cdot A = const$.

Розв'язування

Матеріал троса під дією сили F на всіх ділянках зазнає деформації розтягу. Для визначення зусиль у тросі розглянемо рівновагу блока C (рис. 2.9б):

$$\Sigma Y = 0, \quad N_{CD} - N_{CB} - N_{CK} = 0. \quad (1)$$

де N_{CD} , N_{CB} , N_{CK} – зусилля у тросі на відповідних ділянках.

Для заданої схеми кріплення троса залежність між зусиллями у тросі і зовнішньою силою F

$$N_{CB} = N_{CK} = F,$$

тоді

$$N_{CD} = 2F.$$

Вертикальне переміщення точки B після прикладання сили F

$$u_B = \Delta l_{CD} + \Delta l_{CK} + \Delta l_{CB}, \quad (2)$$

де Δl_{CD} , Δl_{CK} , Δl_{CB} – видовження окремих ділянок троса.

Згідно закону Гука для розглядуваної схеми (рис. 2.9а,б):

$$\Delta l_{CD} = \frac{2 \cdot F \cdot l}{E \cdot A}; \quad \Delta l_{CK} = \frac{F \cdot l}{E \cdot A}; \quad \Delta l_{CB} = \frac{F \cdot l}{E \cdot A}. \quad (3)$$

Підставивши залежності (3) у рівняння (2), отримаємо вертикальне переміщення точки B

$$u_B = \frac{2 \cdot F \cdot l}{E \cdot A} + \frac{F \cdot l}{E \cdot A} + \frac{F \cdot l}{E \cdot A} = \frac{4 \cdot F \cdot l}{E \cdot A}.$$

Відповідь: вертикальне переміщення точки B троса $y_B = \frac{4 \cdot F \cdot l}{E \cdot A}$.

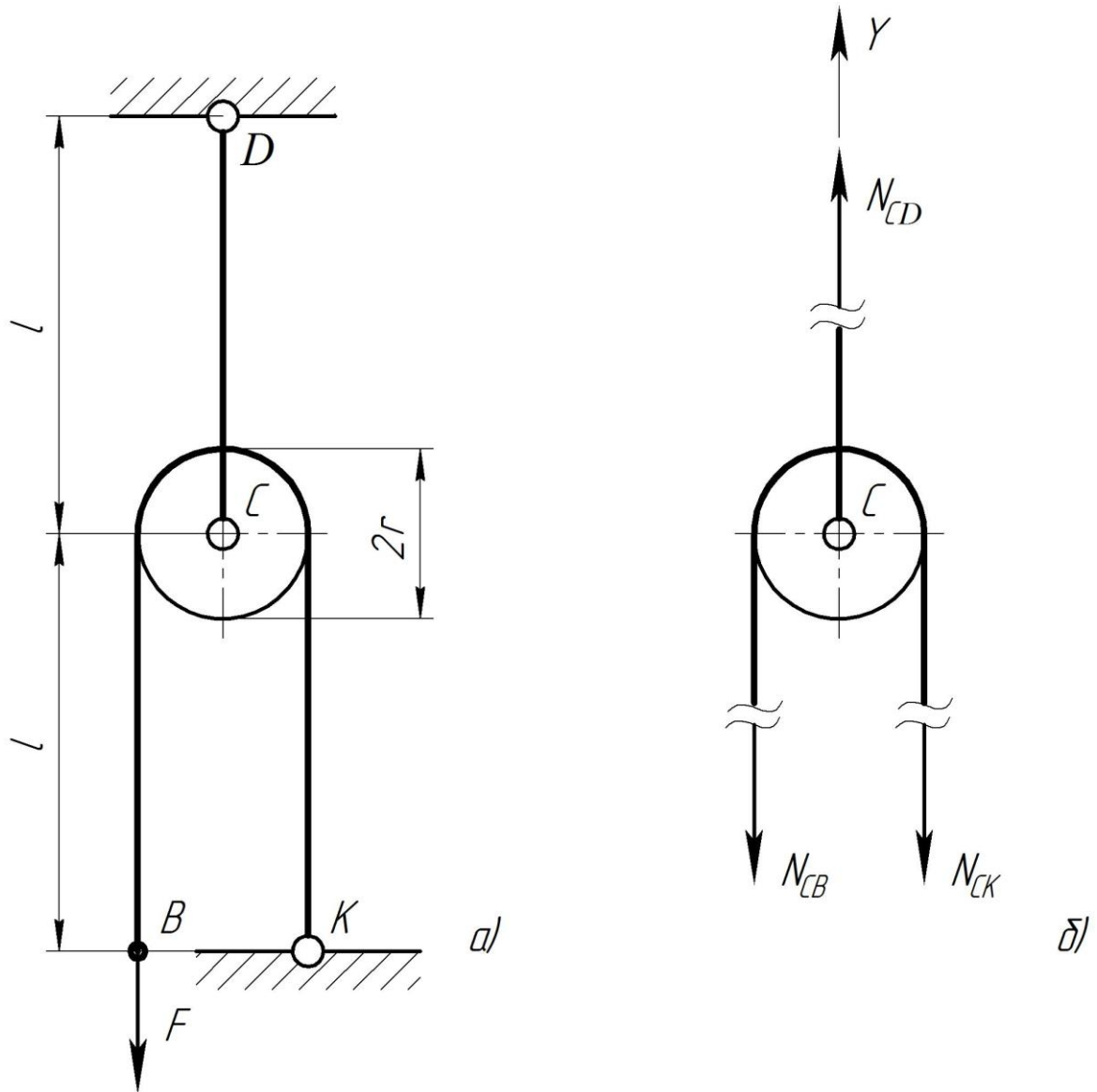


Рисунок 2.9

Приклад 2.3. Конічний стрижень розтягується власною вагою (рис. 2.10а). Знайти залежність між переміщенням будь-якого поперечного перетину стрижня від власної ваги і відстанню від закріпленої основи, а також загальне переміщення вільного кінця стрижня. Дано h і d – розміри стрижня, γ – питома вага матеріалу стрижня, E – модуль пружності матеріалу стрижня.

Розв'язування

На поперечний перетин стрижня з координатою x діє сила ваги стрижня (рис. 2.10б), яка знаходиться нижче перетину

$$F(x) = v(x) \cdot \gamma,$$

де $v(x)$ – об'єм конусної частини стрижня з висотою $(h - x)$,

$$v(x) = \frac{1}{3} (A(x) \cdot (h - x)),$$

$A(x)$ – площа поперечного перетину стрижня з координатою x .

Переміщення відрізка dx від власної ваги стрижня за законом Гука

$$\Delta l(dx) = \frac{F(x) \cdot dx}{E \cdot A(x)} = \frac{A(x) \cdot (h - x) \cdot \gamma \cdot dx}{3 \cdot E \cdot A(x)} = \frac{(h - x) \cdot \gamma \cdot dx}{3 \cdot E}.$$

Визначимо залежність між координатою x (див. рис. 2.10б) та переміщенням поперечного перетину стрижня

$$\Delta l(x) = \int_0^x \frac{(h - x) \cdot \gamma \cdot dx}{3 \cdot E} = \frac{\gamma}{3 \cdot E} \cdot \left(h \cdot x - \frac{x^2}{2} \right).$$

Загальне переміщення вільного кінця конусного стрижня від власної ваги при $x = h$

$$\Delta l(h) = \frac{\gamma}{3 \cdot E} \cdot \left(h \cdot h - \frac{h^2}{2} \right) = \frac{h^2 \cdot \gamma}{6 \cdot E}.$$

Відповідь: переміщення будь-якого поперечного перетину стрижня від власної ваги $\Delta l(x) = \frac{\gamma}{3 \cdot E} \cdot \left(h \cdot x - \frac{x^2}{2} \right)$; загальне переміщення вільного

кінця конусного стрижня від власної ваги $\Delta l(h) = \frac{h^2 \cdot \gamma}{6 \cdot E}$.

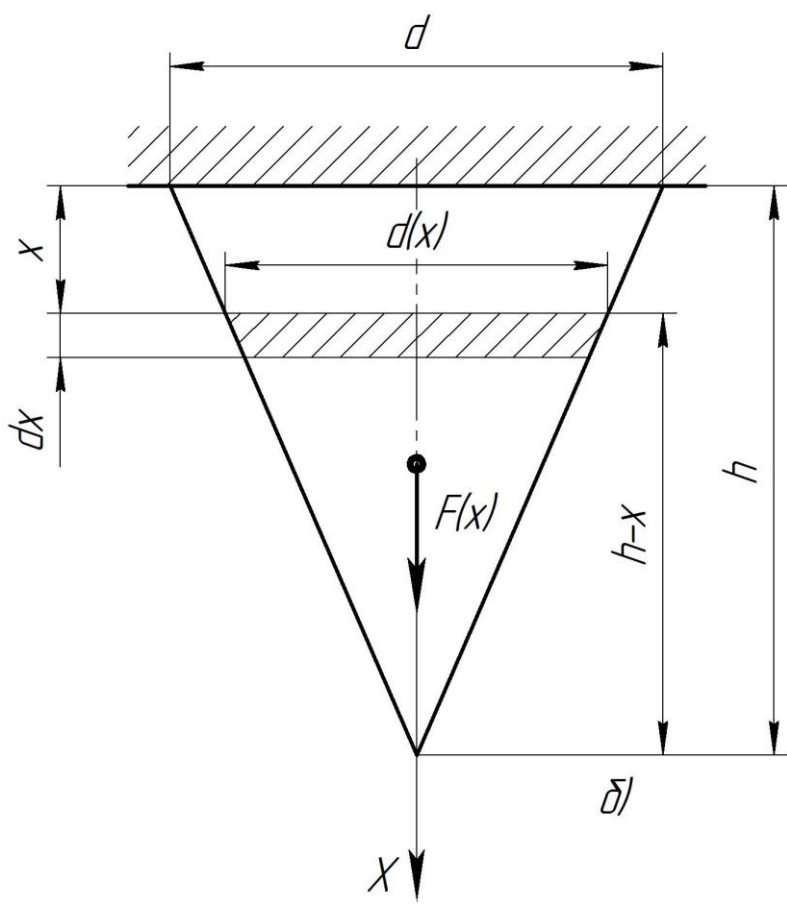
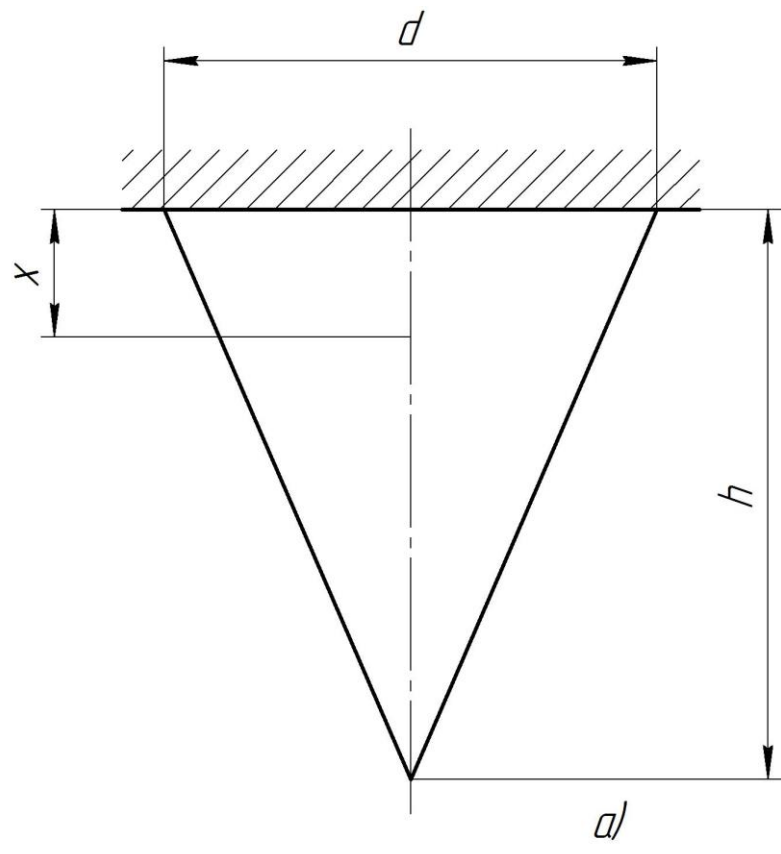


Рисунок 2.10

Приклад 2.4. Заданий стрижень довжиною l змінною поперечного перетину. Поперечний перетин в місці закріплення має форму прямокутника із сторонами a і b (рис. 2.11а), $a = \text{const}$. Визначити видовження стрижня від власної ваги, якщо питома вага γ та модуль пружності E матеріалу стрижня відомі.

Розв'язування

Видовження елементарного відрізка стрижня, dx , на відстані x від початку координат (рис. 2.11б) за законом Гука

$$\Delta l(dx) = \frac{F(x) \cdot dx}{E \cdot A(x)}, \quad (1)$$

де $F(x)$ – сила ваги стрижня, яка діє на елемент dx ,

$$F(x) = v(x) \cdot \gamma;$$

$v(x)$ – об'єм стрижня обмежений координатою x ,

$$v(x) = \frac{1}{2} \cdot b(x) \cdot a \cdot x;$$

$A(x)$ – площа поперечного перетину стрижня на відстані x від початку координат,

$$A(x) = b(x) \cdot a.$$

Отже залежність (1) набуде вигляду

$$\Delta l(dx) = \frac{\frac{1}{2} \cdot b(x) \cdot a \cdot x \cdot \gamma \cdot dx}{E \cdot b(x) \cdot a} = \frac{x \cdot \gamma \cdot dx}{2 \cdot E}.$$

Видовження стрижня довжиною l від власної ваги

$$\Delta l(l) = \int_0^l \frac{x \cdot \gamma \cdot dx}{2 \cdot E} = \frac{x^2 \cdot \gamma \cdot dx}{4 \cdot E} \Big|_0^l = \frac{l^2 \cdot \gamma}{4 \cdot E}.$$

Відповідь: видовження стрижня від власної ваги $\Delta l(l) = \frac{l^2 \cdot \gamma}{4 \cdot E}$.

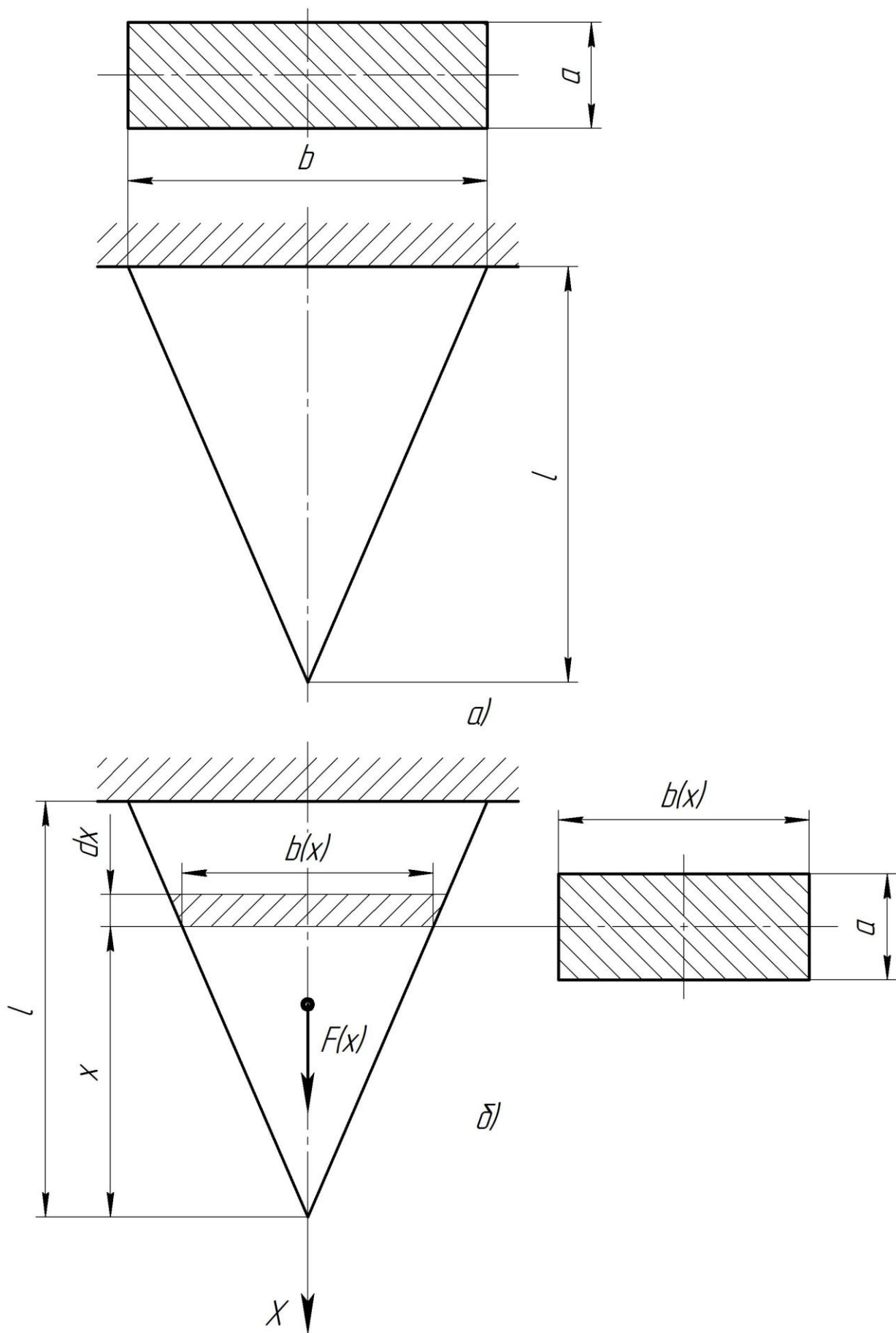


Рисунок 2.11

Приклад 2.5. Два абсолютно жорстких бруси BK і LD (рис. 2.12а), з'єднанні між собою за допомогою пружних стрижнів CE , KE і KD , для яких $E \cdot A = const$. Визначити зусилля у стрижнях CE , KE і KD .

Розв'язування

Розглядувана система (див. рис. 2.11а) зазнає деформації розтягу–стиску. Щоб визначити зусилля у стрижнях CE , KE і KD відкинемо зовнішні в'язі (зв'язки). В даному випадку шарнірно-нерухомі опори B і L накладені на стрижневу систему, замінимо їх дію силами реакцій (рис. 2.12б). Складаємо рівняння рівноваги стрижневої системи:

$$\sum X = 0, \quad -B_X - L_X = 0; \quad (1)$$

$$\sum Y = 0, \quad B_Y + L_Y - F = 0; \quad (2)$$

$$\sum M_L = 0, \quad B_X \cdot l - F \cdot l = 0. \quad (3)$$

Задана система $4-3=1$ раз статично невизначена по відношенню до зовнішніх сил реакцій.

Розглянемо рівновагу бруса BK (рис. 2.12в). Замінимо дію стрижнів CE , KE і KD на брус BK силами N_{CE} , N_{KE} і N_{KD} . Запишемо рівняння статички для бруса BK :

$$\sum X = 0, \quad -B_X + N_{KE} \cdot \cos 45^\circ = 0; \quad (4)$$

$$\sum Y = 0, \quad B_Y - F + N_{CE} + N_{KE} \cdot \sin 45^\circ + N_{KD} = 0; \quad (5)$$

$$\sum M_B = 0, \quad N_{KD} \cdot 2 \cdot l + N_{KE} \cdot \sin 45^\circ \cdot 2 \cdot l + N_{CE} \cdot l - F \cdot l = 0. \quad (6)$$

Задана система (див. рис. 2.12в) один раз статично невизначена. Для розкриття статичної невизначеності розглядаємо деформацію системи (рис. 2.12г), за умови, що точка B нерухома. З подібності $\Delta CC_1B \sim \Delta KK_1B$, отримаємо

$$\frac{KK_1}{CC_1} = \frac{2 \cdot l}{l} = 2. \quad (7)$$

У даному випадку:

$$KK_1 = \Delta l_{KD} = \frac{N_{KD} \cdot l}{E \cdot A};$$

$$CC_1 = \Delta l_{CE} = \frac{N_{CE} \cdot l}{E \cdot A}.$$

де Δl_{KD} , Δl_{CE} – видовження стрижнів KD і CE .

Враховуючи (7) визначимо

$$N_{KD} = 2 \cdot N_{CE}. \quad (8)$$

Розв'язуючи рівняння (3) і (4), отримаємо:

$$B_X = F; \quad (9)$$

$$N_{KE} = \frac{B_X}{\cos 45^\circ} = \frac{2 \cdot F}{\sqrt{2}}. \quad (10)$$

Отримані значення зусиль у стрижнях N_{KD} , N_{KE} та складову опорної реакції B_X підставляємо у рівняння (6)

$$2 \cdot N_{CE} \cdot 2 \cdot l + \frac{2 \cdot F}{\sqrt{2}} \cdot \sin 45^\circ \cdot 2 \cdot l + N_{CE} \cdot l - F \cdot l = 0,$$

звідки визначимо зусилля у стрижні N_{CE}

$$N_{CE} = -\frac{F}{5}.$$

З рівняння (8) визначимо зусилля у стрижні N_{KD}

$$N_{KD} = 2 \cdot -\frac{F}{5} = -\frac{2 \cdot F}{5}.$$

Складові сил реакцій опор B і L визначаємо із рівнянь (5), (1) і (2):

$$\begin{aligned} B_Y &= F - N_{CE} - N_{KE} \cdot \sin 45^\circ - N_{KD} = \\ &= F - \left(-\frac{F}{5}\right) - \frac{2 \cdot F}{\sqrt{2}} \cdot \sin 45^\circ - \left(-\frac{2 \cdot F}{5}\right) = \frac{3 \cdot F}{5}; \end{aligned}$$

$$L_X = -B_X = -F;$$

$$L_Y = F - B_Y = F - \frac{3 \cdot F}{5} = \frac{2 \cdot F}{5}.$$

Знаки «мінус» вказують на те, що напрями дії сил будуть протилежними напрямкам вказаним на рисунках (див. рис. 2.12б, в).

Відповідь: реакції в опорах $B_X = F$; $B_Y = 3 \cdot F/5$; $L_X = -F$;
 $L_Y = 2 \cdot F/5$; та зусилля у стрижнях $N_{CE} = -F/5$;
 $N_{KE} = 2 \cdot F/\sqrt{2}$; $N_{KD} = -2 \cdot F/5$.

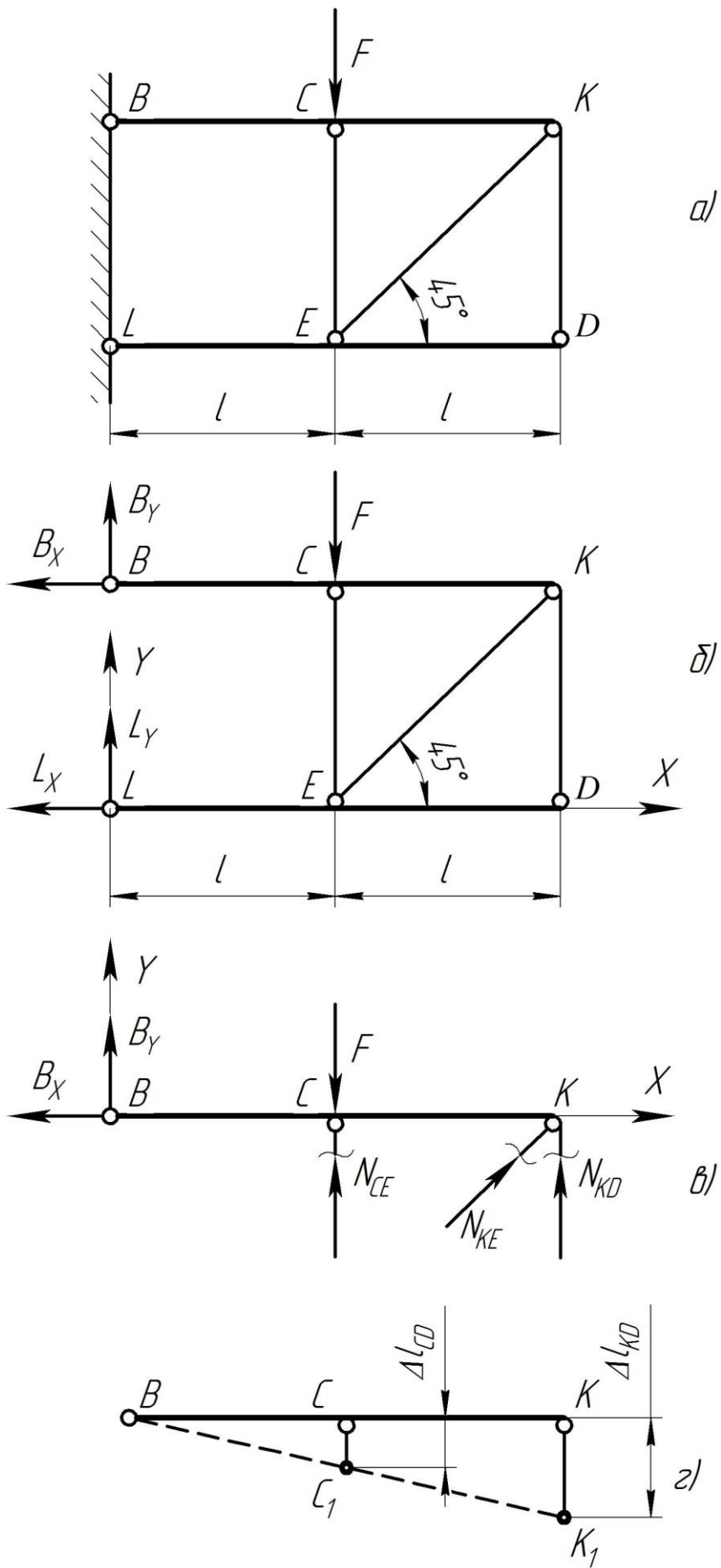


Рисунок 2.12

Приклад 2.6. Абсолютно жорсткий стрижень BC підвішений на трьох пружних стрижнях $1, 2$ і 3 . Перед складанням конструкції крайні стрижні 1 і 3 мали однакову довжину $l = 0,2$ м, а центральний був коротший на величину $\delta = 2,5$ мм (рис. 2.13а). Визначити напруження, які виникають у стрижнях після складання конструкції (явищем втрати стійкості знехтувати). Дано: площі поперечних перетинів стрижнів $A_{1,3} = A_1 = A_3 = 1,5 \cdot 10^{-4}$ м²; $A_2 = 2,0 \cdot 10^{-4}$ м²; модуль пружності матеріалу стрижнів $E = 2 \cdot 10^5$ МПа.

Розв'язування

Розглянемо рівновагу абсолютно жорсткого стрижня BC після монтажу конструкції (рис. 2.13б). Стрижні 1 і 3 зазнають деформації стиску, в них виникають стискаючі сили N_1 і N_3 . Стрижень 2 зазнає розтягу у ньому виникає розтягуюча сила N_2 .

Запишемо рівняння статки:

$$\sum Y = 0, \quad -N_1 + N_2 - N_3 = 0; \quad (1)$$

$$\sum M_K = 0, \quad N_1 \cdot a - N_3 \cdot a = 0. \quad (2)$$

З рівняння (2) визначимо, що $N_1 = N_3$. Позначимо їх $N_{1,3} = N_1 = N_3$. З рівняння (1) матимемо, що

$$N_2 = 2 \cdot N_{1,3}. \quad (3)$$

Система $3-2=1$ раз статично невизначена (три невідомі величини N_1 , N_2 і N_3 , а складено два рівняння статки).

Для розкриття статичної невизначеності складаємо рівняння сумісності деформацій (рис. 2.13в)

$$\delta = \Delta l_{1,3} + \Delta l_2, \quad (4)$$

де $\Delta l_{1,3}$ – абсолютні деформації стрижнів 1 і 3 , визначаємо їх за законом Гука

$$\Delta l_{1,3} = \frac{N_{1,3} \cdot l}{E \cdot A_{1,3}}; \quad (5)$$

Δl_2 – абсолютна деформація стрижня 2, визначаємо за законом Гука

$$\Delta l_2 = \frac{N_2 \cdot l}{E \cdot A_2} = \frac{2 \cdot N_{1,3} \cdot l}{E \cdot A_2}. \quad (6)$$

Підставляючи залежності (5) і (6) у рівняння (4), отримаємо

$$\delta = \frac{N_{1,3} \cdot l}{E \cdot A_{1,3}} + \frac{2 \cdot N_{1,3} \cdot l}{E \cdot A_2} = \frac{N_{1,3} \cdot l}{E} \left(\frac{1}{A_{1,3}} + \frac{2}{A_2} \right). \quad (7)$$

Так як видовження δ відоме з умови задачі, то з (7) визначимо зусилля в стрижнях 1 і 3:

$$N_{1,3} = \frac{\delta \cdot E}{l \cdot \left(\frac{1}{A_{1,3}} + \frac{2}{A_2} \right)} = \frac{2,5 \cdot 10^{-3} \cdot 2 \cdot 10^5}{0,2 \cdot \left(\frac{1}{1,5 \cdot 10^{-4}} + \frac{2}{2 \cdot 10^{-4}} \right)} = 150 \cdot 10^{-3} \text{ МН} = 150 \text{ кН}.$$

Тоді зусилля у стрижні 2 буде

$$N_2 = 2 \cdot N_{1,3} = 2 \cdot 150 = 300 \text{ кН}.$$

Визначимо напруження в стрижнях:

$$\sigma_{1,3} = -\frac{N_{1,3}}{A_{1,3}} = -\frac{150 \cdot 10^{-3}}{1,5 \cdot 10^{-4}} = -1000 \text{ МПа};$$

$$\sigma_2 = \frac{N_2}{A_2} = \frac{300 \cdot 10^{-3}}{2 \cdot 10^{-4}} = 1500 \text{ МПа}.$$

Відповідь: зусилля у стрижнях $N_1 = N_3 = -150$ кН, $N_2 = 300$ кН;
напруження у стрижнях $\sigma_1 = \sigma_3 = -1000$ МПа;
 $\sigma_2 = 1500$ МПа.

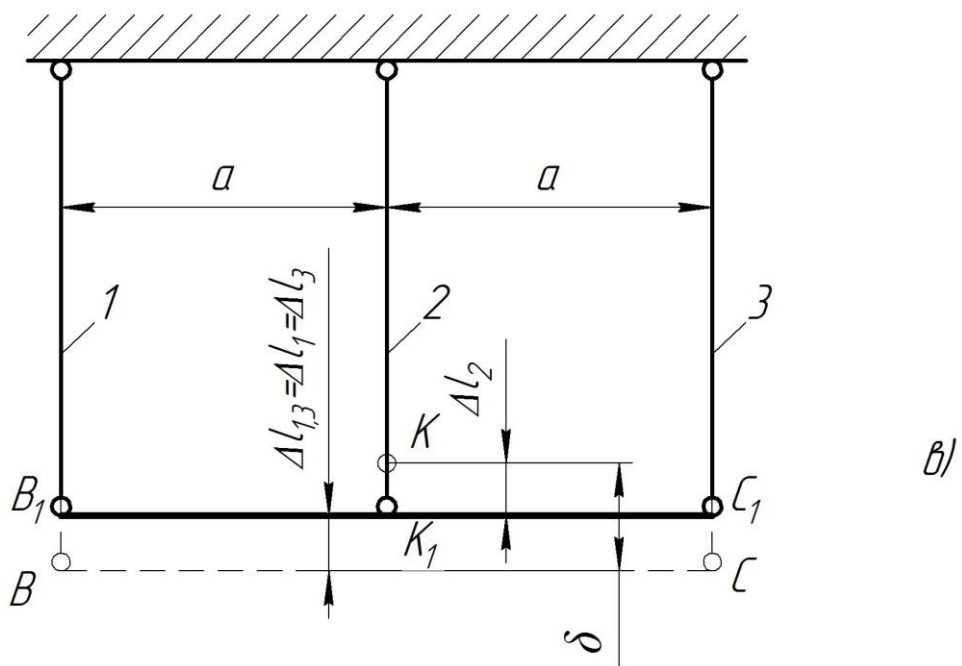
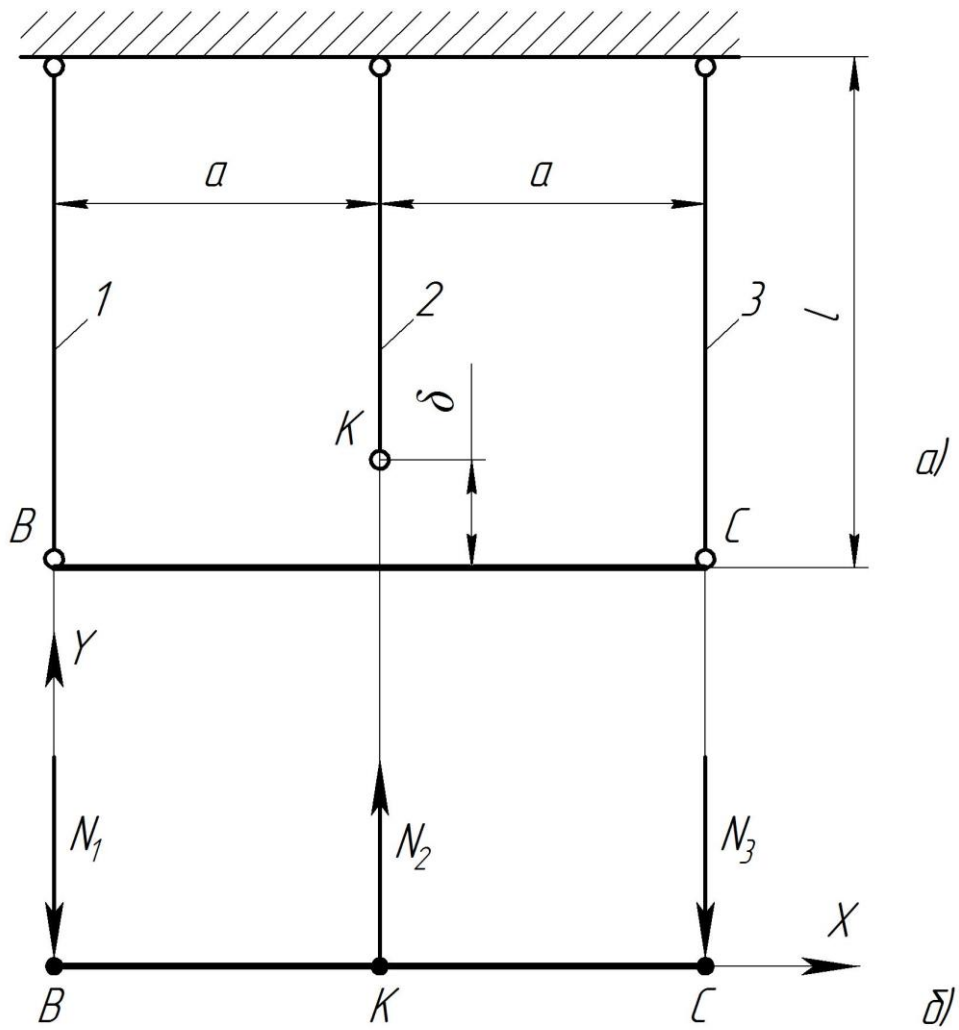


Рисунок 2.13

Приклад 2.7. Попередньо стиснений з обох боків силою F_0 стрижень BC додатково навантажений силою F (рис. 2.14а). При якому значенні F внутрішні зусилля на ділянках довжиною a і b будуть мати однакове за модулем значення?

Розв'язування

Стрижень (рис. 2.14а) зазнає деформації стиску–розтягу. Відкидаємо зовнішні зв'язки накладені на стрижень і заміняємо їх дію силами реакцій R_B і R_C (рис. 2.14б). Складаємо рівняння статички

$$\sum Y = 0, \quad R_B - F_0 - F + F_0 + R_C = 0. \quad (1)$$

Система $2-1=1$ раз статично невизначена. Для розкриття статичної невизначеності потрібно записати рівняння сумісності деформацій. Для складання геометричного рівняння сумісності деформацій розглядаємо та аналізуємо такі етапи фізико-механічних процесів, які відбуваються у стрижні.

Перший етап. Звільняємо стрижень від нижньої опори C (рис. 2.14в). До попереднього стискання силою F_0 , стрижень мав додаткове видовження Δl_{F_0} , яке компенсується силою F_0 .

Другий етап. Після додаткового навантаження силою F стрижень отримав додаткове видовження Δl_F (рис. 2.14г).

Третій етап. Сумарні деформації $\Delta l_{F_0} + \Delta l_F$ компенсуються силою реакції R_C та попереднім навантаженням F_0 .

Рівняння сумісності деформацій для стрижня BC

$$\Delta l_{F_0} + \Delta l_F = \Delta l_{R_C + F_0}. \quad (2)$$

Застосовуючи закон Гука для визначення деформацій при розтягу-стиску, рівняння (2) перепишемо у вигляді

$$\frac{F_0 \cdot (a+b)}{E \cdot A} + \frac{F \cdot a}{E \cdot A} = \frac{(R_C + F_0) \cdot (a+b)}{E \cdot A},$$

або

$$\frac{F \cdot a}{E \cdot A} = \frac{R_C \cdot (a+b)}{E \cdot A},$$

де $E \cdot A$ – жорсткість стрижня BC .

Реакція в опорі C буде

$$R_C = \frac{F \cdot a}{a+b} = \frac{F}{3}. \quad (3)$$

Із рівняння (1) отримаємо реакцію в опорі B

$$R_B = F - R_C = F - \frac{F}{3} = \frac{2}{3} \cdot F. \quad (4)$$

Визначаємо значення нормальних сил на ділянках a і b (рис. 2.14б):

$$N_a = R_B - F_0 = \frac{2}{3} \cdot F - F_0; \quad (5)$$

$$N_b = -(R_C + F_0) = -\left(\frac{F}{3} + F_0\right). \quad (6)$$

За умовою задачі внутрішні зусилля на ділянках стрижня довжиною a і b мають однакове за модулем значення

$$|N_a| = |N_b|. \quad (7)$$

Враховуючи залежності (5) і (6) рівняння (7) перепишемо у вигляді

$$\frac{2}{3} \cdot F - F_0 = \frac{F}{3} + F_0,$$

звідки

$$F = 6 \cdot F_0.$$

Відповідь: значення сили $F = 6 \cdot F_0$.

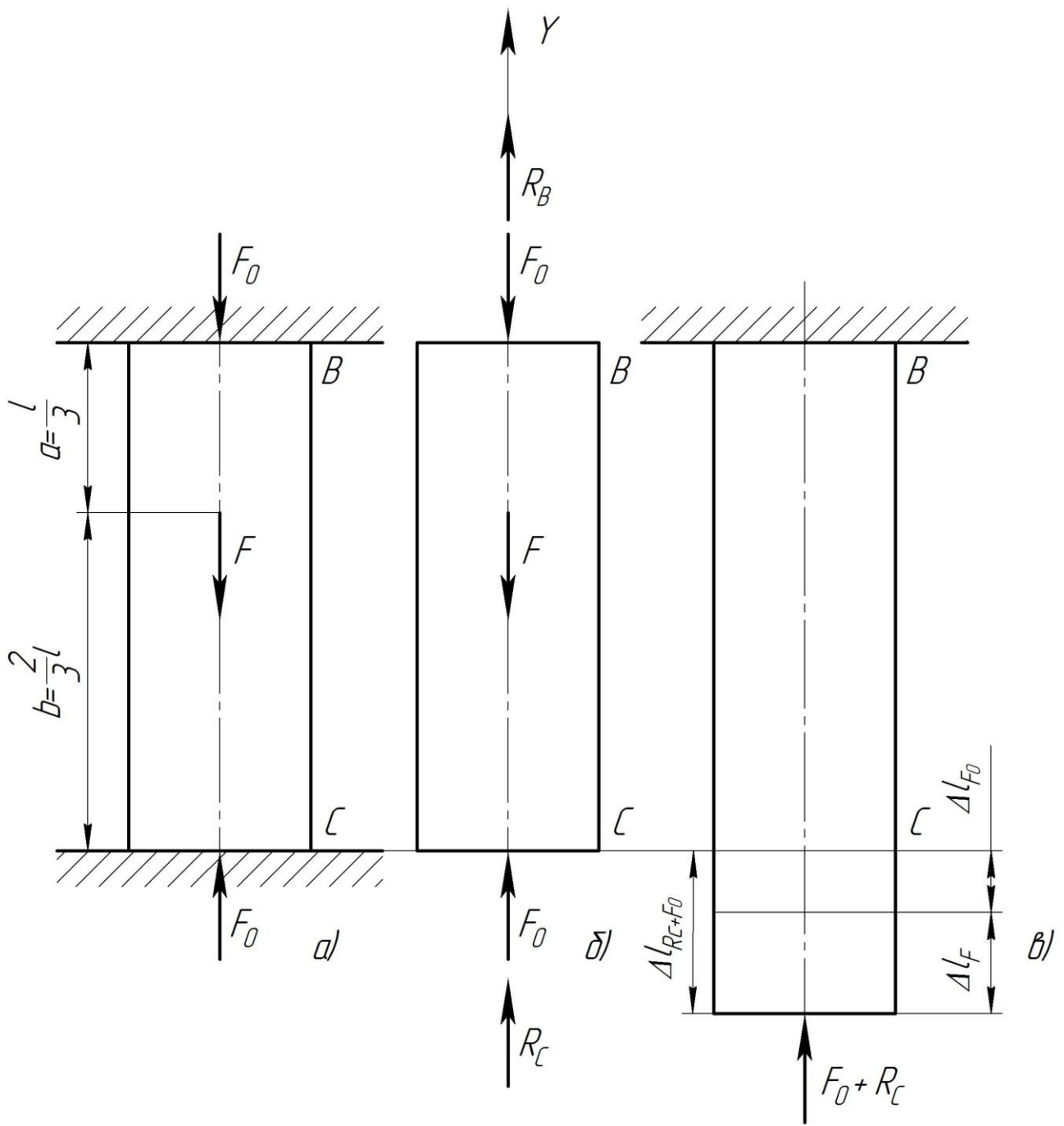


Рисунок 2.14

Приклад 2.8. Металевий стрижень довжиною l нерухомо закріплений з двох боків, має два варіанти виконання (рис. 2.15а, рис. 2.16а). В якому із вказаних варіантів виникають більші напруження при однаковій змінні температури Δt° ? Визначити максимально можливу різницю заданих напружень, якщо площі поперечних перетинів ділянок стрижня $A_2 > A_1$.

Розв'язування

Під час зміни температур (підвищення) на Δt° матеріал стрижня розширюється, у результаті цього в опорах B і C на стрижень діють сили тиску.

Варіант 1 (рис. 2.15а). Відкидаємо зовнішні зв'язки накладені на стрижень і заміняємо їх дію силами реакцій R_{B1} і R_{C1} (рис. 2.15б). Складаємо рівняння статички

$$\sum X = 0, \quad R_{B1} - R_{C1} = 0. \quad (1)$$

Система $2-1=1$ раз статично невизначена. Для розкриття статичної невизначеності потрібно записати рівняння сумісності деформацій. Для складання такого рівняння виконуємо такі логічні дії.

Умовно звільняємо стрижень від опори C . Завдяки цьому, через підвищення температури на Δt° , відбувається вільне осьове переміщення стрижня на відрізок Δl_{t1} (рис. 2.15в).

$$\Delta l_{t1} = \alpha \cdot l \cdot \Delta t^\circ, \quad (2)$$

де α – коефіцієнт лінійного температурного розширення матеріалу стрижня.

На наступному етапі сила реакцій R_{C1} опори C повертає поперечний перетин стрижня до початкового положення (рис. 2.15г) тому, що відстань між опорами не змінюється. Вкорочення стрижня від сили реакції R_{C1} згідно закону Гука

$$\Delta l_{R_{C1}} = \frac{R_{C1} \cdot l}{E \cdot A_1}. \quad (3)$$

Оскільки відстань між опорами B і C постійна і дорівнює довжині стрижня, тому рівняння сумісності деформацій

$$\Delta l_{t1} = \Delta l_{R_{C1}}. \quad (4)$$

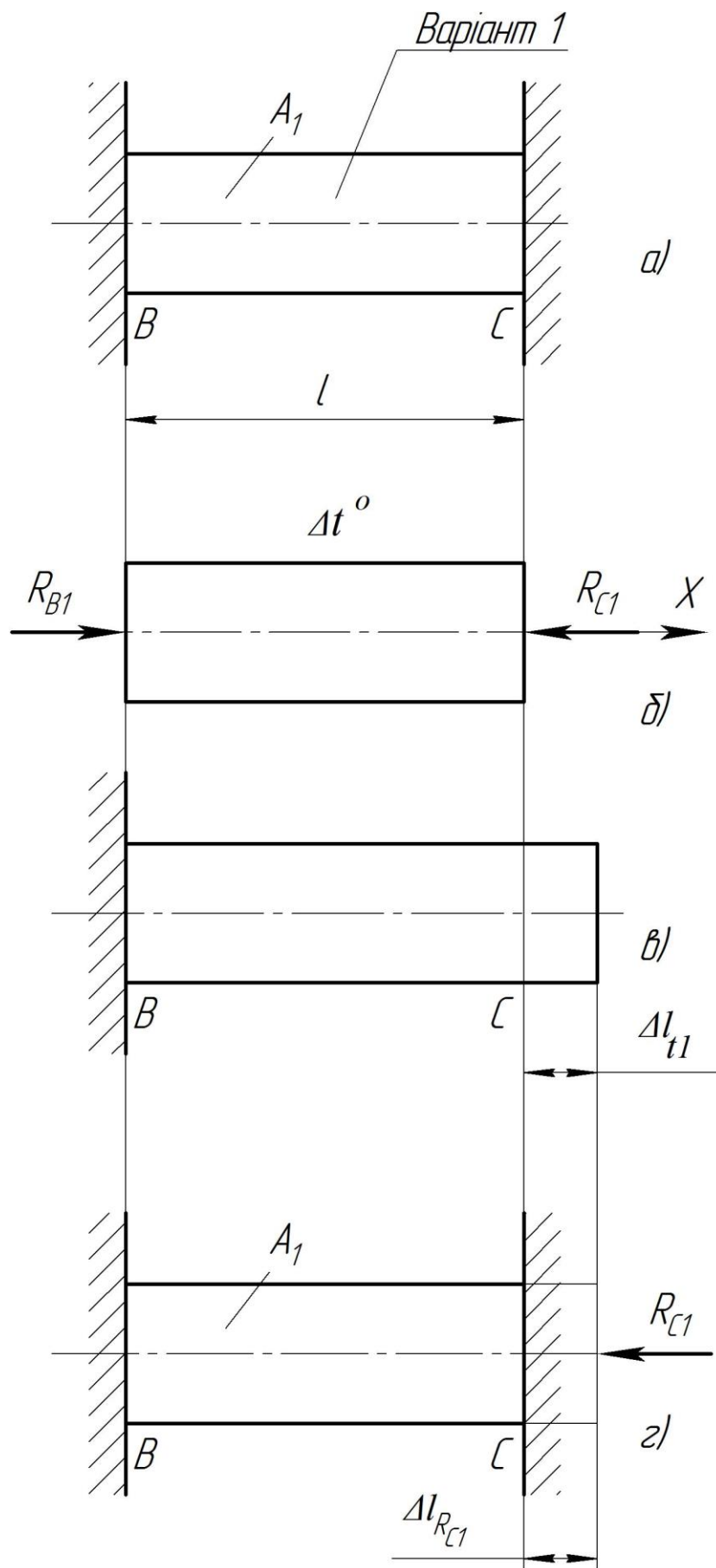


Рисунок 2.15

Підставляючи залежності (2) і (3) в рівняння (4), отримаємо:

$$\alpha \cdot l \cdot \Delta t^\circ = \frac{R_{C1} \cdot l}{E \cdot A_1},$$

звідки визначаємо силу реакції

$$R_{C1} = \alpha \cdot l \cdot \Delta t^\circ \cdot E \cdot A_1.$$

Визначаємо максимальні нормальні напруження у стрижні за модулем

$$\sigma_{\max 1} = \frac{N_1}{A_1} = \frac{|-\alpha \cdot l \cdot \Delta t^\circ \cdot E \cdot A_1|}{A_1} = \alpha \cdot l \cdot \Delta t^\circ \cdot E, \quad (5)$$

де N_1 – нормальна сила, яка виникає у стрижні

$$N_1 = -R_{C1} = -\alpha \cdot l \cdot \Delta t^\circ \cdot E \cdot A_1.$$

Варіант 2. Для другого варіанту виконання стрижня (рис. 2.16а) виконуємо аналогічні дії, як і для першого варіанту (рис. 2.16б, в). Записуємо рівняння статки

$$\sum X = 0, \quad R_{B2} - R_{C2} = 0; \quad (6)$$

відкидаємо опору C , визначаємо температурну деформацію стрижня

$$\Delta l_{t2} = \alpha \cdot l \cdot \Delta t^\circ; \quad (7)$$

і рівняння сумісності деформацій

$$\Delta l_{t2} = \Delta l_{R_{C2}}. \quad (8)$$

Відмінність виникає при визначенні абсолютного переміщення поперечного перетину C від сили реакції R_{C2} (рис. 2.16з):

$$\Delta l_{R_{C2}} = \frac{R_{C2} \cdot \frac{l}{2}}{E \cdot A_1} + \frac{R_{C2} \cdot \frac{l}{2}}{E \cdot A_2}. \quad (9)$$

Підставляючи залежності (7) і (9) у рівняння (8), отримаємо

$$\alpha \cdot l \cdot \Delta t^\circ = \frac{R_{C2} \cdot l}{2 \cdot E} \left(\frac{1}{A_1} + \frac{1}{A_2} \right) = \frac{R_{C2} \cdot l}{2 \cdot E} \left(\frac{A_1 + A_2}{A_1 \cdot A_2} \right),$$

звідки визначаємо опорну реакцію

$$R_{C2} = \frac{2 \cdot \alpha \cdot E \cdot l \cdot \Delta t^\circ \cdot A_1 \cdot A_2}{A_1 + A_2}. \quad (10)$$

Максимальні нормальні напруження в стрижні для другого варіанту виконання за модулем

$$\sigma_{\max 2} = \frac{N_2}{A_1} = \frac{|-2 \cdot \alpha \cdot E \cdot l \cdot \Delta t^\circ \cdot A_1 \cdot A_2|}{(A_1 + A_2) \cdot A_1} = \frac{2 \cdot \alpha \cdot E \cdot l \cdot \Delta t^\circ \cdot A_2}{A_1 + A_2}, \quad (11)$$

де N_2 – нормальна сила, яка виникає у стрижні

$$N_2 = -R_{C2} = -\frac{2 \cdot \alpha \cdot E \cdot l \cdot \Delta t^\circ \cdot A_1 \cdot A_2}{A_1 + A_2}.$$

Оскільки площа поперечного перетину A_1 менша із двох площ поперечних перетинів стрижня, в у цьому поперечному перетині діють максимальні напруження.

Порівняємо максимальні нормальні напруження для двох варіантів виконання стрижня користуючись залежностями (5) і (11):

$$\frac{\sigma_{\max 2}}{\sigma_{\max 1}} = \frac{2 \cdot \alpha \cdot E \cdot l \cdot \Delta t^\circ \cdot A_2}{\alpha \cdot l \cdot \Delta t^\circ \cdot E \cdot (A_1 + A_2)} = \frac{2 \cdot A_2}{(A_1 + A_2)}. \quad (12)$$

Аналізуючи рівняння (12), робимо висновок, що $\sigma_{\max 2} > \sigma_{\max 1}$, тому, що $A_1 < A_2$ (сума $A_1 + A_2 < 2 \cdot A_2$).

Різниця між напруженнями буде зростати при зменшенні площі поперечного перетину A_1

$$\begin{aligned} \sigma_{\max 2} - \sigma_{\max 1} &= \frac{2 \cdot \alpha \cdot E \cdot l \cdot \Delta t^\circ \cdot A_2}{A_1 + A_2} - \alpha \cdot E \cdot l \cdot \Delta t^\circ = \\ &= \alpha \cdot E \cdot l \cdot \Delta t^\circ \cdot \frac{A_2 - A_1}{A_2 + A_1}. \end{aligned}$$

Відповідь: максимальні нормальні напруження виникають для другого варіанту виконання стрижня $\sigma_{\max 2} > \sigma_{\max 1}$; максимальна різниця напружень становить

$$\sigma_{\max 2} - \sigma_{\max 1} = \alpha \cdot E \cdot l \cdot \Delta t^\circ \cdot \frac{A_2 - A_1}{A_2 + A_1}.$$

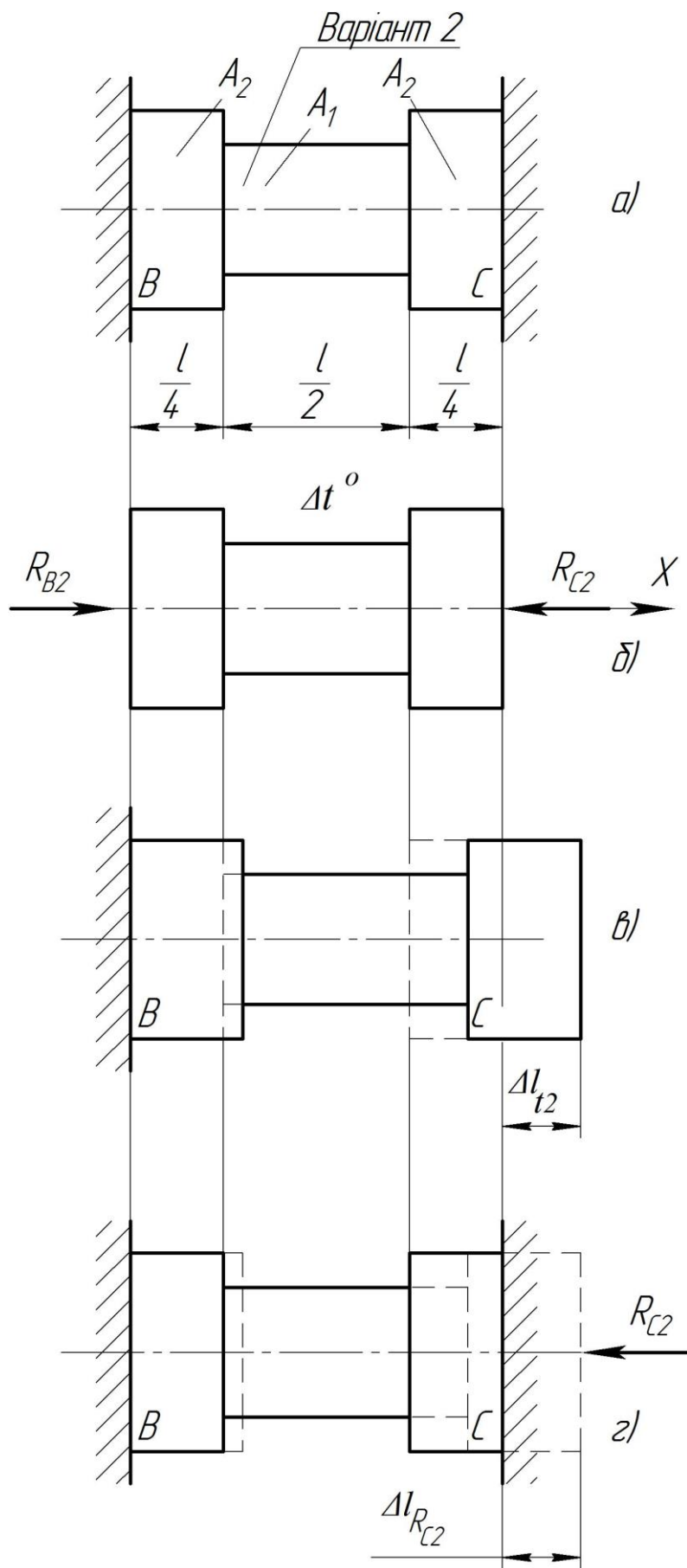


Рисунок 2.16

Приклад 2.9. Стрижень довжиною l розміщений без зазорів між двома абсолютно твердими стінками і нагрітий так, що температура матеріалу змінюється вздовж осі стрижня за законом

$$t(x) = t_B + (t_C - t_B) \cdot \left(\frac{x}{l}\right)^n, \text{ де } t_B = 10^\circ, t_C = 55^\circ - \text{температура у кінцевих}$$

перетинах стрижнів B і C (рис. 2.17а). Вивести формулу для розрахунку реакцій в опорах і напруження у стрижні, що виникають за рахунок нагрівання. Виконати розрахунок реакцій і напруження, якщо площа поперечного перетину стрижня $A = 20 \text{ см}^2$, модуль пружності матеріалу стрижня $E = 2 \cdot 10^5 \text{ МПа}$; коефіцієнт лінійного переміщення $\alpha = 125 \cdot 10^{-7} \frac{1}{^\circ\text{C}}$; $n=2$.

Розв'язування

Під час нагрівання матеріал стрижня розширюється і створює тиск на опори B і C . Відкинувши опори і замінивши їх дію на стрижень силами реакції R_B і R_C (рис. 2.17б), запишемо рівняння статички

$$\sum X = 0, \quad R_{B1} - R_{C1} = 0. \quad (1)$$

Система $2-1=1$ раз статично невизначена.

Для складання рівняння сумісності деформацій умовно звільняємо стрижень від опори C (рис. 2.17в). Використовуючи метод суперпозицій, який полягає в поетапному розділі фізичних явищ, запишемо, що:

$$\Delta l_t = \Delta l_{R_C}, \quad (2)$$

де Δl_t – лінійна деформація стрижня від зміни його температури;

Δl_{R_C} – лінійна деформація стрижня від дії реакції R_C .

Так як температура нагрівання стрижня змінна за його довжиною (рис. 2.17в), то залежність для визначення деформації елементарної ділянки dx буде

$$\Delta l_t(dx) = dx \cdot t(x) \cdot \alpha, \quad (3)$$

де α – коефіцієнт лінійного розширення;

$\Delta l_t(dx)$ – елементарне лінійне видовження ділянки довжиною dx , що знаходиться на відстані x від опори B ;

$t(x)$ – температура, яка діє на ділянці dx .

Видовження елементарної ділянки стрижня

$$\Delta l_t(dx) = \alpha \cdot \left(t_B + (t_C - t_B) \cdot \left(\frac{x}{l} \right)^n \right) \cdot dx. \quad (4)$$

Повна лінійна температурна деформація стрижня

$$\begin{aligned} \Delta l_t &= \alpha \cdot \int_0^l \left(t_B + (t_C - t_B) \cdot \left(\frac{x}{l} \right)^n \right) \cdot dx = \alpha \cdot \int_0^l \left(t_B + \frac{t_C - t_B}{l^n} \cdot x^n \right) \cdot dx = \\ &= \alpha \cdot \left(t_B \cdot x + \frac{t_C - t_B}{l^n} \cdot \frac{x^{n+1}}{n+1} \right) \Big|_0^l = \alpha \cdot \left(t_B \cdot l + \frac{t_C - t_B}{l^n} \cdot \frac{l^{n+1}}{n+1} \right) = \\ &= \alpha \cdot \left(t_B \cdot l + (t_C - t_B) \cdot \frac{l}{n+1} \right) = \alpha \cdot l \cdot \frac{t_C + t_B \cdot n}{n+1}. \end{aligned} \quad (5)$$

Лінійна деформація від дії сили реакції R_C згідно закону Гука

$$\Delta l_{R_C} = \frac{R_C \cdot l}{E \cdot A}. \quad (6)$$

Враховуючи залежності (5) і (6), розв'яжемо рівняння (2) і отримаємо значення реакції в опорі С

$$R_C = \alpha \cdot E \cdot A \cdot \frac{t_C + t_B \cdot n}{n+1}.$$

Нормальні напруження, що виникають в поперечному перетині стрижня визначимо за формулою

$$\sigma_C = \frac{R_C}{A} \alpha \cdot E \cdot \frac{t_C + t_B \cdot n}{n+1}.$$

Для зазначених в умові задачі величин визначаємо числові значення реакцій в опорах

$$R_C = 1,25 \cdot 10^{-7} \cdot 2 \cdot 10^5 \cdot 20 \cdot 10^{-4} \cdot \frac{55 + 10 \cdot 2}{2 + 1} = 1,25 \cdot 10^{-3} \text{ МН} = 1,25 \text{ кН};$$

$$R_B = R_C = 1,25 \text{ кН};$$

та напружень

$$\sigma_C = \frac{1,25 \cdot 10^{-3}}{20 \cdot 10^{-4}} = 0,625 \text{ МПа} = 625 \text{ кПа}.$$

Відповідь: реакції в опорах $R_C = \alpha \cdot E \cdot A \cdot \frac{t_C + t_B \cdot n}{n+1}$;

$$R_C = R_B = 1,25 \text{ кН};$$

$$\text{напруження } \sigma_C = \frac{R_C}{A} \alpha \cdot E \cdot \frac{t_C + t_B \cdot n}{n+1}; \quad \sigma_C = 625 \text{ кПа.}$$

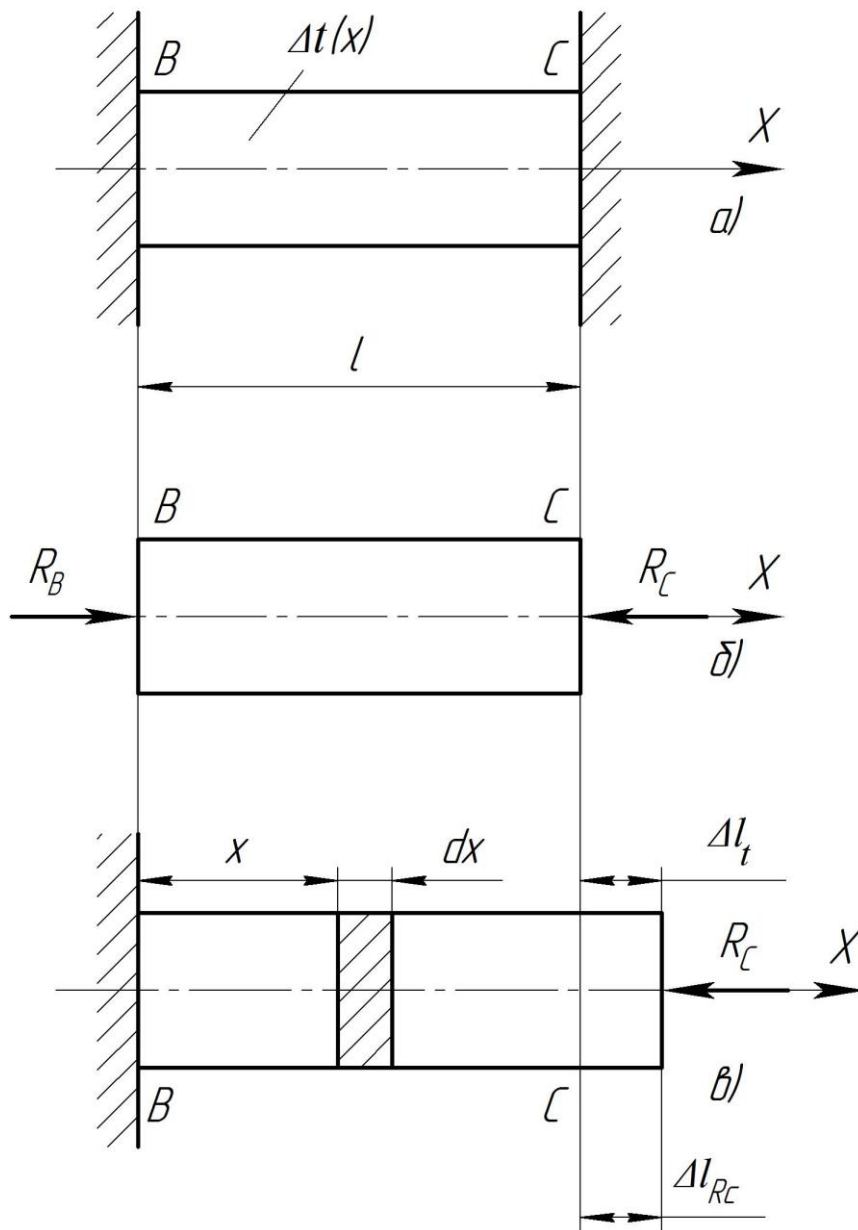
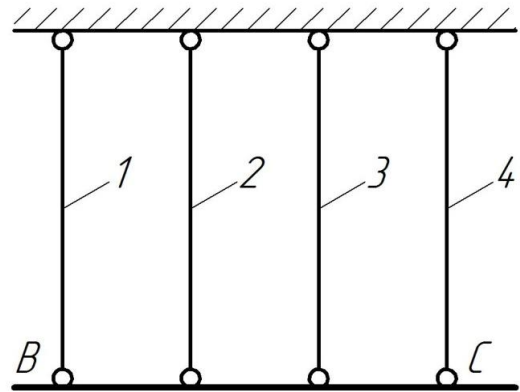


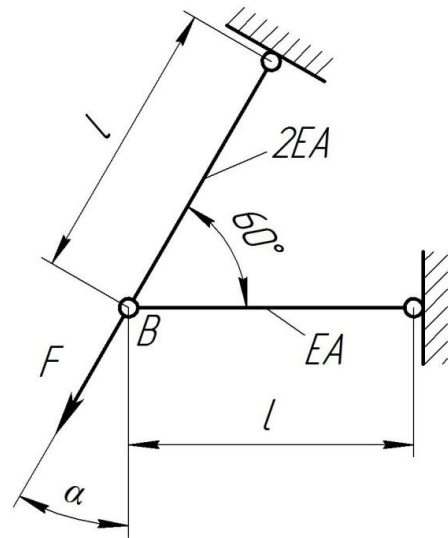
Рисунок 2.17

ЗАДАЧІ ДЛЯ САМОСТІЙНОГО РОЗВ'ЯЗУВАННЯ

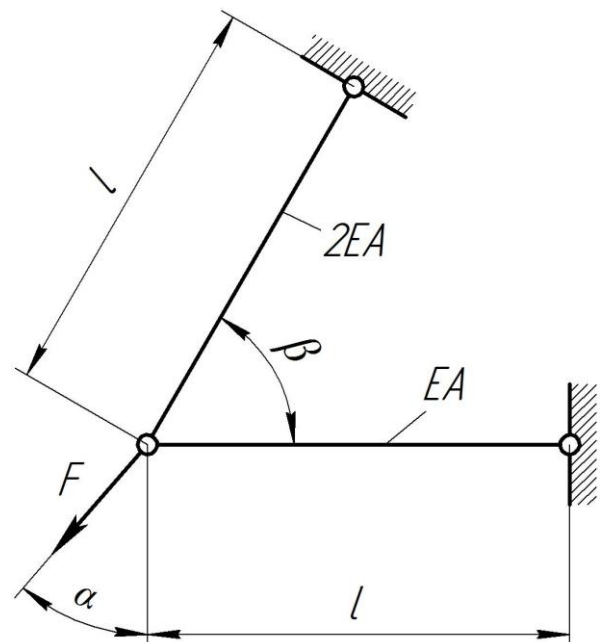
Задача 2.1. Номінальна довжина кожного з чотирьох стрижнів, на яких підвішений абсолютно жорсткий брус, повинна бути $l = 1\text{ м}$. Фактично стрижні були виготовлені із такими довжинами $l_1 = 1\text{ м}$; $l_2 = 0,998\text{ м}$; $l_4 = 0,999\text{ м}$. Якою повинна бути довжина l_3 , щоб після складання, брус займав горизонтальне положення. Вагою бруса знехтувати.



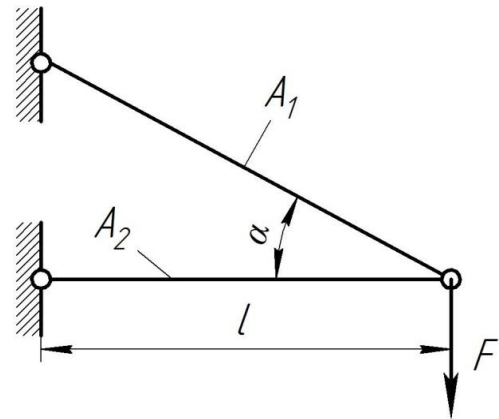
Задача 2.2. Стрижнева система складається з двох стрижнів, з'єднаних у точці A і навантажена силою F (див. рис.). Довжина стрижнів l і їх жорсткості на розтяг відомі. Кут між стрижнями 60° . Визначити під яким кутом α необхідно прикласти силу F , щоб вузол B міг переміщатися тільки горизонтально.



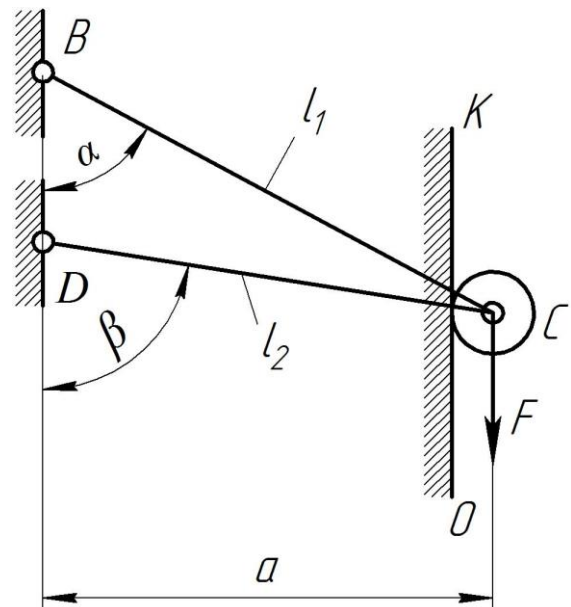
Задача 2.3. Визначити повну потенціальну енергію шарнірно-стрижневої системи (див. рис.). Визначити кут α , при якому вузол має тільки горизонтальне переміщення (прийняти $\beta = 60^\circ$).



Задача 2.4. На рисунку показано двохстрижневий кронштейн, навантажений силою F . Виліт кронштейна l . Допустиме напруження при розтягу–стиску $[\sigma]$. Знайти таке значення кута α , при якому задовольняється умова міцності і сумарний об'єм двох стрижнів мінімальний. При цьому визначити площі поперечних перетинів стрижнів A_1 , A_2 , V_{\max} і a . Примітка: втрата стійкості стрижня не розглядається.



Задача 2.5. Два стрижні BC і DC довжинами l_1 і l_2 , у точці C з'єднані з катком, який опирається на площину KO , завдяки чому точка C залишається весь час на прямій, яка співпадає із напрямом сили F (див. рис.). Знайти:

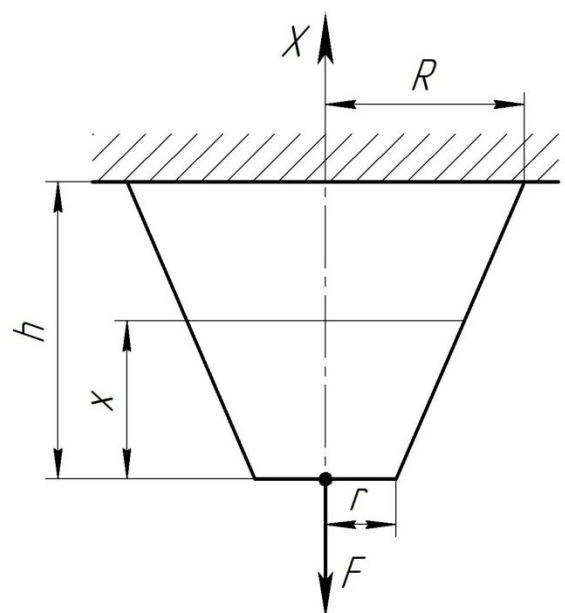


1) сили, які виникають у стрижнях від навантаження F , якщо діаметри і матеріали стрижнів однакові;

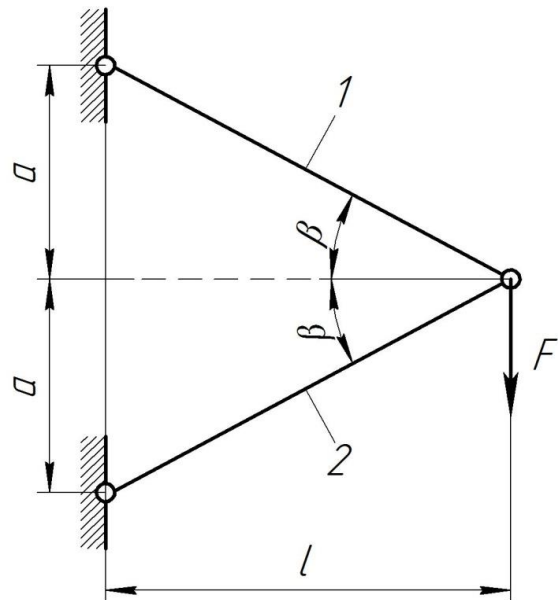
2) тиск катка на опорі.

Задача 2.6. Стрижень у вигляді зрізаного конуса завантажений зусиллям F (див. рис.) і власною вагою. Питома вага матеріалу стрижня – γ . Знайти координату перетину x , в якій напруження будуть мінімальними.

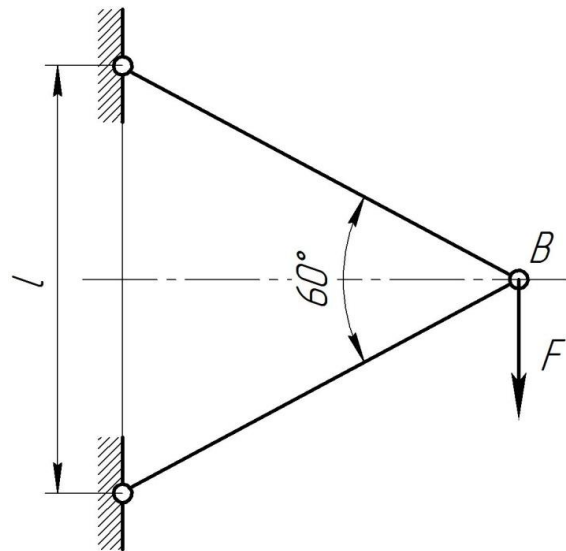
При виконанні якої умови найменші напруження будуть діяти у поперечному перетині?



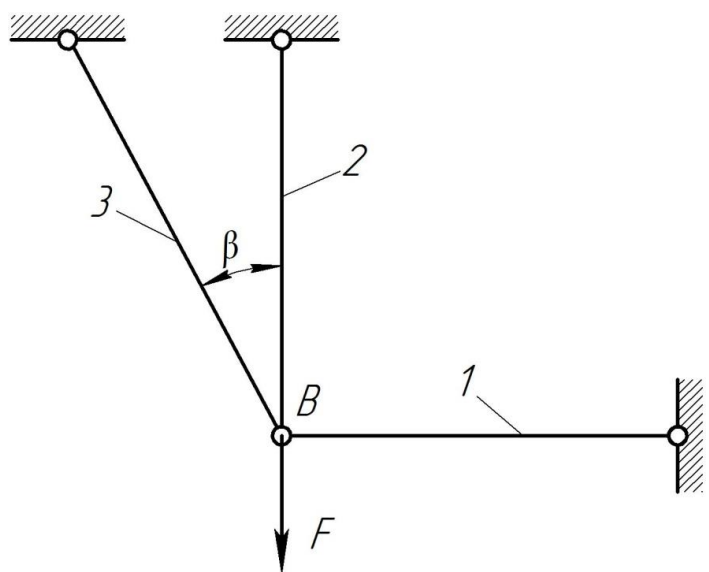
Задача 2.7. Однакові стрижні 1 і 2 шарнірно з'єднанні і навантажені силою F (див. рис.). Визначити a з мінімальної ваги стрижневої конструкції. Дано: $F, l, [\sigma], \gamma$.



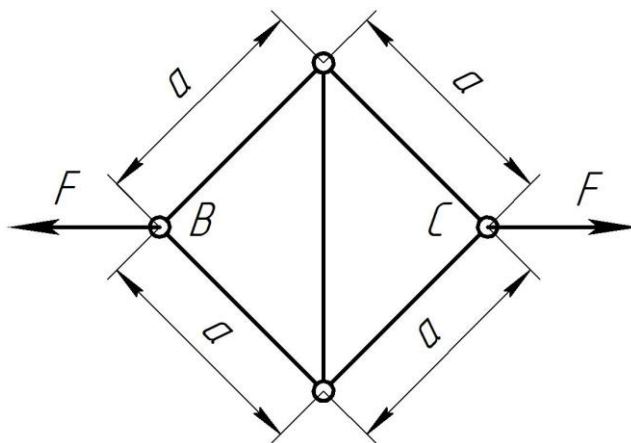
Задача 2.8. Кронштейн, що складається з двох сталевих стрижнів однакової довжини (див. рис.), навантажений вертикальною силою F . Визначити повну потенціальну енергію системи, а також горизонтальне, вертикальне і повне переміщення вузла B .



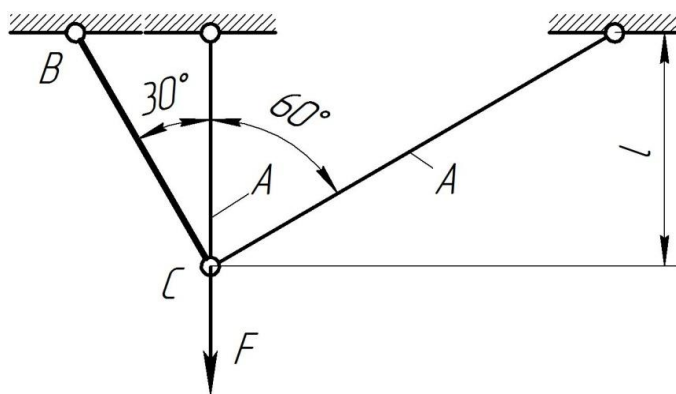
Задача 2.9. Три однакові стрижні шарнірно закріпленні в точці B (див. рис.). Визначити кут β , при якому стрижень 1 буде максимально навантаженим. Дано: F, l, E, A .



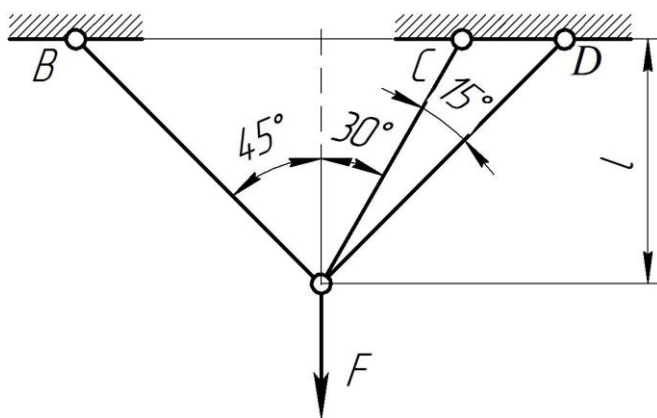
Задача 2.10. Шарнірний квадрат із діагоналлю навантажений силами F (див. рис.). Всі стрижні однакового поперечного перетину і виготовленні із одного і того ж самого матеріалу. На скільки віддаляться одна від одної точки B і C .



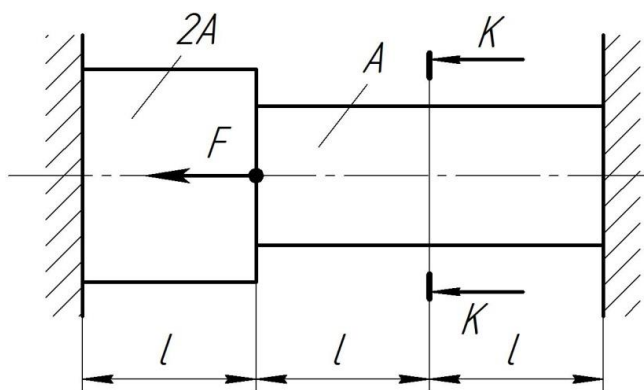
Задача 2.11. Переміщення вузла C у напрямку дії сили F дорівнює $0,5$ мм (див. рис.). Вважаючи, що $l=1$ м; $A=10^{-4}$ м; $E=2 \cdot 10^5$ МПа і враховуючи, що брус CB не деформується, визначити величину сили F .



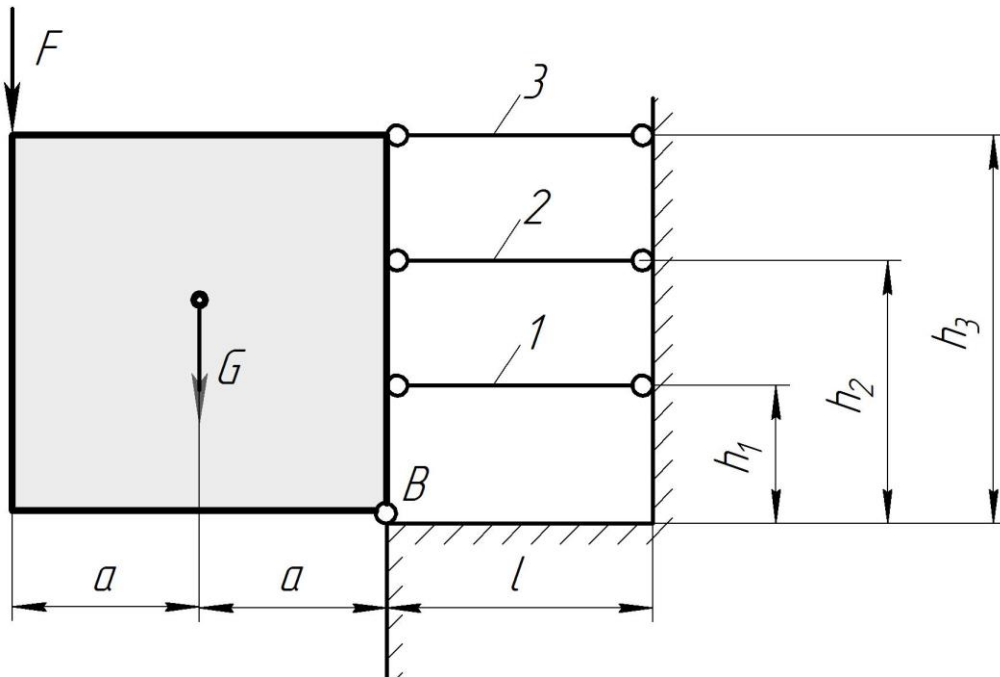
Задача 2.12. Вертикальна сила F діє на плоский вузол із не симетрично розташованими стрижнями. Визначити зусилля у стрижнях, вважаючи, що вони виконані із одного матеріалу і мають однаковий поперечний перетин.



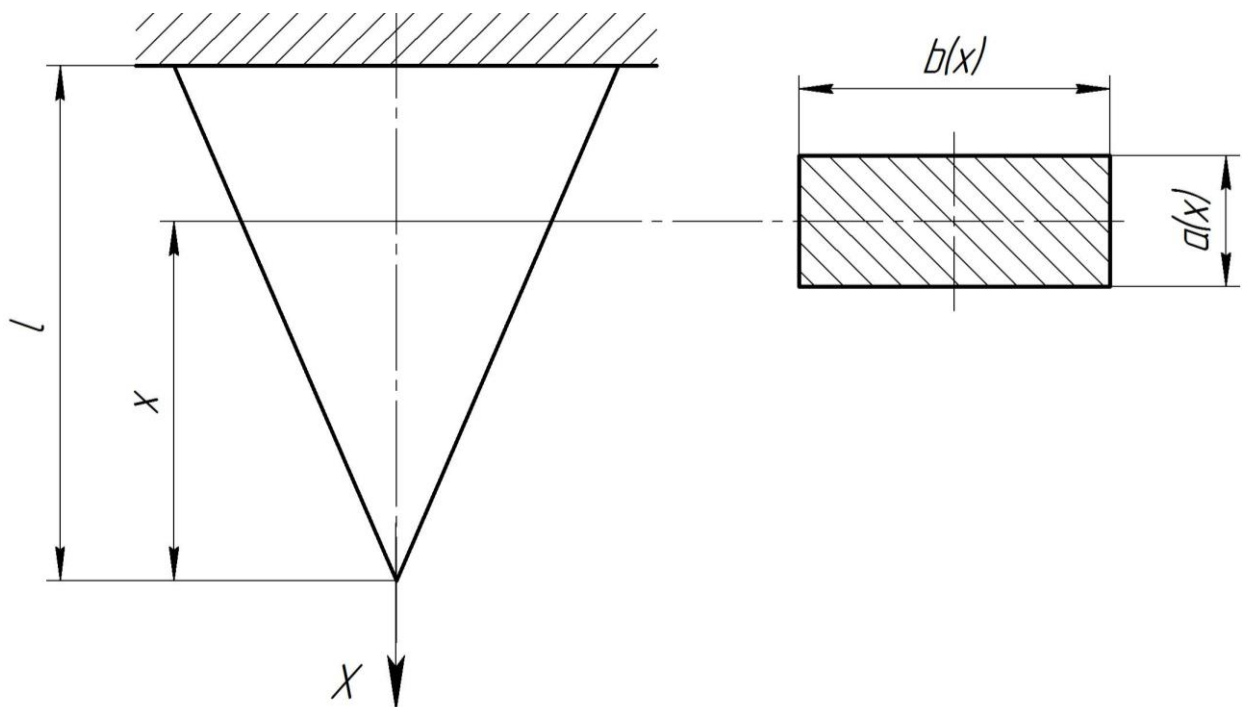
Задача 2.13. Брус, жорстко закріплений на кінцях, нагрітий на Δt° . Вважаючи розміри бруса, коефіцієнт лінійного розширення і модуль пружності матеріалу заданими, визначити, при якому значенні F перетин $K-K$ не отримає осьового переміщення. Побудувати за цих умов епюри поздовжніх сил, напружень та осьових переміщень.



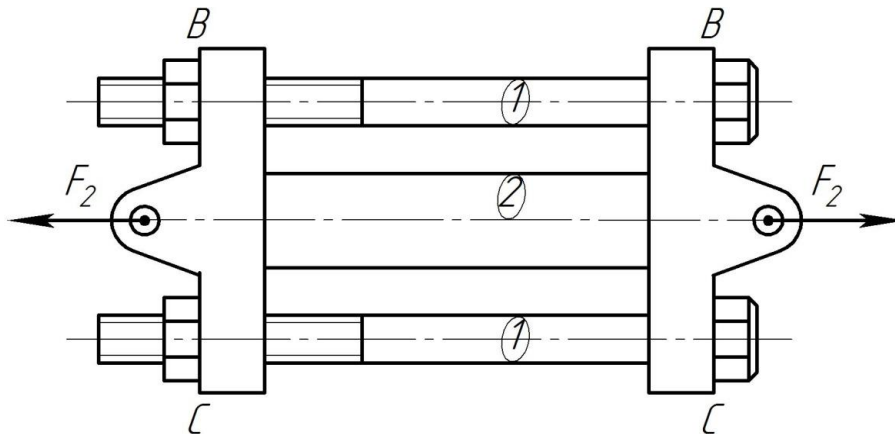
Задача 2.14. Абсолютно тверде (жорстке) плоске тіло вагою G шарнірно закріплене в точці B , підвішене на трьох шарнірно обпертих стрижнях і навантажене зосередженою силою F . Стрижні мають довжину l , площу поперечного перетину A і виготовлені із матеріалу з модулем пружності E . Відомі $F, G, a, l, h_1, h_2, h_3, A_1 = A_2 = A_3 = A, E_1 = E_2 = E_3 = E$. Необхідно визначити зусилля у стрижнях N_1, N_2, N_3 .



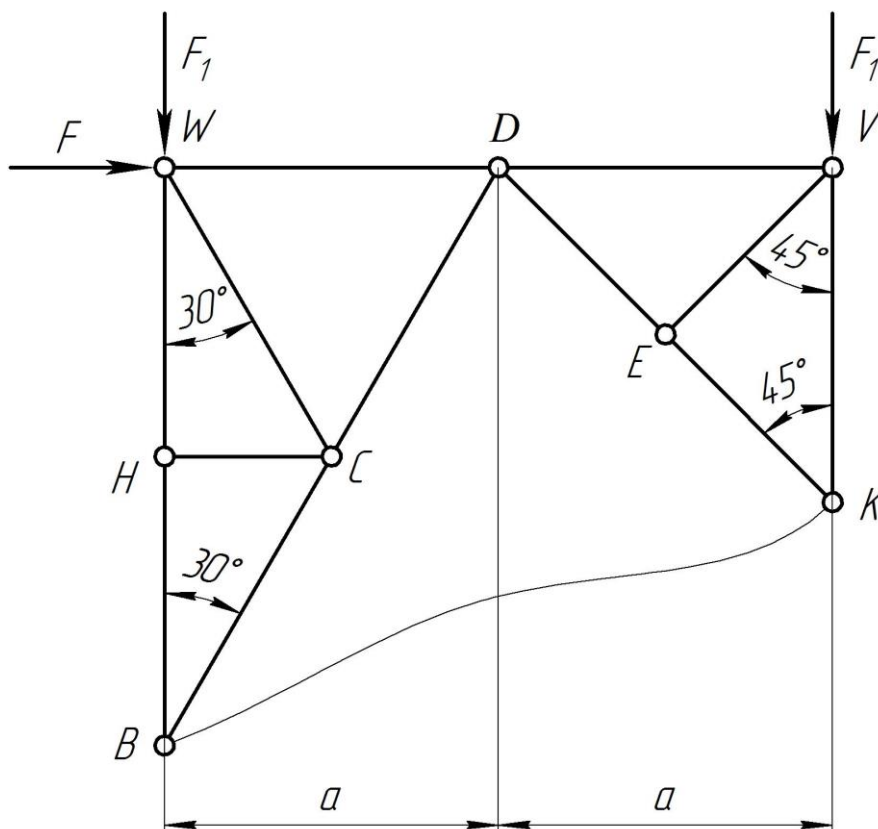
Задача 2.15. Заданий стрижень довжиною l змінного поперечного перетину. Поперечний перетин у місці закріплення має форму прямокутника із стороною a і b (див. рис.). Визначити видовження від власної ваги, якщо питома вага матеріалу γ і модуль пружності E відомі.



Задача 2.16. Загвинчуванням гайок на болтах $1-1$ (див. рис.) стрижень 2 виявився стиснутий силою $F_1 = 40$ кН. Після того до поперечин BC були прикладені сили $F_2 = 100$ кН. Визначити напруження, що виникають у болтах і стрижні. Діаметр болтів $d = 2$ см. Діаметр стрижня $D = 3$ см. Болти сталеві, $E = 200$ ГПа. Стержень чавунний, $E = 100$ ГПа.



Задача 2.17. Опора залізничної естакади є шарнірно-стрижневою системою (див. рис.). Визначити опорні реакції і зусилля у стрижнях. Підібрати площі поперечних перетинів для стрижнів BC , CD , DE , EK і знайти переміщення вузлів V і W (матеріал стрижнів – сталь 3) $F_1 = 15 \cdot F$.



3. ЗСУВ І КРУЧЕННЯ СТРИЖНІВ

Зсув. Напруження, деформації і закон Гука при зсуві

Зсув (зріз) – це такий вид деформації, при якому в будь-якому поперечному перетині бруса діє тільки поперечна (перерізуюча) сила Q (рис. 3.1а). Деформація зсуву доведена до руйнування матеріалу – **зріз**.

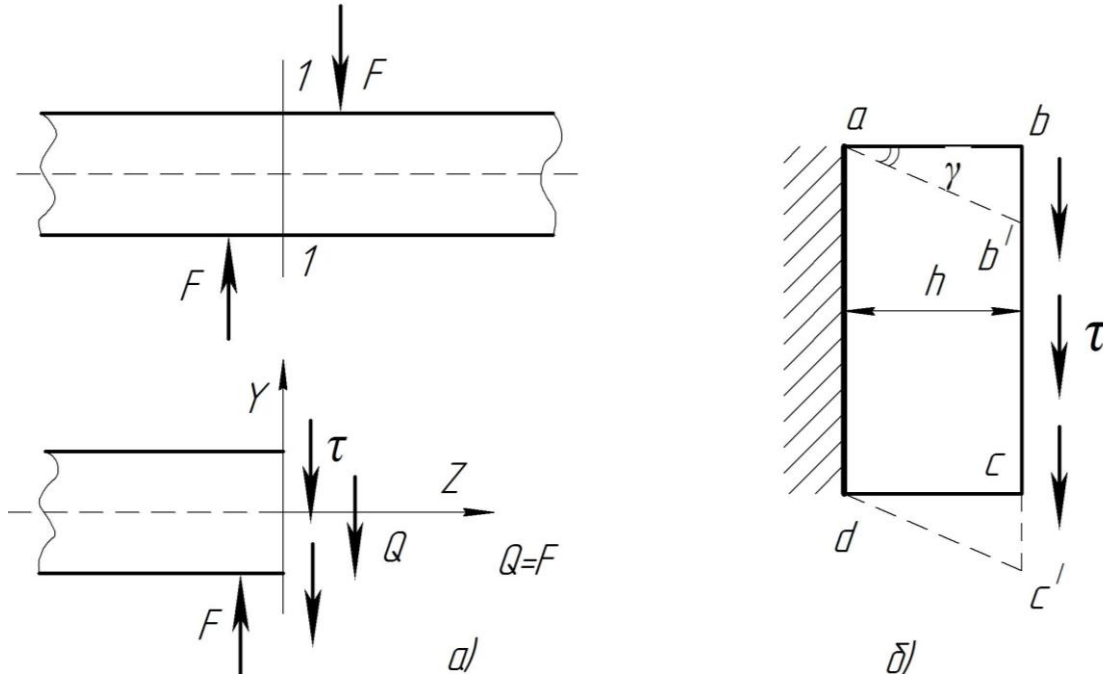


Рисунок 3.1

Вважаємо, що дотичні напруження, які виникають у поперечному перетині бруса при зсуві, $\tau = const$, тоді перерізуюча сила

$$Q = A \cdot \tau, \quad \text{тобто напруження } \tau = Q/A.$$

Умова міцності на зріз

$$\tau = \frac{Q}{A} \leq [\tau]_{ЗР},$$

де $[\tau]_{ЗР}$ – допустиме дотичне напруження на зріз, $[\tau]_{ЗР} = (0,25 \dots 0,35) \cdot \sigma_T$.

Деформація зсуву визначається кутом зсуву – γ . Абсолютний зсув бруса (рис. 3.1б) – bb' , cc' .

Закон Гука при зсуві

$$\tau = G \cdot \gamma,$$

де G – модуль зсуву, або модуль пружності II-го роду, характеризує жорсткість матеріалу.

Залежність між пружними характеристиками пластичного матеріалу (сталі) E , G , μ

$$G = \frac{E}{2(1 + \mu)}.$$

Кручення

Кручення – вид деформації, при якому в будь-якому поперечному перетині бруса виникає *тільки крутний момент*, M_{KP} .

Деформації кручення виникають, якщо до прямого бруса у площинах, перпендикулярних до осі, прикладено пару сил $F \cdot h = M$ (рис. 3.2). Моменти цих пар називають *обертаючими* (якщо брус обертається), позначають їх T , і *скручувальними* (якщо брус не обертається), позначають їх M .

Брус круглого поперечного перетину, що працює на деформацію кручення, називають **валом**. Кручення зазнають вали двигунів та верстатів, інші металоконструкції. На кручення працюють також стержні з перетинами інших форм.

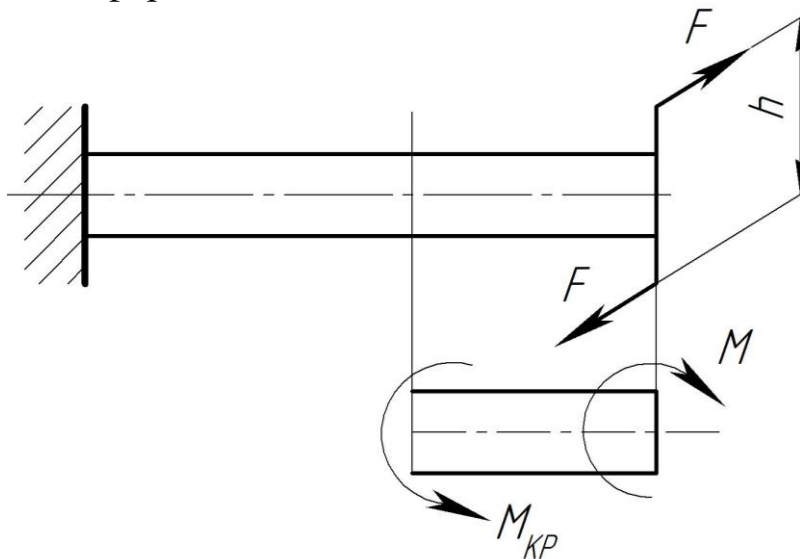


Рисунок 3.2

Крутний момент M_{KP} у будь-якому перетині вала дорівнює алгебраїчній сумі зовнішніх скручувальних моментів, прикладених до бруса справа чи зліва від перетину.

Для розрахунку бруса на міцність при крученні, так як і при розтягу (стиску) необхідно визначити **небезпечний перетин**. У випадку, якщо розміри поперечного перетину на довжині бруса постійні, то небезпечними будуть перетини, у яких крутні моменти максимальні. Графік, який показує закон зміни крутних моментів на довжині бруса, називають **епюрою крутних моментів**. Будують її аналогічно епюрі поздовжніх сил.

При крученні бруса у його поперечних перетинах виникають тільки дотичні напруження. Для круглого стержня (вала) дотичні напруження визначають за формулою

$$\tau = \frac{M_{KP}}{I_P} \cdot \rho,$$

де ρ – відстань від центра (полюса) круглого перетину до точки, в якій визначають дотичні напруження (рис. 3.3а).

Епюра розподілу дотичних напружень за висотою поперечного перетину зображена на рис. 3.3б. Дотичні напруження змінюються вздовж радіуса перетину за лінійним законом.

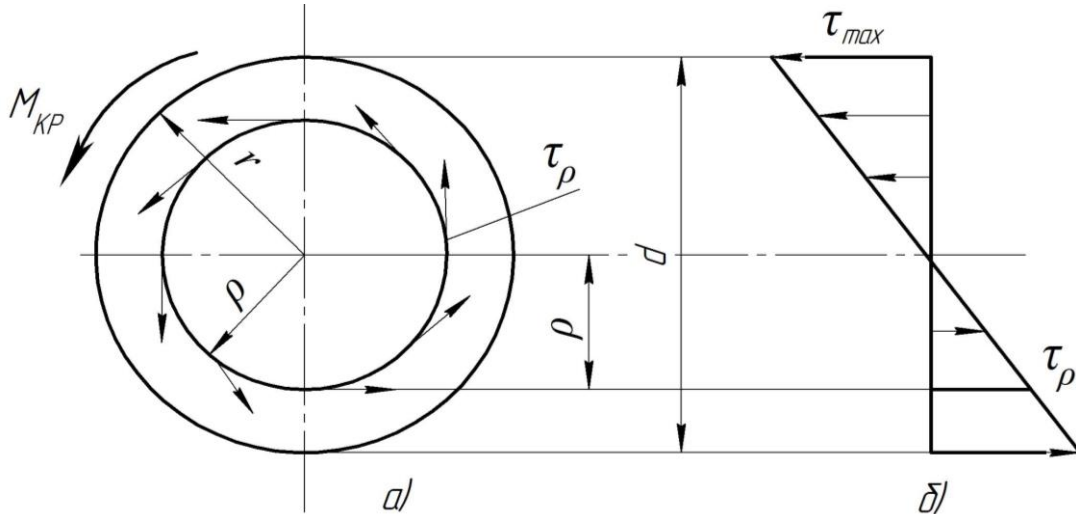


Рисунок 3.3

Дотичні напруження дорівнюють нулю в центрі перетину, $\rho = 0$ і досягають максимального значення у точках контура, $\rho = d/2$. У проміжних точках перетину дотичні напруження лінійно залежать від відстані ρ (див. рис. 3.3б). Оскільки

$$\frac{I_P}{(d/2)} = W_P, \quad \text{то} \quad \tau_{\max} = \frac{M_{KP}}{W_P}.$$

Умова міцності при крученні. Міцність вала забезпечується, якщо максимальне дотичне напруження не перевищує допустимого дотичного напруження

$$\tau_{\max} = \frac{M_{KP}}{W_P} \leq [\tau],$$

де $[\tau]$ – допустиме дотичне напруження при крученні, визначають залежно від допустимого напруження розтягу $[\sigma]_P$:

для сталей $[\tau] = (0,55 \dots 0,6) \cdot [\sigma]_P$;

для чавунів $[\tau] = (1 \dots 1,2) \cdot [\sigma]_P$.

З допомогою умови міцності вала при крученні розв'язують три типи задач.

1. **Добір поперечного перетину** (проектний розрахунок), тобто визначення потрібних його розмірів з розрахунку полярного моменту опору

$$W_P \geq M_{KP} / [\tau], \text{ для круглого перетину } d = \sqrt[3]{16 W_P / \pi}.$$

2. **Перевірка міцності** (перевірний розрахунок), зводиться до порівняння максимального фактичного (дійсного) та допустимого дотичних напружень за формулою

$$\tau_{\max} = \frac{M_{KP}}{W_P} \leq [\tau].$$

3. **Визначення найбільшого допустимого крутного моменту**

$$[M_{KP}] \leq [\tau] \cdot W_P.$$

Деформація при крученні характеризується поворотом поперечних перетинів вала один відносно одного на деякий кут φ – **кут закручування**. Для вала постійної жорсткості $G \cdot I_P$ довжиною l при постійному значенні крутного моменту M_{KP} кут закручування (повний кут закручування) визначають за формулами:

$$\varphi = \frac{M_{KP} \cdot l}{G \cdot I_P} \text{ [рад];} \quad \varphi = \frac{M_{KP} \cdot l}{G \cdot I_P} \cdot \frac{180^\circ}{\pi} \text{ [град].}$$

Ці співвідношення називають **законом Гука при крученні**. Для циліндричного бруса, який має кілька ділянок, які різняться розмірами поперечного перетину, величиною крутного моменту, матеріалом, повний кут закручування дорівнює алгебраїчній сумі кутів закручування окремих ділянок $\varphi = \sum \varphi_i$.

Повний кут закручування вала не повністю характеризує деформацію кручення, оскільки залежить від довжини вала. Жорсткість вала оцінюють **відносним кутом закручування**, який визначають за формулами:

$$\theta = \frac{\varphi}{l}; \quad \theta = \frac{M_{KP}}{G \cdot I_P} \left[\frac{\text{рад}}{\text{м}} \right]; \quad \theta = \frac{M_{KP}}{G \cdot I_P} \cdot \frac{180^\circ}{\pi} \left[\frac{\text{град}}{\text{м}} \right].$$

Умова жорсткості вала при крученні. Жорсткість вала достатня, якщо найбільший відносний кут закручування не перевищує допустимого його значення

$$\theta = \frac{M_{KP}}{G \cdot I_P} \cdot \frac{180^\circ}{\pi} \leq [\theta],$$

де $[\theta]$ – допустимий кут закручування вала залежно від призначення вала

$$\text{приймають } [\theta] = (0,25 \dots 2) \frac{\text{град}}{\text{м}}.$$

З допомогою умови жорсткості (як і умови міцності) виконують три види розрахунків конструкцій: *проектний*, *перевірний* і *визначення допустимого навантаження* або *деформації*.

Вали виготовляють зі сталі, але буває, що їх виконують поєднанням різнорідних матеріалів. Визначимо розподіл внутрішніх силових факторів (крутних моментів) та дотичні напруження для кожного елемента вала виготовленого з різних матеріалів і навантаженого зовнішнім моментом M (рис. 3.4).

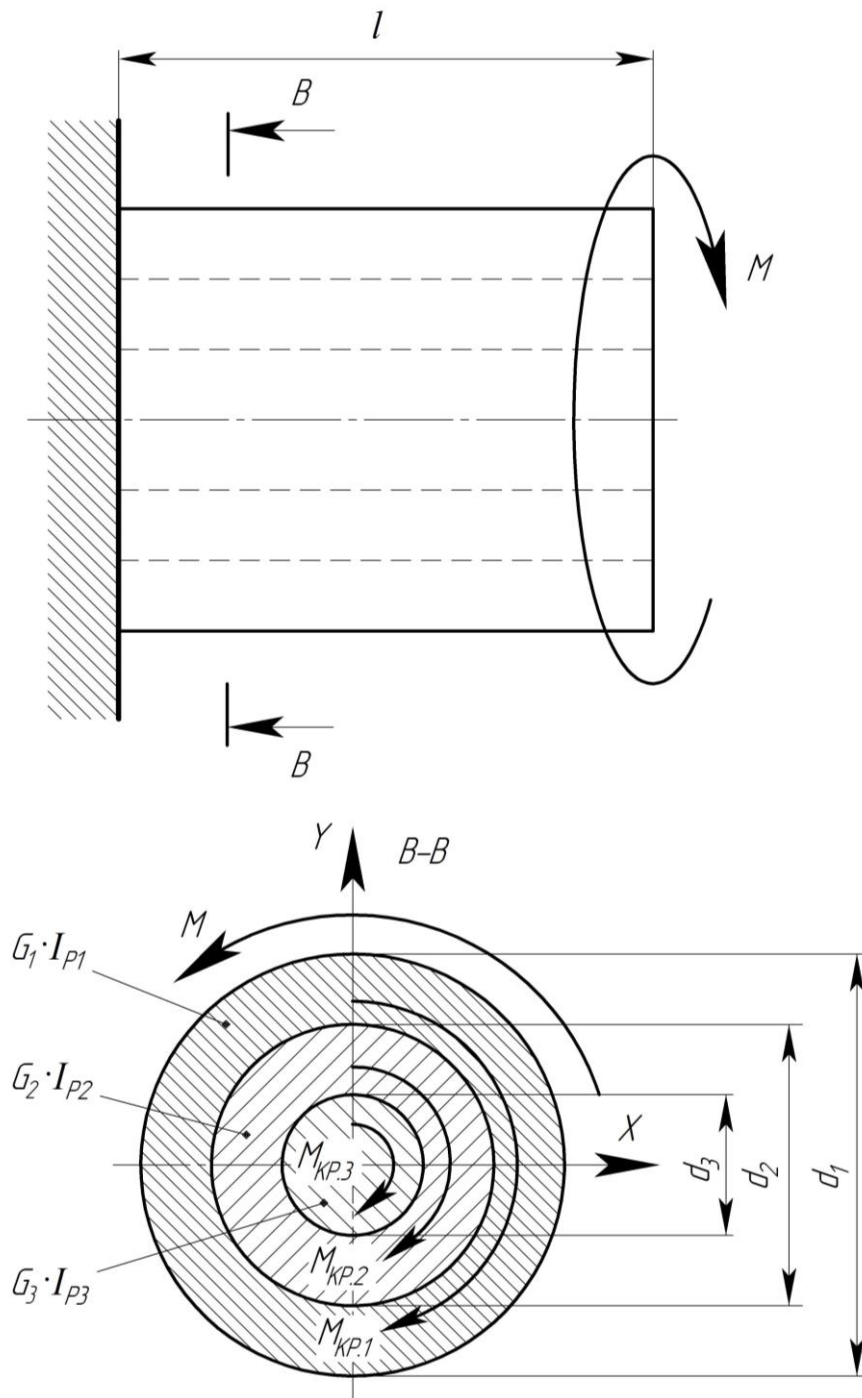


Рисунок 3.4

Складаємо рівняння статички

$$M = M_{KP.1} + M_{KP.2} + M_{KP.3} , \quad (3.1)$$

де $M_{KP.1}, M_{KP.2}, M_{KP.3}$ – крутні моменти, що виникають у кожному з елементів вала.

Система $3-1=2$ рази статично невизначена. Для визначення крутних моментів запишемо рівняння сумісності деформацій:

$$\theta_1 = \theta_2 = \theta_3,$$

або

$$\frac{M_{KP.1}}{G_1 \cdot I_{P1}} = \frac{M_{KP.2}}{G_2 \cdot I_{P2}} = \frac{M_{KP.3}}{G_3 \cdot I_{P3}} ;$$

звідки

$$M_{KP.2} = M_{KP.1} \cdot \frac{G_2 \cdot I_{P2}}{G_1 \cdot I_{P1}} ; \quad (3.2)$$

$$M_{KP.3} = M_{KP.1} \cdot \frac{G_3 \cdot I_{P3}}{G_1 \cdot I_{P1}} , \quad (3.3)$$

де I_{P1}, I_{P2}, I_{P3} – полярні моменти інерції поперечних перетинів кожного з елементів вала.

Підставимо величини з рівнянь (3.2)-(3.3) у рівняння (3.1) і отримаємо

$$M = M_{KP.1} + M_{KP.1} \cdot \frac{G_2 \cdot I_{P2}}{G_1 \cdot I_{P1}} + M_{KP.1} \cdot \frac{G_3 \cdot I_{P3}}{G_1 \cdot I_{P1}} .$$

Визначимо крутні моменти, що діють у кожному з елементів вала

$$M_{KP.1} = M \cdot \frac{G_1 \cdot I_{P1}}{G_1 \cdot I_{P1} + G_2 \cdot I_{P2} + G_3 \cdot I_{P3}} ;$$

$$M_{KP.2} = M \cdot \frac{G_2 \cdot I_{P2}}{G_1 \cdot I_{P1} + G_2 \cdot I_{P2} + G_3 \cdot I_{P3}} ;$$

$$M_{KP.3} = M \cdot \frac{G_3 \cdot I_{P3}}{G_1 \cdot I_{P1} + G_2 \cdot I_{P2} + G_3 \cdot I_{P3}} .$$

Дотичні напруження для кожного з елементів вала визначаємо за формулами:

– перший елемент

$$\tau_1(\rho_1) = \frac{M_{KP.1}}{I_{P1}} \cdot \rho_1 = M \cdot \frac{G_1}{G_1 \cdot I_{P1} + G_2 \cdot I_{P2} + G_3 \cdot I_{P3}} \cdot \rho_1,$$

$$\text{де } \frac{d_1}{2} \geq \rho_1 \geq \frac{d_2}{2};$$

– другий елемент

$$\tau_2(\rho_2) = \frac{M_{KP.2}}{I_{P2}} \cdot \rho_2 = M \cdot \frac{G_2}{G_1 \cdot I_{P1} + G_2 \cdot I_{P2} + G_3 \cdot I_{P3}} \cdot \rho_2,$$

$$\text{де } \frac{d_2}{2} \geq \rho_2 \geq \frac{d_3}{2};$$

– третій елемент

$$\tau_3(\rho_3) = \frac{M_{KP.3}}{I_{P3}} \cdot \rho_3 = M \cdot \frac{G_3}{G_1 \cdot I_{P1} + G_2 \cdot I_{P2} + G_3 \cdot I_{P3}} \cdot \rho_3,$$

$$\text{де } \frac{d_3}{2} \geq \rho_3 \geq 0.$$

Для розглядуваного поперечного перетину вала (див рис. 3.4) полярні моменти інерції кожної із його складових

$$I_{P1} = \frac{\pi \cdot d_1^4}{32} (1 - \alpha_1^4);$$

$$I_{P2} = \frac{\pi \cdot d_2^4}{32} (1 - \alpha_2^4);$$

$$I_{P3} = \frac{\pi \cdot d_3^4}{32},$$

$$\text{де } \alpha_1 = \frac{d_2}{d_1}; \quad \alpha_2 = \frac{d_3}{d_2}.$$

ПРИКЛАДИ

Приклад 3.1. У поперечному перетині вала діє крутний момент $M_{KP} = 7$ кНм. Якщо $[\tau] = 70$ кПа, визначити площі поперечних перетинів:

а) круглого суцільного вала;

б) вала кільцевого поперечного перетину $\alpha = \frac{d}{D} = 0,7$;

в) прямокутного вала $\frac{h}{b} = 2$;

г) вала тонкостінного поперечного перетину квадратної форми,

$\frac{\delta}{a} = 0,02$, де a – сторона квадрата;

д) вала тонкостінного поперечного перетину трикутної форми

(рівносторонній трикутник) $\frac{\delta}{a} = 0,04$, де a – сторона трикутника.

Порівняти вагу валів із вагою вала круглого суцільного перетину.

Розв'язування

З умови міцності на кручення

$$\tau_{\max} = \frac{M_{KP}}{W_P} \leq [\tau]$$

визначаємо необхідний полярний момент опору поперечного перетину вала довільної форми

$$W_P = \frac{M_{KP}}{[\tau]} = \frac{7 \cdot 10^6}{70} = 1 \cdot 10^5 \text{ мм}^3.$$

Визначаємо розміри та площі заданих поперечних перетинів.

Вал круглого суцільного поперечного перетину (рис. 3.5а):

$$W_P = \frac{\pi \cdot d^3}{16} = 1 \cdot 10^5 \text{ мм}^3,$$

звідки діаметр вала

$$d = \sqrt[3]{\frac{16 \cdot 1 \cdot 10^5}{\pi}} = 79,9 \text{ мм} = 7,99 \text{ см}$$

та площа поперечного перетину

$$A_1 = \frac{\pi \cdot d^2}{4} = \frac{\pi \cdot 7,99^2}{4} = 50,1 \text{ см}^2.$$

Вал кільцевого поперечного перетину (рис. 3.5б):

$$W_P = \frac{\pi \cdot D^3}{16} (1 - \alpha^4) = 1 \cdot 10^5 \text{ мм}^3,$$

звідки діаметр вала

$$d = \sqrt[3]{\frac{16 \cdot 1 \cdot 10^5}{\pi \cdot (1 - \alpha^4)}} = \sqrt[3]{\frac{16 \cdot 1 \cdot 10^5}{\pi \cdot (1 - 0,7^4)}} = 87,5 \text{ мм} = 8,75 \text{ см}$$

та площа поперечного перетину

$$A_2 = \frac{\pi \cdot D^2}{4} \cdot (1 - \alpha^2) = \frac{\pi \cdot 8,75^2}{4} \cdot (1 - 0,7^2) = 30,7 \text{ см}^2.$$

Вал прямокутного поперечного перетину із співвідношенням сторін $\frac{h}{b} = 2$, $\alpha = 0,246$ (рис. 3.5в)

$$W_P = \alpha \cdot h \cdot b^2 = 0,246 \cdot 2 \cdot b \cdot b^2 = 1 \cdot 10^5 \text{ мм}^3,$$

звідки сторона прямокутника

$$b = \sqrt[3]{\frac{1 \cdot 10^5}{0,246 \cdot 2}} = 58,8 \text{ мм} = 5,88 \text{ см}$$

та площа поперечного перетину

$$A_3 = b \cdot h = 5,88 \cdot 2 \cdot 5,88 = 69,2 \text{ см}^2.$$

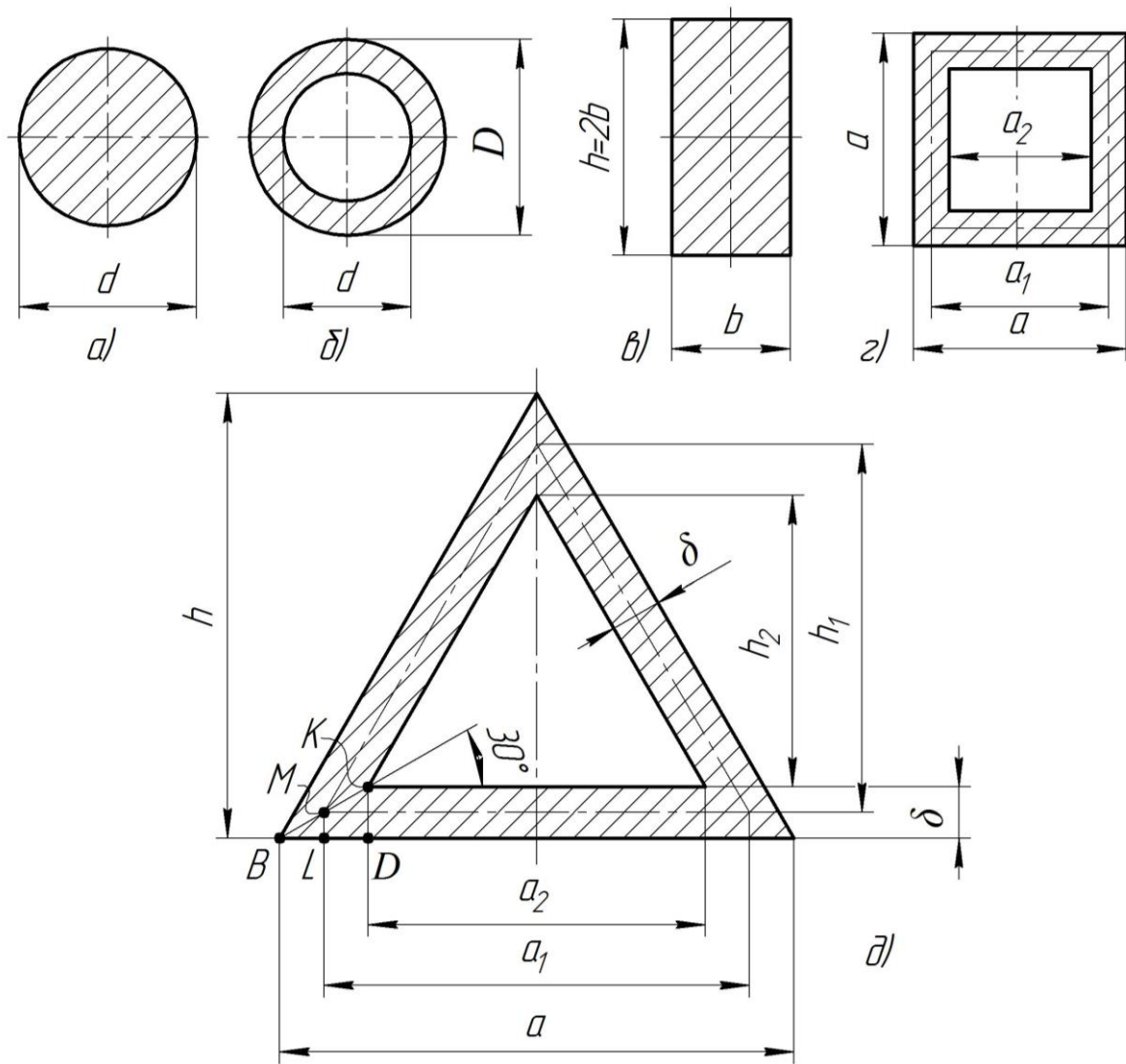


Рисунок 3.5

Вал тонкостінного квадратного поперечного перетину $\frac{\delta}{a} = 0,02$
 (рис. 3.5г) для якого:

$$a_1 = a - \delta = a - 0,02 \cdot a = 0,98 \cdot a;$$

$$a_2 = a - 2 \cdot \delta = a - 2 \cdot 0,02 \cdot a = 0,96 \cdot a.$$

За формулою Бредта

$$W_P = 2 \cdot \omega \cdot \delta,$$

де ω – площа, обмежена середньою лінією товщини перетину, $\omega = a_1^2$,

$$W_P = 2 \cdot a_1^2 \cdot \delta = 2 \cdot (0,98 \cdot a)^2 \cdot 0,02a = 0,0384 \cdot a^3 = 1 \cdot 10^5 \text{ мм}^3,$$

звідки сторона квадрата

$$a = \sqrt[3]{\frac{1 \cdot 10^5}{0,0384}} = 137,6 \text{ мм} = 13,76 \text{ см}$$

та площа поперечного перетину

$$A_4 = a^2 - a_2^2 = 13,76^2 - (0,96 \cdot 13,76)^2 = 14,8 \text{ см}^2.$$

Вал тонкостінного трикутного поперечного перетину $\delta/\alpha = 0,04$, для якого з тригонометричних співвідношень $\triangle BML$ і $\triangle BKD$ (рис. 3.5г), запишемо розміри сторін трикутників:

$$a_2 = a - 2 \cdot \delta \cdot \text{tg}60^\circ = a - 2 \cdot 0,04 \cdot a \cdot \text{tg}60^\circ = 0,861 \cdot a;$$

$$a_1 = a - \delta \cdot \text{tg}60^\circ = a - 0,04 \cdot a \cdot \text{tg}60^\circ = 0,931 \cdot a.$$

За формулою Бредта

$$W_P = 2 \cdot \omega \cdot \delta = 2 \cdot \frac{1}{2} \cdot h_1 \cdot a_1 \cdot \delta = h_1 \cdot a_1 \cdot \delta,$$

де h_1 – висота трикутника по середній лінії,

$$h_1 = \frac{a_1 \cdot \text{tg}60^\circ}{2} = \frac{0,931 \cdot \text{tg}60^\circ}{2} = 0,805 \cdot a.$$

Враховуючи, що

$$W_P = 0,805 \cdot a \cdot 0,931 \cdot a \cdot 0,04 \cdot a = 0,03 \cdot a^3 = 1 \cdot 10^5 \text{ мм}^3,$$

визначимо розміри і площу перетину:

$$a = \sqrt[3]{\frac{1 \cdot 10^5}{0,03}} = 149,4 \text{ мм} = 14,94 \text{ см};$$

$$A_5 = \frac{1}{2} \cdot a \cdot h - \frac{1}{2} \cdot a_2 \cdot h_2,$$

$$\text{де } h_2 = \frac{1}{2} \cdot a_2 \cdot \operatorname{tg} 60^\circ = \frac{1}{2} \cdot 0,861 \cdot a \cdot \operatorname{tg} 60^\circ = 0,746 \cdot a;$$

$$h = \frac{1}{2} \cdot a \cdot \operatorname{tg} 60^\circ = 0,866 \cdot a,$$

тоді

$$\begin{aligned} A_5 &= \frac{1}{2} (a \cdot 0,866 \cdot a - 0,861 \cdot a \cdot 0,746 \cdot a) = 0,112 \cdot a^2 = \\ &= 0,112 \cdot 14,94^2 = 25 \text{ см}^2. \end{aligned}$$

Вага вала

$$Q = A \cdot l \cdot \gamma,$$

де l – довжина вала;

γ – питома вага матеріалу вала.

Порівняємо вагу валів. Для цього достатньо порівняти їх площі поперечних перетинів:

$$\begin{aligned} Q_1 : Q_2 : Q_3 : Q_4 : Q_5 &= A_1 : A_2 : A_3 : A_4 : A_5 = \\ &= 50,1 : 30,7 : 69,2 : 14,8 : 25,0 = 1 : 0,612 : 1,381 : 0,295 : 0,499. \end{aligned}$$

Найбільш матеріалозатратним буде вал прямокутного поперечного перетину. Найбільш економічним буде тонкостінний вал квадратного поперечного перетину.

Відповідь: площі поперечних перетинів різних за формою валів:

круглого $A_1 = 50,1 \text{ см}^2$; кільцевого $A_2 = 30,7 \text{ см}^2$;

прямокутного $A_3 = 69,2 \text{ см}^2$; тонкостінного квадратного

$A_4 = 14,8 \text{ см}^2$; тонкостінного трикутного $A_5 = 25 \text{ см}^2$.

Співвідношення ваги різних за формою перетинів порівняно з круглим $Q_1 : Q_2 : Q_3 : Q_4 : Q_5 =$

$$= A_1 : A_2 : A_3 : A_4 : A_5 =$$

$$= 1 : 0,612 : 1,381 : 0,295 : 0,499.$$

Приклад 3.2. Кутник 140 ммх10 мм кріпиться до пластини чотирма заклепками та навантажений силою F , яка діє у площині пластини. Заклепки працюють на зріз, без натягу та зазорів. Розміри кріплення показані на рисунку 3.6. Вказати, у якій із заклепок виникає найбільша поперечна сила. Визначити максимальні напруження в матеріалі найбільш навантаженої заклепки, якщо $F = 80$ кН. Кутник та пластину вважати абсолютно жорсткими.

Розв'язування

На з'єднання діє сила F , яку переносимо в центр ваги перетину – точку O . Ця сила буде створювати момент сил $M = F \cdot h$ відносно точки O (рис 3.6).

Від обох силових факторів у заклепках виникатимуть складові поперечних сил:

$$Q_F = \frac{F}{4} = 0,25 \cdot F;$$

$$Q_M = \frac{M}{4 \cdot r} = \frac{F \cdot h}{4 \cdot r} = \frac{44 \cdot F}{4 \cdot 38,9} = 0,283F,$$

де h – плече дії сили відносно точки O

$$h = \left(55 + \frac{55}{2} - 38,5 \right) = 44 \text{ мм};$$

r – відстань від осі заклепки до точки O

$$r = \frac{55}{2 \cdot \sin 45^\circ} = \frac{55}{\sqrt{2}} = 38,9 \text{ мм}.$$

Максимальна поперечна сила виникає у верхніх заклепках (рис. 3.6), визначаємо за формулою

$$\begin{aligned} Q_{\max} &= \sqrt{Q_F^2 + Q_M^2 + 2 \cdot Q_F \cdot Q_M \cdot \cos 45^\circ} = \\ &= F \cdot \sqrt{0,25^2 + 0,283^2 + 2 \cdot 0,25 \cdot 0,283 \cdot \cos 45^\circ} = 0,493 \cdot F = 39,4 \text{ кН}. \end{aligned}$$

Визначаємо максимальні дотичні напруження в матеріалі заклепок

$$\tau_{\max} = \frac{Q_{\max}}{A} = \frac{0,493 \cdot 4 \cdot F}{\pi \cdot d^2} = \frac{0,493 \cdot 4 \cdot 80 \cdot 10^3}{\pi \cdot 20^2} = 62 \frac{\text{Н}}{\text{мм}^2} = 62 \text{ МПа}.$$

Відповідь: найбільша поперечна сила $Q_{\max} = 39,4 \text{ кН}$;
максимальні дотичні напруження $\tau_{\max} = 62 \text{ МПа}$.

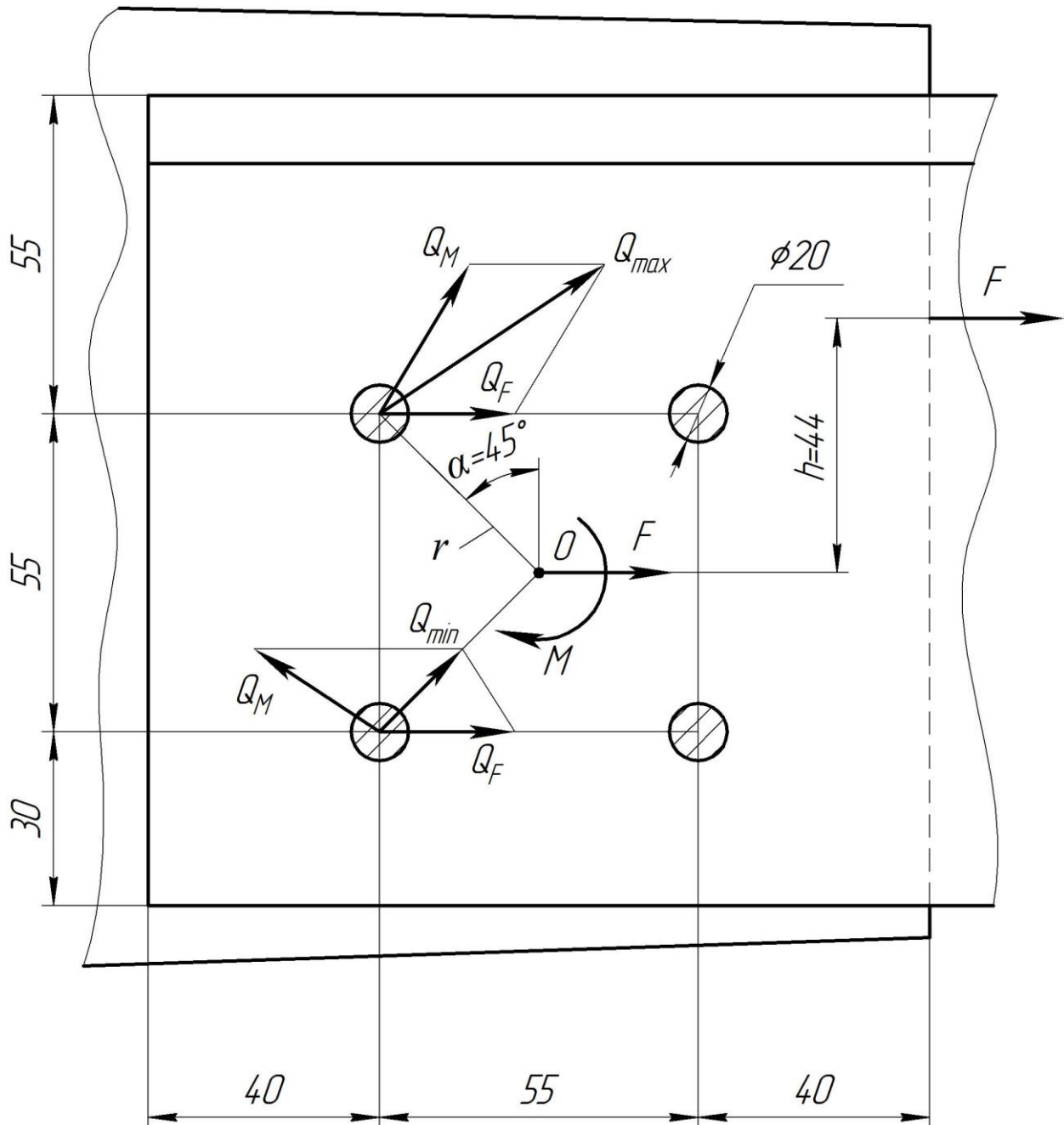


Рисунок 3.6

Приклад 3.3. Ступінчастий вал защемлений з обох боків і навантажений моментом $M = 2,0$ кНм (рис. 3.7а). Визначити максимальні напруження у перетинах вала. Визначити кут повороту перетину I-I, якщо $a = 0,8$ м; $b = 1$ м; $G = 8 \cdot 10^4$ МПа.

Розв'язування

Звільняємо вал від зовнішніх опор B і C . Замінюємо їх дію на вал реактивними моментами M_B і M_C (рис. 3.7б). Записуємо рівняння статички

$$\sum M_X = 0, \quad M_B + M_C - M = 0. \quad (1)$$

Визначення двох невідомих із одного рівняння неможливе, тому така система силових факторів є статично невизначеною. Для розкриття статичної невизначеності складаємо додаткове рівняння – рівняння сумісності деформацій. Умовно звільняємо вал від правої опори C , прикладаємо до нього моменти M і M_C (рис. 3.7в). В результаті їх дії кутове переміщення опори C дорівнює нулю

$$\Delta\varphi_C = 0. \quad (2)$$

Використовуючи метод суперпозицій, запишемо рівняння для визначення кутового переміщення

$$\Delta\varphi_C = \frac{M \cdot a}{G \cdot I_{P1}} - \left(\frac{M_C \cdot b}{G \cdot I_{P2}} + \frac{M_C \cdot a}{G \cdot I_{P1}} \right) = 0,$$

звідки визначимо момент в опорі C

$$M_C = \frac{M \cdot a}{\frac{I_{P1}}{I_{P2}} \cdot b + a}, \quad (3)$$

де I_{P1} , I_{P2} – полярні моменти інерції поперечних перетинів вала;

$$I_{P1} = \frac{\pi \cdot D^4}{32}; \quad I_{P2} = \frac{\pi \cdot d^4}{32}.$$

Визначимо опорні реакції (реактивні моменти) в числовому вигляді

$$M_C = \frac{M \cdot a}{\frac{D^4}{d^4} \cdot b + a} = \frac{2,0 \cdot 0,8}{\frac{50^4}{40^4} \cdot 1 + 0,8} = 0,49 \text{ кНм};$$

$$M_B = M - M_C = 2,0 - 0,49 = 1,51 \text{ кНм.}$$

Будуємо епюру крутних моментів (рис. 3.7з).

Користуючись умовою міцності, визначимо максимальні дотичні напруження на ділянках вала

$$\tau_{\max i} = \frac{|M_{KPi}|}{W_{Pi}} = \frac{16 \cdot |M_{KPi}|}{\pi \cdot d_i^3},$$

де W_{Pi} – полярний момент опору поперечного перетину вала,

$$W_{Pi} = \frac{\pi \cdot d_i^3}{16};$$

d_i – діаметр вала на i -й ділянці.

У числовому вигляді

$$\tau_{\max 1} = \frac{16 \cdot 1,51 \cdot 10^6}{\pi \cdot 50^3} = 61,5 \text{ МПа};$$

$$\tau_{\max 2} = \frac{16 \cdot 0,49 \cdot 10^6}{\pi \cdot 40^3} = 39,1 \text{ МПа.}$$

Визначимо кут повороту поперечного перетину $I-I$:

$$\Delta\varphi_I = \frac{M_{KP1} \cdot a}{G \cdot I_{P1}} = \frac{1,51 \cdot 10^{-3}}{8 \cdot 10^4 \cdot \frac{\pi \cdot 50^4}{32} \cdot 10^{-12}} = 0,0246 \text{ рад} = 1,41 \text{ град.}$$

Відповідь: максимальні напруження у перетинах вала

$$\tau_{\max 1} = 61,5 \text{ МПа}, \tau_{\max 2} = 39,1 \text{ МПа};$$

кут повороту перетину $I-I$ $\Delta\varphi_I = 1,41$ град.

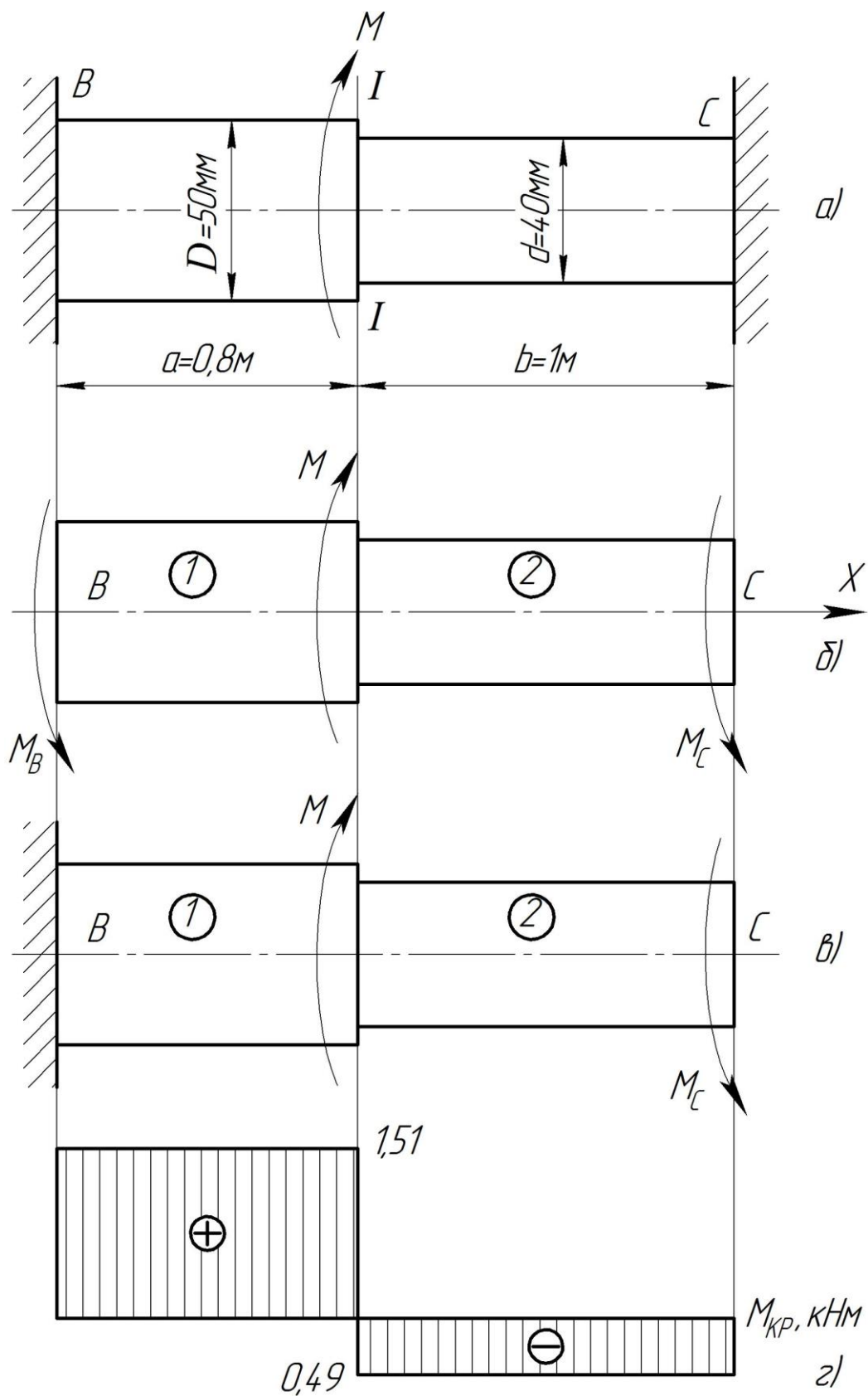


Рисунок 3.7

Приклад 3.4. Ступінчастий вал жорстко закріплений в опорах B і C (рис. 3.8а). Жорсткості ділянок вала 1 і 3 дорівнюють $2 G \cdot I_K$, жорсткість ділянки 2 дорівнює $G \cdot I_K$. При якому співвідношенні a/b максимальний внутрішній момент M_{KP} матиме мінімальне значення.

Розв'язування

Звільняємо вал від зовнішніх опор B і C . Замінюємо їх дію на вал реактивними моментами M_B і M_C (рис. 3.8б). Записуємо рівняння статички

$$\sum M_X = 0, \quad M_B - M + M + M_C = 0. \quad (1)$$

Визначення двох невідомих із одного рівняння неможливе, тому така система силових факторів є статично невизначеною. Для розкриття статичної невизначеності складаємо додаткового рівняння – рівняння сумісності деформацій. Умовно звільняємо вал від правої опори C , прикладаємо до нього моменти M і M_C (рис. 3.8в). В результаті їх дії кутове переміщення опори C дорівнює нулю

$$\Delta\varphi_C = 0. \quad (2)$$

Використовуючи метод суперпозицій, запишемо рівняння для визначення кутового переміщення

$$\Delta\varphi_C = \frac{M_C \cdot a}{2 G \cdot I_K} + \frac{M_C \cdot b}{G \cdot I_K} + \frac{M_C \cdot a}{2 G \cdot I_K} - \frac{M \cdot b}{G \cdot I_K} - \frac{M \cdot a}{2 G \cdot I_K} + \frac{M \cdot a}{2 G \cdot I_K} = 0, \quad (3)$$

звідки визначимо момент в опорі C

$$M_C = M \cdot \frac{b}{(a+b)}.$$

Визначаємо крутні моменти на ділянках вала

$$M_{KP3} = M_C = M \cdot \frac{b}{(a+b)};$$

$$M_{KP2} = M_C - M = M \cdot \frac{b}{a+b} - M = -M \cdot \frac{a}{a+b};$$

$$M_{KP1} = M_C - M + M = M \cdot \frac{b}{a+b} - M + M = M \cdot \frac{b}{a+b}.$$

Будуємо епюру крутних моментів (рис. 3.82), враховуючи, що

$$M \cdot \frac{b}{a+b} + M \cdot \frac{a}{a+b} = M_{KP1} + M_{KP2} = M. \quad (4)$$

Запишемо співвідношення між крутними моментами:

$$\frac{M_{KP2}}{M_{KP1}} = \frac{M \cdot \frac{a}{a+b}}{M \cdot \frac{b}{a+b}} = \frac{a}{b}, \quad M_{KP2} = M_{KP1} \cdot \frac{a}{b}. \quad (5)$$

При $a = b$, $M_{KP2} = M_{KP1} = \frac{M}{2}$;

$$a > b, \quad M_{KP2} > M_{KP1}, \quad M_{KP1} < \frac{M}{2}, \quad M_{KP2} > \frac{M}{2};$$

$$a < b, \quad M_{KP2} < M_{KP1}, \quad M_{KP1} > \frac{M}{2}, \quad M_{KP2} < \frac{M}{2}.$$

Висновок: максимальний внутрішній крутний момент матиме мінімальне значення при співвідношенні $a/b = 1$, $M_{KP_{\max}}^{\min} = M/2$; при всіх інших співвідношеннях $M_{KP_{\max}} > M/2$.

Відповідь: максимальний внутрішній момент M_{KP} матиме мінімальне значення при співвідношенні $a/b = 1$.

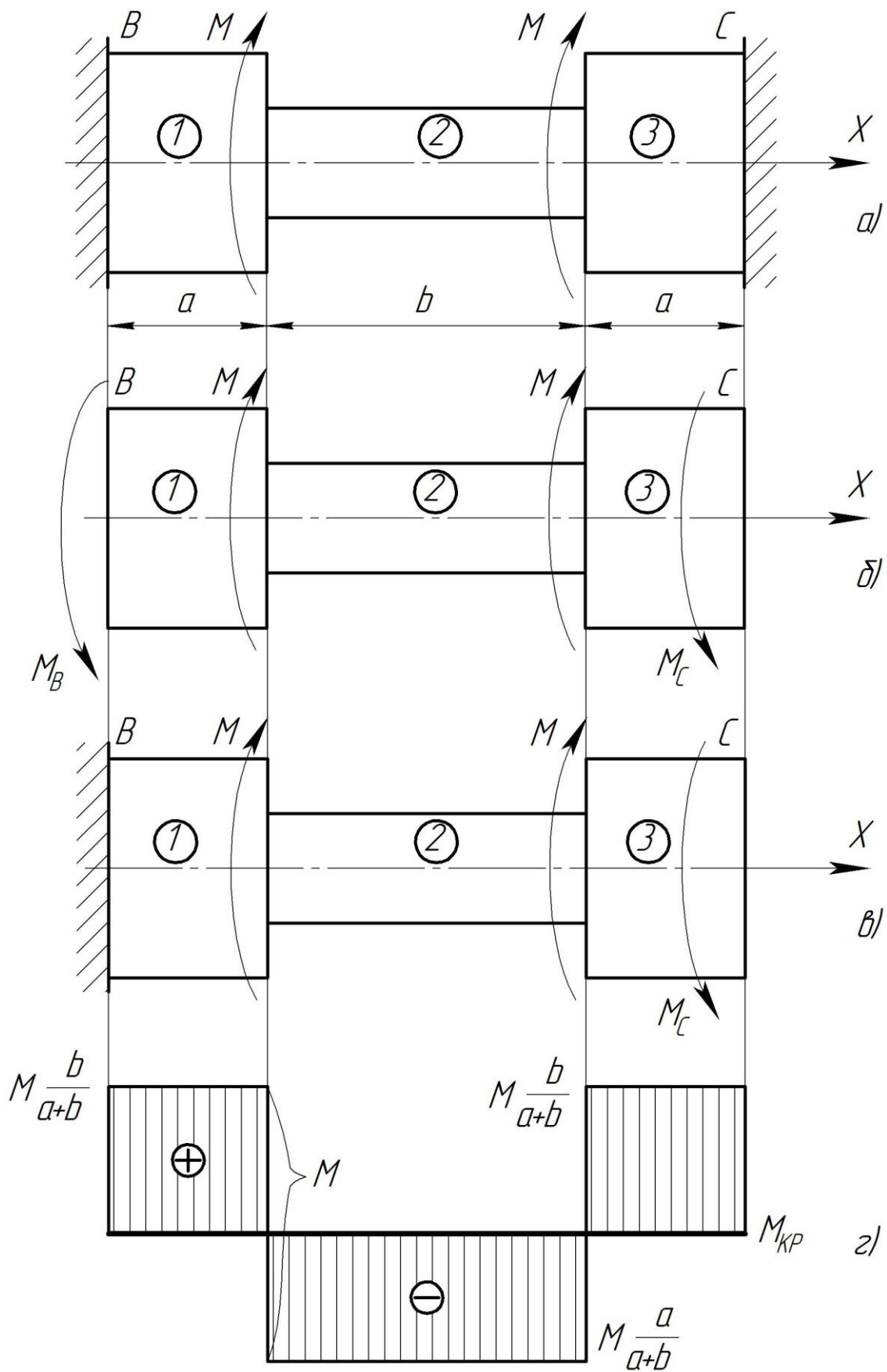


Рисунок 3.8

Приклад 3.5. Ступінчастий вал жорстко закріплений в опорах B і C (рис. 3.9а). На валу встановлений абсолютно жорсткий диск, до якого прикладений момент M . Визначити положення диска, відстань l_X , з умови рівномірності лівої та правої частин вала.

Розв'язування

Звільняємо вал від зовнішніх опор B і C . Замінюємо їх дію на вал реактивними моментами M_B і M_C (рис. 3.9б). Записуємо рівняння статички (умова рівноваги вала):

$$\sum M_X = 0, \quad M_B + M_C = M.$$

Визначаємо крутні моменти на ділянках вала (рис. 3.9в).

Будуємо епюру крутних моментів (рис. 3.9г).

За умовою задачі закладено рівномірність лівої та правої частин вала

$$\tau_{\max BL} = \tau_{\max KC}, \quad (1)$$

що передбачає виконання умови рівності кутів закручування у місці встановлення абсолютно жорсткого диска

$$\Delta\varphi_K = \Delta\varphi_L. \quad (2)$$

Будуємо епюру кутових деформацій (рис. 3.9д).

Умови (1) та (2) помістимо у систему рівнянь

$$\begin{cases} \frac{M_B}{W_{P1}} = \frac{M_C}{W_{P2}}, & (3) \\ \frac{M_B \cdot l_X}{G \cdot I_{P1}} = \frac{M_C \cdot (l - 0,2 \cdot l - l_X)}{G \cdot I_{P2}}, & (4) \end{cases}$$

де W_{P1} , W_{P2} , I_{P1} , I_{P2} – геометричні характеристики поперечних перетинів ділянок вала,

$$W_{P1} = \frac{\pi \cdot d^3}{16}; \quad W_{P2} = \frac{\pi \cdot (2 \cdot d)^3}{16};$$

$$I_{P1} = \frac{\pi \cdot d^4}{32}; \quad I_{P2} = \frac{\pi \cdot (2 \cdot d)^4}{32}.$$

Перепишемо рівняння (3) у вигляді

$$\frac{16 \cdot M_B}{\pi \cdot d^3} = \frac{16 \cdot M_C}{\pi \cdot (2 \cdot d)^3},$$

звідки визначимо момент в опорі

$$M_C = 8 \cdot M_B.$$

Отримане значення підставляємо в рівняння (4)

$$\frac{M_B \cdot l_X \cdot 32}{G \cdot \pi \cdot d^4} = \frac{8 \cdot M_B \cdot (l - 0,2 \cdot l - l_X) \cdot 32}{G \cdot \pi \cdot (2 \cdot d)^4}. \quad (5)$$

Розв'язавши рівняння (5), отримаємо значення відстані, на якій розташовано жорсткий диск

$$48 \cdot l_X = 12,8l,$$

звідки

$$l_X = 0,27l.$$

Відповідь: відстань, на якій розташовано жорсткий диск, $l_X = 0,27l$.

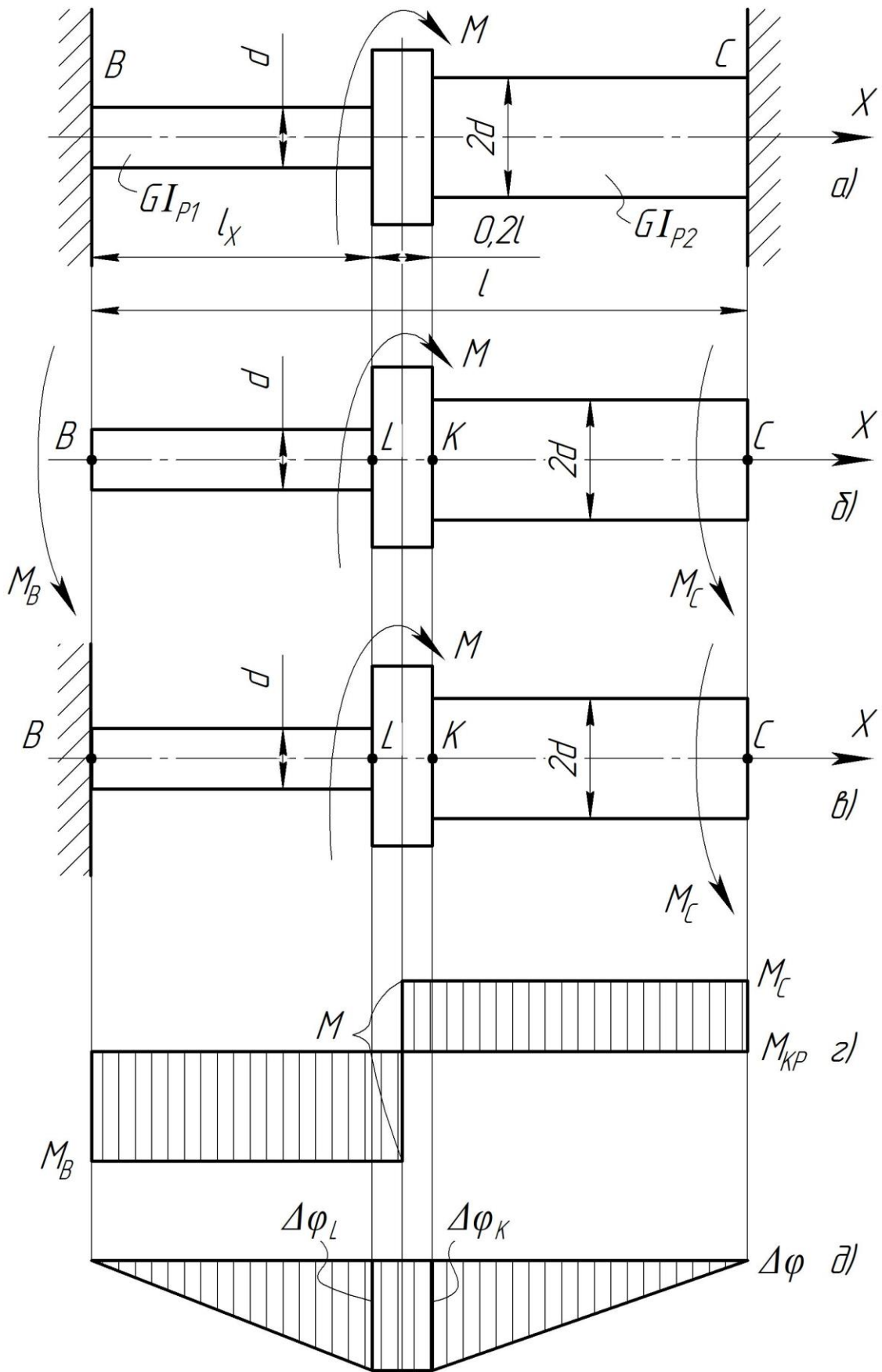


Рисунок 3.9

Приклад 3.6. Вал, для якого $G \cdot I_P = const$, жорстко закріплений в опорах B і C , навантажений моментами M і $2M$ (рис. 3.10а). Визначити положення перетину $n-n$, координату l_X , яка залишається нерухомою після прикладання навантажень.

Розв'язування

Звільняємо вал від зовнішніх опор B і C . Замінюємо їх дію на вал реактивними моментами M_B і M_C (рис. 3.10б). Записуємо рівняння статички

$$\sum M_X = 0, \quad M_B - M + 2 \cdot M - M_C = 0. \quad (1)$$

Визначення двох невідомих із одного рівняння неможливе, тому така система силових факторів є статично невизначеною. Для розкриття статичної невизначеності складаємо додаткове рівняння – рівняння сумісності деформацій. Умовно звільняємо вал від правої опори C , прикладаємо до нього моменти M , $2M$ і M_C (рис. 3.10в). В результаті їх дії кутове переміщення опори C дорівнює нулю

$$\Delta\varphi_C = 0. \quad (2)$$

Використовуючи метод суперпозицій, запишемо рівняння для визначення кутового переміщення

$$\Delta\varphi_C = \frac{M_C \cdot 4 \cdot a}{G \cdot I_P} - \frac{2 \cdot M \cdot 3 \cdot a}{G \cdot I_P} + \frac{M \cdot a}{G \cdot I_P} = 0.$$

Враховуючи, що $G \cdot I_P = const$, визначимо момент в опорі C

$$4 \cdot M_C - 5 \cdot M = 0,$$

$$M_C = 1,25 \cdot M. \quad (3)$$

Визначаємо крутні моменти на ділянках вала:

$$M_{KP1} = M_C = 1,25 \cdot M;$$

$$M_{KP2} = M_C - 2 \cdot M = -0,75 \cdot M;$$

$$M_{KP3} = M_C - 2 \cdot M + M = 0,25 \cdot M.$$

Будуємо епюру крутних моментів (рис. 3.10з).

Для визначення координати l_X записуємо рівняння, згідно якого кутове переміщення перетину $n-n$ відносно опори C дорівнює нулю:

$$\Delta\varphi_{n-n} = \frac{M_{KP1} \cdot a}{G \cdot I_P} - \frac{M_{KP2} \cdot l_X}{G \cdot I_P} = 0,$$

або

$$1,25 \cdot M \cdot a - 0,75 \cdot M \cdot l_X = 0,$$

звідки

$$l_X = 1,67 a.$$

Відповідь: координата у якій кутове переміщення перетину $n-n$ відносно опори C дорівнює нулю – $l_X = 1,67 a$.

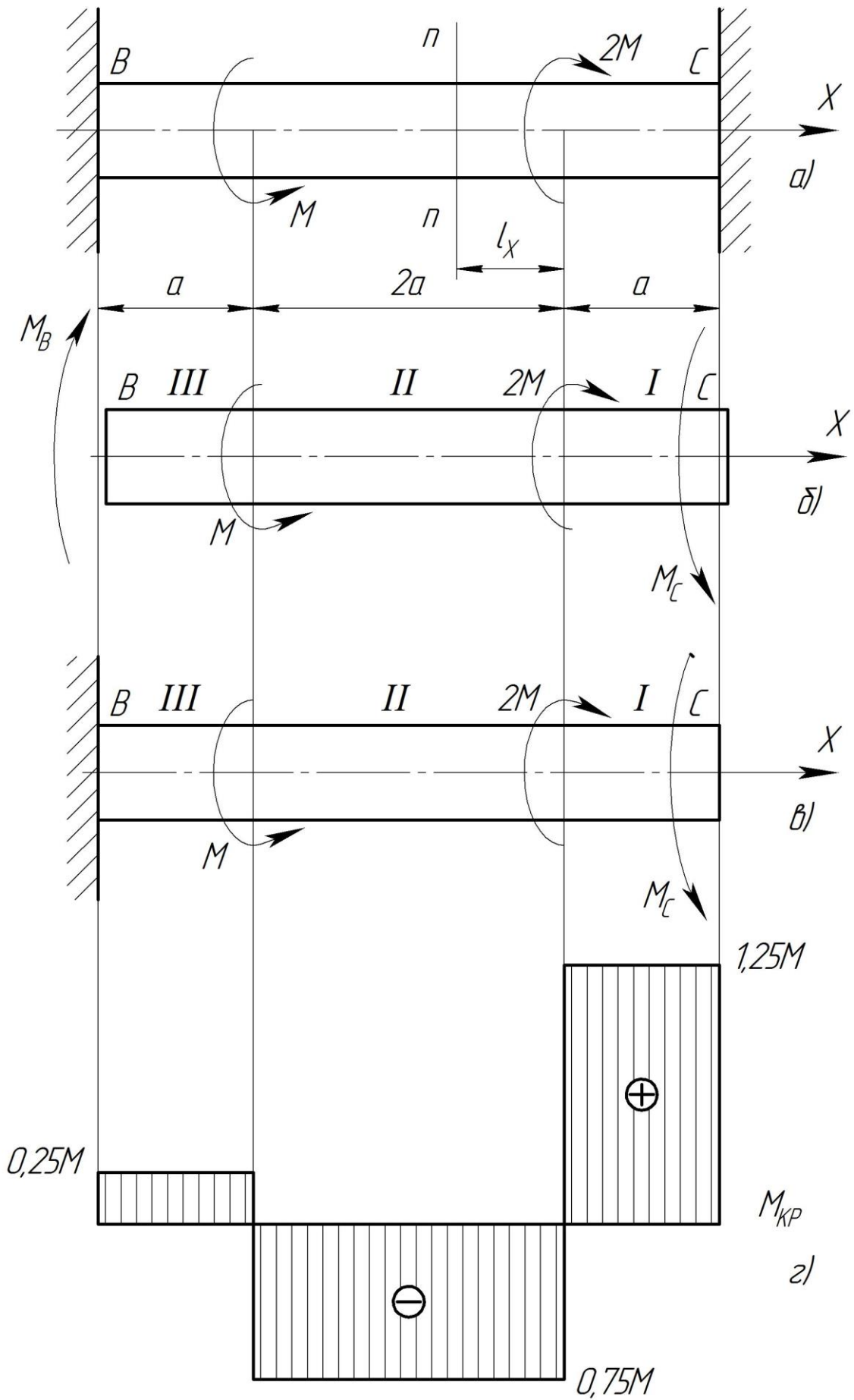


Рисунок 3.10

Приклад 3.7. Вал з різними жорсткостями закріплений жорстко в опорах B і C (рис. 3.11а) і навантажений рівномірно-розподіленими моментами $m_1 = 15$ кНм/м і $m_2 = 20$ кНм/м. Визначити розмір d з умови жорсткості, якщо допустимий кут закручування $[\theta] = 0,5$ град/м, модуль зсуву $G = 8 \cdot 10^4$ МПа.

Розв'язування

Звільняємо вал від зовнішніх опор B і C . Замінюємо їх дію на вал реактивними (опорними) моментами M_B і M_C (рис. 3.11б). Записуємо рівняння статички

$$\sum M_X = 0, \quad M_B - m_1 \cdot 0,3 + m_2 \cdot 0,2 - M_C = 0. \quad (1)$$

Визначення двох невідомих із одного рівняння неможливе, тому така система силових факторів є статично невизначеною. Для розкриття статичної невизначеності складаємо додаткове рівняння – рівняння сумісності деформацій. Умовно звільняємо вал від правої опори C , прикладаємо до нього момент M_C та рівномірно-розподілені на відповідних ділянках моменти m_1 , m_2 (рис. 3.11в). В результаті їх дії кутове переміщення опори C дорівнює нулю

$$\Delta\varphi_C = 0. \quad (2)$$

Використовуючи метод суперпозицій, запишемо рівняння для визначення кутового переміщення

$$\begin{aligned} \Delta\varphi_C = & \frac{M_C \cdot (0,3 + 0,2 + 0,2)}{G \cdot I_{P1}} + \frac{M_C \cdot 0,2}{G \cdot I_{P2}} + \frac{M_C \cdot (0,3 + 0,3)}{G \cdot I_{P3}} - \\ & - \frac{m_2 \cdot (0,2)^2}{2 \cdot G \cdot I_{P1}} - \frac{m_2 \cdot (0,2)^2}{G \cdot I_{P1}} - \frac{m_2 \cdot (0,2)^2}{G \cdot I_{P2}} - \\ & - \frac{m_2 \cdot 0,2 \cdot (0,3 + 0,3)}{G \cdot I_{P3}} + \frac{m_1 \cdot (0,3)^2}{2 G \cdot I_{P3}} + \frac{m_1 \cdot (0,3)^2}{G \cdot I_{P3}} = 0, \end{aligned} \quad (3)$$

де I_{P1} , I_{P2} , I_{P3} – полярні моменти інерції поперечних перетинів відповідних ділянок вала:

$$I_{P1} = \frac{\pi \cdot (1,3 \cdot d)^4}{32} \cdot \left(1 - \left(\frac{d}{1,3 \cdot d} \right)^4 \right) = 0,277 \cdot d^4;$$

$$I_{P2} = \frac{\pi \cdot (1,3 \cdot d)^4}{32} = 0,280 \cdot d^4;$$

$$I_{P3} = \frac{\pi \cdot d^4}{32} = 0,098 \cdot d^4.$$

Підставивши задані величини в рівняння (3)

$$M_C \cdot \left(\frac{0,7}{0,277} + \frac{0,2}{0,280} + \frac{0,6}{0,098} \right) - 31,68 + 20,67 = 0,$$

отримаємо момент в опорі C

$$M_C = \frac{31,68 - 20,67}{9,364} = 1,175 \text{ кНм.}$$

З рівняння (1) визначаємо момент в опорі B

$$M_B = M_C + m_1 \cdot 0,3 - m_2 \cdot 0,2 = 1,175 + 15 \cdot 0,3 - 2 \cdot 0,2 = 1,675 \text{ кНм.}$$

Визначаємо внутрішні силові фактори – крутні моменти в поперечних перетинах кожної ділянки вала (рис. 3.11в):

ділянка BK , $M_{KP}(B) = M_{KP}(K) = M_B = 1,675 \text{ кНм}$;

ділянка KL , $M_{KP}(K) = 1,675 \text{ кНм}$; $M_{KP}(L) = 1,675 - 15 \cdot 0,3 = -2,825 \text{ кНм}$;

ділянка LN , $M_{KP}(L) = M_{KP}(N) = -2,825 \text{ кНм}$;

ділянка NP , $M_{KP}(N) = M_{KP}(P) = -2,825 \text{ кНм}$;

ділянка PT , $M_{KP}(P) = -2,825 \text{ кНм}$;

$$M_{KP}(P) = -2,825 + 20 \cdot 0,2 = 1,175 \text{ кНм};$$

ділянка TC , $M_{KP}(T) = M_{KP}(C) = 1,175 \text{ кНм}$.

Будуємо епюру крутних моментів (рис. 3.10з).
З умови жорсткості

$$\theta_i = \frac{|\Delta\varphi_i|}{l_i} \leq [\theta],$$

де $\Delta\varphi_i$ – абсолютна кутова деформація i -ої ділянки вала,

$$\Delta\varphi_i = \frac{M_{KPi} \cdot l_i}{G \cdot I_{Pi}};$$

M_{KPi} – величина крутного моменту, який діє на i -ій ділянці вала
(див. рис. 3.11з);

l_i – довжина i -ої ділянки вала,

визначаємо значення діаметрів вала на кожній ділянці.

Ділянка BK :

$$\Delta\varphi_{BK} = \frac{1,675 \cdot 0,3 \cdot 10^9}{8 \cdot 10^4 \cdot 0,098 \cdot d_{BK}^4} \cdot \frac{180^\circ}{\pi} = \frac{36,72 \cdot 10^5}{d_{BK}^4} \text{ град};$$

$$\theta_{BK} = \frac{36,72 \cdot 10^5}{0,3 \cdot 10^3 d_{BK}^4} \leq [\theta] = 0,5 \frac{\text{град}}{\text{м}};$$

$$d_{BK} \geq \sqrt[4]{\frac{36,72 \cdot 10^5}{0,3 \cdot 10^3 \cdot 0,5}} = 12,5 \text{ мм.}$$

Ділянка KL :

$$\Delta\varphi_{KL} = \frac{\left(1,675 \cdot 0,3 - \frac{15 \cdot 0,3^2}{2}\right) \cdot 10^9}{8 \cdot 10^4 \cdot 0,098 \cdot d_{KL}^4} \cdot \frac{180^\circ}{\pi} = \frac{12,61 \cdot 10^5}{d_{KL}^4} \text{ град};$$

$$\theta_{KL} = \frac{12,61 \cdot 10^5}{0,3 \cdot 10^3 d_{KL}^4} \leq [\theta] = 0,5 \frac{\text{град}}{\text{м}};$$

$$d_{KL} \geq 4 \sqrt{\frac{12,61 \cdot 10^5}{0,3 \cdot 10^3 \cdot 0,5}} = 9,55 \text{ мм.}$$

Ділянка LN :

$$\Delta\varphi_{LN} = \frac{|-2,825 \cdot 0,2| \cdot 10^9}{8 \cdot 10^4 \cdot 0,280 \cdot d_{LN}^4} \cdot \frac{180^\circ}{\pi} = \frac{14,4 \cdot 10^5}{d_{LN}^4} \text{ град;}$$

$$\theta_{LN} = \frac{14,4 \cdot 10^5}{0,3 \cdot 10^3 d_{LN}^4} \leq [\theta] = 0,5 \frac{\text{град}}{\text{м}};$$

$$d_{LN} \geq 4 \sqrt{\frac{14,4 \cdot 10^5}{0,3 \cdot 10^3 \cdot 0,5}} = 11,0 \text{ мм.}$$

Ділянка NP :

$$\Delta\varphi_{NP} = \frac{|-2,825 \cdot 0,2| \cdot 10^9}{8 \cdot 10^4 \cdot 0,277 \cdot d_{NP}^4} \cdot \frac{180^\circ}{\pi} = \frac{14,6 \cdot 10^5}{d_{NP}^4} \text{ град;}$$

$$\theta_{NP} = \frac{14,6 \cdot 10^5}{0,3 \cdot 10^3 d_{NP}^4} \leq [\theta] = 0,5 \frac{\text{град}}{\text{м}};$$

$$d_{NP} \geq 4 \sqrt{\frac{14,6 \cdot 10^5}{0,3 \cdot 10^3 \cdot 0,5}} = 11,0 \text{ мм.}$$

Ділянка PT :

$$\Delta\varphi_{PT} = \frac{\left| -2,825 \cdot 0,2 + -\frac{20 \cdot 0,2^2}{2} \right| \cdot 10^9}{8 \cdot 10^4 \cdot 0,277 \cdot d_{PT}^4} \cdot \frac{180^\circ}{\pi} = \frac{4,24 \cdot 10^5}{d_{PT}^4} \text{ град;}$$

$$\theta_{PT} = \frac{4,24 \cdot 10^5}{0,3 \cdot 10^3 d_{PT}^4} \leq [\theta] = 0,5 \frac{\text{град}}{\text{м}};$$

$$d_{PT} \geq \sqrt[4]{\frac{4,24 \cdot 10^5}{0,3 \cdot 10^3 \cdot 0,5}} = 8,06 \text{ мм.}$$

Ділянка TC :

$$\Delta\varphi_{TC} = \frac{1,175 \cdot 0,3 \cdot 10^9}{8 \cdot 10^4 \cdot 0,277 \cdot d_{TC}^4} \cdot \frac{180^\circ}{\pi} = \frac{9,16 \cdot 10^5}{d_{TC}^4} \text{ град;}$$

$$\theta_{TC} = \frac{9,16 \cdot 10^5}{0,3 \cdot 10^3 d_{TC}^4} \leq [\theta] = 0,5 \frac{\text{град}}{\text{м}} ;$$

$$d_{TC} \geq \sqrt[4]{\frac{9,16 \cdot 10^5}{0,3 \cdot 10^3 \cdot 0,5}} = 8,84 \text{ мм.}$$

Отриманий результат заокруглимо за стандартом до ближчого більшого значення із ряду 10; 10,5; 11; 11,5; 12; 13; 14; 15; 16; 17; 18; 19; 20; 21; 22; 24; 25; 26; 28; 30; 32; 33; 34; 36; 38; 40; 42; 45; 48; 50; 52; 55; 60; 63; 65; 70; 75; 80; 85; 90; 95; 100; 105; 110; 120; 125; 130 і далі через 10 мм.

Приймаємо діаметр вала $d = 14$ мм.

Відповідь: з умови жорсткості приймаємо діаметр вала $d = 14$ мм.

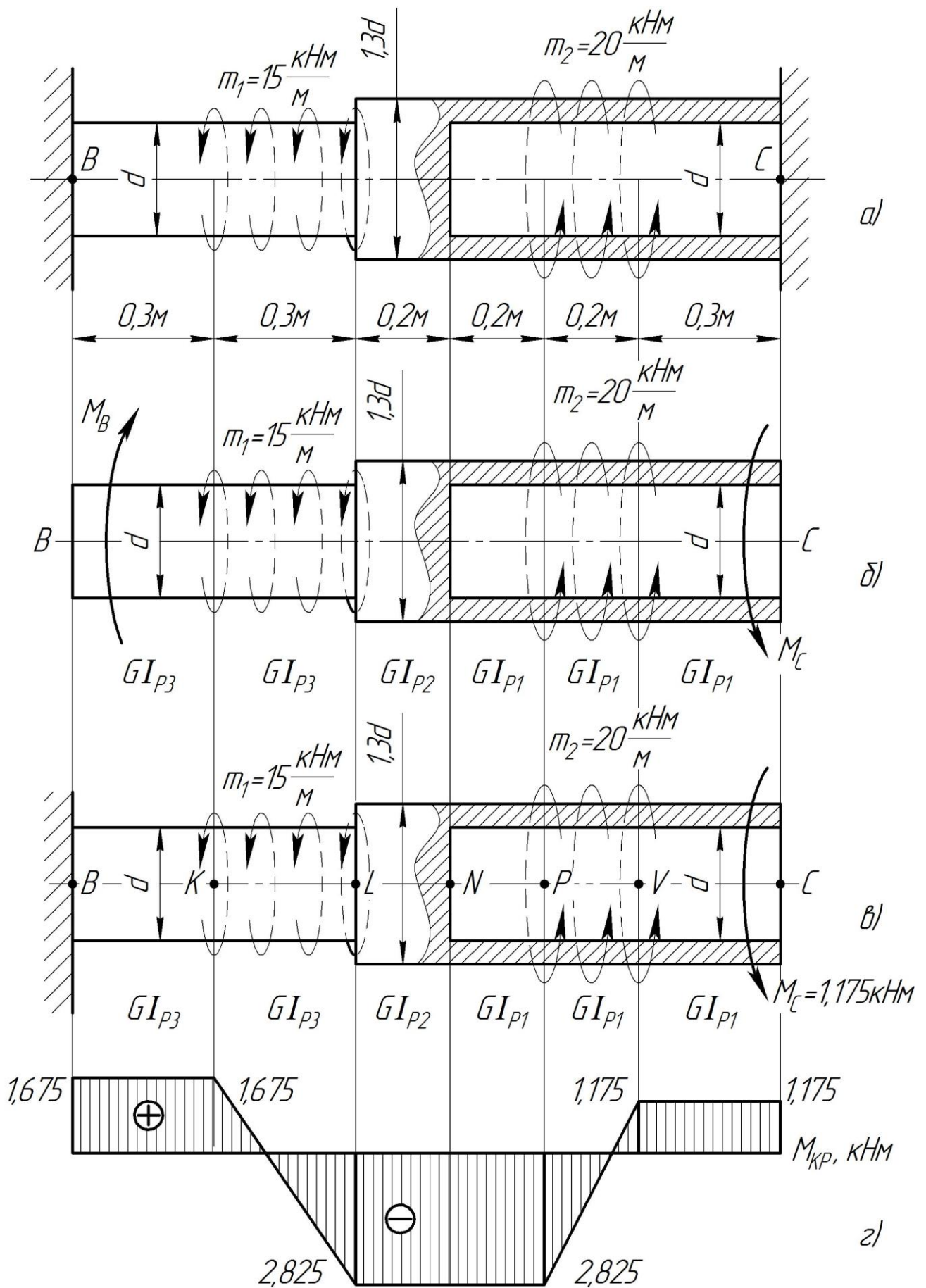


Рисунок 3.11

Приклад 3.8. Поперечний перетин комбінованого вала утворений із гетинаксового стрижня склеєного з мідною трубою. Визначити максимальні дотичні напруження в обох матеріалах за умови, що вал закріплено у двох жорстких опорах B і C і навантажено моментом M (рис. 3.12а). Модуль зсуву гетинаксу – G_1 , міді – G_2 ; $D = 2d$. Побудувати епюри розподілу дотичних напружень, якщо $G_2 = 10 \cdot G_1$.

Розв'язування

Розв'язування задачі розіб'ємо на два етапи.

Перший етап. Визначаємо опорні моменти, які виникають на торцях вала. Умовно звільняємо вал від зовнішніх опор B і C . Замінюємо їх дію на вал реактивними (опорними) моментами M_B і M_C (рис. 3.12б). Записуємо рівняння статички

$$\sum M_X = 0, \quad M_B - M + M_C = 0. \quad (1)$$

Визначення двох невідомих із одного рівняння неможливе, тому така система силових факторів є статично невизначеною. Для розкриття статичної невизначеності складаємо додаткове рівняння – рівняння сумісності деформацій. Умовно звільняємо вал від правої опори C , прикладаємо до нього моменти M і M_C . В результаті їх дії кутове переміщення опори C дорівнює нулю

$$\Delta\varphi_C = 0. \quad (2)$$

Вважаємо, що приведена жорсткість комбінованого вала $G_0 \cdot I_{P0} = const$. Використовуючи метод суперпозицій, запишемо рівняння для визначення кутового переміщення

$$\Delta\varphi_C = \frac{M_C \cdot 3 \cdot a}{G \cdot I_{P0}} - \frac{M \cdot a}{G \cdot I_{P0}} = 0,$$

звідки визначаємо момент в опорі C

$$M_C = \frac{1}{3} \cdot M.$$

З рівняння (1) визначимо момент в опорі B

$$M_B = M - \frac{1}{3} \cdot M = \frac{2}{3} \cdot M.$$

Визначаємо внутрішні силові фактори – крутні моментів на ділянках вала (рис. 3.12б):

$$M_{KP1} = M_C = \frac{1}{3} \cdot M ;$$

$$M_{KP2} = M_C - M = \frac{2}{3} \cdot M .$$

Будуємо епюру крутних моментів (рис. 3.12в).

Найбільш навантаженою є ділянка II, тому визначення максимальних дотичних напружень в обох матеріалах комбінованого вала виконаємо для навантаження $M_{KP\max} = 2/3 M$.

Другий етап. Крутний момент $M_{K\max}$ розподіляється по площинах поперечного перетину вала нерівномірно. Для визначення внутрішніх силових факторів, а саме, крутних моментів M_{KP1} і M_{KP2} , які сприймаються відповідно гетинаксовою та мідною трубами (рис. 3.12г), складаємо два рівняння.

Рівняння статки

$$M_{KP\max} = M_{KP1} + M_{KP2}. \quad (3)$$

і рівняння сумісності деформацій

$$\frac{M_{KP1}}{G_1 \cdot I_{P1}} = \frac{M_{KP2}}{G_2 \cdot I_{P2}}. \quad (4)$$

Розв'язавши рівняння (3) і (4), отримаємо значення внутрішніх моментів у поперечному перетині вала

$$M_{KP1} = M_{KP\max} \cdot \frac{G_1 \cdot I_{P1}}{G_1 \cdot I_{P1} + G_2 \cdot I_{P2}} ;$$

$$M_{KP2} = M_{KP\max} \cdot \frac{G_2 \cdot I_{P2}}{G_1 \cdot I_{P1} + G_2 \cdot I_{P2}} ,$$

де I_{P1} , I_{P2} – полярні моменти інерції, відповідно гетинаксової пустотілої труби та суцільної мідної,

$$I_{P1} = \frac{\pi \cdot D^4}{32} (1 - \alpha^4); \quad I_{P2} = \frac{\pi \cdot d^4}{32}, \quad \alpha = \frac{d}{D} = 0,5.$$

Визначимо максимальні дотичні напруження для матеріалів вала

$$\tau_{\max i} = \frac{M_{KPi}}{I_{Pi}} \cdot \rho_{\max i},$$

де $\rho_{\max i}$ – координата точки поперечного перетину вала максимально віддалена від полюса.

Для гетинаксового стрижня $\rho_{\max 1} = \frac{D}{2}.$

Для мідної труби $\rho_{\max 2} = \frac{d}{2}.$

Отже, максимальні дотичні напруження для:

– гетинаксової труби

$$\begin{aligned} \tau_{\max 1} &= \frac{M_{KP1}}{I_{P1}} \cdot \frac{D}{2} = \frac{M_{KP\max} \cdot G_1 \cdot I_{P1}}{(G_1 \cdot I_{P1} + G_2 \cdot I_{P2}) \cdot I_{P1}} \cdot \frac{2 \cdot d}{2} = \\ &= \frac{2}{3} \cdot \frac{M \cdot G_1 \cdot d}{G_1 \cdot I_{P1} + G_2 \cdot I_{P2}} = 2 G_1 \cdot K; \end{aligned}$$

– мідної труби

$$\begin{aligned} \tau_{\max 2} &= \frac{M_{KP2}}{I_{P2}} \cdot \frac{d}{2} = \frac{M_{KP\max} \cdot G_2 \cdot I_{P2}}{(G_1 \cdot I_{P1} + G_2 \cdot I_{P2}) \cdot I_{P2}} \cdot \frac{d}{2} = \\ &= \frac{1}{3} \cdot \frac{M \cdot G_2 \cdot d}{G_1 \cdot I_{P1} + G_2 \cdot I_{P2}} = G_2 \cdot K = 10 G_1 \cdot K, \end{aligned}$$

де $K = \frac{1}{3} \cdot \frac{M \cdot d}{G_1 \cdot I_{P1} + G_2 \cdot I_{P2}}.$

Епюра розподілу дотичних напружень по висоті поперечного перетину вала показана на рис. 3.12д.

Відповідь: максимальні дотичні напруження:

для гетинаксової труби $\tau_{\max 1} = 2 \cdot G_1 \cdot K;$

для мідної труби $\tau_{\max 2} = G_2 \cdot K = 10 \cdot G_1 \cdot K.$

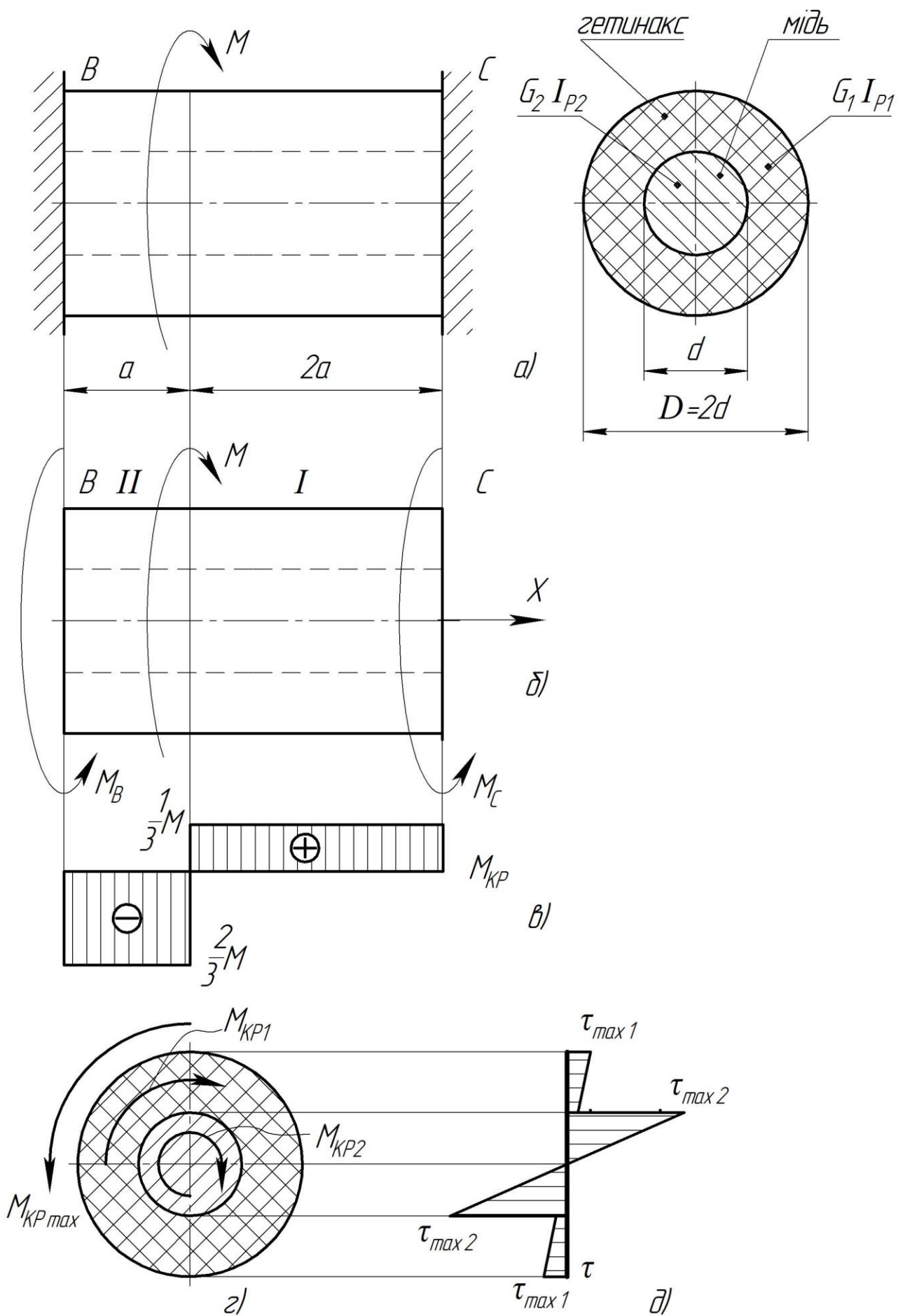
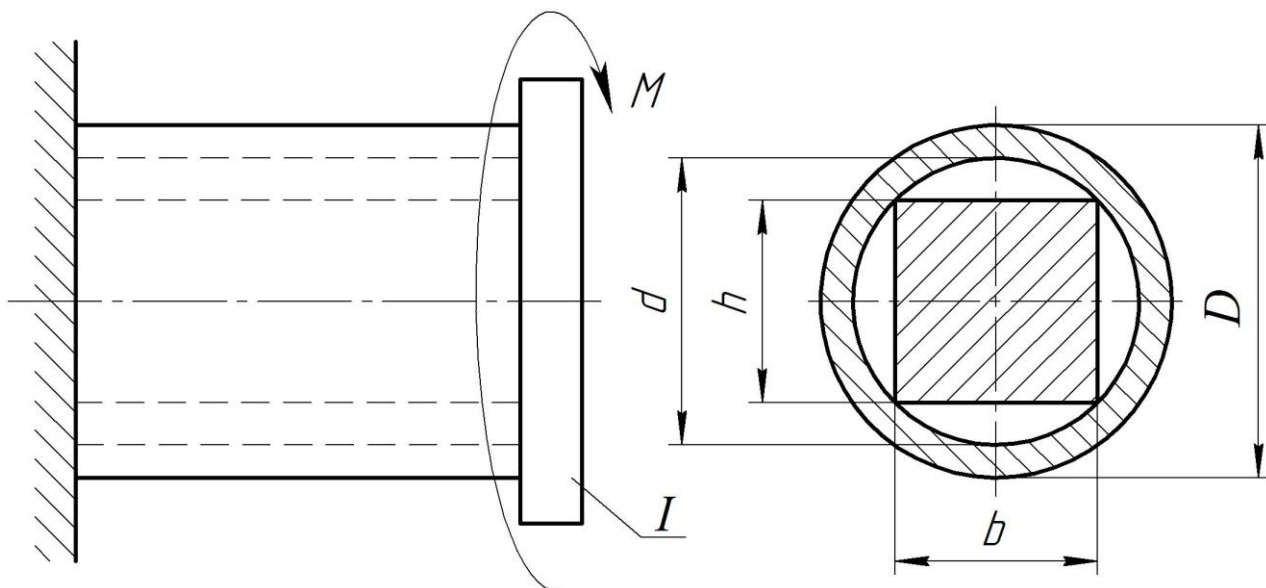


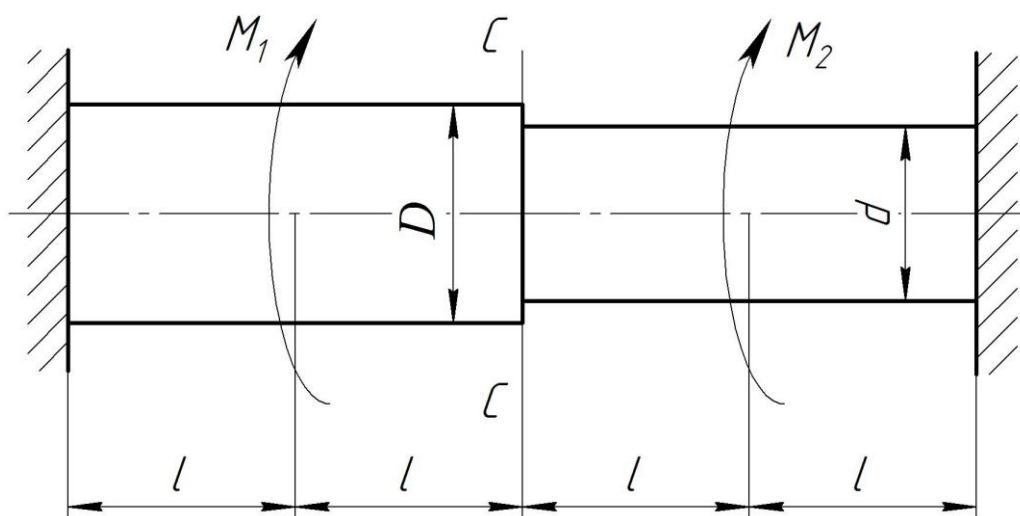
Рисунок 3.12

ЗАДАЧІ ДЛЯ САМОСТІЙНОГО РОЗВ'ЯЗУВАННЯ

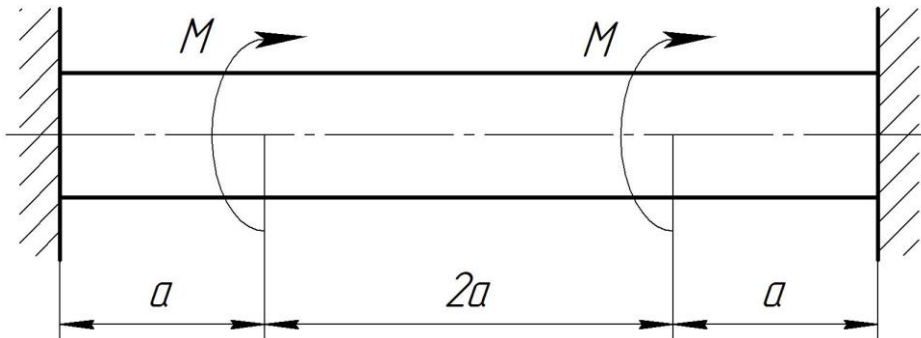
Задача 3.1. У сталю трубку із зовнішнім діаметром D (d – внутрішній діаметр) вставлений сталю стрижень квадратного перетину $h=b$ (див. рис.). Трубка і стрижень жорстко з'єднані диском I і навантажені зовнішнім моментом M , як показано на рисунку. Визначити співвідношення максимальних дотичних напружень трубки і стрижня, якщо $\frac{h}{b} = 1$; $\alpha = 0,14$; $\beta = 0,208$; $I_K = \beta \cdot h \cdot b^3$; $W_K = \alpha \cdot h \cdot b^3$.



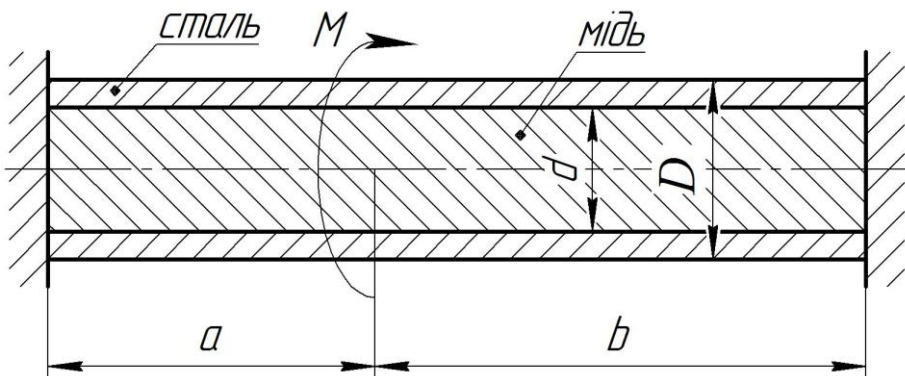
Задача 3.2. Визначити діаметри круглого сталю бруса з умови жорсткості (див. рис.) і кут повороту перетину C , приймаючи: $l = 0,5$ м; $G = 8 \cdot 10^4$ МПа; $\frac{D}{d} = \sqrt{2}$; $[\theta] = 0,0349 \frac{\text{рад}}{\text{м}}$; $M_1 = 4000$ Нм; $M_2 = 1000$ Нм.



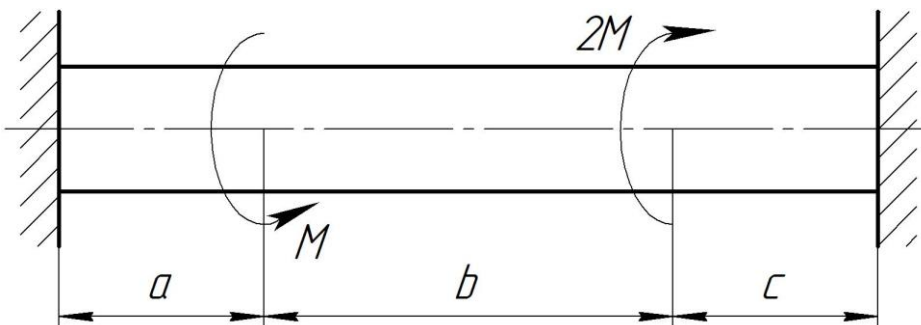
Задача 3.3. Для бруса, що скручується, круглого поперечного перетину постійної крутильної жорсткості (див. рис.), побудувати епюри крутних моментів, кутів закручування, визначити головні напруження на його поверхні і відповідні їм деформації на всіх ділянках.



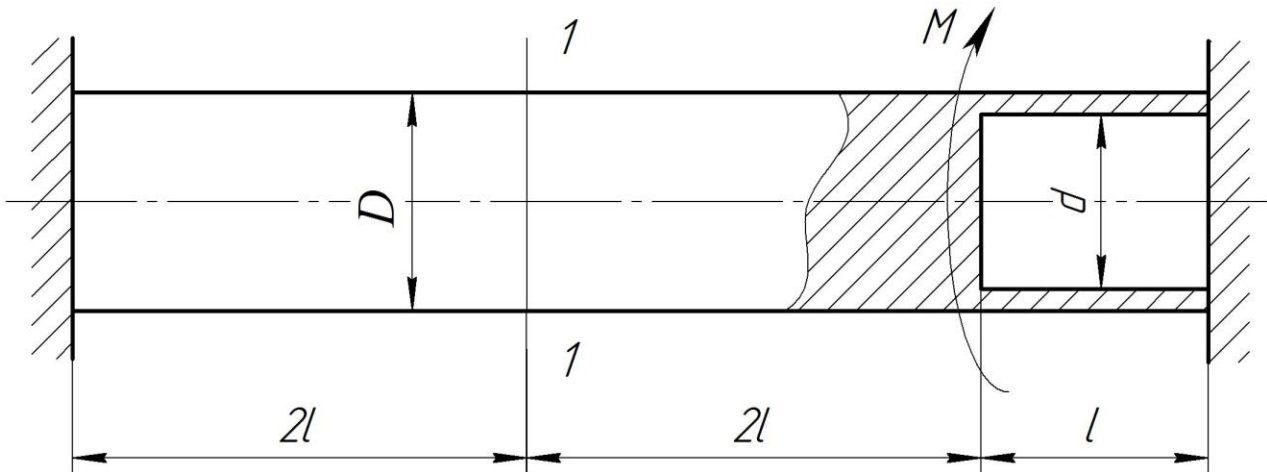
Задача 3.4. Мідний стрижень круглого поперечного перетину вставлений у сталеву трубу (див. рис.) так, що неможливе їх прокручування один відносно одного. Визначити допустиме значення моменту $[M]$, якщо: $D = 4 \cdot 10^{-2}$ м; $d = 3,2 \cdot 10^{-2}$ м; $a = 0,1$ м; $b = 0,15$ м; $G_{СТ} = 8 \cdot 10^4$ МПа; $G_M = 3,5 \cdot 10^4$ МПа; $[\tau]_{СТ} = 100$ МПа; $[\tau]_M = 60$ МПа.



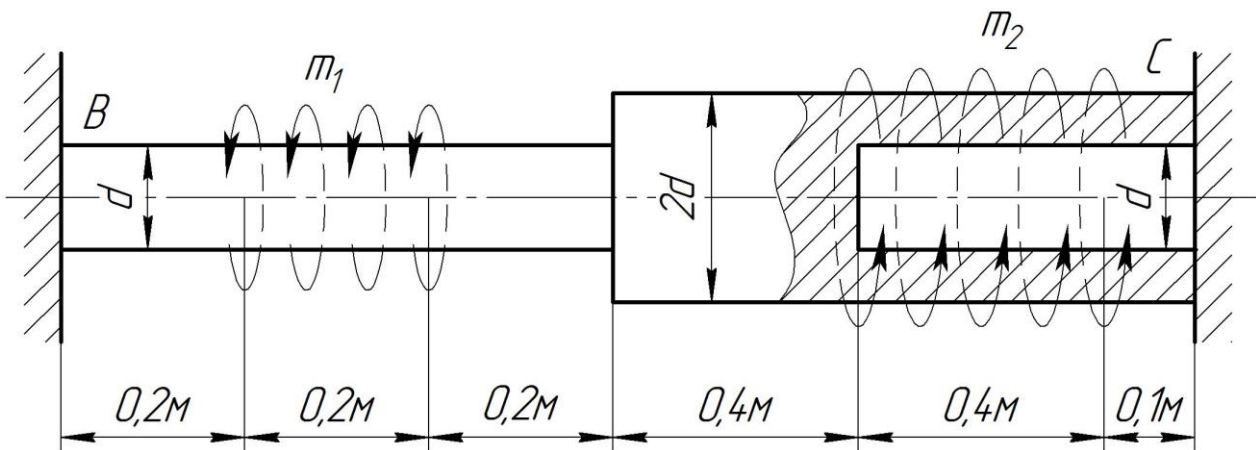
Задача 3.5. При яких співвідношеннях a, b, c виконується умова рівномірності вала на ділянках довжиною b і c (див. рис). Матеріал і поперечний перетин вала однаковий на всій його довжині.



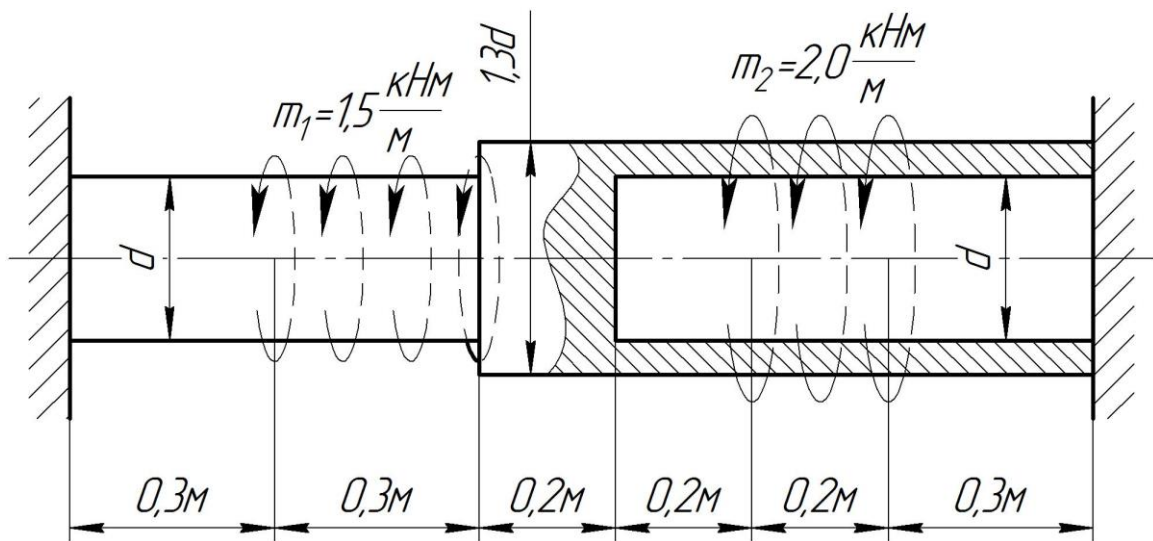
Задача 3.6. Вал, що має на одній ділянці суцільний перетин ($D = 4$ см), а на другій – пустотілий ($d = 2$ см) затиснутий з обох боків і навантажений моментом M (див. рис). Визначити величину крутного моменту, якщо відомо, що найбільші дотичні напруження у перетині 1-1 дорівнюють $\tau_{\max} = 80$ МПа.



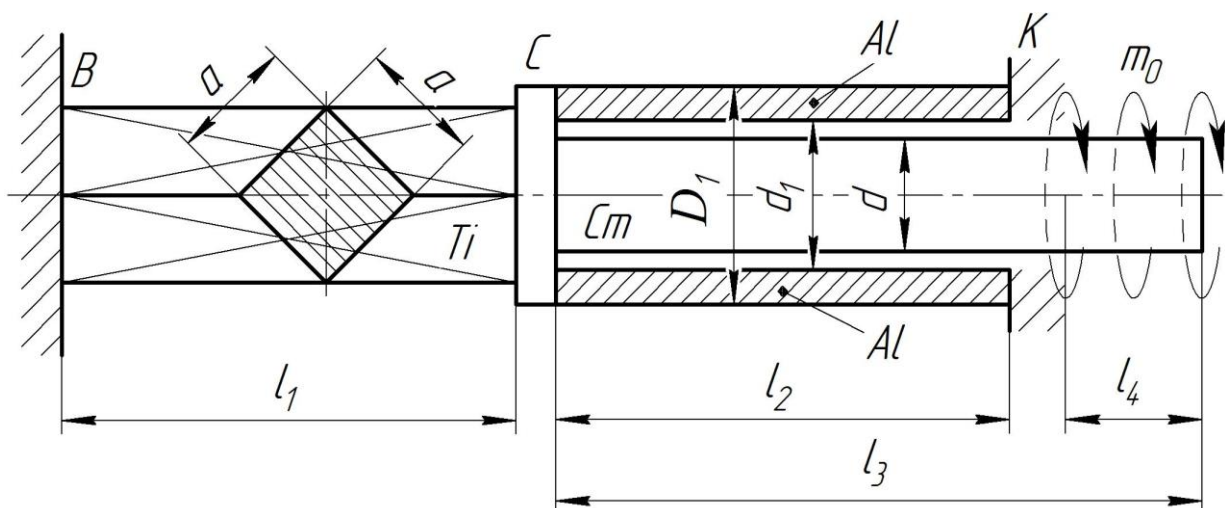
Задача 3.7. Вал із різними жорсткостями, жорстко закріплений в опорах B і C , навантажений рівномірно розподіленими моментами $m_1 = 2$ кНм/м; $m_2 = 2,5$ кНм/м (див. рис.). Визначити d з умови міцності, якщо $[\tau] = 100$ МПа; $G = 8 \cdot 10^4$ МПа .



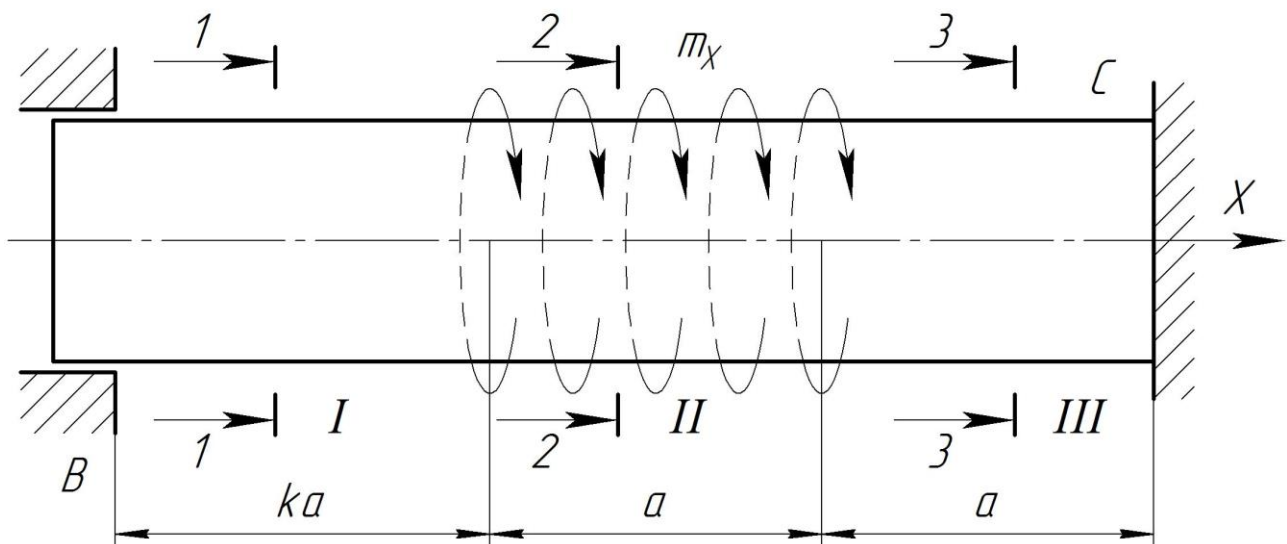
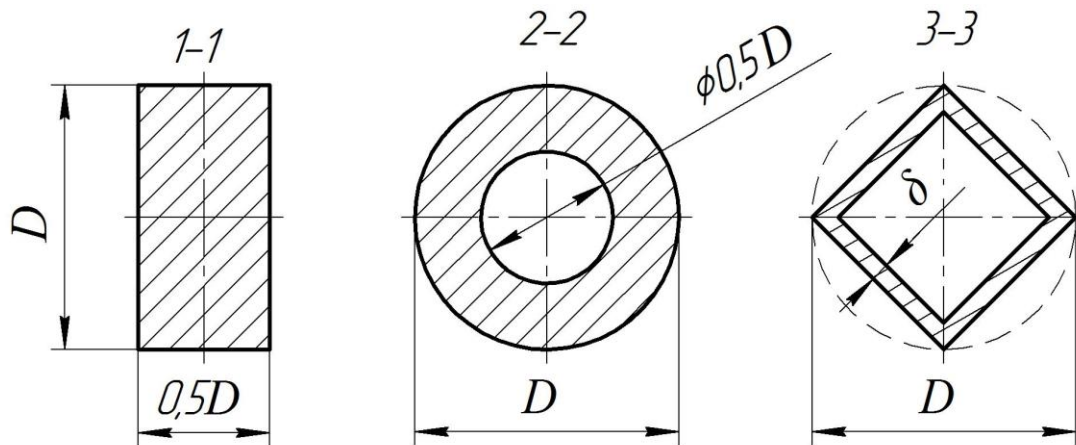
Задача 3.8. Вал навантажений рівномірно розподіленими моментами $m_1 = 15 \text{ кН/м}$; $m_2 = 20 \text{ кН/м}$ (див. рис.). Необхідно визначити d з умови міцності при умові $[\tau] = 100 \text{ МПа}$; $G = 8 \cdot 10^4 \text{ МПа}$.



Задача 3.9. Вал навантажений рівномірно розподіленим моментом $m_0 = 50 \text{ кН/м}$ (див. рис.). Дано: $a = 5 \cdot 10^{-2} \text{ м}$; $d = 5 \cdot 10^{-2} \text{ м}$; $d_1 = 5,4 \cdot 10^{-2} \text{ м}$; $D_1 = 7 \cdot 10^{-2} \text{ м}$; $l_1 = 0,5 \text{ м}$; $l_2 = 0,5 \text{ м}$; $l_3 = 0,65 \text{ м}$; $l_4 = 5 \cdot 10^{-2} \text{ м}$; $G_{CT} = 8 \cdot 10^4 \text{ МПа}$; $G_{Ti} = 4 \cdot 10^4 \text{ МПа}$; $G_{Al} = 3 \cdot 10^4 \text{ МПа}$. Опори B і K абсолютно жорсткі і нерухомі. З'єднувальний диск C абсолютно жорсткий, рухомий. Визначити: 1) напруження, які діють в елементах із Al -сплаву, Ti -сплаву; 2) кут повороту з'єднувального диска C після навантаження моментом m_0 . Для квадратного перетину $I_K = 0,141 a^4$; $W_K = 0,208 a^3$.



Задача 3.10. Вал із прямокутним, круглим пустотілим і тонкостінним поперечними перетинами на відповідних ділянках (див. рис.) навантажений на середній ділянці розподіленим моментом m_x . В опорах B і C вал жорстко закріплений, але опора B має змогу переміщення в поздовжньому напрямку (по осі X). При заданих $m_x = 5$ кНм/м, $a = 0,2$ м, $D = 40$ мм, $\delta = 2$ мм і модулі пружності при зсуві $G = 8 \cdot 10^4$ МПа, визначити величину k , при якій дотичні напруження першої ділянки будуть дорівнювати дотичним напруженням третьої ділянки $\tau_{\max I} = \tau_{\max III}$.



4. ГЕОМЕТРИЧНІ ХАРАКТЕРИСТИКИ ПЛОСКИХ ПЕРЕТИНІВ

Моменти інерції та центр ваги

Статичний момент площі плоскої фігури відносно осі, що лежить у тій самій площині, – це взята на всій площі сума добутків площ елементарних площадок на відстані їх від цієї осі.

Статичні моменти площі перетину довільної форми (рис. 4.1) визначають за формулами

$$S_X = \int_A y dA; \quad S_Y = \int_A x dA;$$

$$S_X = y_C \cdot A; \quad S_Y = x_C \cdot A,$$

де x , y – координати (відстані), що визначають положення елемента площі dA ;

y_C , x_C – координати центра ваги площі перетину;

A – площа перетину;

dA – елемент площі (елементарна площадка).

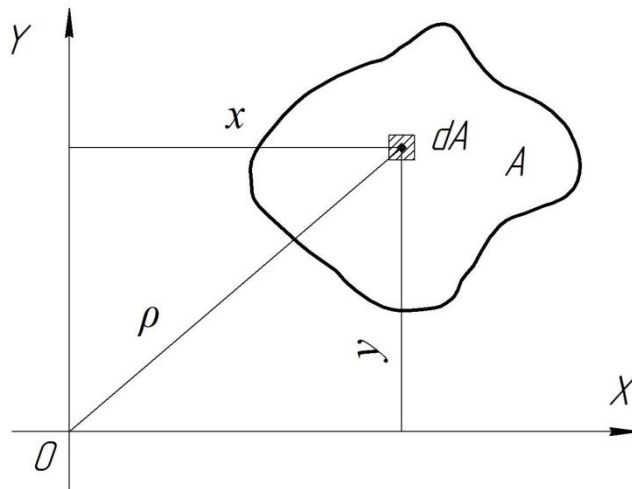


Рисунок 4.1

Статичний момент площі фігури відносно осі, що лежить у тій самій площині, дорівнює добутку площі фігури на відстань її до центра ваги від цієї осі.

Розмірність статичного моменту площі фігури – м^3 . Він може бути величиною додатною, від'ємною і дорівнювати нулю (відносно осі симетрії фігури або відносно центральної осі, тобто осі, що проходить через центр ваги перетину).

Для визначення **центра ваги** складних фігур застосовують **метод розбиття**, статичний момент площі всієї фігури визначають як алгебраїчну суму статичних моментів окремих її частин. Координати центра ваги складного перетину визначають за формулами

$$x_C = \frac{\sum S_Y}{\sum A}; \quad y_C = \frac{\sum S_X}{\sum A},$$

де $\sum S_Y$, $\sum S_X$ – сума статичних моментів окремих площ;
 $\sum A$ – сума окремих площ.

Осі, що проходять через центр ваги перетину, називають **центральною осями**. Статичний момент площі відносно центральної осі дорівнює нулю.

Полярний момент інерції плоскої фігури відносно полюса, який лежить у тій самій площині, – це взята на всій площині сума добутків площ елементарних площадок на квадрати їх відстаней від полюса.

Полярний момент площі перетину довільної форми відносно полюса O (див. рис. 4.1) визначають за інтегралом

$$I_P = \int_A \rho^2 dA,$$

де ρ – відстань від центра елементарної площадки (елемента площі) dA до осі, перпендикулярної до площини перетину, що проходить через точку O (полюс),

$$\rho^2 = y^2 + x^2.$$

Осьовий момент інерції плоскої фігури відносно осі, що лежить у тій самій площині, – це взята на всій площі сума добутків площ елементарних площадок на квадрат їх відстаней від цієї осі.

Осьові моменти інерції площі перетину довільної форми (див. рис. 4.1) відносно осей OX та OY визначають за інтегралами

$$I_X = \int_A y^2 dA; \quad I_Y = \int_A x^2 dA.$$

Полярний та осьові моменти інерції площі перетину величини завжди додатні і не дорівнюють нулю.

Залежність між осьовими та полярним моментами інерції

$$I_P = \int_A \rho^2 dA = \int_A (y^2 + x^2) dA = I_X + I_Y.$$

Розмірність момента інерції фігури – m^4 .

Сума осьових моментів інерції відносно двох взаємно перпендикулярних осей дорівнює полярному моменту інерції відносно точки перетину цих осей (початку координат).

Залежність між моментами інерції при паралельному переносі осей

$$I_{X_1} = I_X + A \cdot a^2.$$

Осьовий момент інерції відносно будь-якої осі X_1 дорівнює осьовому моменту інерції відносно центральної осі X , яка паралельна осі X_1 , плюс добуток площі на квадрат відстані між осями (a – відстань між осями).

Головні осі та головні моменти інерції

Центральні осі – осі, які проходять через центр ваги плоскої фігури.

Центральні моменти інерції плоскої фігури (перетину) – моменти інерції відносно центральних осей.

Якщо осі координат повертати у своїй площині навколо початку координат, то полярний момент інерції перетину залишиться постійним, а осьові моменти інерції будуть змінюватися, причому

$$I_X + I_Y = I_P = const.$$

Якщо сума двох змінних величин залишається сталою, то одна з них зменшується, а друга збільшується. Отже, при якомусь положенні один із осьових моментів досягає максимального, а другий – мінімального значень.

Головні осі інерції – осі, відносно яких осьові моменти інерції перетину (плоскої фігури) досягають максимальних і мінімальних значень.

Головні моменти інерції перетину – це осьові моменти інерції відносно головних осей.

Головні центральні осі – це головні осі, які проходять через центр ваги перетину (плоскої фігури). Якщо фігура має хоча б одну вісь симетрії, то ця вісь завжди буде однією з головних центральних осей.

Головні центральні моменти інерції перетину (плоскої фігури) – це моменти інерції відносно головних центральних осей.

В інженерних розрахунках важливе значення мають **головні центральні моменти інерції**.

Моменти інерції перетинів є геометричними характеристиками, які дають змогу порівняти жорсткість брусів із заданого матеріалу з їхнім опором зовнішнім силам.

Опір бруса згину та крученню характеризують також моментами опору перетинів: осьовими та полярним.

Осьові моменти опору перетинів визначають за формулами

$$W_X = \frac{I_X}{|y_{\max}|}; \quad W_Y = \frac{I_Y}{|x_{\max}|},$$

де y_{\max} , x_{\max} – координати точок поперечного перетину максимально віддалених від осей OX та OY .

Полярний момент опору перетину відповідно

$$W_P = \frac{I_P}{\rho_{\max}},$$

де ρ_{\max} – координата точки перетину, максимально віддаленої від полюса.

Осьові та полярні моменти інерції набирають лише додатних значень.

Полярні моменти інерції та полярні моменти опору для поперечних перетинів:

– круг (рис. 4.2а) $I_P = \pi \cdot D^4 / 32;$ $W_P = \pi \cdot D^3 / 16;$

– кільце (рис. 4.2б)

$$I_P = \frac{\pi \cdot D^4}{32} \cdot (1 - \alpha^4); \quad W_P = \frac{\pi \cdot D^3}{16} \cdot (1 - \alpha^4), \quad \text{де } \alpha = d/D.$$

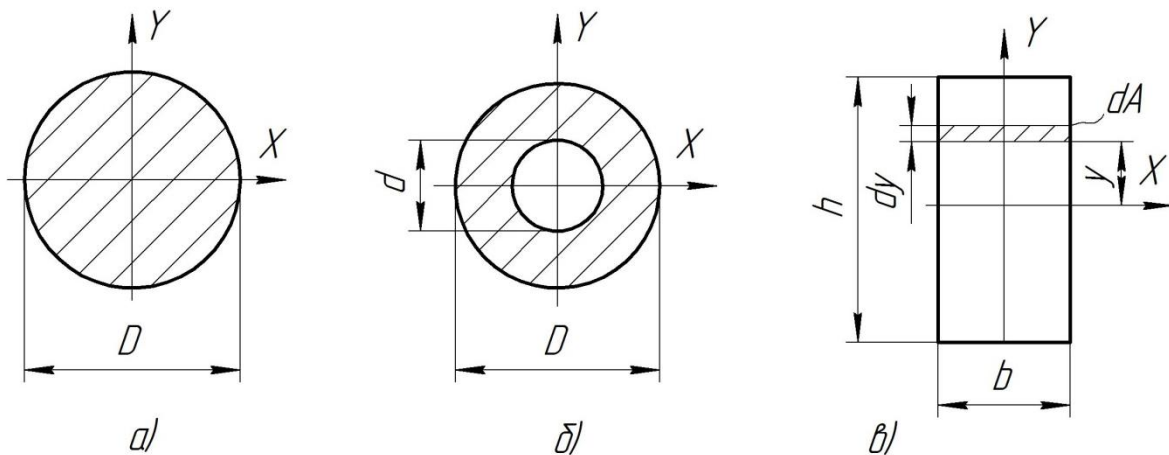


Рисунок 4.2

Осьові моменти інерції та осьові моменти опору для поперечних перетинів:

– круг (див. рис. 4.2а)

$$I_X = I_Y = I_0 = \pi \cdot D^4 / 64; \quad W_X = W_Y = W_0 = \pi \cdot D^3 / 32;$$

– прямокутник (рис. 4.2в)

$$I_X = \frac{b \cdot h^3}{12}; \quad I_Y = \frac{h \cdot b^3}{12}; \quad W_X = \frac{b \cdot h^2}{6}; \quad W_Y = \frac{h \cdot b^2}{6}.$$

ПРИКЛАДИ

Приклад 4.1. Складний поперечний перетин містить три елементи (рис. 4.3): перший (*I*) елемент двотавр №12, $H = 120$ мм; $B = 64$ мм; другий (*II*) елемент кільцевий перетин із розмірами R і r ; третій (*III*) елемент – трикутний перетин, $h = 30$ мм, $b = 45$ мм. Визначити значення R і r , щоб центр ваги складного перетину збігався з центром ваги двотавра.

Розв'язування

Запишемо умови при яких центр ваги складного перетину буде збігатися із центральними осями двотаврового перетину:

$$\sum S_{X1} = 0; \quad \sum S_{Y1} = 0,$$

або

$$-A_2 \cdot \frac{H}{2} + A_3 \cdot \left(\frac{H}{2} - \frac{h}{3} \right) = 0; \quad (1)$$

$$A_2 \cdot \left(\frac{B}{2} + R \right) - A_3 \cdot \left(\frac{B}{2} + \frac{b}{3} \right) = 0, \quad (2)$$

де A_2 , A_3 – площі поперечних перетинів другого (*II*) та третього (*III*) елементів,

$$A_2 = \pi \cdot R^2 - \pi \cdot r^2 = \pi \cdot (R^2 - r^2); \quad (3)$$

$$A_3 = \frac{1}{2} \cdot b \cdot h = \frac{1}{2} \cdot 45 \cdot 30 = 675 \text{ мм}^2.$$

З рівняння (1) визначимо площу поперечного перетину другого елемента

$$A_2 = \frac{A_3 \cdot \left(\frac{H}{2} - \frac{h}{3} \right)}{\frac{H}{2}} = \frac{675 \cdot \left(\frac{120}{2} - \frac{30}{3} \right)}{\frac{120}{2}} = 562,5 \text{ мм}^2.$$

Маючи значення площ A_2 і A_3 , з рівняння (2) отримаємо

$$R = \frac{A_3}{A_2} \cdot \left(\frac{B}{2} + \frac{b}{3} \right) - \frac{B}{2} = \frac{675}{562,5} \cdot \left(\frac{64}{2} + \frac{45}{3} \right) - \frac{64}{2} = 24,4 \text{ мм.}$$

Тоді з рівняння (3) визначимо

$$r = \sqrt{R^2 - \frac{A_2}{\pi}} = \sqrt{24,4^2 - \frac{562,5}{\pi}} = 20,4 \text{ мм.}$$

Відповідь: розміри кільцевого перетину третього елемента
 $R = 24,4$ мм; $r = 20,4$ мм.

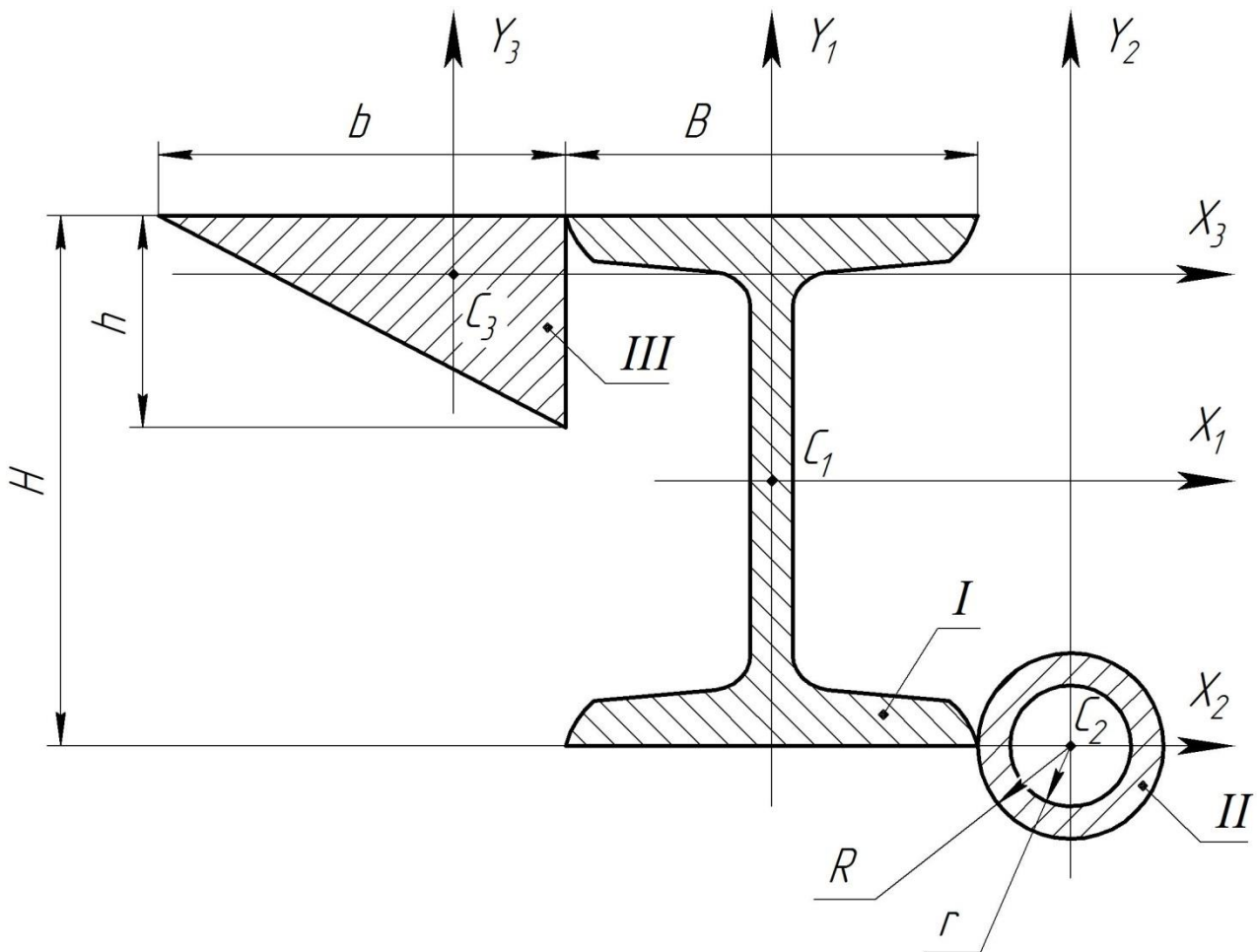


Рисунок 4.3

Приклад 4.2. При якому співвідношенню h/b осьові моменти інерції та осьові моменти опору вписаного в коло прямокутника (рис. 4.4) будуть найбільшими?

Розв'язування

Осьовий момент інерції прямокутного поперечного перетину (див. рис. 4.4) відносно осі X

$$I_X = \frac{b \cdot h^3}{12} = \frac{d \cdot \cos \alpha \cdot (d \cdot \sin \alpha)^3}{12} = \frac{d^4}{12} \cdot \cos \alpha \cdot \sin^3 \alpha, \quad (1)$$

де b, h – сторони прямокутника виражені через діаметр кола,

$$b = d \cdot \cos \alpha, \quad h = d \cdot \sin \alpha.$$

Змінною величиною у залежності (1) для визначення I_X є кут α . Дослідимо функцію $I_X = f(\alpha)$ на екстремум:

$$\frac{dI_X}{d\alpha} = \frac{d^4}{12} \cdot (-\sin \alpha \cdot \sin^3 \alpha + \cos \alpha \cdot 3 \cdot \sin^2 \alpha \cdot \cos \alpha) = 0;$$

$$3 \cdot \cos^2 \alpha \cdot \sin^2 \alpha - \sin^4 \alpha = 0;$$

$$\sin^2 \alpha \cdot (3 \cdot \cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha) = 0. \quad (2)$$

Рівняння (2) має два розв'язки:

а) $\sin^2 \alpha = 0$, $\alpha = 0 + \pi \cdot n$ – не відповідає умові задачі;

б) $3 \cdot \cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha = 0$; $tg^2 \alpha = \frac{\sin^2 \alpha}{\cos^2 \alpha} = 3$, звідки $tg \alpha = \sqrt{3}$.

Враховуючи, що $tg \alpha = \frac{h}{b}$, отримаємо $\frac{h}{b} = \sqrt{3}$, $h = b \cdot \sqrt{3}$.

Осьовий момент опору прямокутного поперечного перетину (див. рис. 4.4) відносно осі X

$$W_X = \frac{I_X}{y_{\max}} = \frac{I_X}{h/2} = \frac{b \cdot h^2}{6} = \frac{d \cdot \cos \alpha \cdot (d \cdot \sin \alpha)^2}{6} = \frac{d^3 \cdot \cos \alpha \cdot \sin^2 \alpha}{6}. \quad (4)$$

Змінною величиною у залежності (4) для визначення W_X є кут α . Дослідимо функцію $W_X = f(\alpha)$ на екстремум:

$$\begin{aligned} \frac{dW_X}{d\alpha} &= \frac{d^3}{6} \cdot (-\sin \alpha \cdot \sin^2 \alpha + \cos \alpha \cdot 2 \cdot \sin \alpha \cdot \cos \alpha) = 0; \\ 2 \cdot \cos^2 \alpha \cdot \sin \alpha - \sin^2 \alpha \cdot \sin \alpha &= 0; \\ \sin \alpha \cdot (2 \cdot \cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha) &= 0. \end{aligned} \quad (4)$$

Рівняння (4) має два розв'язки.

Перший розв'язок: $\sin \alpha = 0$; $\alpha = 0 + \pi \cdot n$ – не відповідає умові задачі.

Другий розв'язок: $2 \cdot \cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha = 0$; $\operatorname{tg}^2 \alpha = 2$; $\operatorname{tg} \alpha = \sqrt{2}$; відповідно: $h/b = \sqrt{2}$, $h = b \cdot \sqrt{2}$.

Відповідь: найбільше значення осьового моменту інерції

$I_{X \max}$ буде при $h = b \cdot \sqrt{3}$; найбільше значення осьового моменту опору $W_{X \max}$ буде при $h = b \cdot \sqrt{2}$.

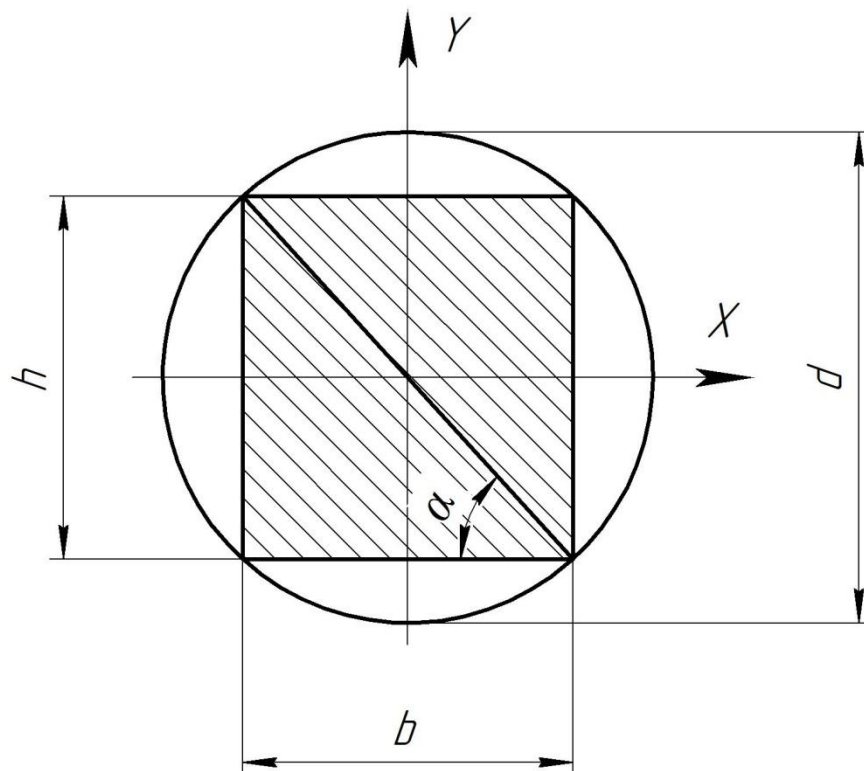


Рисунок 4.4

Приклад 4.3. Визначити величину kh , до якої треба зрізати кути квадратного поперечного перетину (рис. 4.5), щоб отримати перетин із найбільшим осьовим моментом опору відносно осі X .

Розв'язування

Осьовий момент опору поперечного перетину (див. рис. 4.5) визначаємо за формулою

$$W_X = \frac{I_X}{y_{\max}} = \frac{I_X}{kh}. \quad (1)$$

Поперечний перетин залишеної площі розіб'ємо на прямокутник $BCDK$ та чотири трикутники $\Delta LBT = \Delta LTK = \Delta CMP = \Delta PMD$.

Осьовий момент інерції поперечного перетину заштрихованої площі (див. рис. 4.5):

$$I_X = I_{X_{PP}} + 4 \cdot I_{X_{TP}}, \quad (2)$$

де $I_{X_{PP}}$, $I_{X_{TP}}$ – осьові моменти інерції прямокутного і трикутного поперечних перетинів, визначимо їх так:

$$I_{X_{PP}} = \frac{b \cdot (2 \cdot kh)^3}{12}; \quad I_{X_{TP}} = \frac{c \cdot (kh)^3}{12}. \quad (3)$$

Тут

$$c = kh; \quad b = 2 \cdot h - 2 \cdot h \cdot k = 2 \cdot h \cdot (1 - k). \quad (4)$$

Підставивши (4) і (3) у (2), отримаємо

$$I_X = \frac{2 \cdot h \cdot (1 - k) \cdot (2 \cdot kh)^3}{12} + 4 \cdot \frac{kh \cdot (kh)^3}{12} = \frac{4 \cdot h^4 \cdot k^3 \cdot (1 - k)}{3} + \frac{k^4 \cdot h^4}{3}.$$

Маючи значення осьового моменту інерції поперечного перетину з (1) визначимо осьовий момент опору того ж поперечного перетину

$$W_X = \frac{h^3}{3} (4 \cdot k^2 \cdot (1 - k) + k^3) = \frac{h^3}{3} \cdot (4 \cdot k^2 - 3 \cdot k^3). \quad (5)$$

Змінною величиною у залежності (5) є k . Дослідимо функцію $W_X = f(k)$ на екстремум

$$\frac{dW_X}{dk} = \frac{h^3}{3} \cdot (8 \cdot k - 9 \cdot k^2) = 0,$$

звідки

$$k \cdot (8 - 9 \cdot k) = 0. \quad (6)$$

Рівняння (6) має два розв'язки.

Перший розв'язок: $k = 0$ не відповідає умові задачі.

Другий розв'язок дає шуканий результат:

$$(8 - 9 \cdot k) = 0, \quad \text{звідки } k = \frac{8}{9}, \quad \text{тобто } k h = \frac{8}{9} \cdot h.$$

Відповідь: величину $k h$, до якої треба зрізати кути квадратного поперечного перетину для отримання максимального моменту опору $k h = \frac{8}{9} \cdot h$.

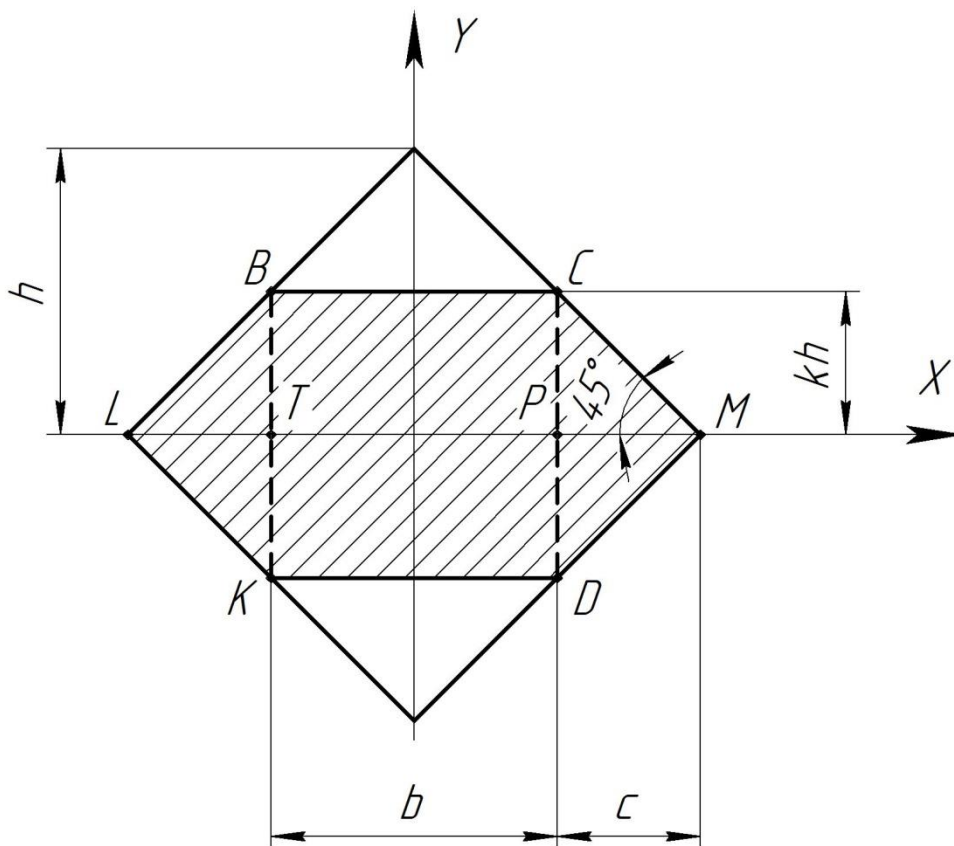


Рисунок 4.5

Приклад 4.4. Два стрижні виготовленні із циліндричної заготовки діаметром D у двох варіантах (рис. 4.6а, рис. 4.6б). Який варіант стрижня має більшу міцність при плоскому поперечному згині за умови, що площі поперечних перетинів однакові?

Розв'язування

Позначимо площі поперечних перетинів стрижнів $A_1 = A_2$. Виходячи з умови, що $A_1 = A_2$ або

$$\frac{\pi \cdot D^2}{4} - \frac{\pi \cdot d^2}{4} = \frac{\pi \cdot D^2}{4} \cdot (1 - \alpha^2) = b \cdot h = 2 \cdot b^2, \quad (1)$$

де α – співвідношення діаметрів кіл для першого варіанту заготовки

$$\text{(див. рис. 4.6а), } \alpha = \frac{d}{D}.$$

Для другого варіанту заготовки (див. рис. 4.6б) запишемо, що

$$D^2 = b^2 + h^2 = b^2 + 4 \cdot b^2 = 5 \cdot b^2, \quad \text{тоді } b^2 = \frac{D^2}{5}.$$

Підставивши значення b у рівняння (1), отримаємо

$$\frac{\pi \cdot D^2}{4} \cdot (1 - \alpha^2) = \frac{2 \cdot D^2}{5},$$

звідки

$$1 - \alpha^2 = \frac{8}{5 \cdot \pi}; \quad \alpha^2 = 1 - \frac{8}{5 \cdot \pi} = 0,49.$$

Геометрична характеристика поперечного перетину стрижня від якої залежить міцність при прямому поперечному згині – осьовий момент опору поперечного перетину. Умова міцності при згині $\sigma_{\max} = \frac{M}{W_X} \leq [\sigma]$.

Осьові моменти опору поперечних перетинів для заданих варіантів:

– кільце

– прямокутник

$$W_{X1} = \frac{\pi \cdot D^3}{32} \cdot (1 - \alpha^4); \quad W_{X2} = \frac{b \cdot h^2}{6} = \frac{4 \cdot b^3}{6} = \frac{2 \cdot b^3}{3}.$$

Запишемо співвідношення осьових моментів опору перетинів

$$\frac{W_{X1}}{W_{X2}} = \frac{\pi \cdot D^3 \cdot 3 \cdot (1 - \alpha^4)}{32 \cdot 2 \cdot b^3} = \frac{3 \cdot \pi \cdot D^3 \cdot (1 - \alpha^4) \cdot 5\sqrt{5}}{64 \cdot D^3} =$$

$$= \frac{15 \cdot \sqrt{5} \cdot \pi \cdot (1 - 0,49^2)}{64} = 1,25.$$

Міцність стрижня виготовленого за першим варіантом (кільце) при прямому поперечному згині буде більшою у 1,25 рази порівняно із другим варіантом.

Відповідь: більшу міцність має стрижень, поперечний перетин якого кільце, $W_{X1}/W_{X2} = 1,25$.

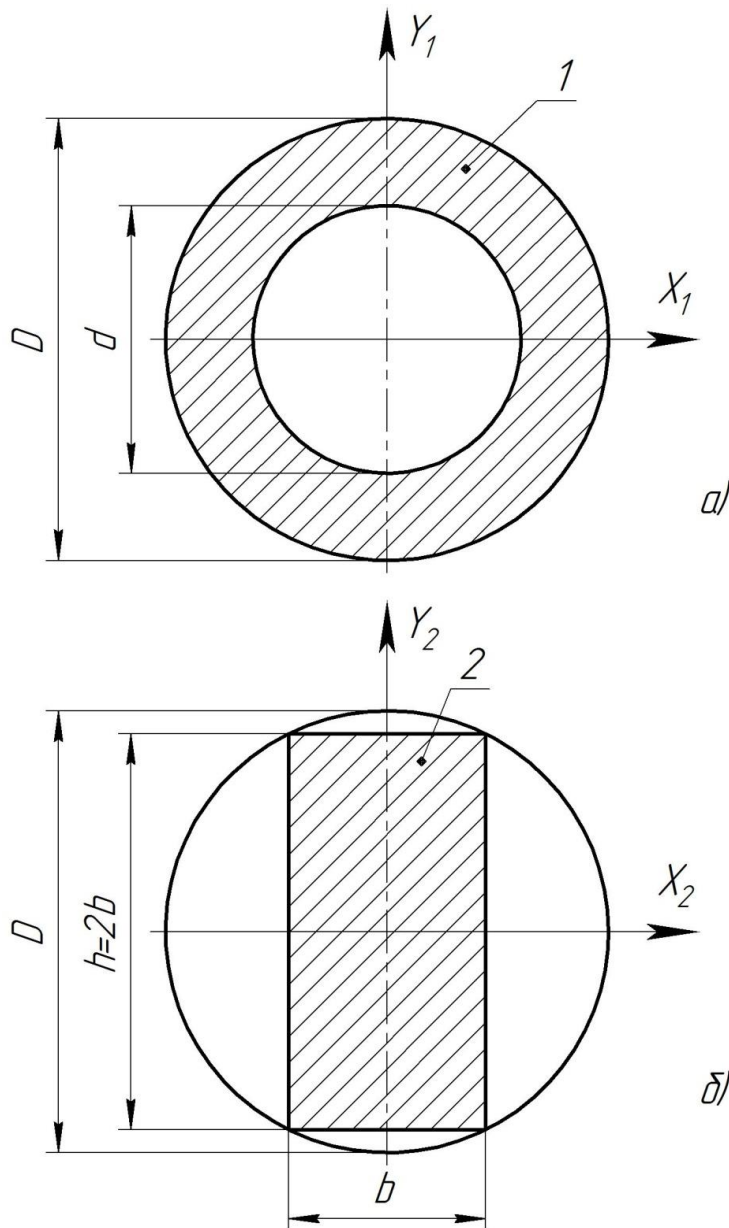


Рисунок 4.6

Приклад 4.5. Визначити відцентровий момент інерції прямокутного трикутника (рис. 4.7) відносно осей XU , паралельних катетам.

Розв'язування

Використовуючи правило паралельного переносу для осьових та відцентрових моментів інерції, запишемо вираз для визначення відцентрового момента інерції заданого перетину (прямокутного трикутника)

$$I_{XU} = I_{X_C Y_C} + A \cdot 2 \cdot (-1), \quad (1)$$

де A – площа прямокутного трикутника, $A = \frac{1}{2} \cdot b \cdot h = \frac{6 \cdot 12}{2} = 36 \text{ см}^2$.

$I_{X_C Y_C}$ – відцентровий момент інерції прямокутного трикутника відносно власних центральних осей $X_C Y_C$.

Для визначення $I_{X_C Y_C}$ заданий трикутник перетворимо у прямокутник доповнивши його аналогічним трикутником (рис. 4.7).

Відцентровий момент інерції прямокутного поперечного перетину відносно власних центральних осей $X_0 Y_0$.

$$I_{X_0 Y_0} = 2 \cdot I_{X_C Y_C} + 2 \cdot A \cdot \frac{b}{6} \cdot \left(-\frac{h}{b}\right) = 2 \cdot I_{X_C Y_C} - 2 \cdot \frac{b^2 \cdot h^2}{72} = 0, \quad (2)$$

тому, що осі $X_0 Y_0$ є осями симетрії утвореного прямокутника.

З рівняння (2) отримаємо

$$I_{X_C Y_C} = \frac{b^2 \cdot h^2}{72} = \frac{6^2 \cdot 12^2}{72} = 74 \text{ см}^4.$$

Відцентровий момент інерції заданого перетину відносно осей XU паралельних катетам визначимо з (1)

$$I_{XU} = 74 - 36 \cdot 2 = 2 \text{ см}^4.$$

Відповідь: відцентровий момент інерції прямокутного трикутника відносно осей XU паралельних катетам $I_{XU} = 2 \text{ см}^4$.

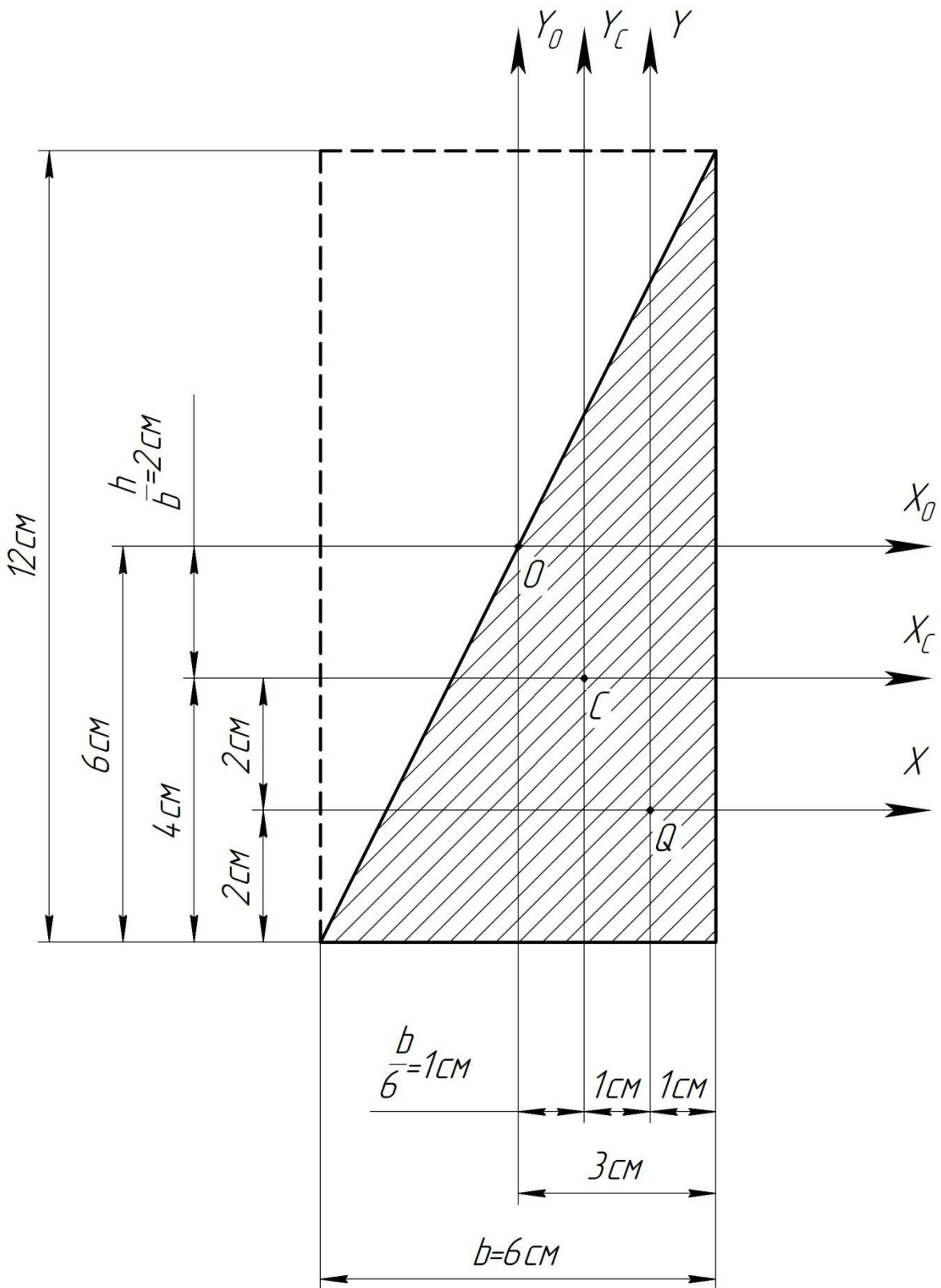


Рисунок 4.7

Приклад 4.6. З поперечного перетину квадрата вирізано рівнобедрений трикутник (рис. 4.8). Визначити висоту h , щоб вершина трикутника C співпадала із центром ваги площі, яка залишилася.

Розв'язування

Визначимо координату центра ваги заштрихованої площі (рис. 4.8) у системі координат XU

$$y_C = h = \frac{A_1 \cdot \frac{a}{2} - A_2 \cdot \frac{h}{3}}{A_1 - A_2}, \quad (1)$$

де A_1, A_2 – площі поперечних перетинів квадрата $A_1 = a^2$ і вирізаного трикутника $A_2 = \frac{1}{2} \cdot a \cdot h$.

Підставивши дані, отримаємо

$$h = \frac{\frac{a^3}{2} - \frac{a \cdot h^2}{6}}{a^2 - \frac{a \cdot h}{2}}.$$

Після спрощень

$$\frac{a^2}{2} - \frac{h^2}{6} = h \cdot a - \frac{1}{2} \cdot h^2,$$

звідки отримаємо залежність для визначення висоти

$$h^2 - 3 \cdot h \cdot a + \frac{3}{2} \cdot a^2 = 0. \quad (2)$$

Рівняння (2) має два розв'язки

$$h_{1,2} = \frac{3 \cdot a \pm a \cdot \sqrt{3}}{2} = \frac{a}{2} \cdot (3 \pm \sqrt{3}).$$

Перший розв'язок

$$h_1 = \frac{a}{2} \cdot (3 + \sqrt{3}) = 2,37 \cdot a \text{ — не задовольняє умову задачі;}$$

другий розв'язок

$$h_2 = \frac{a}{2} \cdot (3 - \sqrt{3}) = 0,634 \cdot a.$$

Відповідь: висота $h = h_2 = 0,634 \cdot a$.

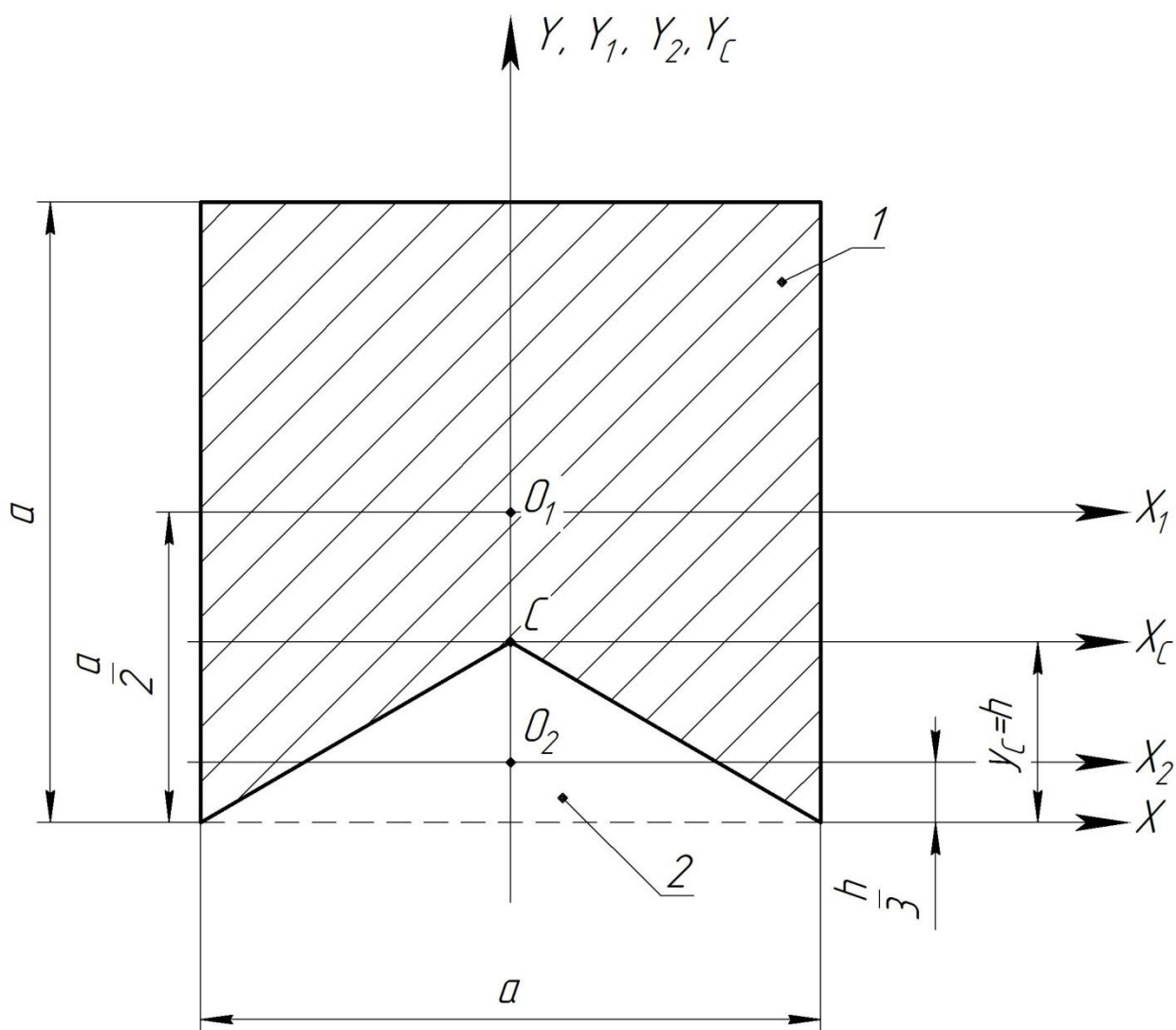


Рисунок 4.8

Приклад 4.7. Визначити осьовий момент інерції поперечного перетину (рис. 4.9) складеного із вписаних квадратів відносно осей OX , OU .

Розв'язування

Складний поперечний перетин (див. рис. 4.9) розглядаємо як сукупність окремих квадратів вписаних (позначені 1 і 3) та вирізаного (позначений 2).

Осьовий момент інерції складного перетину визначаємо за формулою

$$I_X = I_{X_1} - I_{X_2} + I_{X_3}, \quad (1)$$

де I_{X_1} – осьовий момент інерції перетину у формі квадрата позначеного 1

$$I_{X_1} = \frac{(2a)^4}{12} = \frac{16 \cdot a^4}{12} = \frac{4}{3} \cdot a^4; \quad (2)$$

I_{X_2} – осьовий момент інерції перетину у формі квадрата позначеного 2

$$I_{X_2} = \frac{a_2^4}{12} = \frac{a^4 \cdot (\sqrt{2})^4}{12} = \frac{2}{3} a^4; \quad (3)$$

I_{X_3} – осьовий момент інерції перетину у формі квадрата позначеного 3

$$I_{X_3} = \frac{a_3^4}{12} = \frac{a^4}{12}. \quad (4)$$

Підставивши (2), (3), (4) у рівняння (1), отримаємо

$$I_X = \frac{4}{3} \cdot a^4 - \frac{2}{3} a^4 + \frac{a^4}{12} = \frac{3}{4} \cdot a^4.$$

Визначимо осьовий момент інерції поперечного перетину для першого квадрата відносно осі OU

$$I_{U_1} = I_{X_1} \cdot \cos^2 \alpha + I_{Y_1} \cdot \sin^2 \alpha - I_{X_1 Y_1} \cdot \sin 2\alpha,$$

де $I_{X_1 Y_1}$ – відцентровий момент квадрата, позначеного 1 відносно осей симетрії $X_1 Y_1$,

$$I_{X_1 Y_1} = 0, \text{ бо } I_{X_1} = I_{Y_1}.$$

Аналогічно осьові моменти інерції поперечних перетинів для другого і третього квадратів відносно осі OU

$$I_{U_2} = I_{X_2} = \frac{2}{3}a^4; \quad I_{U_3} = I_{X_3} = \frac{a^4}{12}.$$

Осьовий момент інерції розглядуваного поперечного перетину

$$I_U = I_{U_1} - I_{U_2} + I_{U_3} = \frac{4}{3}a^4 - \frac{2}{3}a^4 + \frac{a^4}{12} = \frac{3}{4} \cdot a^4.$$

Відповідь: осьові моменти інерції $I_U = I_X = \frac{3}{4} \cdot a^4$.

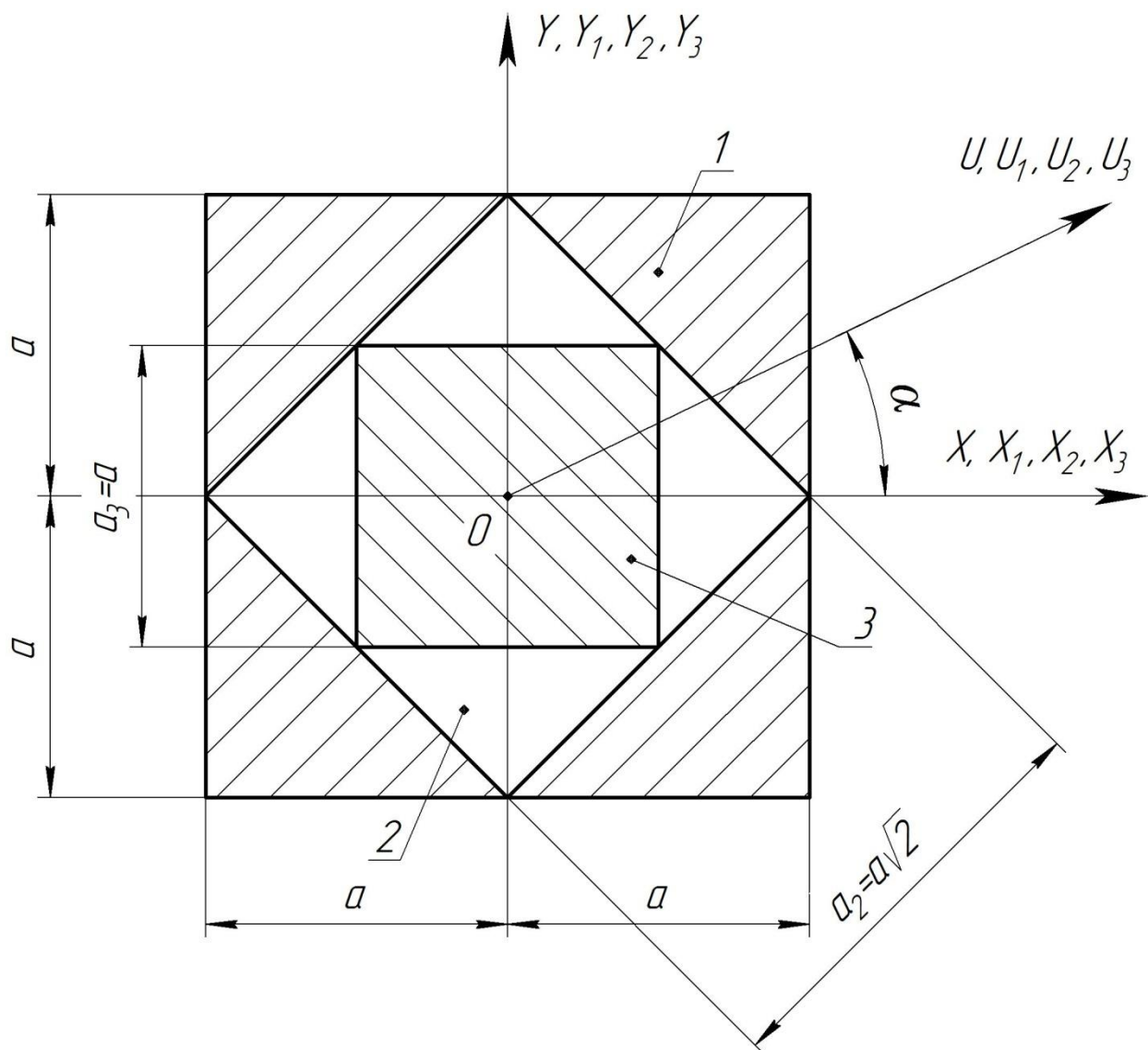
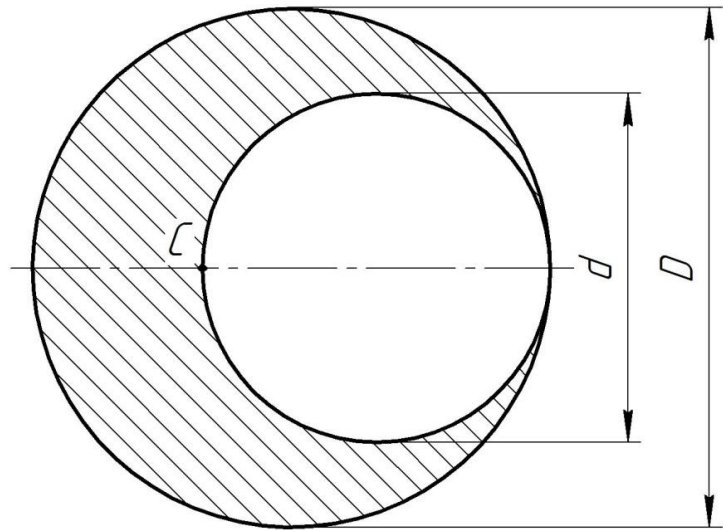


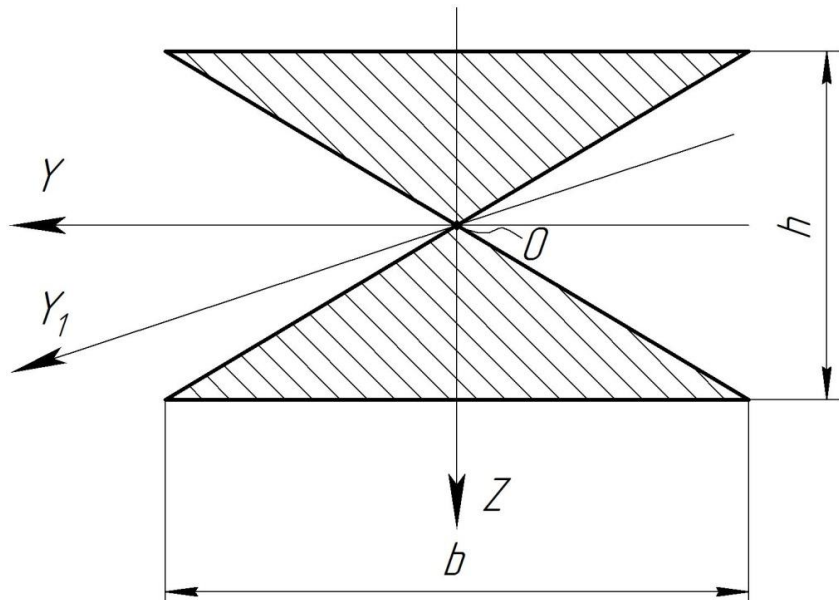
Рисунок 4.9

ЗАДАЧІ ДЛЯ САМОСТІЙНОГО РОЗВ'ЯЗУВАННЯ

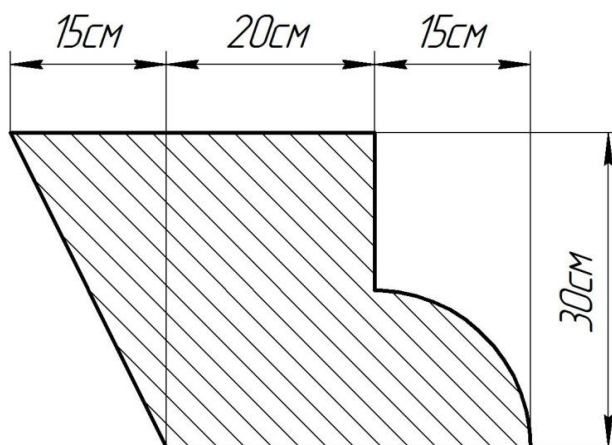
Задача 4.1. Для заданого круглого перетину послабленого круглим отвором знайти відношення діаметрів (більшого до меншого), якщо точка C – центр ваги перетину.



Задача 4.2. При якому співвідношенні h/b моменти інерції перетину відносно осей ZY та довільної осі Y_1 , що проходить через точку O , будуть рівними.



Задача 4.3. Перетин – несиметрична фігура. Потрібно знайти: I_{\max} , I_{\min} .

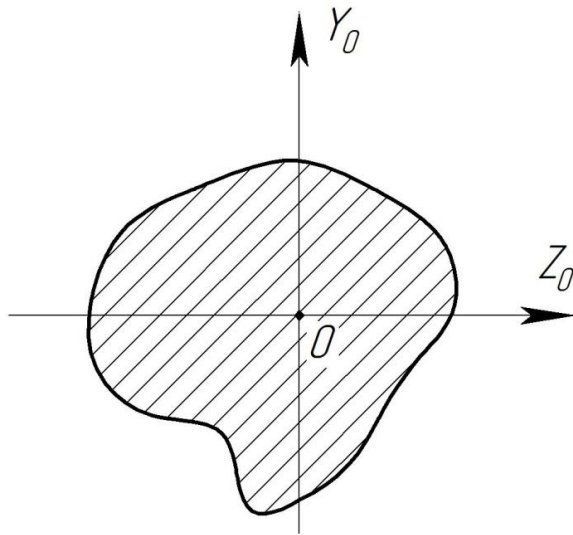


Задача 4.4. Дано: A – площа фігури; O – центр ваги фігури; I_{Y_0} і I_{Z_0} – центральні осьові моменти інерції; I_{P_0} – полярний момент інерції.

Визначити:

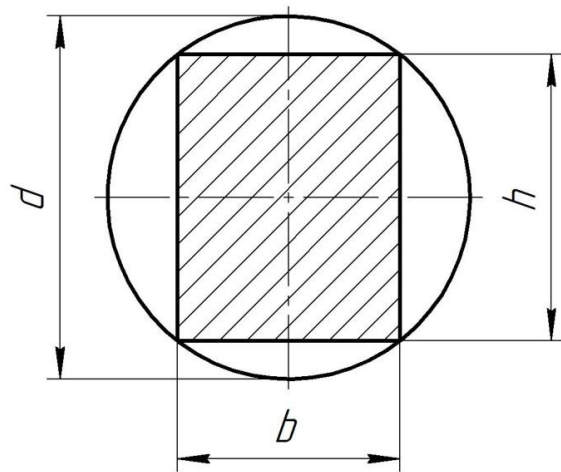
1. Геометричні місця точок у площині фігури, де полярний момент інерції сталий $I_{P_i} = const$.

2. Довести, що $I_{P_0} \leq I_{P_i}$.

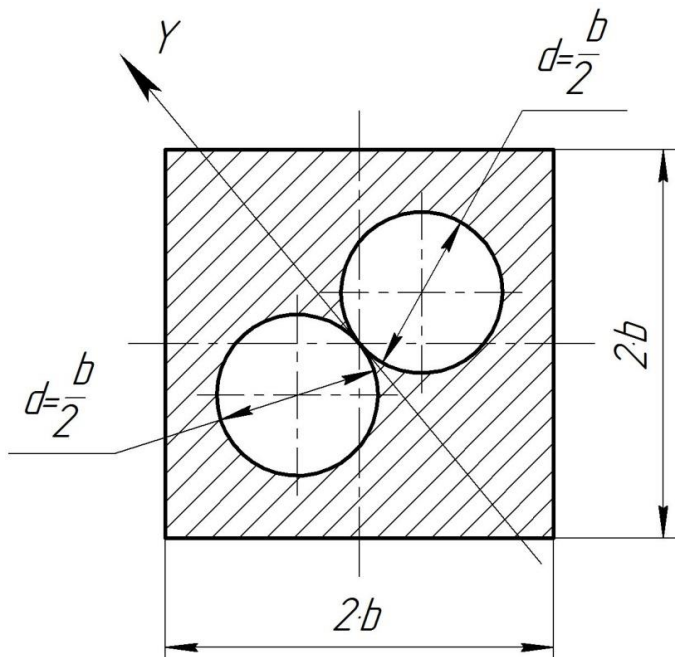


Задача 4.5. Балка (див. рис.) прямокутного поперечного перетину виконана із заготовки круглого перетину. Якими повинні бути співвідношення її сторін для отримання:

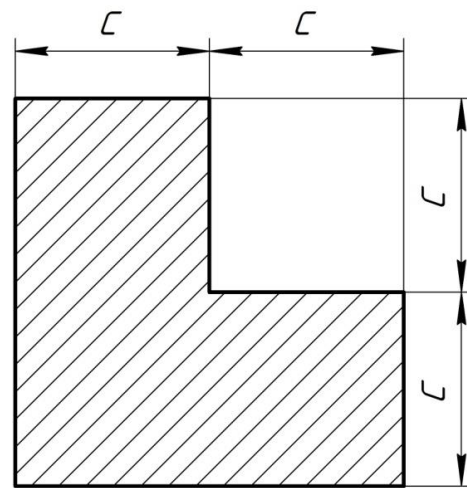
- 1) балки найбільшої міцності;
- 2) балки найбільшої жорсткості.



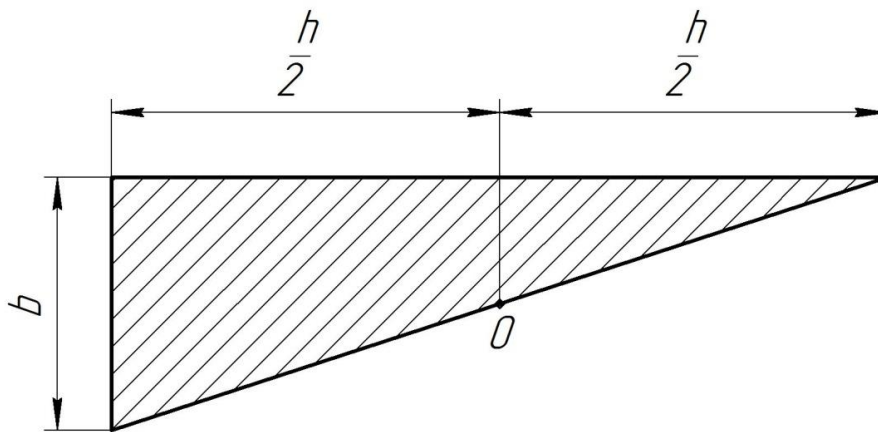
Задача 4.6. Поперечний перетин стрижня має форму, показану на рисунку: у квадраті із стороною $2b$ вирізано два круглих отвори діаметром $d = b/2$. Кола вказаних отворів доторкаються одне до одного у центрі тяжіння квадрата. Через центр тяжіння проведена вісь Y , яка є дотичною до отворів (див. рис.). Визначити момент інерції поперечного перетину стрижня відносно осі Y .



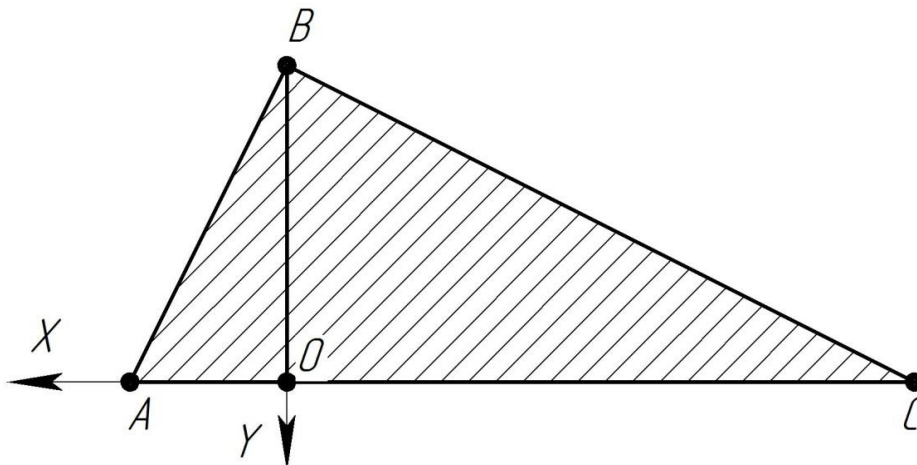
Задача 4.7. Визначити осьовий момент інерції товстостінного кутника (див. рис.) відносно центральних осей, паралельних його бокам, а також відносно центральних осей повернутих на кут 45° .



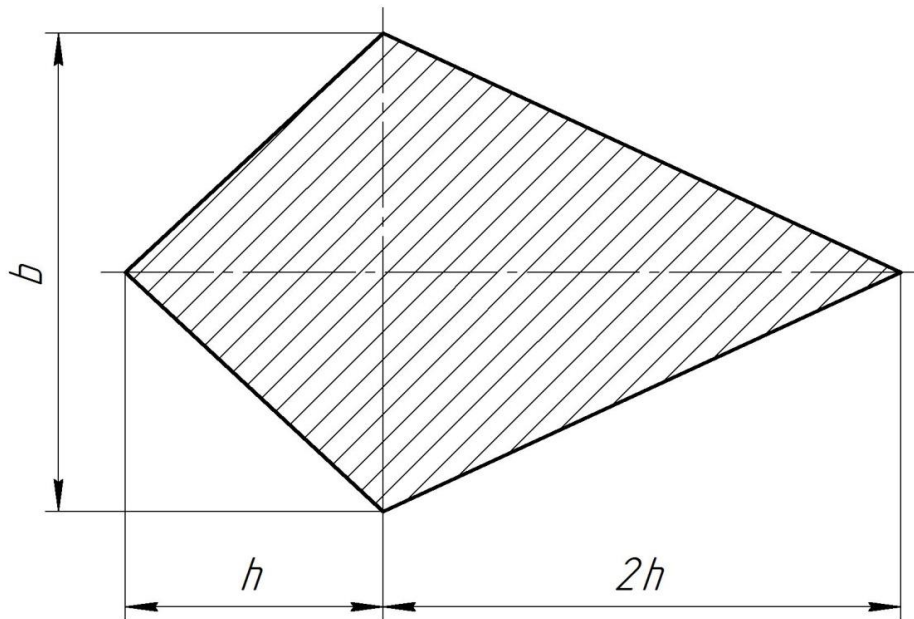
Задача 4.8. Знайти найкоротшим розв'язком положення головних осей трикутника, які проходять через точку O (див. рис.).



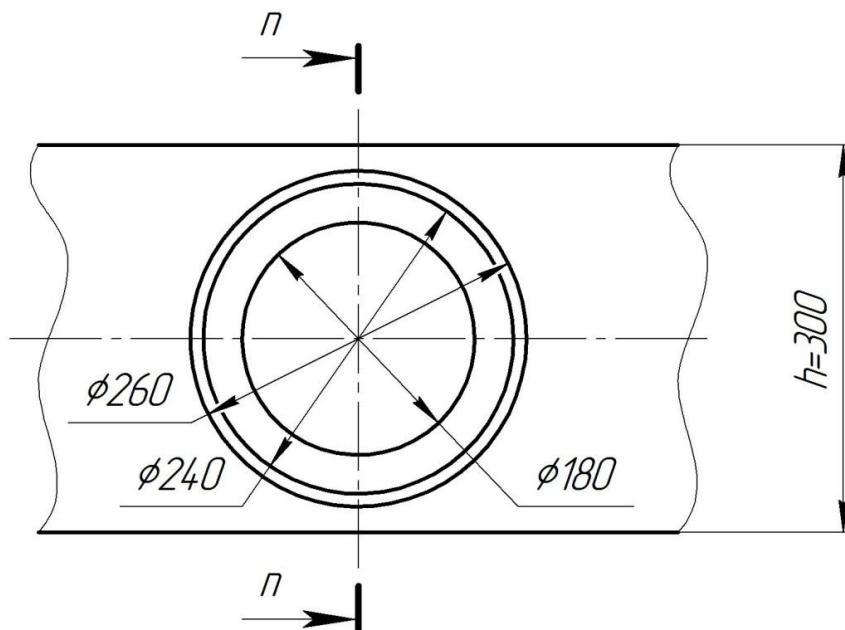
Задача 4.9. На осях X , Y задані координати вершин трикутника ABC : $A(1; 0)$, $B(0; -2)$, $C(-4; 0)$, дивись рисунок. Визначити положення головних центральних осей інерції та обчислити головні центральні моменти інерції.



Задача 4.10. Для дельтоїда (див. рис.) визначити головні моменти інерції.



Задача 4.11. У стінці балки (див. рис.) прямокутного поперечного перетину ($h \times b = 30 \text{ см} \times 18 \text{ см}$) зроблені двосторонні концентричні висічки глибиною 3 см кожна так, що центральна вийшла наскрізною (див. рис.). Визначити момент опору перетину $n-n$ відносно горизонтальної центральної осі.



5. СКЛАДНИЙ ОПІР

Косий згин – складний вид деформації. Виникає тоді, коли площина дії сумарного згинального моменту у поперечному перетині балки не співпадає ні з однією з його головних площин, тобто площин, проведених через вісь балки і головні осі інерції перетину.

Розглянемо випадок чистого косоного згину. У довільному поперечному перетині силова площина дії згинальної пари M утворює з головною віссю інерції Y кут α (рис. 5.1).

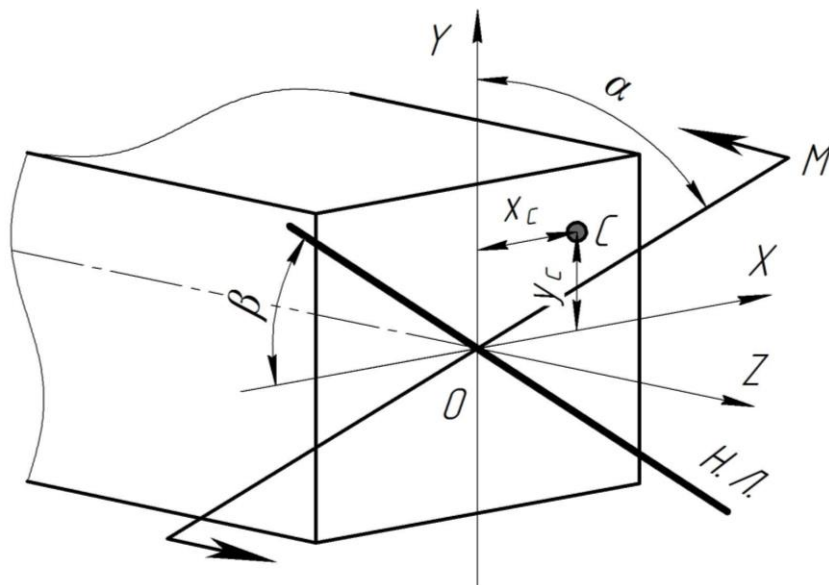


Рисунок 5.1

Косий згин розглядаємо як поєднання двох прямих згинів у головних площинах XZ та YZ (рис. 5.2). Осі X та Y – головні центральні осі інерції перетину, вісь Z збігається з поздовжньою віссю балки.

Складові M_X і M_Y загального згинального моменту M , що діють у головних площинах, визначають за формулами:

$$M_X = M \cdot \cos \alpha ; \quad M_Y = M \cdot \sin \alpha .$$

Нормальне напруження при косому згині, у будь-якій точці поперечного перетину, наприклад у точці C з координатами x_C та y_C (див. рис. 5.1), **визначають як алгебраїчну суму нормальних напружень** від складових згинального моменту M_X і M_Y ,

$$\sigma_{Z \text{ сум}} = \sigma_Z(M_X) + \sigma_Z(M_Y) = - \left(\frac{M_X}{I_X} \cdot y_C + \frac{M_Y}{I_Y} \cdot x_C \right)$$

або

$$\sigma_{Z \text{ сум}} = -M \left(\frac{y_C}{I_X} \cdot \cos \alpha + \frac{x_C}{I_Y} \cdot \sin \alpha \right).$$

Систему координат XU вибирають так, щоб у першому квадранті діяли напруження стиску.

Нейтральна (нульова) лінія перетину – це геометричне місце точок, в яких нормальні напруження дорівнюють нулю. Ця лінія обов'язково проходить через центр ваги поперечного перетину.

Рівняння нейтральної лінії при косому згині

$$\frac{M_X}{I_X} \cdot y_0 + \frac{M_Y}{I_Y} \cdot x_0 = 0,$$

або

$$\frac{y_0}{I_X} \cdot \cos \alpha + \frac{x_0}{I_Y} \cdot \sin \alpha = 0,$$

де x_0, y_0 – координати точок нейтральної лінії перетину (рис. 5.2).

Оскільки $x_0 = 0$, то й $y_0 = 0$. Положення нейтральної лінії перетину визначають кутом її нахилу до вісі X (рис. 5.2)

$$\operatorname{tg} \beta = \frac{y_0}{x_0} = -\frac{I_X}{I_Y} \cdot \operatorname{tg} \alpha.$$

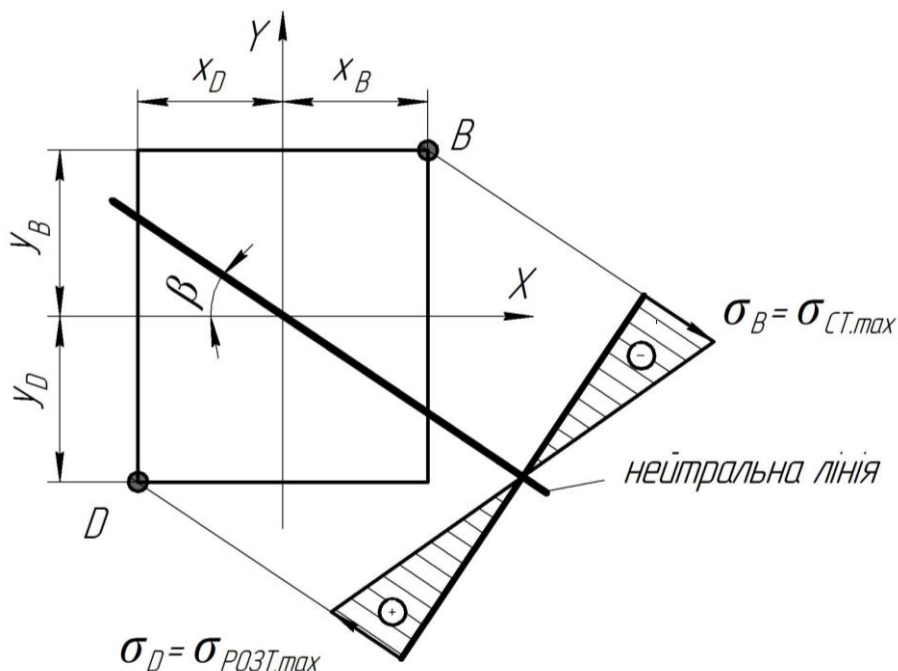


Рисунок 5.2

Напруження при косому згині. Умова міцності

Максимальні нормальні напруження, що виникають у найбільш віддалених від нейтральної лінії точках симетричного перетину, наприклад прямокутник (див. рис. 5.2), точки B і D , однакові за величиною, але різні за знаком. Їх визначають за формулою

$$\sigma_{\max/\min} = \pm \left(\frac{M_X}{W_X} + \frac{M_Y}{W_Y} \right),$$

де M_X і M_Y – згинальні моменти відносно головних осей у найбільш навантаженому небезпечному перетині.

Для пластичних матеріалів, поперечні перетини яких мають дві осі симетрії, умова міцності за нормальними напруженнями при косому згині

$$\sigma_{\max} = \frac{M_X}{W_X} + \frac{M_Y}{W_Y} \leq [\sigma].$$

Дотичні напруження при косому згині визначають як суму дотичних τ_X , τ_Y напружень, отриманих від дії поперечних сил Q_X , Q_Y

$$\tau = \sqrt{\tau_X^2 + \tau_Y^2}.$$

Складові дотичних напружень τ_Y , τ_Z визначають за формулою Д.І. Журавського

$$\tau_X = \frac{Q_X \cdot S_Y^{відр}}{b_1 \cdot I_Y}; \quad \tau_Y = \frac{Q_Y \cdot S_X^{відр}}{b_2 \cdot I_X}.$$

Деформації при косому згині

У загальному випадку для перетину із різними значеннями осьових моментів інерції, тобто при $I_X \neq I_Y$ і при $tg\beta \neq tg\alpha$ нейтральна лінія не перпендикулярна силовій лінії, а відхилена в сторону осі мінімального момента інерції перетину.

Оскільки напрям повного прогину f і нейтральна лінія завжди ортогональні (рис. 5.3), то балка при косому згині згинається не в силовій площині, а в деякій іншій площині, де жорсткість на згинання буде меншою.

Косий згин зводять до двох плоских. Застосовуючи принцип суперпозиції визначають переміщення f_X і f_Y у кожній з головних площин.

Загальний прогин балки f (див. рис. 5.3) при косому згині визначають як геометричну суму прогинів

$$f = \sqrt{f_X^2 + f_Y^2}.$$

Напрямок повного прогину визначають кутом

$$\gamma = \text{arctg} \left(\frac{f_X}{f_Y} \right),$$

однаковим з кутом β .

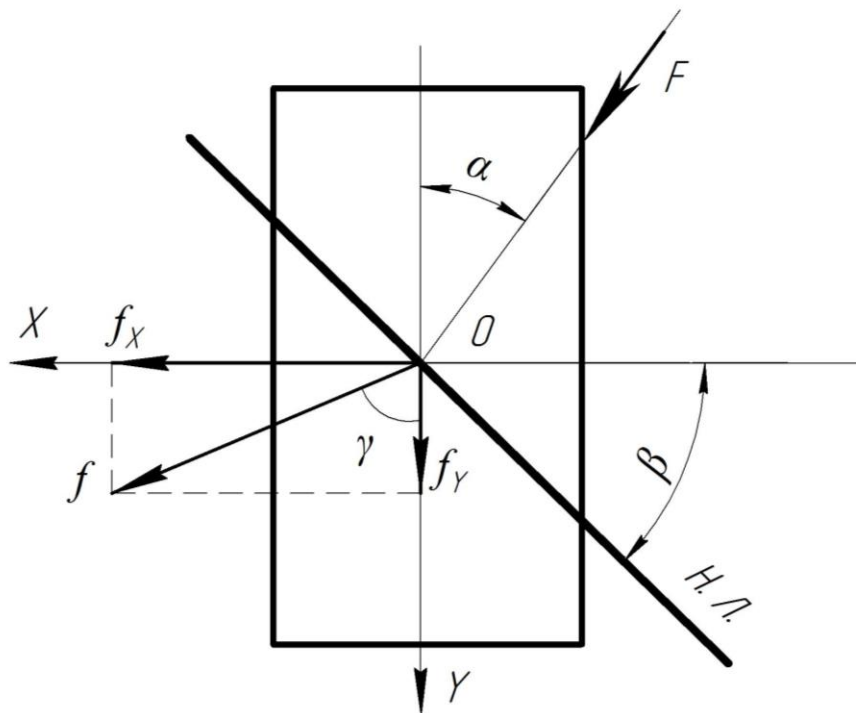


Рисунок 5.3

Явище косоного згину небезпечне для перетинів, які значно відрізняються осьовими моментами інерції відносно головних центральних осей перетину (наприклад, двотавра). Балки з таким перетином мало прогинаються при згині у площині найбільшої жорсткості, але навіть при незначних кутах нахилу площини дії зовнішніх сил до площини найбільшої жорсткості у балках виникає значне відхилення лінії повного прогину f у бік найменшої жорсткості.

Сумісна дія згину з крученням – вид складного опору, при якому зовнішні сили, що діють на брус, викликають у ньому такі внутрішні силові фактори: **крутний момент, згинальні моменти й поперечні сили**.

Під дією згину та кручення у поперечному перетині бруса виникають нормальні напруження від згинального моменту в двох площинах і дотичні напруження від кручення й поперечних сил.

Одноточасних деформацій згину і кручення зазнає більшість валів (прямих брусів круглого або кільцевого перетину).

При розрахунку валів враховують крутний і згинальний моменти. Поперечні сили не враховують, оскільки відповідні їм дотичні напруження відносно невеликі.

При сумісній дії згину та кручення елемент матеріалу в небезпечному перетині перебуває у плоскому напруженому стані (рис. 5.4).

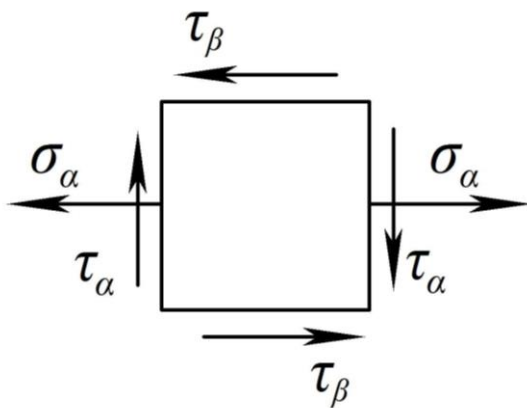


Рисунок 5.4

Максимальні нормальні й дотичні напруження для круглих валів визначають за формулами

$$|\sigma_{\alpha}| = \frac{M_{3\Gamma}}{W_0} = \frac{32 M_{3\Gamma}}{\pi \cdot d^3};$$

$$|\tau_{\alpha}| = \frac{M_{KP}}{W_P} = \frac{16 M_{KP}}{\pi \cdot d^3},$$

де $W_P = W_0/2$;

$\tau_{\alpha} = -\tau_{\beta}$, закон парності дотичних напружень.

Найбільшого значення нормальні й дотичні напруження досягають на поверхні вала.

Для визначення згинального моменту розглядають згин вала у двох взаємно перпендикулярних площинах (вертикальній і горизонтальній). Будують епюри згинальних моментів у двох площинах і сумарну. Значення згинальних моментів у характерних перетинах зводять до сумарного (рівнодійного) за формулою

$$M_{3\Gamma} = \sqrt{M_Z^2 + M_Y^2}.$$

Небезпечні перетини вала визначають співставленням епюр сумарних згинальних моментів і крутного моменту. Небезпечними є перетини, де $M_{3\Gamma}$ і M_{KP} одночасно досягають найбільших значень.

При одночасній дії нормальних і дотичних напружень міцність матеріалу оцінюють за однією з теорій міцності.

Теорії міцності застосовують за призначенням, тобто перша і друга теорії – для крихких матеріалів, третя і четверта – для пластичних; теорії Мора та Писаренка–Лебедева – для матеріалів з різними границями текучості при розтягу і стиску.

Розрахунок вала на міцність при складному опорі виконують за зведеним (еквівалентним, розрахунковим) моментом M_P ($M_{екв}$).

Визначають його залежно від прийнятої теорії міцності:

– за третьою теорією міцності (найбільших дотичних напружень)

$$M_P = \sqrt{M_{3Г}^2 + M_{КР}^2};$$

– за четвертою теорією міцності (енергетичною)

$$M_P = \sqrt{M_{3Г}^2 + 0,75 M_{КР}^2}.$$

Умова міцності при сумісній дії згину з крученням

$$\sigma_{екв} = \frac{M_P}{W_0} = \frac{32 M_P}{\pi \cdot d^3} \leq [\sigma],$$

де $\sigma_{екв}$ – еквівалентне (розрахункове) нормальне напруження;

W_0 – осьовий момент опору перетину бруса, для круглого поперечного перетину $W_0 = \pi \cdot d^3 / 32$.

Деформація позацентрального стиску (розтягу). Позацентровий стиск (розтяг) – це вид складного опору, при якому зовнішня сила прикладена паралельно осі бруса, але *точка її прикладання не співпадає з центром ваги* (рис. 5.5).

При позацентровому стиску (розтягу) в поперечному перетині бруса одночасно виникають **стискаюча сила** $N = -F$ і **згинальні моменти** $M_Y = F \cdot z_F$, $M_Z = F \cdot y_F$.

Позацентровий стиск (розтяг) можна розкласти на такі прості деформації: *центральный стиск і два згини*.

Нормальні напруження в будь-якій точці поперечного перетину D з координатами z_D і y_D (рис. 5.5) визначають за формулами:

$$\sigma_D = -\frac{F}{A} - \frac{M_Z}{I_Z} \cdot y_D - \frac{M_Y}{I_Y} \cdot z_D ;$$

$$\sigma_D = -\frac{F}{A} \left(1 + \frac{y_F \cdot y_D}{i_Z^2} + \frac{z_F \cdot z_D}{i_Y^2} \right),$$

де y_F, z_F – координати точки прикладання зовнішньої сили відносно головних центральних осей інерції;

M_Y, M_Z – згинальні моменти відносно головних центральних осей інерції,

$$M_Y = F \cdot y_F ; \quad M_Z = F \cdot z_F ;$$

A – площа поперечного перетину;

i_Z, i_Y – радіуси інерції поперечного перетину відносно головних центральних осей інерції,

$$i_Z = \sqrt{\frac{I_Z}{A}} ; \quad i_Y = \sqrt{\frac{I_Y}{A}} .$$

Систему координат орієнтуємо так, щоб у першому квадранті виникали напруження стиску, тобто, точка прикладання сили повинна знаходитися в першому квадранті (див. рис. 5.5).

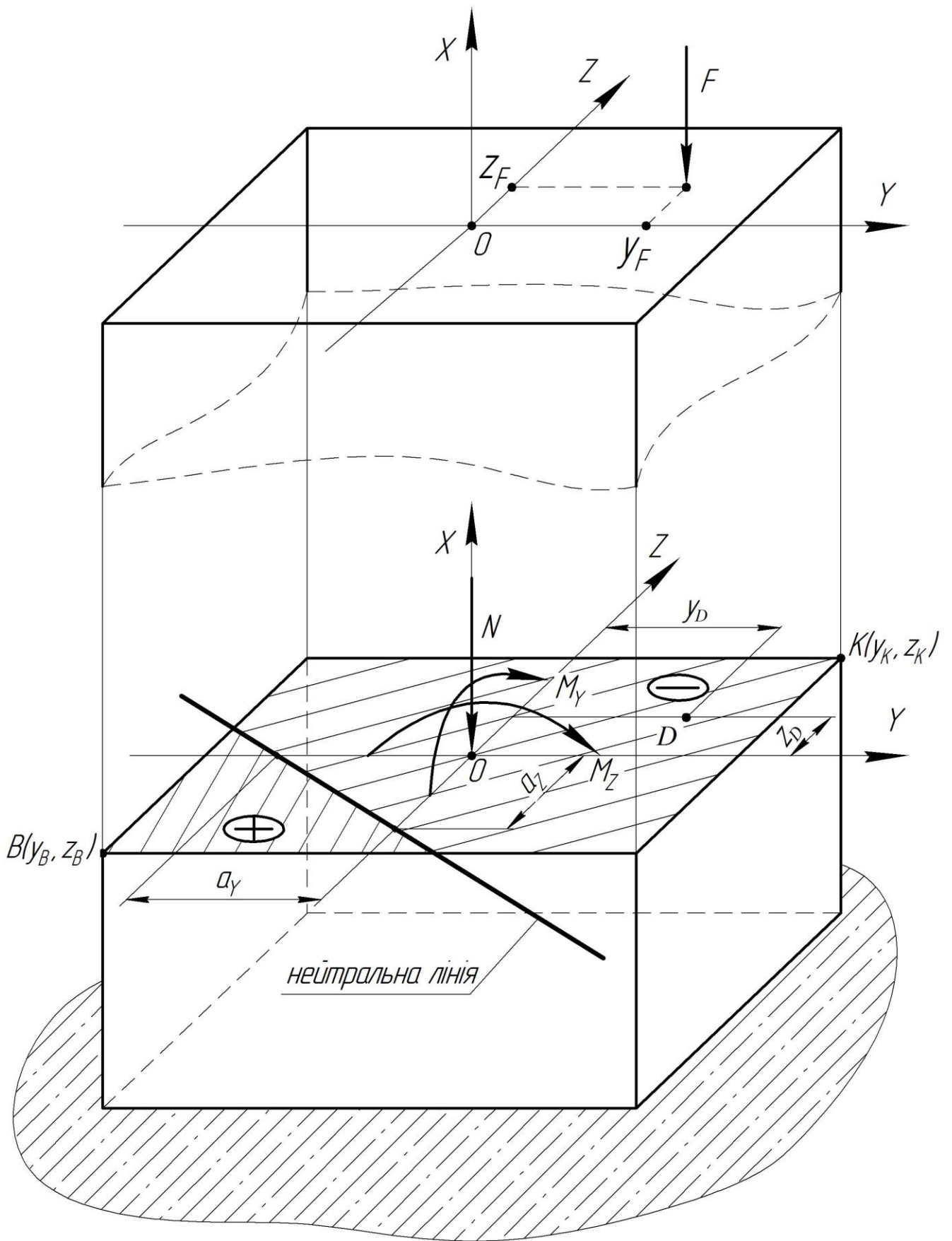


Рисунок 5.5

Рівняння нейтральної лінії

$$1 + \frac{y_F \cdot y_0}{i_Z^2} + \frac{z_F \cdot z_0}{i_Y^2} = 0.$$

Для побудови нейтральної лінії визначають відрізки, що відсікаються на головних осях:

$$a_Y = -\frac{i_Z^2}{y_F}; \quad a_Z = -\frac{i_Y^2}{z_F}.$$

Ядро поперечного перетину – область навколо центра ваги. *Прикладання осьової сили в цій області викликає в усіх точках поперечного перетину напруження одного знаку.*

Небезпечними точками поперечного перетину при позацентровому стиску є точки, найбільш віддалені від нейтральної лінії.

Максимальні напруження стиску виникають в точці $K(y_K, z_K)$, а розтягу – в точці $B(y_B, z_B)$ – (рис. 5.5).

Умови міцності при позацентровому стиску (розтягу):

$$\sigma_{P \max} = \sigma_B = -\frac{F}{A} \left(1 + \frac{y_F \cdot y_B}{i_Z^2} + \frac{z_F \cdot z_B}{i_Y^2} \right) \leq [\sigma_P];$$

$$\sigma_{C \min} = \sigma_K = -\frac{F}{A} \left(1 + \frac{y_F \cdot y_K}{i_Z^2} + \frac{z_F \cdot z_K}{i_Y^2} \right) \leq [\sigma_C],$$

де $[\sigma_P]$ – допустимі напруження на розтяг для заданого матеріалу;

$[\sigma_C]$ – допустимі напруження на стиск для заданого матеріалу.

ПРИКЛАДИ

Приклад 5.1. Короткий ступінчастий стрижень (рис. 5.7а) навантажений стискаючою силою F , прикладеною в центрі ваги верхньої частини перетину, перпендикулярно до її площини. Визначити, при якому збільшенні розміру a , стискаючі напруження у нижній частині стрижня будуть максимальними. Знайти відношення цих напружень до напружень у верхній частині стрижня.

Розв'язування

Верхня частина стрижня працює тільки на деформацію центрального стиску, відповідно нормальні напруження для верхньої частини стрижня

$$\sigma_B = -\frac{F}{A_B} = -\frac{2 \cdot F}{b \cdot h}. \quad (1)$$

При збільшенні нижньої частини перетину стрижня на величину a (рис. 5.6, 5.7б) його центр ваги зміститься на відстань e . У нижній частині перетину стрижня крім стиску від сили F виникає згинальний момент відносно центральної осі OY , $M_Y = F \cdot e$.

Максимальні напруження стиску для нижньої частини стрижня діють в крайніх точках його основи з координатами x_{\max} (рис. 5.7б)

$$\sigma_H = -\left(\frac{F}{A_H} + \frac{M_Y}{I_Y} \cdot x_{\max} \right) = -\frac{F}{A_H} \cdot \left(1 + \frac{e \cdot x_{\max}}{i_Y^2} \right), \quad (2)$$

де A_H - площа перетину нижньої частини стрижня,

$$A_H = \frac{1}{2} \cdot b \cdot (k \cdot h);$$

H - висота нижньої (збільшеної) частини стрижня (рис. 5.6, рис. 5.7б), приймаємо $H = k \cdot h$;

I_Y - осьовий момент інерції поперечного перетину нижньої частини стрижня,

$$I_Y = \frac{b \cdot (k \cdot h)^3}{36};$$

i_Y^2 – квадрат радіуса інерції поперечного перетину нижньої частини стрижня,

$$i_Y^2 = \frac{I_Y}{A_H} = \frac{b \cdot (k \cdot h)^3 \cdot 2}{36 \cdot b \cdot (k \cdot h)} = \frac{(k \cdot h)^2}{18};$$

e – відстань, на яку зміститься центр ваги нижньої частини стрижня, визначаємо її так

$$e = \frac{1}{3} \cdot k \cdot h - \frac{1}{3} \cdot h = \frac{1}{3} \cdot h \cdot (k - 1);$$

x_{\max} – координати точок перетину нижньої частини стрижня, в яких виникають напруження стиску від дії згинального моменту M_Y ,

$$x_{\max} = \frac{1}{3} \cdot k \cdot h.$$

Підставивши отримані дані у залежність (2), визначаємо максимальні напруження стиску для нижньої частини стрижня

$$\begin{aligned} \sigma_H &= -\frac{2 \cdot F}{b \cdot k \cdot h} \cdot \left(1 + \frac{\frac{1}{3} \cdot h \cdot (k - 1) \cdot \frac{1}{3} \cdot k \cdot h}{(k \cdot h)^2} \cdot 18 \right) = \\ &= -\frac{2 \cdot F}{b \cdot k \cdot h} \cdot \left(\frac{3 \cdot k - 2}{k} \right) = \sigma_B \cdot \left(\frac{3 \cdot k - 2}{k^2} \right). \end{aligned} \quad (3)$$

Дослідимо функцію напружень стиску у нижній частині стрижня $\sigma_H = f(k)$ на екстремум

$$\frac{d\sigma_H}{dk} = \sigma_B \cdot \left(\frac{3 \cdot k^2 - 2 \cdot k \cdot (3 \cdot k - 2)}{k^4} \right) = \sigma_B \cdot \left(\frac{4}{k^3} - \frac{3}{k^2} \right) = 0.$$

Оскільки нормальні напруження для верхньої частини стрижня

$$\sigma_B \neq 0, \quad \text{тоді } k = \frac{4}{3}.$$

Максимальні напруження стиску у нижній частині стрижня виникають при $k = \frac{4}{3}$.

Оскільки $h + a = k \cdot h$, тоді величина a (рис. 5.7б) буде

$$a = k \cdot h - h = \frac{4}{3} \cdot h - h = \frac{h}{3}.$$

Напруження стиску у нижній частині стрижня

$$\sigma_H = \sigma_B \cdot \frac{3 \cdot \frac{4}{3} - 2}{\left(\frac{4}{3}\right)^2} = \frac{9}{8} \cdot \sigma_B = 1,125 \cdot \sigma_B.$$

Максимальні напруження стиску у нижній частині стрижня будуть в 1,125 раз більшими від напружень стиску у верхній частині.

Відповідь: збільшення розміру a для того, щоб стискаючі напруження у нижній частині стрижня були максимальними, $a = \frac{h}{3}$;
відношення максимальних напружень нижньої частини до напружень у верхній частині стрижня $\frac{\sigma_H}{\sigma_B} = 1,125$.

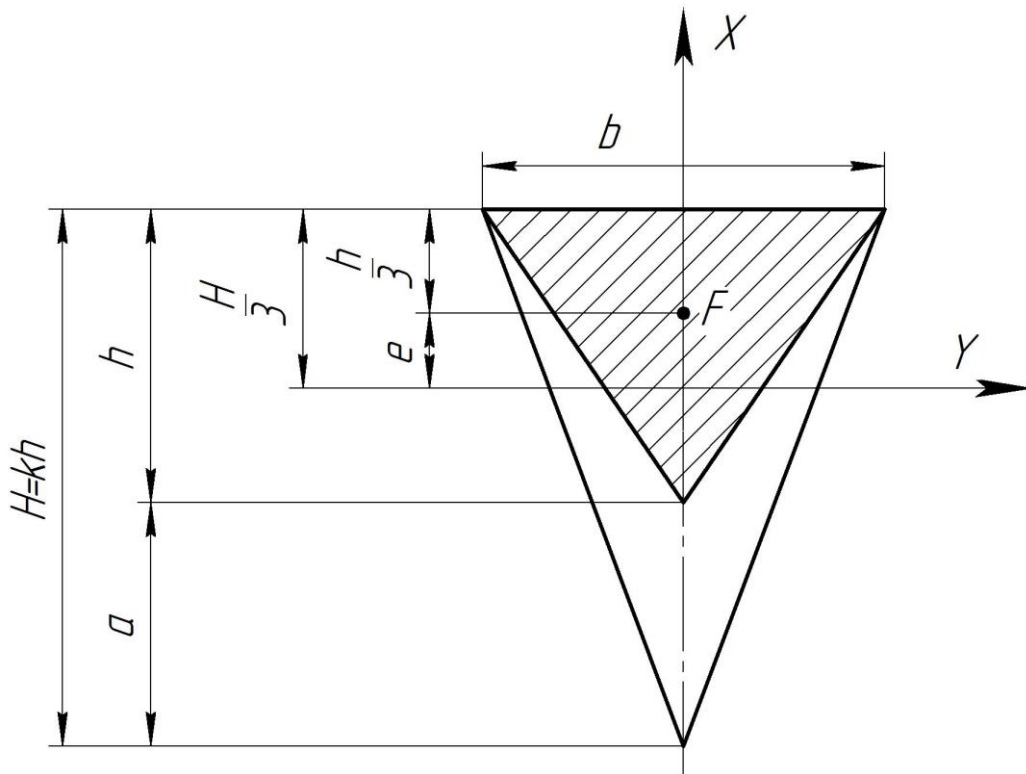


Рисунок 5.6

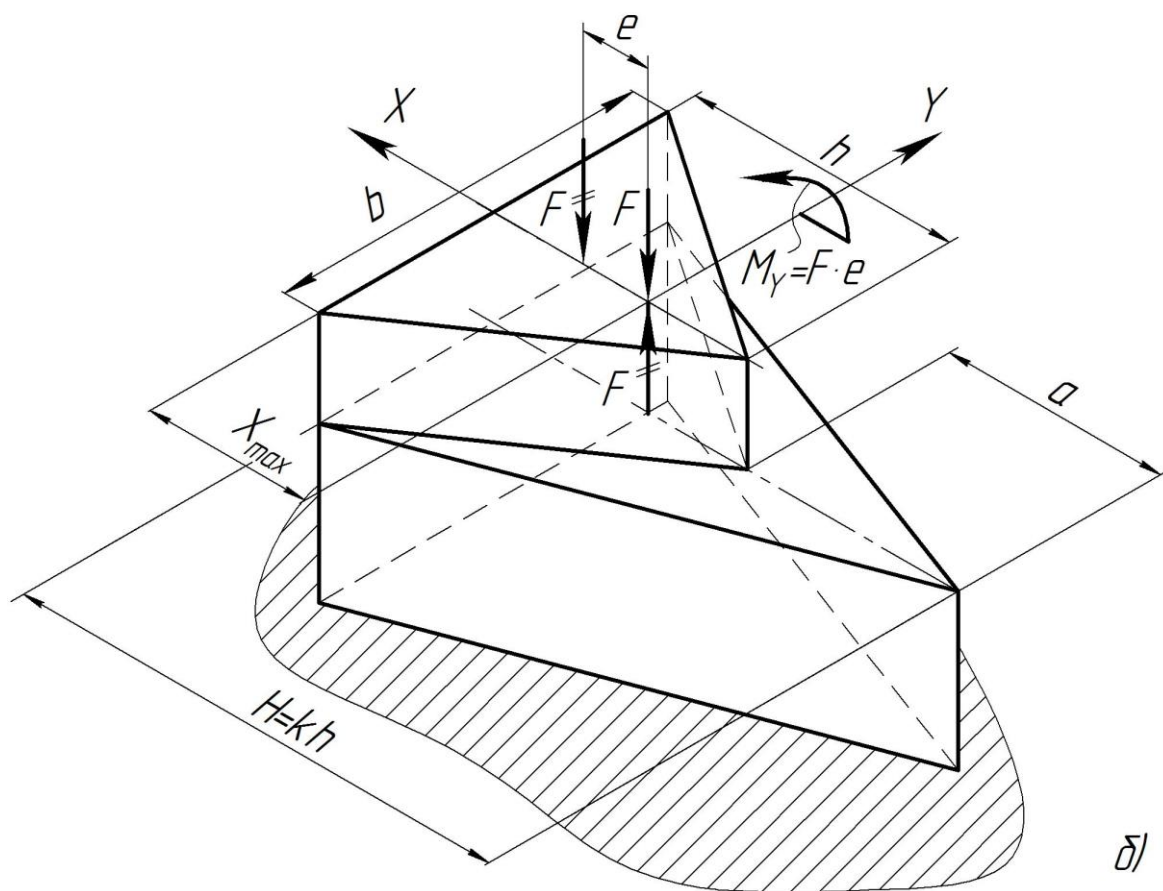
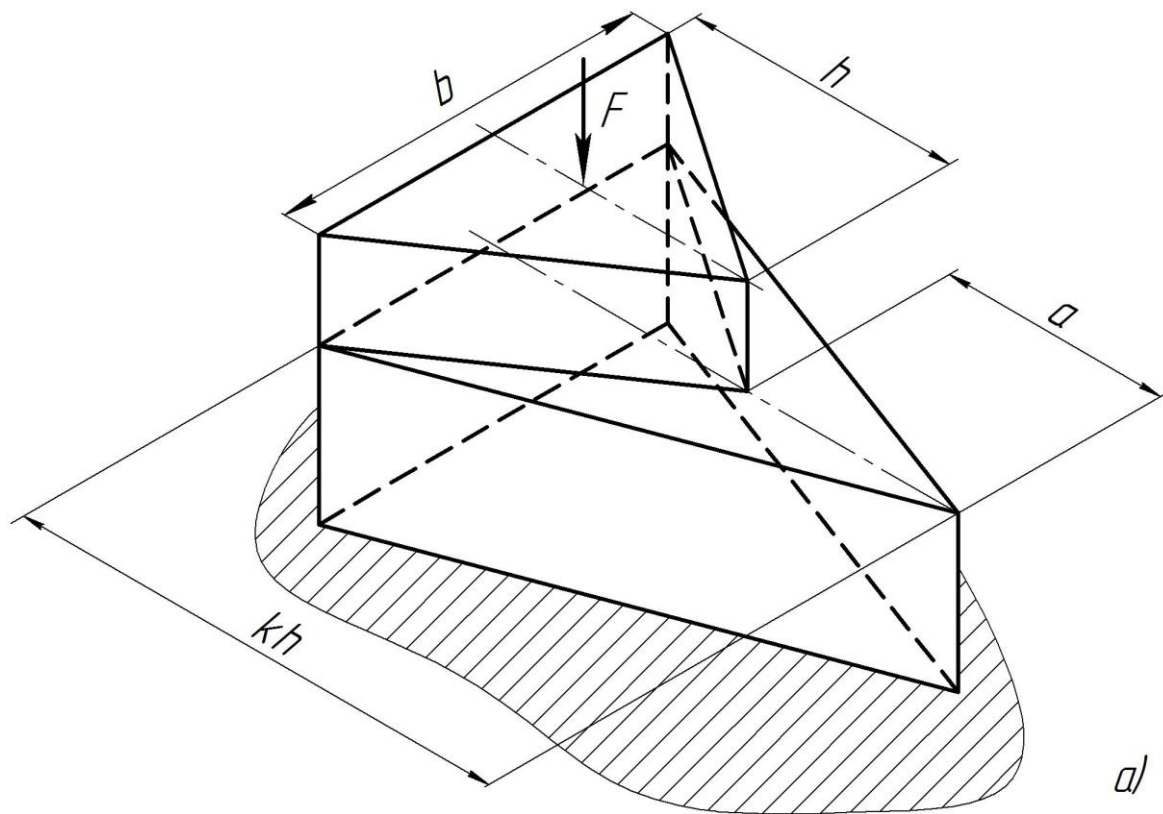


Рисунок 5.7

Приклад 5.2. Визначити при якій величині сили F нейтральна лінія в опорному перетині (рис. 5.8а). буде співпадати із діагоналлю прямокутного перетину із розмірами $h \times b$.

Розв'язування

Рівняння нейтральної лінії при косому згині

$$\frac{M_Y}{I_Y} \cdot z_0 + \frac{M_Z}{I_Z} \cdot y_0 = 0,$$

звідки

$$\operatorname{tg} \beta = \frac{z_0}{y_0} = \frac{M_Z}{M_Y} \cdot \frac{I_Y}{I_Z}.$$

Навантаження балки у вертикальній та горизонтальній площинах показані на рис. 5.8б, в.

Визначаємо згинальні моменти в опорному перетині балки. Будуємо епюри згинальних моментів у вертикальній та горизонтальній площинах (рис. 5.8б, в):

$$M_Y = 4,5 \cdot q \cdot a^2; \quad M_Z = 4 \cdot F \cdot a.$$

Осьові моменти інерції прямокутного поперечного перетину:

$$I_Y = \frac{b \cdot h^3}{12}; \quad I_Z = \frac{h \cdot b^3}{12}.$$

Визначимо положення нейтральної лінії перетину для забезпечення умови задачі

$$\operatorname{tg} \beta = \frac{h}{b} = \frac{4 \cdot F \cdot a \cdot b \cdot h^3}{4,5 \cdot q \cdot a^2 \cdot h \cdot b^3},$$

звідки

$$F = \frac{4,5 \cdot q \cdot a \cdot b}{4 \cdot h}.$$

Відповідь: величина сили $F = \frac{4,5 \cdot q \cdot a \cdot b}{4 \cdot h}$.

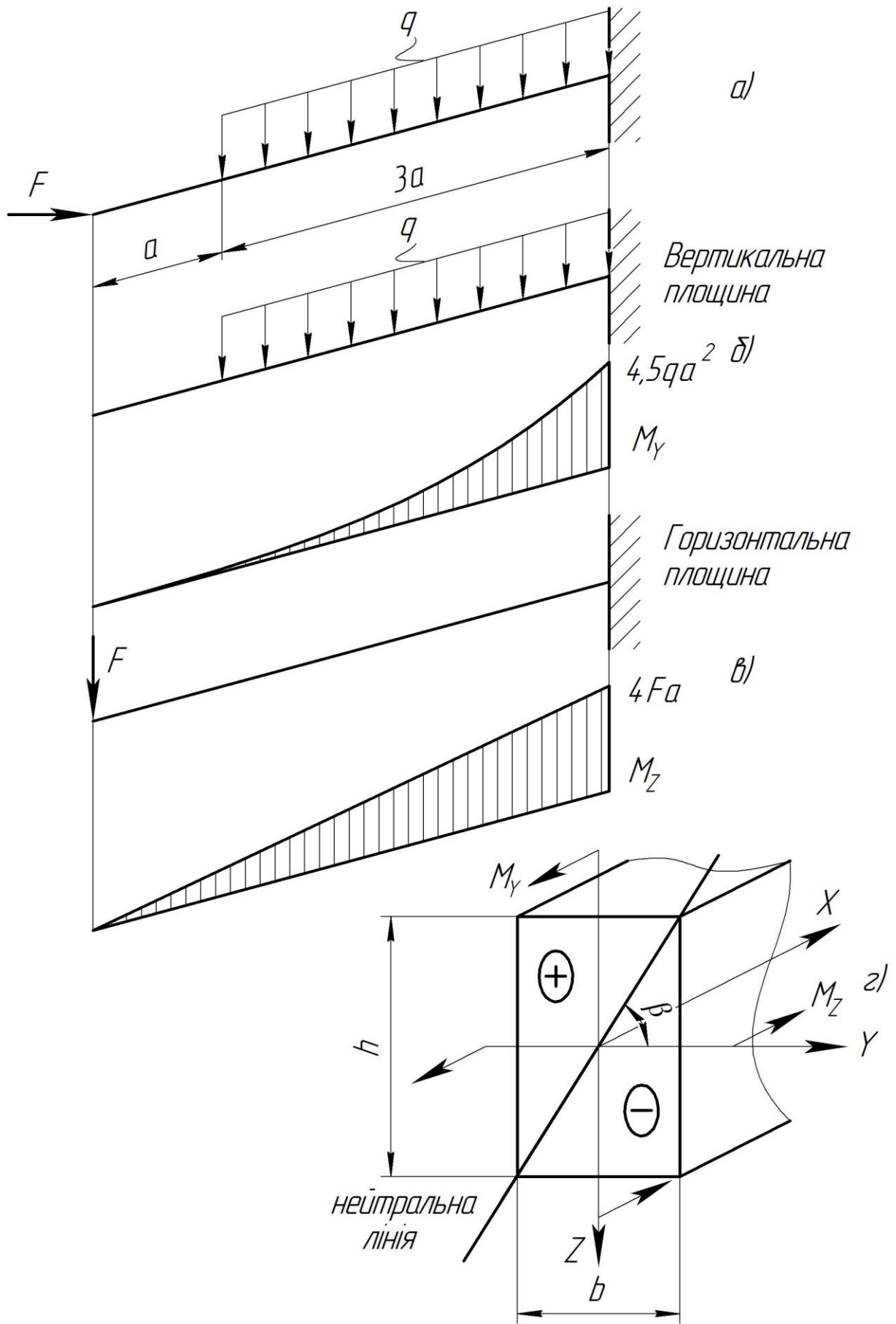


Рисунок 5.8

Приклад 5.3. Для заданої балки (рис. 5.9а), складеної із двох швелерів №24, побудувати епюри внутрішніх зусиль. Визначити зусилля в опорі, якщо $h = 24$ см, $b = 9$ см.

Розв'язування

Використовуючи правило переносу сил, приводимо всі зовнішні навантаження (рис. 5.9а) до центральних осей перетину (рис. 5.9б, в, г, д).

Рівномірно розподілене навантаження q створює навантаження q_Y

$$q_Y = q = 2 \text{ кН/м},$$

а також рівномірно розподілений момент по всій довжині балки m_X

$$m_X = q \cdot \frac{b}{2} = 2 \cdot \frac{9 \cdot 10^{-2}}{2} = 9 \cdot 10^{-2} \text{ кНм/м}.$$

Сила $F_1 = 14$ кН створює в матеріалі балки:

– стиск $N_X = 14$ кН;

– згин

$$M_{Z F_1} = F_1 \cdot \frac{h}{2} = 14 \cdot \frac{24 \cdot 10^{-2}}{2} = 1,68 \text{ кНм};$$

$$M_{Y F_1} = F_1 \cdot \frac{b}{2} = 14 \cdot \frac{9 \cdot 10^{-2}}{2} = 0,63 \text{ кНм}.$$

Сила $F_2 = 1,5$ кН створює в матеріалі балки:

– зосереджений крутний момент:

$$M_{X F_2} = F_2 \cdot \frac{h}{2} = 1,5 \cdot \frac{24 \cdot 10^{-2}}{2} = 0,18 \text{ кНм};$$

– зосереджену силу $F_2 = 1,5$ кН.

Отже в результаті приведення зовнішніх навантажень, отримали чотири схеми з різними видами деформацій:

- згин у двох площинах (рис. 5.9б, в);
- кручення (рис. 5.9г);
- стиск (рис. 5.9д).

Розглянемо кожну зі схем навантаження балки.

Згин у площині XU відносно осі Z (схема 5.9б). Записуємо функції перерізуючих сил і згинальних моментів:

$$Q_Y(x) = q \cdot x = 2 \cdot x; \quad Q_Y(0) = 0; \quad Q_Y(3\text{м}) = 6 \text{ кН};$$

$$M_Z(x) = M_{Z F_1} - \frac{q \cdot x^2}{2} = 1,68 - x^2; \quad M_Z(0) = 0;$$

$$M_Z(1,2\text{м}) = 0,24 \text{ кНм}; \quad M_Z(3\text{м}) = 7,32 \text{ кНм}.$$

Будуємо епюри внутрішніх силових факторів (рис. 5.9ж, з).

Згин у площині XZ відносно осі Y (схема 5.9в). Записуємо функції перерізуючих сил і згинальних моментів:

I ділянка $0 \leq x \leq 1,2$ м (права сторона)

$$Q_Z(x) = 0; \quad Q_Z(0) = 0; \quad Q_Z(1,2 \text{ м}) = 0;$$

$$M_Y(x) = M_{Y F_1} = 0,63 \text{ кНм}; \quad M_Y(0) = 0;$$

$$M_Y(1,2 \text{ м}) = 0,63 \text{ кНм}.$$

II ділянка $1,2 \text{ м} \leq x \leq 3$ м (права сторона)

$$Q_Z(x) = -F_2 = 1,5 \text{ кН}; \quad Q_Z(1,2 \text{ м}) = 1,5 \text{ кН}; \quad Q_Z(3 \text{ м}) = 1,5 \text{ кН};$$

$$M_Y(x) = M_{Y F_1} + F_2 \cdot (x - 1,2 \text{ м}) = 0,63 + 1,5 \cdot (x - 1,2 \text{ м});$$

$$M_Y(1,2 \text{ м}) = 0,63 \text{ кНм}; \quad M_Y(3 \text{ м}) = 3,33 \text{ кНм}.$$

Будуємо епюри (рис. 5.9к, л).

Кручення відносно осі Y (схема 5.9з). Записуємо функції крутних моментів:

I ділянка $0 \leq x \leq 1,2$ м (права сторона)

$$M_{KP X}(x) = m_1 \cdot x = 9 \cdot 10^{-2} \cdot x; \quad M_{KP X}(0) = 0;$$

$$M_{KP X}(1,2\text{ м}) = 0,108 \text{ кНм.}$$

II ділянка $1,2 \text{ м} \leq x \leq 3 \text{ м}$ (права сторона)

$$M_{KP X}(x) = m_1 \cdot x - M_{X F_2} = 9 \cdot 10^{-2} \cdot x - 0,18;$$

$$M_{KP X}(1,2 \text{ м}) = -0,072 \text{ кНм;}$$

$$M_{KP X}(3 \text{ м}) = 0,09 \text{ кНм.}$$

Будуємо епюру крутних моментів (рис. 5.9м).

Стиск вздовж осі X (схема 5.9д). По всій довжині діє нормальна сила $N = N_X = -14$ кН. Будуємо епюру нормальних сил (рис. 5.9н).

Відповідь: зусилля в опорі балки:

перерізуючі сили $Q_Y = 6$ кН; $Q_Z = 1,5$ кН;

нормальна сила $N_X = 14$ кН;

згинальні моменти $M_Z = 7,32$ кНм; $M_Y = 3,33$ кНм;

крутний момент $M_{KP X} = 0,09$ кНм.

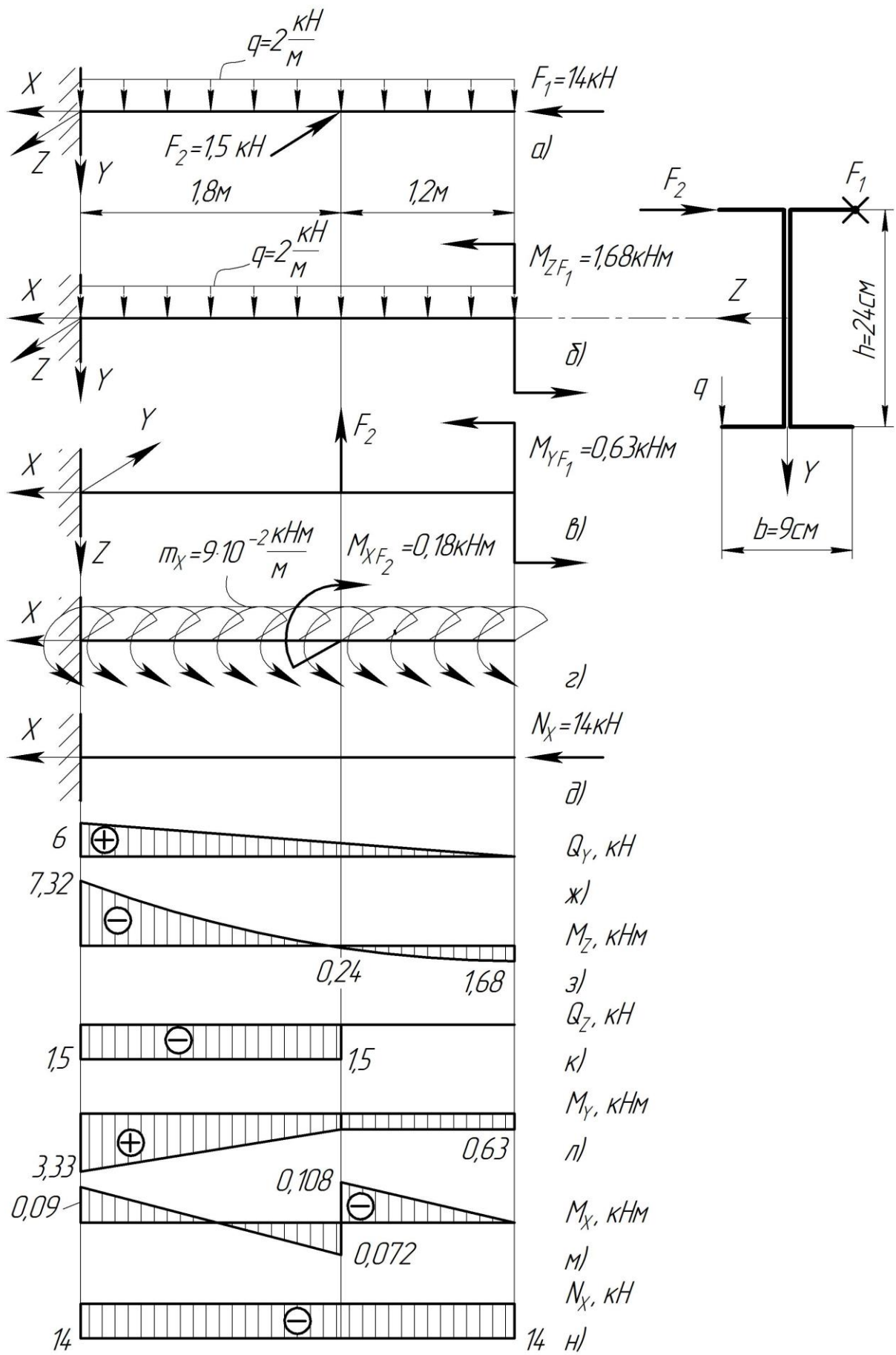


Рисунок 5.9

Приклад 5.4. Короткий стрижень круглого поперечного перетину діаметром d , довжиною $l = 4 \cdot d$, навантажений силами $F_1 = F$ в точці B та $F_2 = 0,25 \cdot F$ у точці C (рис. 5.10а). Визначити максимальні нормальні напруження за модулем.

Розв'язування

Силу F_1 приводимо до центра ваги перетину (рис 5.10б). Тоді на стрижень будуть діяти сила стиску $N = -F_1 = -F$, та згинальний момент $M_Y = F_1 \cdot \frac{d}{2}$.

Небезпечний перетин стрижня виникає у закріпленні, в якому діють: сила стиску $N = -F_1 = -F$ і згинальні моменти $M_Y = F_1 \cdot \frac{d}{2}$, $M_X = F_2 \cdot l$. Визначаємо сумарний згинальний момент

$$M_{3\Gamma \text{ сум}} = \sqrt{M_Y^2 + M_X^2} = \sqrt{\left(F \cdot \frac{d}{2}\right)^2 + (0,25 \cdot 4 \cdot d \cdot F)^2} = 1,12 \cdot F \cdot d.$$

Екстремальні нормальні напруження для круглого поперечного перетину від згину:

$$\sigma_{3\Gamma \text{ max min}} = \pm \frac{M_{3\Gamma \text{ сум}}}{W_0} = \pm \frac{1,12 \cdot F \cdot d \cdot 32}{\pi \cdot d^3} = \pm \frac{11,4 \cdot F}{d^2},$$

де W_0 – осьовий момент опору поперечного перетину стрижня, для круглого перетину $W_0 = W_X = W_Y = \pi \cdot d^3 / 32$.

Максимальні нормальні напруження від стиску

$$\sigma_{CT \text{ max}} = \frac{N}{A} = -\frac{4 \cdot F}{\pi \cdot d^2}.$$

Максимальні нормальні напруження від згину та стиску виникають у закріпленні дорівнюють за модулем

$$\sigma_{\text{max}} = \sigma_{3\Gamma \text{ max}} + \sigma_{CT \text{ max}} = \left| -\frac{11,4 \cdot F}{d^2} - \frac{4 \cdot F}{\pi \cdot d^2} \right| = \frac{12,7 \cdot F}{d^2}.$$

Відповідь: максимальні нормальні напруження за модулем

$$\sigma_{\text{max}} = \frac{12,7 \cdot F}{d^2}.$$

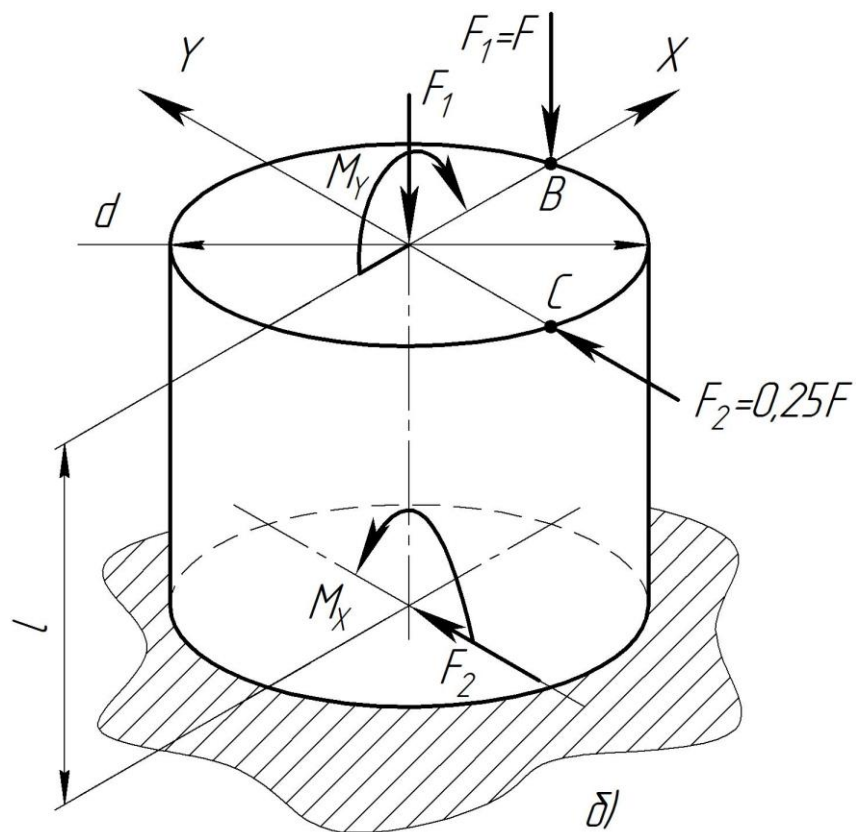
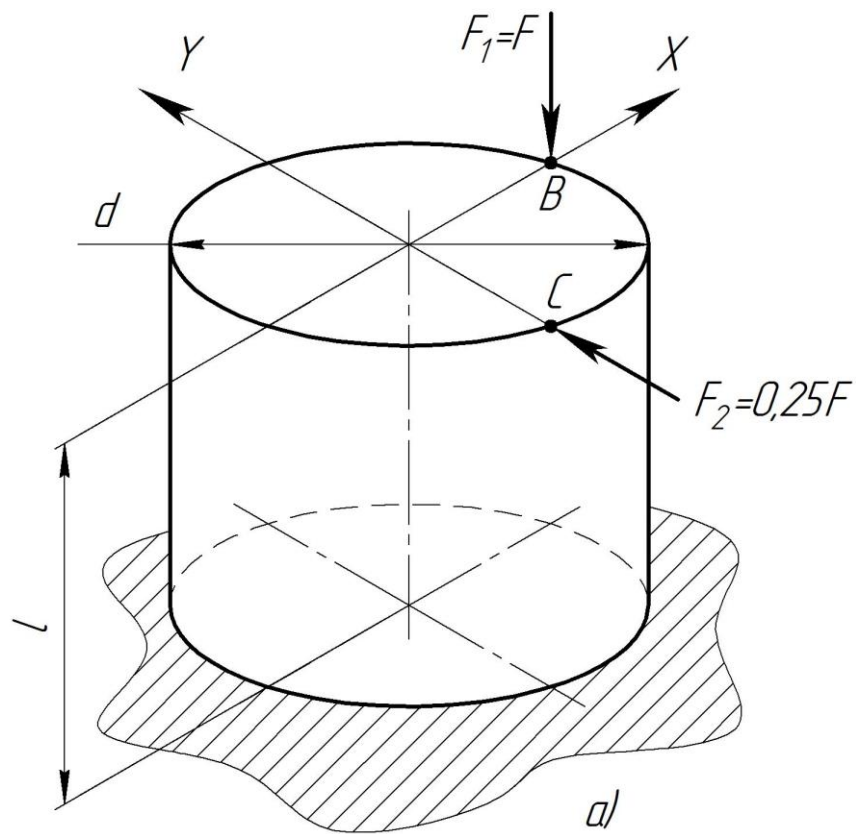


Рисунок 5.10

Приклад 5.5. Короткий стрижень прямокутного поперечного перетину розміром $b \times h$ ($b < h$), позацентрово навантажений стискуючою силою F . В першому варіанті сила прикладена в точці B (рис. 5.11а), в другому варіанті в точці C (рис. 5.11б). Визначити в якому випадку виникають більші нормальні напруження.

Розв'язування

Записуємо значення максимальних нормальних напружень для двох випадків позацентрового навантаження поперечного перетину силою F :

$$\sigma_1 = -\frac{F}{A} \cdot \left(1 + \frac{\frac{h}{2} \cdot \frac{h}{2}}{i_X^2} \right);$$

$$\sigma_2 = -\frac{F}{A} \cdot \left(1 + \frac{\frac{b}{2} \cdot \frac{b}{2}}{i_y^2} \right),$$

де A – площа поперечного перетину, $A = b \cdot h$;

i_X^2, i_Y^2 – квадрати радіусів інерції поперечного перетину,

$$i_X^2 = \frac{I_X}{A} = \frac{b \cdot h^3}{12 \cdot b \cdot h} = \frac{h^2}{12};$$

$$i_Y^2 = \frac{I_Y}{A} = \frac{h \cdot b^3}{12 \cdot b \cdot h} = \frac{b^2}{12}.$$

Співвідношення нормальних напружень

$$\frac{\sigma_1}{\sigma_2} = \frac{\frac{F}{A} \cdot \left(1 + \frac{h^2 \cdot 12}{4 \cdot h^2} \right)}{\frac{F}{A} \cdot \left(1 + \frac{b^2 \cdot 12}{4 \cdot b^2} \right)} = \frac{1+3}{1+3} = 1.$$

Відповідь: нормальні напруження $\sigma_1 = \sigma_2$.

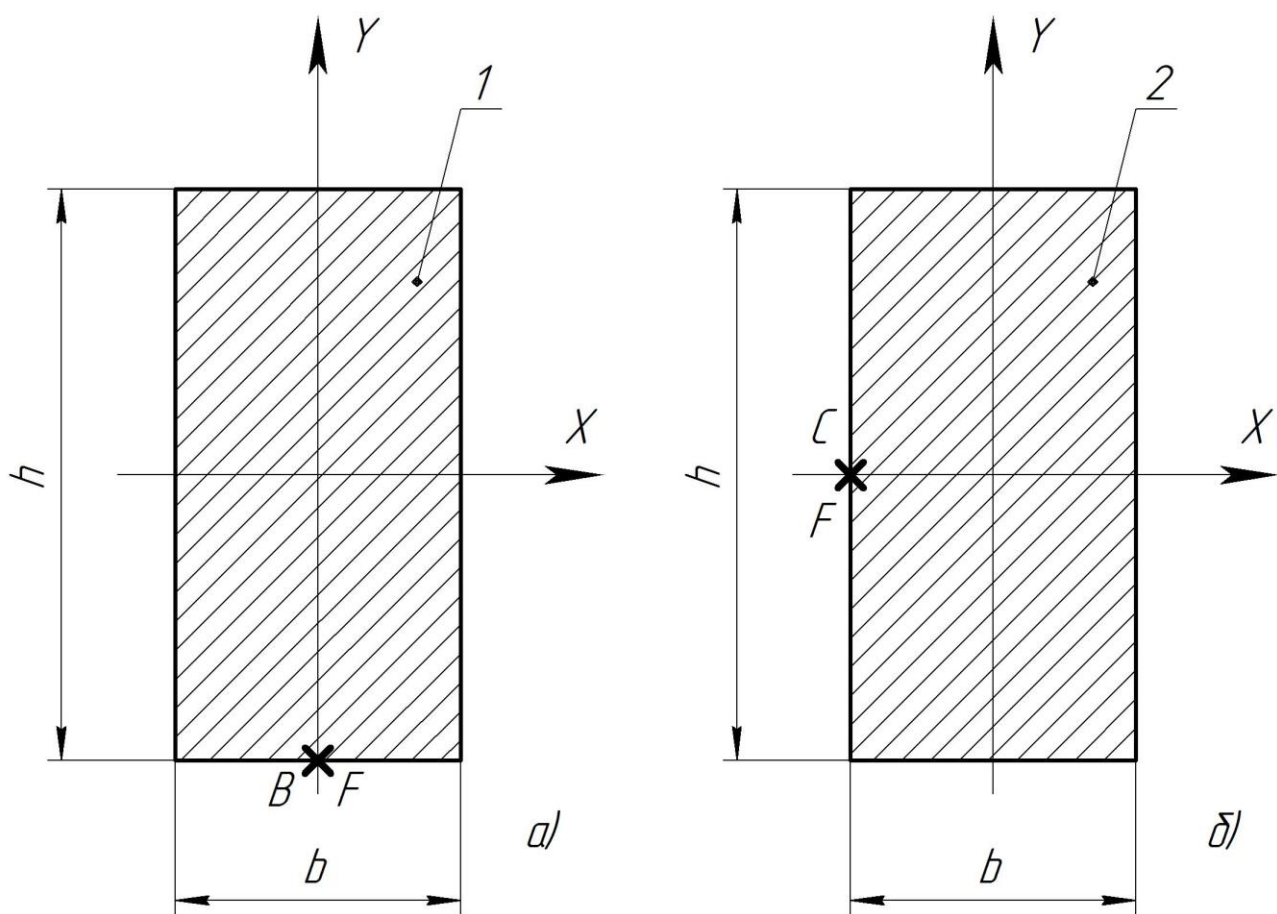
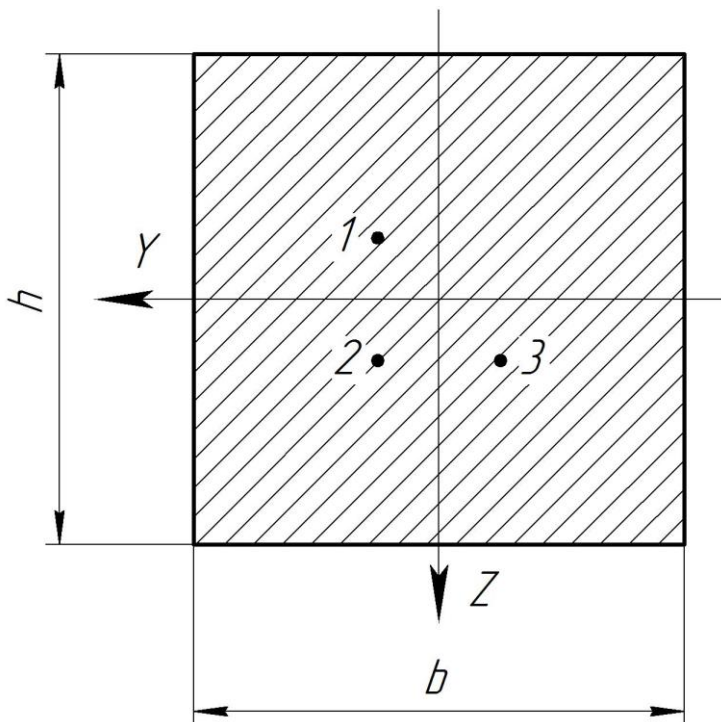


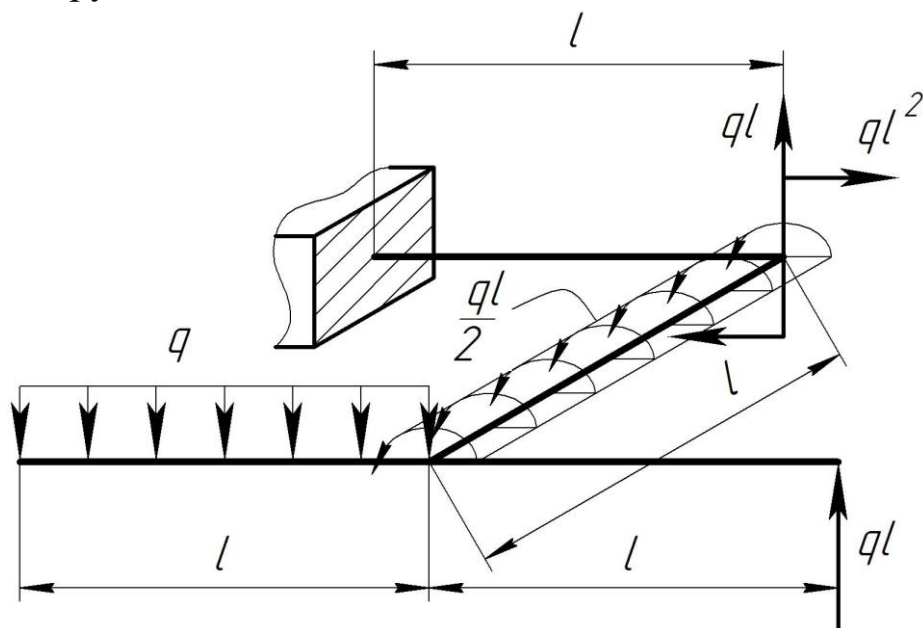
Рисунок 5.11

ЗАДАЧІ ДЛЯ САМОСТІЙНОГО РОЗВ'ЯЗУВАННЯ

Задача 5.1. У прямокутному перетині стрижня (див. рис.) виникають нормальні напруження σ_{Xi} від внутрішніх зусиль N_X , M_Y , M_Z . Відомі значення напружень у трьох точках $\sigma_{X_1} = 9 \text{ МПа}$, $\sigma_{X_2} = 6 \text{ МПа}$, $\sigma_{X_3} = 12 \text{ МПа}$. Точки мають такі координати: $y_1 = 3 \text{ см}$, $z_1 = -3 \text{ см}$, $y_2 = 3 \text{ см}$, $z_2 = 3 \text{ см}$, $y_3 = -3 \text{ см}$, $z_3 = 3 \text{ см}$. Визначити значення внутрішніх зусиль та положення нульової лінії, якщо $b = 24 \text{ см}$, $h = 24 \text{ см}$



Задача 5.2. При заданих q та l знайти згинальні та крутні моменти в елементах плоскої просторової рами (див. рис.). Побудувати епюри згинальних і крутних моментів.



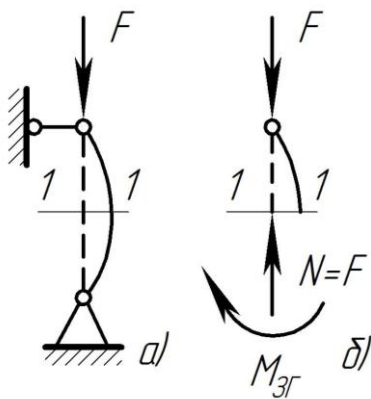
6. СТІЙКІСТЬ ЦЕНТРАЛЬНО-СТИСНЕНИХ СТРИЖНІВ

Умови міцності та жорсткості доповнюють умовою стійкості, яка передбачає збереження початкової форми рівноваги конструкції або окремих її елементів під дією заданого навантаження стиску.

Навантаження стиску, при яких втрачається стійкість, називають **критичними**, а відповідні їм стани – **критичними станами**.

Небезпека втрати стійкості виникає для тонкостінних конструкцій типу гнучких стрижнів, довгих стиснених стрижнів, пластин і оболонок.

Критична сила – це найбільше значення стискаючої сили, прикладеної центрально, до якої прямолінійна форма рівноваги стрижня є стійкою. Згин, пов'язаний із втратою стійкості стрижнем прямолінійної форми, називають **поздовжнім згином**.



Унаслідок викривлення осі у поперечних перетинах стрижня виникають два внутрішні силові фактори – **поздовжня сила** $N = F$ і **згинальний момент** $M_{зг}$ (рис. 6.1). Отже, викривлений стрижень зазнає одночасно дефор–мацій центрального стиску і поперечного згину.

Рисунок 6.1

Визначення критичних навантажень є відповідальною частиною розрахунку конструкції і дає можливість уникнути втрати стійкості введенням відповідного коефіцієнта запасу стійкості

$$n_{cm} = \frac{F_{кр}}{F}.$$

Щоб забезпечити стійкість, необхідно, щоб стискаюча сила F , яка діє на стрижень, була меншою за критичну $F_{кр}$. Стійкість стрижня достатня, якщо $n_{cm} > 1$. Значення коефіцієнта запасу стійкості залежить від призначення стрижня і його матеріалу. Для сталей $n_{cm} = 1,8...3$; для чавунів $n_{cm} = 5...5,5$; для дерева $n_{cm} = 2,8...3,2$.

Рівновага абсолютно твердого тіла може бути стійкою, байдужою і нестійкою. Аналогічно це можна віднести і до деформованого тіла.

Довгий стрижень при дії осьового стискуючого навантаження проходить **три форми рівноваги**: **стійку**, **байдужу** та **нестійку**. Стиснений стрижень перебуває у стані **стійкої** рівноваги (рис. 6.2а), якщо

сила стиску F не перевищує критичного значення F_{KP} . Тобто, якщо стрижень незначно зігнути якимось поперечним навантаженням, а потім це навантаження забрати, то стрижень знову вирівнюється, набуде початкового положення.

Форма рівноваги стисненого стрижня є *байдужою* (рис. 6.2б), якщо сила стиску досягає певного значення, яке дорівнює критичній силі. При незначному відхиленні від початкового положення, під дією поперечної сили стрижень назад не повертається.

При значенні стискуючої сили, яке перевищує критичне, прямолінійна форма рівноваги стрижня стає *нестійкою*, стрижень втрачає свою початкову форму (рис. 6.2в).

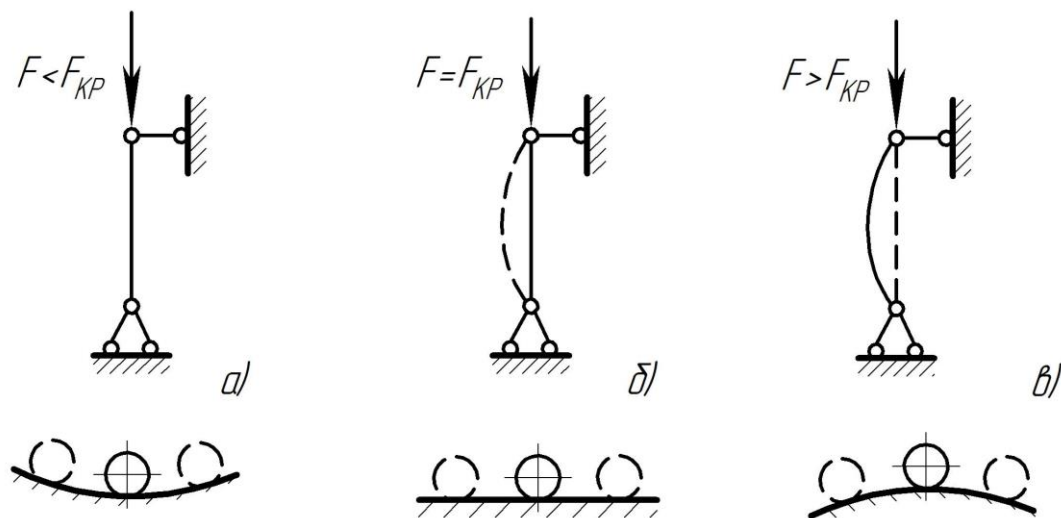


Рисунок 6.2

Втрата стійкості стрижня може відбутися навіть тоді, коли напруження під дією критичної сили не досягнуло границі пропорційності.

Найменше значення стискуючої сили, при якій стрижень втрачає властивість зберігати прямолінійну форму, називають критичною, позначають F_{KP} .

Задачу визначення величини критичної сили вперше розв'язав швейцарський математик та фізик Леонард Ейлер у 1744р. **Формула Ейлера**

$$F_{KP} = \frac{\pi^2 E \cdot I_{\min}}{(\mu \cdot l)^2},$$

де E – модуль пружності І-го роду;

I_{\min} – мінімальний осьовий момент інерції поперечного перетину стрижня;

μ – коефіцієнт зведення довжини, залежить від способу закріплення кінців стрижня;
 l – довжина стрижня.

Варіанти закріплення кінців стрижнів і відповідні значення коефіцієнтів зведення довжини зображено на рисунку 6.3.

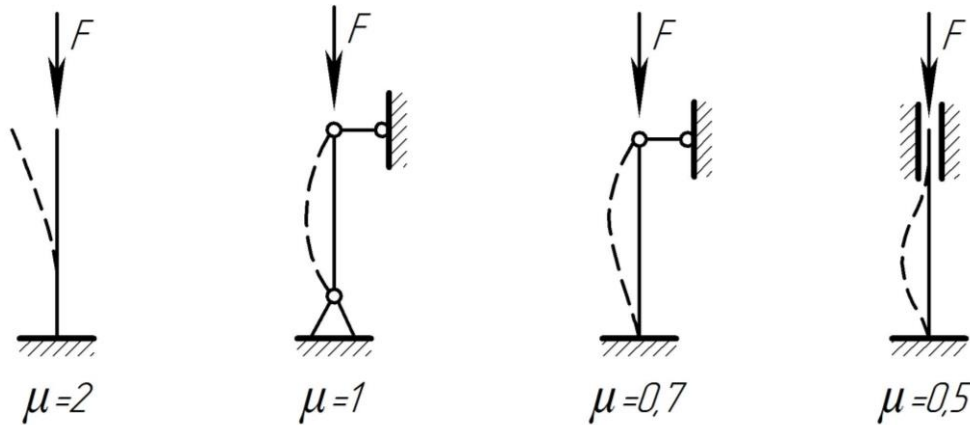


Рисунок 6.3

Межі застосування формули Ейлера. Формула Ясинського

Формула Ейлера отримана з диференціального рівняння зігнутої осі стрижня при шарнірно закріплених кінцях. Виведення формули Ейлера ґрунтується на законі Гука, який дійсний доти, доки напруження у матеріалі не перевищує границю пропорційності.

Критичні напруження мають бути меншими за границю пропорційності, їх визначають за формулою

$$\sigma_{KP} \leq \sigma_{mц}; \quad \sigma_{KP} = \frac{F_{KP}}{A} = \frac{\pi^2 E \cdot I_{\min}}{(\mu \cdot l)^2 \cdot A} = \frac{\pi^2 E}{\lambda_{\max}^2} \leq \sigma_{mц},$$

де A – площа поперечного перетину стрижня;

λ_{\max} – максимальна гнучкість стрижня, залежить від геометрії стрижня, способів закріплення його кінців. Визначають її за формулою

$$\lambda_{\max} = \frac{\mu \cdot l}{i_{\min}},$$

де i_{\min} – мінімальний радіус інерції поперечного перетину стрижня, залежить від геометричних параметрів, визначають його за формулою

$$i_{\min} = \sqrt{I_{\min} / A}.$$

Формулу Ейлера використовують при гнучкостях, які більші або дорівнюють максимальному значенню

$$\lambda_{\max} \geq \sqrt{\frac{\pi^2 \cdot E}{\sigma_{\text{нц}}}}$$

Гранична гнучкість стрижня λ_0 є найменшим значенням максимальної гнучкості і залежить лише від матеріалу стрижня. Визначають її за формулою

$$\lambda_0 = \sqrt{\frac{\pi^2 \cdot E}{\sigma_{\text{нц}}}}$$

Формулу Ейлера застосовують тоді, коли гнучкість стрижня більша або дорівнює граничній гнучкості матеріалу, з якого його виготовлено,

$$\lambda_{\max} \geq \lambda_0.$$

Як приклад, можна визначити граничну гнучкість для маловуглецевої сталі Ст.3, для якої $\sigma_{\text{нц}} = 200$ МПа, модуль пружності $E = 2 \cdot 10^5$ МПа.

$$\lambda_0 = \sqrt{3,14^2 \cdot 2 \cdot 10^5 \cdot 10^6 / (200 \cdot 10^6)} = 100.$$

Для стрижнів з маловуглецевої сталі формулу Ейлера застосовують, якщо їх гнучкість $\lambda \geq 100$. Аналогічно визначають граничну гнучкість для інших матеріалів. Зокрема, для чавуну $\lambda_0 = 80$; для дерева $\lambda_0 = 110$.

Якщо гнучкість стрижнів менша від граничної, зокрема для сталевих стрижнів середньої гнучкості при $\lambda = 40 \dots 100$, для визначення критичних напружень застосовують емпіричну формулу Ясинського

$$\sigma_{\text{КР}} = a - b \cdot \lambda_{\max},$$

де a, b – коефіцієнти, що залежать від матеріалу стрижня. Для сталі Ст.3 ці величини дорівнюють

$$a = 310 \text{ МПа}; \quad b = 1,14 \text{ МПа}.$$

Якщо гнучкість $\lambda < 40$, стрижні можна розраховувати на міцність при простому стиску, не враховуючи небезпеки поздовжнього згину, тобто за формулами

$$\sigma_{KP} = \sigma_T.$$

Графік залежності критичних напружень від гнучкості для стрижнів, виготовлених із маловуглецевої сталі, зображено на рисунку 6.4.

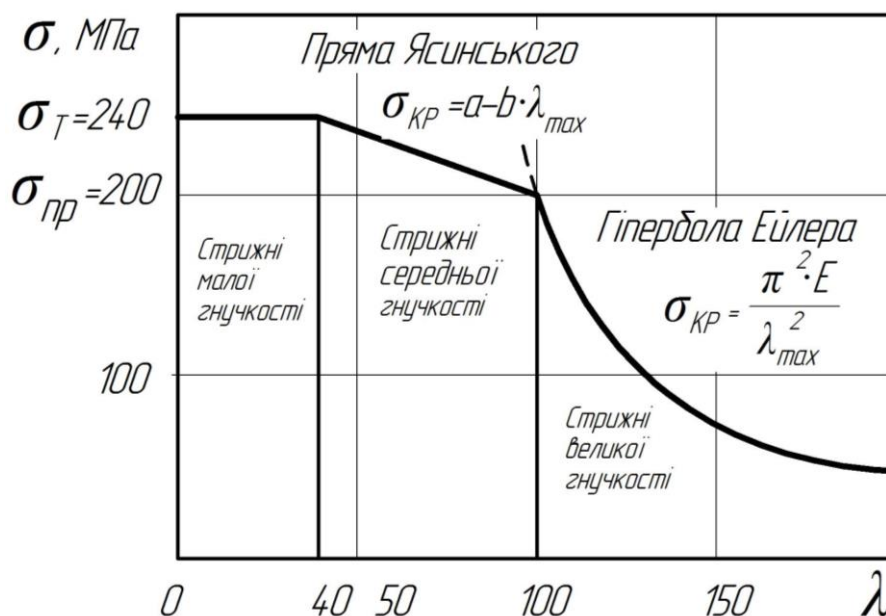


Рисунок 6.4

Зазначимо, що для стрижнів із маловуглецевих сталей, є характерні такі напружені стани при розрахунках на стійкість:

1) при малих значеннях λ критичне напруження дорівнює границі текучості $\sigma_{KP} = \sigma_T$;

2) при середніх значеннях λ критичне напруження менше від границі текучості, але більше ніж границя пропорційності $\sigma_{пц} < \sigma_{KP} < \sigma_T$;

3) при великих значеннях λ критичне напруження менше від границі пропорційності $\sigma_{KP} < \sigma_{пц}$.

Величину критичної сили, яку можна прикласти до стрижня, отримують у такій послідовності. Визначають:

а) граничну гнучкість λ_0 , яка залежить лише від матеріалу;

б) максимальну дійсну гнучкість λ_{max} , яка залежить від геометричних характеристик стрижня і способів закріплення його кінців;

в) маючи λ_0 і λ_{max} , для визначення критичних напружень використовують одну з таких формул:

– при $\lambda_{max} \geq \lambda_0$ формулу Ейлера, $\sigma_{KP} = \pi^2 E / \lambda_{max}^2$;

- при $\lambda_{cp} \leq \lambda_{max} \leq \lambda_0$ формулу Ясинського, $\sigma_{KP} = a - b \cdot \lambda_{max}$;
- при $\lambda_{max} < \lambda_{cp}$, формулу на стиск, $\sigma_{KP} = \sigma_T$;
- з) маючи σ_{KP} , визначають критичну силу $F_{KP} = \sigma_{KP} \cdot A$.

Допустиме значення сили, прикладеної до стрижня, визначають як

$$[F] = F_{KP} / n_{cm}.$$

У розрахунках на стійкість критичне напруження є руйнівним, як границя текучості або границя міцності в розрахунках на міцність. Тому введено поняття **допустимого напруження на стійкість** $[\sigma_{CT}]$, що визначається як частина критичного напруження

$$[\sigma_{CT}] = \sigma_{KP} / n_{cm}.$$

Умова стійкості вимагає, щоб напруження, яке виникає при стиску, не перевищувало допустимого напруження на стійкість

$$\sigma = \frac{F_{max}}{A} \leq [\sigma_{CT}].$$

Проте обчислення допустимого напруження на стійкість ускладнюється внаслідок того, що критичне напруження залежить не лише від властивостей матеріалу, але й від гнучкості стрижня. Тому введено поняття **коефіцієнта зменшення основного допустимого напруження на міцність при розрахунку на стійкість**

$$\varphi = \frac{[\sigma_{CT}]}{[\sigma]},$$

де $[\sigma]$ – допустиме напруження на міцність при стиску, $[\sigma] = \sigma_T / n$.

Коефіцієнт φ для кожного матеріалу можна визначити при будь-якому значенні гнучкості. Коефіцієнт φ називають ще **коефіцієнтом поздовжнього згину** стрижня.

Умова стійкості для центрально стиснених стрижнів

$$\sigma = \frac{F_{max}}{\varphi \cdot A} \leq [\sigma].$$

Розв'язування задач з використанням умови стійкості не має єдиного розв'язку, оскільки до нерівності входять дві невідомі величини, які взаємозв'язані між собою: площа перетину A і коефіцієнт φ , який залежить від невизначених ще розмірів перетину та його форми.

Розв'язують задачі методом послідовних наближень з перевіркою проміжних результатів. У першому наближенні беруть довільне значення коефіцієнта зменшення основного допустимого напруження, орієнтовно $\varphi=0,5\dots 0,6$. Уточнені значення коефіцієнта φ визначають із таблиць для заданого матеріалу та гнучкості стрижня, яка залежить від визначеної площі поперечного перетину стрижня.

За допомогою умови стійкості розв'язують три типи задач.

1. Підбір поперечного перетину стрижня або проектний розрахунок.

Виконують цей розрахунок визначенням площі поперечного перетину стрижня методом послідовних наближень

$$A \geq \frac{F}{\varphi \cdot [\sigma]}.$$

2. Визначення допустимого навантаження

$$[F] \leq \varphi \cdot [\sigma] \cdot A.$$

Значення коефіцієнта φ визначають із таблиць для заданого матеріалу та відповідної гнучкості стрижня.

3. Перевірний розрахунок. Перевірка стійкості, тобто виконання умови стійкості. Виконують у такій послідовності:

- визначають мінімальний осьовий момент інерції поперечного перетину стрижня та мінімальний радіус інерції (при однаковому закріпленні у головних площинах);
- обчислюють максимальну гнучкість стрижня;
- визначають із таблиць значення коефіцієнта зменшення основного допустимого напруження φ ;
- отримані дані підставляють в умову стійкості й перевіряють її виконання.

Визначення розмірів поперечного перетину стрижня при стійкості ускладнюється тим, що наперед не відомо, в якому діапазоні буде знаходитися дійсна гнучкість стрижня, тобто якою з формул потрібно користуватися: Ейлера, Ясинського чи на простий тиск.

ПРИКЛАДИ

Приклад 6.1. Стрижнева система (рис. 6.5а) навантажена моментами M_1 і M_2 . При якому найменшому значенні M_2 елемент сталеві конструкції (1 чи 2) втратить стійкість, якщо гранична гнучкість стрижня, $\lambda_C = 110$. Брус CB абсолютно жорсткий, а M_1, l, E, A – відомі.

Розв'язування

Умовою розрахунку на стійкість стрижнів 1 і 2 слугуватиме їх стиск, а це буде відбуватися у випадку, коли $M_2 > M_1$. Складаємо рівняння статички (рис. 6.5б):

$$\sum M_B = 0, \quad N_1 \cdot 2 \cdot l + N_2 \cdot l + M_1 - M_2 = 0. \quad (1)$$

Стрижнева система (рис. 6.5б) один раз статично невизначена. У рівняння (1) входить дві невідомі N_1 і N_2 – зусилля у стрижнях. Із подібності трикутників (рис. 6.5в) $\Delta C_1CB \sim \Delta K_1KB$ записуємо додаткове рівняння – рівняння сумісності деформацій

$$\frac{\Delta l_1}{\Delta l_2} = \frac{2 \cdot l}{l} = 2,$$

або

$$\frac{N_1 \cdot l \cdot E \cdot A}{E \cdot A \cdot N_2 \cdot l} = \frac{N_1}{N_2} = 2,$$

звідки

$$N_1 = 2 \cdot N_2. \quad (2)$$

Розв'язуючи рівняння (1) і (2) отримаємо:

$$2 \cdot N_2 \cdot 2 \cdot l + N_2 \cdot l = M_2 - M_1; \quad N_2 = \frac{M_2 - M_1}{5 \cdot l};$$

$$N_1 \cdot 2 \cdot l + \frac{M_2 - M_1}{5 \cdot l} \cdot l = M_2 - M_1; \quad N_1 = \frac{2 \cdot (M_2 - M_1)}{5 \cdot l}.$$

Для сталевих стрижнів гранична гнучкість $\lambda_0 \approx 100$. У нашому випадку, $\lambda_C > \lambda_0$, тому критичні напруження визначаємо за формулою Ейлера

$$\sigma_{KP} = \frac{\pi^2 \cdot E}{\lambda_C^2}.$$

Так, як $N_1 > N_2$, то втрата стійкості насамперед відбувається у першому стрижні

$$F_{KP} = N_1 = \sigma_{KP} \cdot A = \frac{\pi^2 \cdot E}{\lambda_C^2} \cdot A = \frac{2 \cdot (M_2 - M_1)}{5 \cdot l}, \quad (3)$$

де σ_{KP} – критичні напруження.

З рівняння (3) отримаємо

$$M_2 = M_1 + \frac{5 \cdot l \cdot \pi^2 \cdot E \cdot A}{2 \cdot \lambda_C^2}.$$

Відповідь: найменше значення моменту при якому елемент

конструкції втратить стійкість $M_2 = M_1 + \frac{5 \cdot l \cdot \pi^2 \cdot E \cdot A}{2 \cdot \lambda_C^2}.$

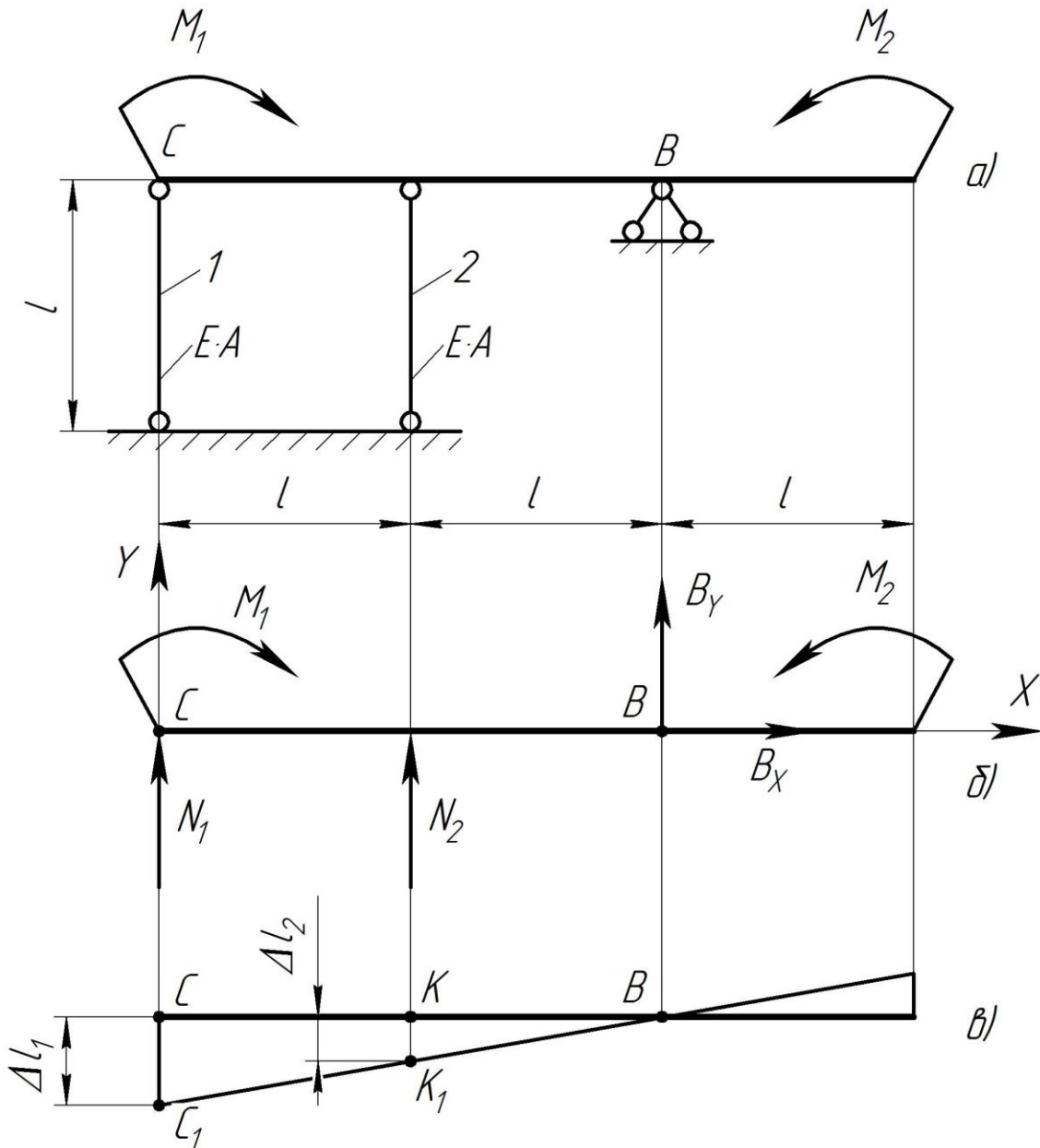


Рисунок 6.5

Приклад 6.2. Прилад вагою Q , підтримується двома сталевими стояками (рис. 6.6а). Поперечний перетин стояків трубчастий із діаметрами $D = 30$ мм, $d = 28$ мм. Визначити максимальну вагу приладу Q_{\max} , якщо $[n_{cm}] = 2,5$, $\lambda_0 = 100$, $E = 2 \cdot 10^5$ МПа.

Розв'язування

Визначаємо стискаючі зусилля у стояках (стрижнях). Розглядаємо рівновагу вузла B (рис. 6.6б):

$$\sum X = 0, \quad N_1 \cdot \sin 30^\circ - N_2 \cdot \sin 30^\circ = 0; \quad (1)$$

$$\sum Y = 0, \quad N_1 \cdot \cos 30^\circ + N_2 \cdot \cos 30^\circ - Q = 0. \quad (2)$$

З рівняння (1) визначимо, що $N_1 = N_2 = N$.

З рівняння (2) отримаємо

$$2 \cdot N \cdot \cos 30^\circ = Q, \quad \text{звідки} \quad N = \frac{Q}{2 \cdot \cos 30^\circ}.$$

Гнучкість стрижня

$$\lambda = \frac{\mu \cdot l}{i_0},$$

де μ – коефіцієнт, який враховує спосіб закріплення кінців стрижня, для розглядуваної схеми $\mu = 1$;

$$l \text{ – довжина стрижня, } l = \frac{h}{\cos 30^\circ} = \frac{1,5}{\cos 30^\circ} = 1,73 \text{ м;}$$

$$i_0 \text{ – радіус інерції поперечного перетину стрижня, } i_0 = \sqrt{\frac{I_0}{A}};$$

I_0 – осьовий момент інерції поперечного перетину стрижня, в даному випадку

$$I_0 = \frac{\pi \cdot D^4}{64} \cdot (1 - \alpha^4) = \frac{\pi \cdot 30^4}{64} \cdot (1 - 0,933^4) = 9575 \text{ мм}^4,$$

де

$$\alpha = \frac{D}{d} = \frac{28}{30} = 0,933;$$

A – площа поперечного перетину стрижня

$$A = \frac{\pi \cdot D^2}{4} \cdot (1 - \alpha^2) = \frac{\pi \cdot 30^2}{4} \cdot (1 - 0,933^2) = 91,1 \text{ мм}^2.$$

Отже радіус інерції перетину стрижня

$$i_0 = \sqrt{\frac{9575}{91,1}} = 10,25 \text{ мм},$$

відповідно гнучкість

$$\lambda = \frac{1 \cdot 1,75 \cdot 10^3}{10,25} = 171 > \lambda_0 = 100.$$

Для розрахунку стрижнів на стійкість використовуємо формулу Ейлера

$$F_{KP} = \frac{\pi^2 \cdot E \cdot I_0}{(\mu \cdot l)^2}.$$

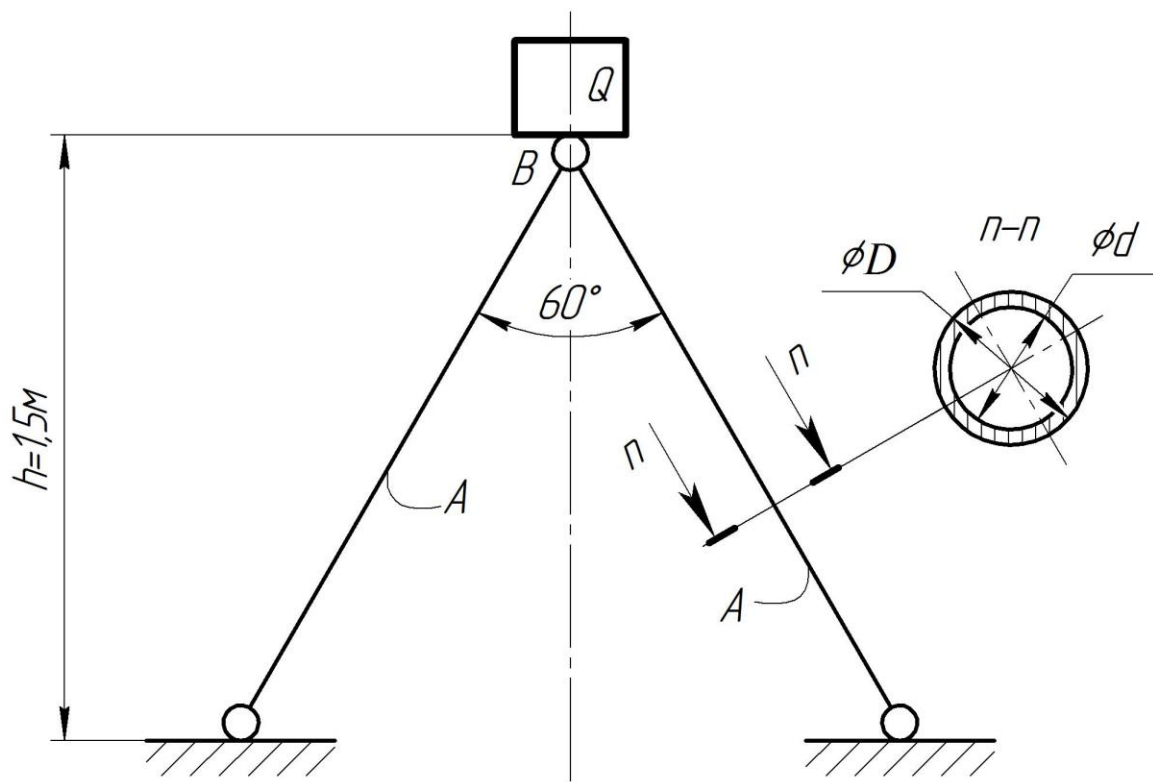
Вагу приладу Q , тобто допустиме навантаження у стрижнях, визначимо з умови, що $N \leq [F_{KP}]$.

$$N = \frac{Q}{2 \cdot \cos 30^\circ} \leq [F_{KP}] = \frac{\pi^2 \cdot E \cdot I_0}{[n_{cm}] \cdot (\mu \cdot l)^2},$$

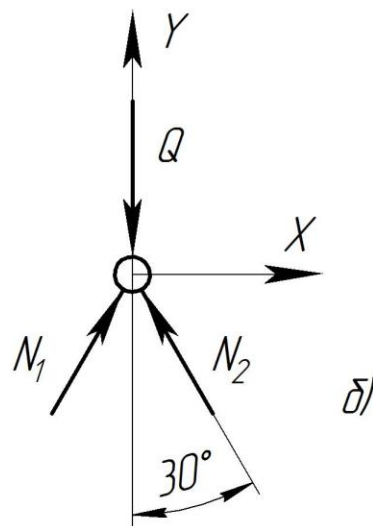
звідки

$$Q \leq \frac{2 \cdot \pi^2 \cdot E \cdot I_0 \cdot \cos 30^\circ}{[n_{cm}] \cdot (\mu \cdot l)^2} = \frac{2 \cdot \pi^2 \cdot 2 \cdot 10^5 \cdot 9575 \cdot \cos 30^\circ}{2,5 \cdot (1 \cdot 1,73 \cdot 10^3)^2} = 4376 \text{ Н}.$$

Відповідь: максимальна вага приладу $Q = 4376 \text{ Н}$.



a/



b/

Рисунок 6.6

Приклад 6.3. Стрижень прямокутного поперечного перетину $h \times b$, стиснутий силою F . Способи закріплення кінців стрижня показані на рисунку 6.7. Визначити співвідношення h/b , при якому стрижень в обох головних площинах інерції буде рівностійким.

Розв'язування

Вважаємо, що гнучкість стрижня в обох площинах (див. рис. 6.7а, б) більша граничної, $\lambda_X > \lambda_0$, $\lambda_Y > \lambda_0$.

Критичні напруження визначаємо за формулою Ейлера

$$\sigma_{KP X} = \frac{\pi^2 \cdot E}{\lambda_X^2}; \quad \sigma_{KP Y} = \frac{\pi^2 \cdot E}{\lambda_Y^2}.$$

Умовою рівностійкості стрижнів є рівність критичних напружень

$$\sigma_{KP X} = \sigma_{KP Y},$$

тобто

$$\frac{\pi^2 \cdot E}{\lambda_X^2} = \frac{\pi^2 \cdot E}{\lambda_Y^2},$$

або

$$\lambda_X^2 = \lambda_Y^2.$$

Запишемо гнучкості для заданих розміщень поперечного перетину стрижня відносно закріплень його кінців:

$$\lambda_X = \frac{\mu_X \cdot l}{i_X}; \quad \lambda_Y = \frac{\mu_Y \cdot l}{i_Y},$$

де i_X , i_Y – радіуси інерції поперечного перетину стрижня

$$i_X = \sqrt{\frac{I_X}{A}}; \quad i_Y = \sqrt{\frac{I_Y}{A}};$$

I_X , I_Y – осьові моменти інерції поперечного перетину стрижня

$$I_X = \frac{h \cdot b^3}{12}; \quad I_Y = \frac{b \cdot h^3}{12}.$$

Запишемо співвідношення гнучкостей стрижня

$$\frac{\lambda_Y^2}{\lambda_X^2} = \frac{\mu_Y^2 \cdot i_X^2}{i_Y^2 \cdot \mu_X^2} = \frac{\mu_Y^2 \cdot I_X}{i_Y^2 \cdot I_Y} = \frac{1 \cdot h \cdot b^3}{0,5^2 \cdot b \cdot h^3} = \frac{b^2}{0,5^2 \cdot h^2},$$

звідки $b = h \cdot 0,5$.

Рівностійкість стрижнів буде забезпечена при співвідношенні

$$\frac{h}{b} = \frac{h}{0,5 \cdot h} = 2.$$

Відповідь: $\frac{h}{b} = 2$.

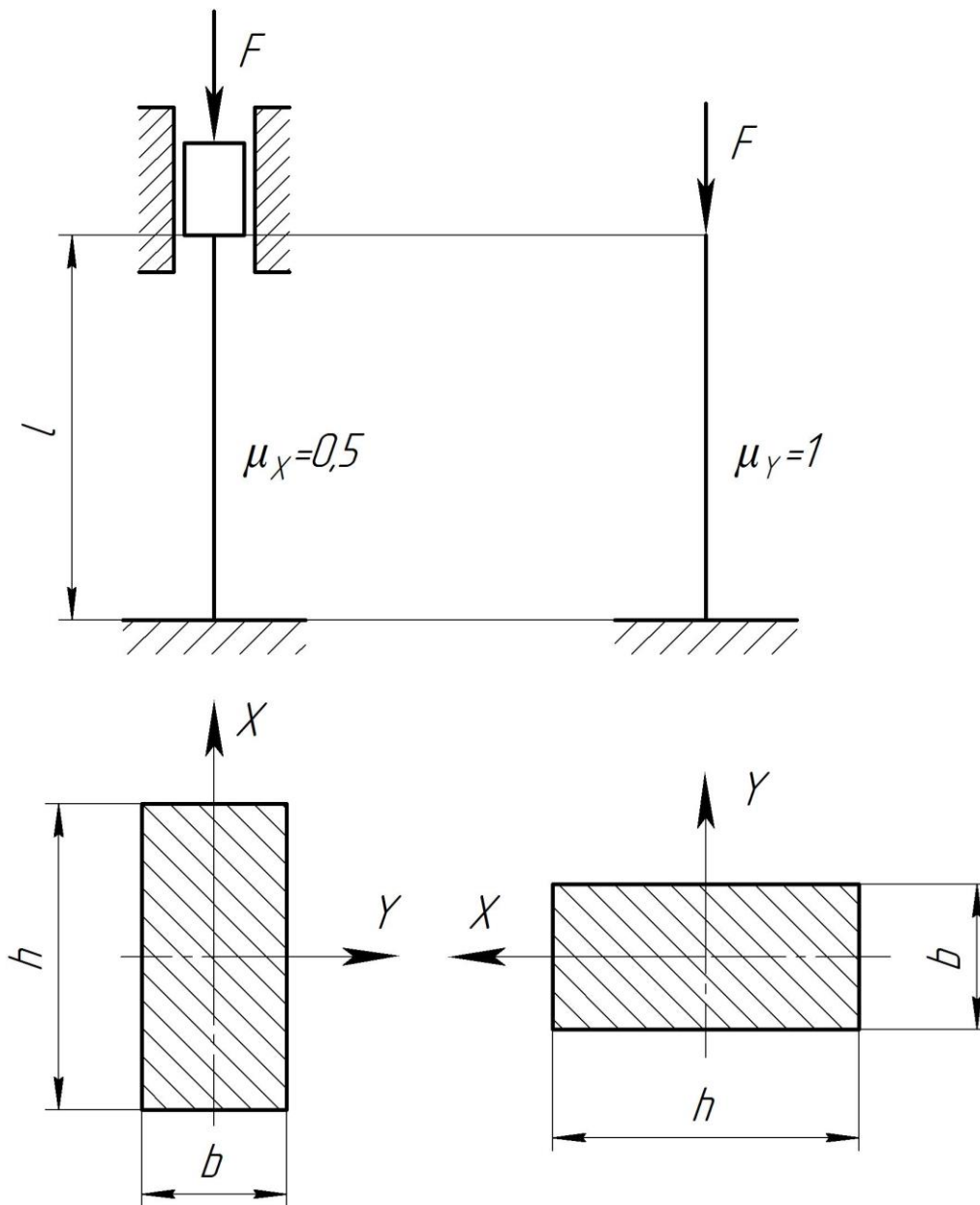
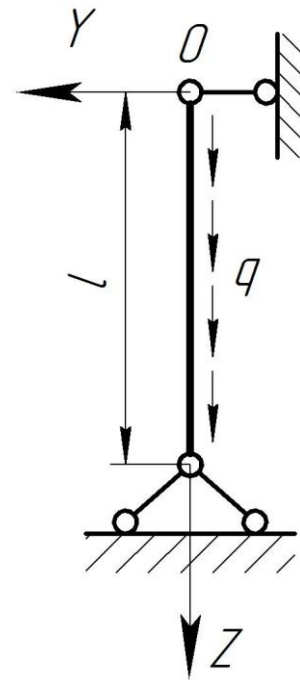


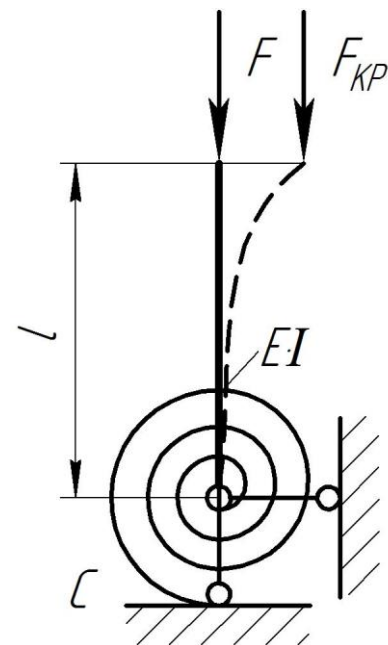
Рисунок 6.7

ЗАДАЧІ ДЛЯ САМОСТІЙНОГО РОЗВ'ЯЗУВАННЯ

Задача 6.1. Скласти диференціальне рівняння зігнутої осі шарнірно закріпленого стрижня, навантаженого рівномірно розподіленим навантаженням q (див. рис.). Жорсткість стрижня $E \cdot I$. Вказати можливі шляхи розв'язання.



Задача 6.2. Визначити критичну силу F_{KP} для стрижня із жорсткістю згину $E \cdot I$, в якого верхній кінець вільний, а нижній – пружно защемлений, до того ж коефіцієнт жорсткості защемлення (момент, що виникає при однаковому куті повороту нижнього перетину стрижня) дорівнює C (див. рис.). З метою спрощення при знаходженні F_{KP} можна припустити, що у першому наближенні тангенс кута дорівнює самому куту.



7. КОМПЛЕКСНІ ЗАДАЧІ

Розрахунок конструкцій, елементи яких сприймають різні види деформацій (внутрішніх силових факторів), або знаходяться під дією фізичних явищ.

ПРИКЛАДИ

Приклад 7.1. Для поперечного перетину (рис. 7.1а) визначити геометричний параметр t , а також побудувати епюри розподілу нормальних та дотичних напружень по його висоті, якщо в даному випадку діють $M_X = 14$ кНм, $Q_Y = 10$ кНм, $[\sigma] = 200$ МПа, $[\tau] = 100$ МПа.

Розв'язування

Геометрична сторона задачі. Визначаємо координати центра ваги поперечного перетину в системі координат X_1Y_1 (рис. 7.1б):

$$y_C = \frac{A_1 \cdot y_{C1} + A_2 \cdot y_{C2} + A_3 \cdot y_{C3}}{A_1 + A_2 + A_3},$$

де A_1 , A_2 , A_3 , – площі прямокутників з яких складається поперечний перетин,

$$A_1 = 6 \cdot t^2; \quad A_2 = 6 \cdot t^2; \quad A_3 = 8 \cdot t^2;$$

y_{C1} , y_{C2} , y_{C3} – координати центрів ваги відповідних прямокутників у системі координат X_1Y_1 ,

$$y_{C1} = 0; \quad y_{C2} = 3,5 \cdot t; \quad y_{C3} = 7,5 \cdot t.$$

Підставивши дані отримаємо

$$y_C = \frac{6 \cdot t^2 \cdot 0 + 6 \cdot t^2 \cdot 3,5 \cdot t + 8 \cdot t^2 \cdot 7,5 \cdot t}{6 \cdot t^2 + 6 \cdot t^2 + 8 \cdot t^2} = 4,05 \cdot t.$$

Проводимо центральні осі X_0Y_0 (рис. 7.1б) відносно яких діють внутрішні силові фактори $M_{зг.X_0} = M_X = 14$ кНм, $Q_{Y_0} = Q_Y = 10$ кНм.

Визначаємо осьовий момент інерції перетину відносно центральної осі X_0 :

$$I_{X_0} = I_{X_1} + A_1 \cdot a_1^2 + I_{X_2} + A_2 \cdot a_2^2 + I_{X_3} + A_3 \cdot a_3^2,$$

де I_{X_1} , I_{X_2} , I_{X_3} , – осьові моменти інерції поперечних перетинів окремих прямокутників відносно власних центральних осей,

$$I_{X_1} = \frac{6 \cdot t \cdot t^3}{12} = 0,5 \cdot t^4;$$

$$I_{X_2} = \frac{t \cdot (6 \cdot t)^3}{12} = 18 \cdot t^4;$$

$$I_{X_3} = \frac{4 \cdot t \cdot (2 \cdot t)^3}{12} = 2,67 \cdot t^4;$$

a_1 , a_2 , a_3 – відстані від осі X_0 до осей X_1 , X_2 , X_3 ,

$$a_1 = 4,05 \cdot t; \quad a_2 = 4,05 \cdot t - 3,5 \cdot t = 0,55 \cdot t;$$

$$a_3 = 7,5 \cdot t - 4,05 \cdot t = 3,45 \cdot t.$$

Тоді

$$I_{X_0} = 0,5 \cdot t^4 + 6 \cdot t^2 \cdot (4,05 \cdot t)^2 + 18 \cdot t^4 + 6 \cdot t^2 \cdot (0,55 \cdot t)^2 + 2,67 \cdot t^4 + 8 \cdot t^2 \cdot (3,45 \cdot t)^2 = 216,6 \cdot t^4.$$

Розрахунки на міцність. Умова міцності на згин за нормальними напруженнями

$$\sigma_{\max} = \frac{M_{зг.X_0}}{I_{X_0}} \cdot y_{\max} \leq [\sigma],$$

де y_{\max} – координата точки поперечного перетину максимально віддалена від осі X_0 (рис. 7.1б),

$$y_{\max} = y_C + 0,5 \cdot t = 4,05 \cdot t + 0,5 \cdot t = 4,55 \cdot t.$$

Тоді

$$\sigma_{\max} = \frac{14 \cdot 10^6}{216,6 \cdot t^4} \cdot 4,55 \cdot t \leq [\sigma] = 200 \frac{\text{Н}}{\text{мм}^2},$$

звідки

$$t \geq \sqrt[3]{\frac{14 \cdot 10^{-6} \cdot 4,55}{216,6 \cdot 200}} = 11,4 \text{ мм.}$$

Умова міцності на згин за дотичними напруженнями

$$\tau_{\max} = \frac{Q_{Y_0} \cdot S_{X_0}^{\max}}{t \cdot I_{X_0}} \leq [\tau],$$

де $S_{X_0}^{\max}$ – максимальний статичний момент площі поперечного перетину відносно осі X_0 (рис. 7.1б)

$$S_{X_0}^{\max} = A_3 \cdot (4,45 \cdot t - t) + A_{2B} \cdot \left(\frac{2,45}{2} \cdot t \right),$$

де A_{2B} – частина площі поперечного перетину другого прямокутника, яка знаходиться вище осі X_0 ,

$$A_{2B} = t \cdot 2,45 \cdot t = 2,45 \cdot t^2.$$

Тоді

$$S_{X_0}^{\max} = 8 \cdot t^2 \cdot 3,45 \cdot t + 2,45 \cdot t^2 \cdot 1,225 \cdot t = 30,6 \cdot t^3.$$

З умови міцності за дотичними напруженнями

$$\tau_{\max} = \frac{10 \cdot 10^3 \cdot 30,6 \cdot t^3}{t \cdot 216,6 \cdot t^4} \leq [\tau] = 100 \frac{\text{Н}}{\text{мм}^2},$$

визначаємо геометричний параметр

$$t \geq \sqrt{\frac{10 \cdot 30,6 \cdot 10^3}{216,6 \cdot 100}} = 3,75 \text{ мм.}$$

Для забезпечення міцності за двома умовами, приймаємо параметр перетину $t = 11,4$ мм.

Побудова епюр розподілу напружень по висоті поперечного перетину. Визначаємо нормальні напруження в точках B, D, C, K, L (рис. 7.1в) поперечного перетину за формулою

$$\sigma_i = \frac{M_{3Г.X_0}}{I_{X_0}} \cdot y_i,$$

де y_i – координата i -ої точки в системі координат X_0Y_0 . Таких точок є п'ять, $y_B = 4,45 \cdot t$; $y_D = 2,45 \cdot t$; $y_C = 0$; $y_K = -3,55 \cdot t$; $y_L = 4,45 \cdot t$;

$$I_{X_0} = 216,6 \cdot t^4 = 216,6 \cdot (11,4)^4 = 3,66 \cdot 10^6 \text{ мм}^4.$$

Визначаємо напруження у характерних точках перетину:

$$\sigma_B = \frac{14 \cdot 10^6}{3,66 \cdot 10^6} \cdot 4,45 \cdot 11,4 = 194 \frac{\text{Н}}{\text{мм}^2} = 194 \text{ МПа};$$

$$\sigma_D = \frac{14 \cdot 10^6}{3,66 \cdot 10^6} \cdot 2,45 \cdot 11,4 = 107 \text{ МПа};$$

$$\sigma_C = 0;$$

$$\sigma_K = \frac{14 \cdot 10^6}{3,66 \cdot 10^6} \cdot (-3,55 \cdot 11,4) = -155 \text{ МПа};$$

$$\sigma_L = \frac{14 \cdot 10^6}{3,66 \cdot 10^6} \cdot (-4,55 \cdot 11,4) = -200 \text{ МПа}.$$

Будуємо епюру розподілу нормальних напружень по висоті поперечного перетину (рис. 7.1г).

Дотичні напруження в характерних точках B , D , C , K , L поперечного перетину (див. рис. 7.1в) визначимо за формулою Журавського

$$\tau_i = \frac{Q_{Y_0} \cdot S_{X_{0i}}^{відр}}{b_i \cdot I_{X_0}},$$

де $S_{X_{0i}}^{відр}$ – статичний момент площі, яка розташована вище лінії, на якій знаходиться точка, для якої визначаємо дотичні напруження відносно осі X_0 ;

b_i – ширина відрізка поперечного перетину на якому знаходиться точка для якої визначаємо дотичні напруження.

$$\tau_B = 0;$$

$$\tau_D^{полиці} = \frac{10 \cdot 10^3 \cdot 8 \cdot 11,4^2 \cdot 3,45 \cdot 11,4}{4 \cdot 11,4 \cdot 3,66 \cdot 10^6} = 2,45 \text{ МПа};$$

$$\tau_D^{стінки} = \frac{10 \cdot 10^3 \cdot 8 \cdot 11,4^2 \cdot 3,45 \cdot 11,4}{11,4 \cdot 3,66 \cdot 10^6} = 9,8 \text{ МПа};$$

$$\tau_C = \frac{10 \cdot 10^3 \cdot (8 \cdot 11,4^2 \cdot 3,45 \cdot 11,4 + 2,45 \cdot 11,4^2 \cdot 1,225 \cdot 11,4)}{11,4 \cdot 3,66 \cdot 10^6} = 10,9 \text{ МПа};$$

$$\tau_K^{стінки} = \frac{10 \cdot 10^3 \cdot 6 \cdot 11,4^2 \cdot 4,05 \cdot 11,4}{11,4 \cdot 3,66 \cdot 10^6} = 8,63 \text{ МПа};$$

$$\tau_K^{полиці} = \frac{10 \cdot 10^3 \cdot 6 \cdot 11,4^2 \cdot 4,05 \cdot 11,4}{6 \cdot 11,4 \cdot 3,66 \cdot 10^6} = 1,44 \text{ МПа};$$

$$\tau_L = 0.$$

За отриманими результатами будуюмо епюру розподілу дотичних напружень по висоті поперечного перетину (рис. 7.1д).

Відповідь: геометричний параметр поперечного перетину
 $t = 11,4 \text{ мм}$.

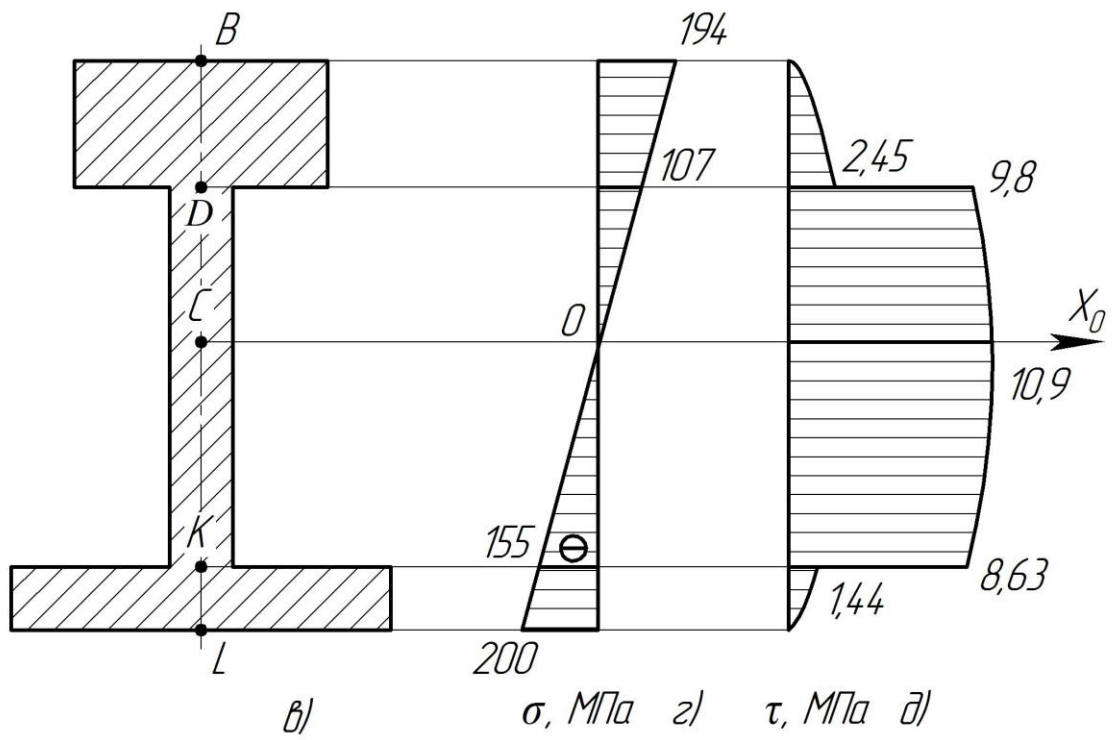
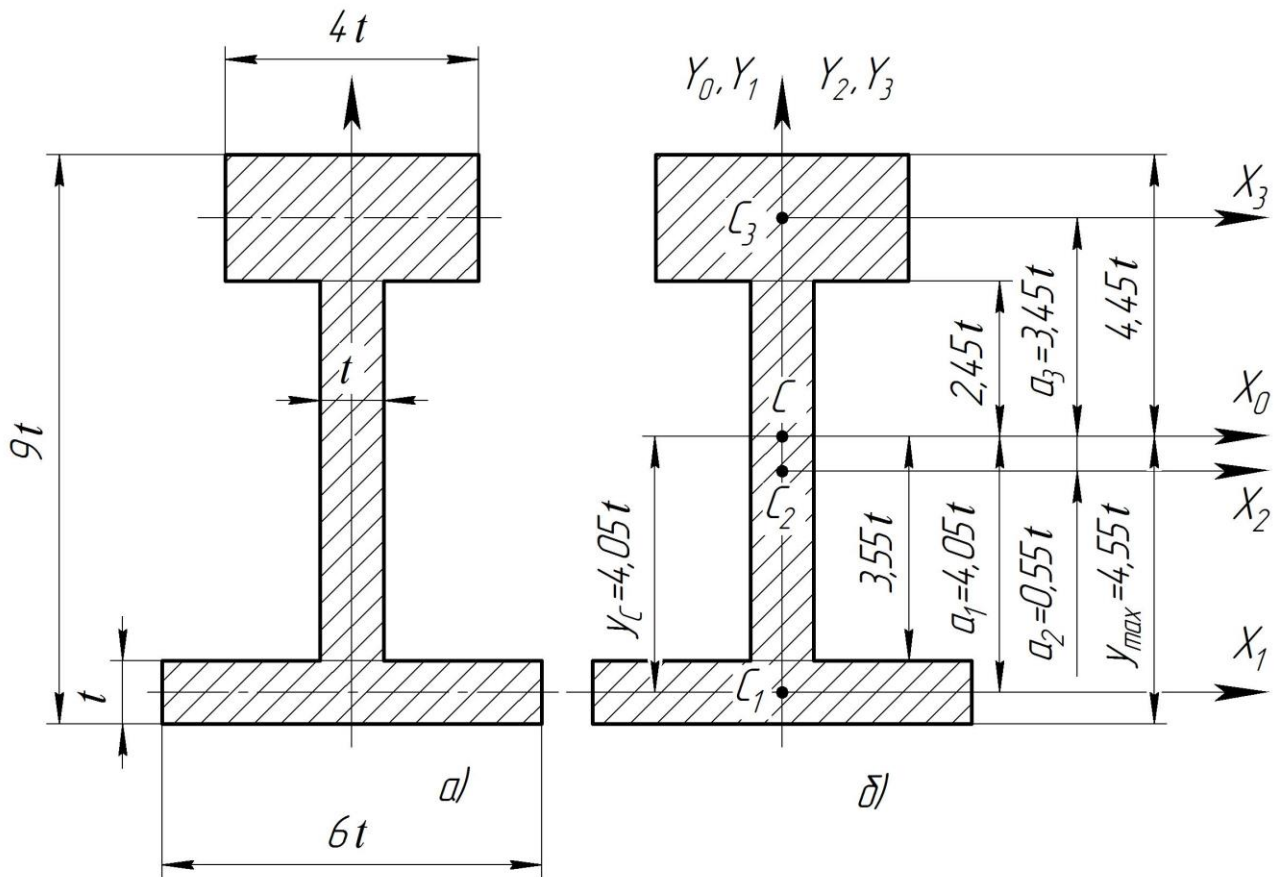


Рисунок 7.1

Приклад 7.2. За допомогою гайки I , що має крок різі t , є можливість змінювати довжину тяги $СК$ (рис. 7.2а, б). На який кут слід повернути гайку після навантаження силою F , щоб забезпечити рівність нормальних напружень у перетинах стрижня B і D . Дано: t, a, F, A, E , $I = \frac{A \cdot a^2}{3}$. З'єднання стрижня $СК$ з стрижнем $СВ$ в точці C вважати шарнірним.

Розв'язування

Розглянемо стрижень звільнений від опори C (рис. 7.2в) на який діють сили F і N_0 . N_0 – сила реакції стрижня $СК$ на стрижень $СВ$, яка забезпечить рівність нормальних напружень у перетинах стрижня B і D . Будуємо епюри згинальних моментів (рис. 7.2г). Рівність нормальних напружень забезпечується за умови

$$M_D = M_B$$

або

$$N_0 \cdot a = -(N_0 \cdot 2a - F \cdot a) = -2 \cdot N_0 \cdot a + F \cdot a,$$

звідки

$$N_0 = \frac{F}{3}. \quad (1)$$

Використовуємо принцип незалежності дії силових факторів і деформацій від них.

Від зосередженої сили F , що діє у перетині D , точка C переміститься на відрізок CC_1 (рис. 7.2д). Прогин ΔF , тобто відрізок CC_1 , визначаємо використовуючи графоаналітичний розв'язок інтегралу Мора (рис. 7.2е)

$$CC_1 = \Delta F = \frac{\omega \cdot \bar{M}_1}{E \cdot I} = \frac{1}{E \cdot I} \left(\frac{1}{2} \cdot F \cdot a^2 \cdot \frac{5}{3} \cdot a \right) = \frac{5 \cdot F \cdot a^3}{6 \cdot E \cdot I} = \frac{2,5 \cdot F \cdot a}{E \cdot A}. \quad (2)$$

Дане переміщення компенсується деформаціями згину стрижня $СВ$ та розтягу стрижня $СК$ від сили N (рис. 7.2ж)

$$CC_1 = \Delta_{зг} N - \Delta_P N. \quad (3)$$

де $\Delta_{зг} N$ – переміщення точки C від деформації згину стрижня $СВ$ викликане силою N ,

$$\Delta_{3I}N = \frac{N \cdot (2 \cdot a)^3}{3 \cdot E \cdot I} = \frac{8 \cdot N \cdot a^3}{3 \cdot E \cdot I} = \frac{8 \cdot N \cdot a}{E \cdot A};$$

$\Delta_P N$ – переміщення точки C від деформації розтягу стрижня CK викликане силою N ,

$$\Delta_P N = \frac{2 \cdot N \cdot a}{E \cdot A}.$$

Отже

$$CC_1 = \frac{8 \cdot N \cdot a}{E \cdot A} - \frac{2 \cdot N \cdot a}{E \cdot A} = \frac{6 \cdot N \cdot a}{E \cdot A}. \quad (4)$$

З умови сумісності деформацій (2) і (4)

$$\frac{2,5 \cdot F \cdot a}{E \cdot A} = \frac{6 \cdot N \cdot a}{E \cdot A},$$

визначимо нормальну силу, що діє у стрижні CK

$$N = \frac{2,5 \cdot F}{6}.$$

Для забезпечення рівності напружень у перетинах B і D необхідно, щоб сила реакції в точці C дорівнювала $N_0 = F/3$. В результаті дії сили F , сила реакцій $N = 2,5 \cdot F/6$, тобто є більшою за N_0 , бо $N > N_0$. Необхідно зменшити силу натягу стрижня CK на величину

$$\Delta N = N - N_0 = \frac{2,5 \cdot F}{6} - \frac{F}{3} = \frac{F}{12}.$$

Деформація стрижня CK зменшиться на відрізок

$$\delta = \frac{F \cdot 2 \cdot a}{12 \cdot E \cdot A} = \frac{F \cdot a}{E \cdot A},$$

що забезпечиться поворотом гайки на кут $\Delta\varphi$

$$\Delta\varphi = \frac{2 \cdot \pi \cdot \delta}{t} = \frac{F \cdot a \cdot \pi}{3 \cdot E \cdot A \cdot t}.$$

Відповідь: гайку потрібно повернути на кут $\Delta\varphi = \frac{F \cdot a \cdot \pi}{3 \cdot E \cdot A \cdot t}$.

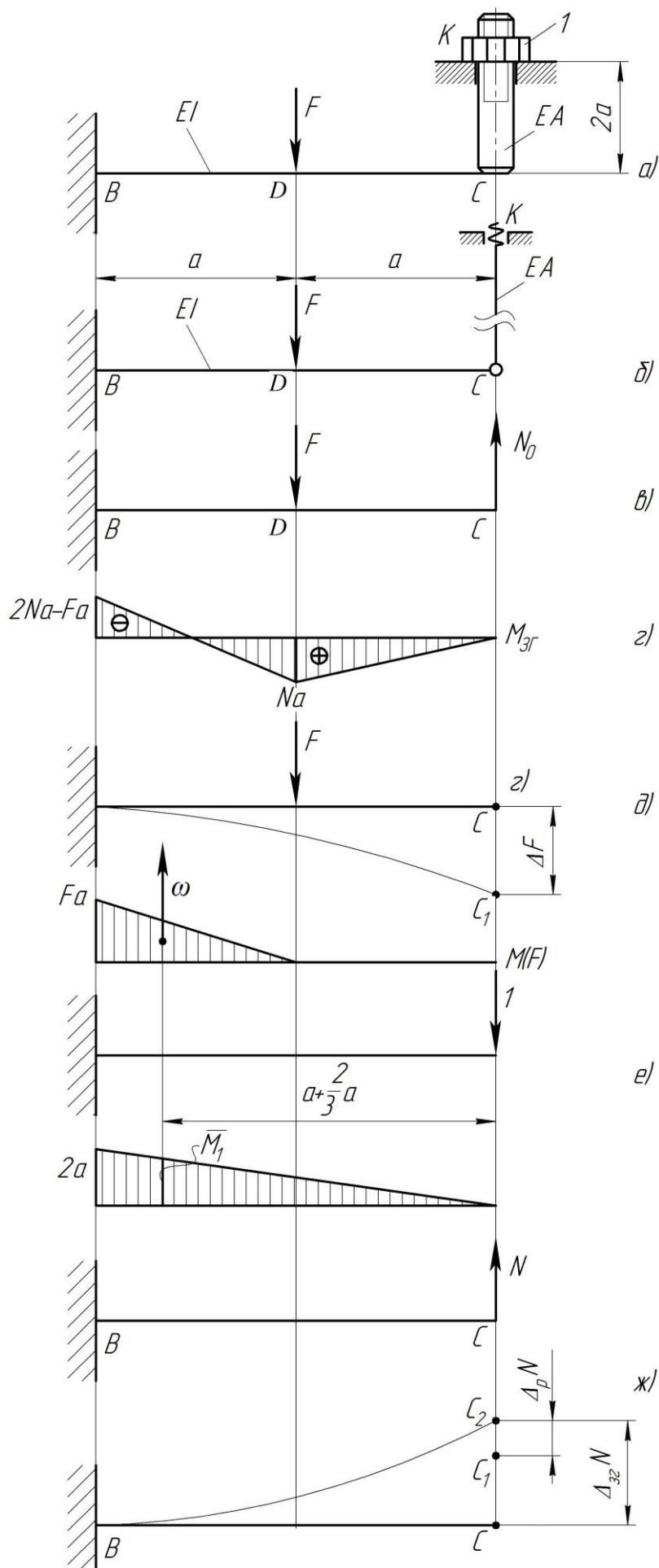


Рисунок 7.2

Приклад 7.3. Визначити максимальні напруження в стрижнях I і II і кут повороту абсолютно жорсткого диска B (рис. 7.3а). Навантаження на конструкцію та розміри її елементів вказані на рисунку 7.3а, $E = 2 \cdot 10^5$ МПа, $G = 8 \cdot 10^4$ МПа.

Розв'язування

Розглядаємо рівновагу диска B (рис. 7.3б):

$$M = M_2 + M_1, \quad (1)$$

де M_2 – величина моменту, який сприймає стрижень II ;

M_1 – величина моменту створеного натягом стрижня I ,

$$M_1 = N_1 \cdot D,$$

де N_1 – зусилля у стрижні I ;

D – діаметр диска.

Тоді

$$M = M_2 + N_1 \cdot D_1.$$

Система (рис. 7.3б) один раз статично невизначена. Для розкриття статичної невизначеності запишемо рівняння сумісності деформації, яке відображає взаємозв'язок між деформаціями стрижнів I і II (рис. 7.3в):

$$\Delta\varphi_2 = \Delta\varphi_1, \quad (2)$$

де $\Delta\varphi_2$ – кутове переміщення поперечного перетину диска B від дії моменту M_2 ,

$$\Delta\varphi_2 = \frac{M_2 \cdot l}{G \cdot I_{p2}};$$

$\Delta\varphi_1$ – кутове переміщення поперечного перетину диск B в результаті розтягу стрижнів I ,

$$\Delta\varphi_1 \approx \frac{\Delta l_1}{\frac{D}{2}} = \frac{2 \cdot N_1 \cdot a}{E \cdot A_1 \cdot D}.$$

Розв'язуючи рівняння (2), запишемо

$$\frac{M_2 \cdot l}{G \cdot I_{P2}} = \frac{2 \cdot N_1 \cdot a}{E \cdot A_1 \cdot D},$$

звідки отримаємо залежність для визначення зусилля у стрижні *I*

$$N_1 = \frac{E \cdot A_1 \cdot D}{G \cdot I_{P2}} \cdot \frac{M_2 \cdot l}{2 \cdot a},$$

де I_{P2} – полярний момент інерції поперечного перетину стрижня *II*,

$$I_{P2} = \frac{\pi \cdot d^4}{32} = \frac{\pi \cdot 2^4}{32} = 1,57 \text{ см}^4.$$

Визначаємо зусилля у стрижні *I*

$$N_1 = \frac{2 \cdot 10^5 \cdot 4 \cdot 8 \cdot M_2 \cdot 80}{8 \cdot 10^4 \cdot 1,57 \cdot 2 \cdot 200} = 10,2 \cdot M_2.$$

Розв'язуючи рівняння (1), отримаємо

$$M = M_2 + 10,2 \cdot M_2 \cdot 8 = 81,5 \cdot M_2,$$

звідки

$$M_2 = \frac{M}{81,5} = \frac{12 \cdot 10^2}{81,5} = 14,7 \text{ Нсм} = 0,147 \text{ Нм}.$$

Тоді

$$N_1 = 10,2 \cdot 14,7 = 150 \text{ Н}.$$

Визначаємо максимальне напруження в стрижнях *I* і *II*:

– стрижень *I* зазнає деформації розтягу–стиску

$$\sigma_{\max} = \frac{N_1}{A_1} = \frac{150}{4 \cdot 100} = 0,375 \frac{\text{Н}}{\text{мм}^2} = 0,375 \text{ МПа} = 375 \text{ кПа};$$

– стрижень *II* зазнає деформації кручення

$$\tau_{\max} = \frac{M_2}{W_{P2}} = \frac{0,147 \cdot 10^3}{1,57 \cdot 10^6} = 93,6 \cdot 10^{-3} \frac{\text{Н}}{\text{мм}^2} = 93,6 \text{ кПа},$$

де W_{P2} – полярний момент опору круглого поперечного перетину стрижня II

$$W_{P2} = \frac{\pi \cdot d^3}{16} = \frac{\pi \cdot 2^3}{16} = 1,57 \text{ см}^3.$$

Кут повороту диска B визначаємо враховуючи залежність (3)

$$\Delta\varphi_B = \Delta\varphi_2 = \frac{0,147 \cdot 0,8 \cdot 10^6}{8 \cdot 10^4 \cdot 1,57 \cdot 10^8} = 9,36 \cdot 10^{-7} \text{ рад.}$$

Для перевірки визначаємо кут повороту диска B через кутове переміщення в результаті розтягу стрижнів I

$$\Delta\varphi_B = \Delta\varphi_1 = \frac{2 \cdot 150 \cdot 2 \cdot 10^3}{2 \cdot 10^5 \cdot 4 \cdot 10^4 \cdot 0,08 \cdot 10^3} = 9,36 \cdot 10^{-7} \text{ рад.}$$

Відповідь: максимальні напруження у стрижнях

$$\sigma_1 = \sigma_{\max} = 375 \text{ кПа}; \quad \tau_2 = \tau_{\max} = 93,6 \text{ кПа};$$

$$\text{кут повороту диска } B \quad \Delta\varphi_B = 9,36 \cdot 10^{-7} \text{ рад.}$$

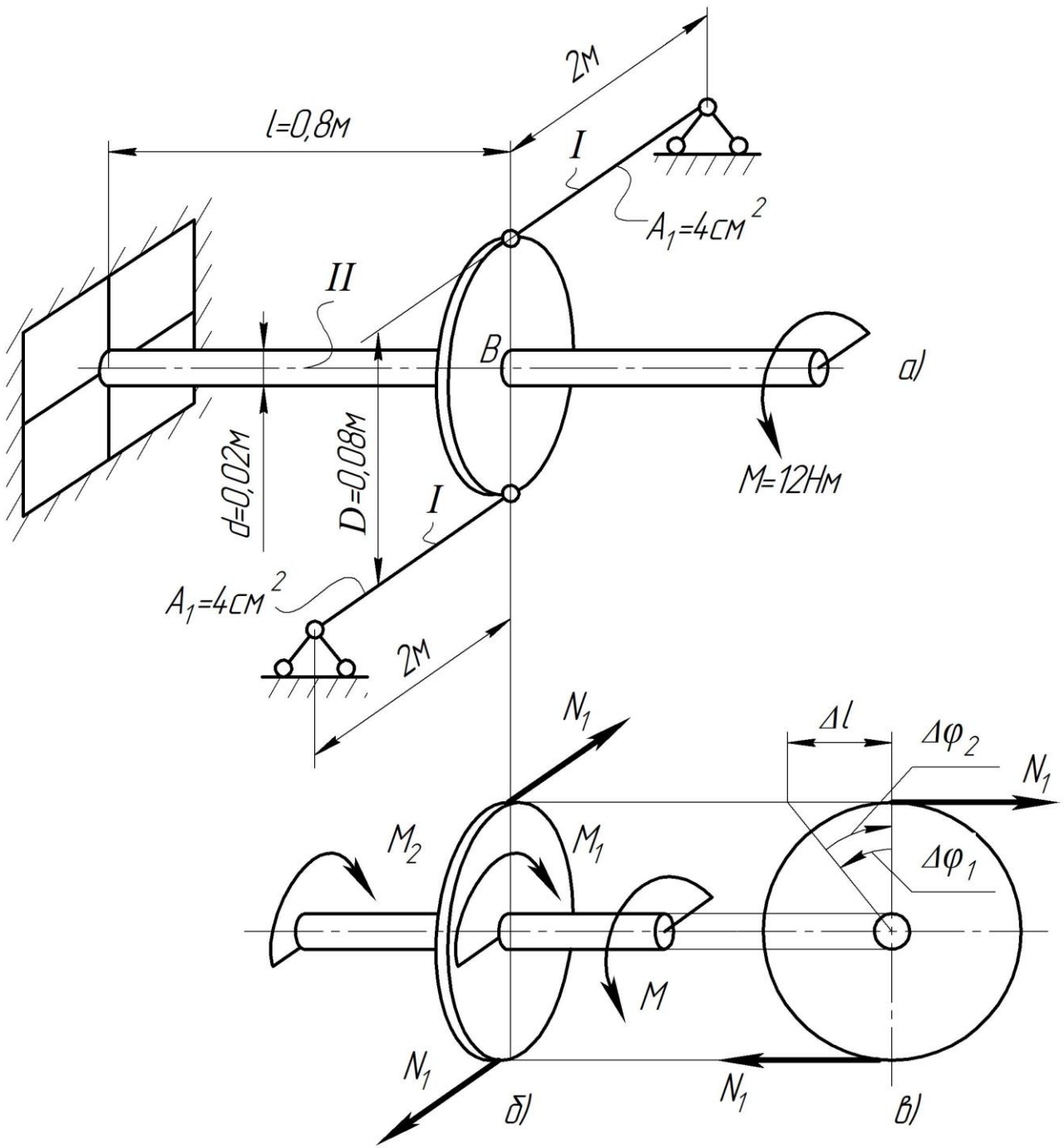


Рисунок 7.3

Приклад 7.4. Міст через річку, несучою конструкцією якого є балка BC підсилена за допомогою понтона, який з'єднаний з балкою абсолютно жорстким стрижнем KD (рис. 7.4а). Визначити площу понтона A , при якій сприймаюче ним навантаження буде дорівнювати 25 % від повного навантаження на міст, якщо згинальна жорсткість балки $E \cdot I = const$.

Розв'язування

Визначаємо загальне навантаження що діє на балку $Q = q \cdot l$ (рис. 7.4а). Від прикладеного зовнішнього навантаження балка у перетині D , а відповідно і точка K , опуститься на відрізок $DD_1 = \Delta q$ (рис. 7.4б).

Архімедова сила, що діє на понтон, за умовою задачі компенсує 25 % загального навантаження, тобто

$$N = 0,25 \cdot q \cdot l.$$

Ця сила сприймається понтоном і буде діяти через стрижень KD на балку вертикально вгору та піднімати перетин балки у точці D на відрізок $D_1D_2 = \Delta N$.

Занурення понтона (рис. 7.4б) дорівнює відрізку

$$D_1D_2 = h = \Delta q - \Delta N.$$

Так як балка BC зазнає деформації згину, то прогин балки в перетині D від навантажень q та N визначаємо методом Мора (рис. 7.4 в, г, д).

Для схеми (рис. 7.4 в) прогин від q

$$E \cdot I \cdot \Delta q = 2 \cdot \int_0^{l/2} \left(\frac{q \cdot l}{2} \cdot x - \frac{q \cdot x^2}{2} \right) \cdot \frac{x}{2} \cdot dx = 2 \cdot \left(\frac{q \cdot l}{12} \cdot x^3 - \frac{q \cdot x^4}{16} \right) \Big|_0^{l/2} = \frac{5 \cdot q \cdot l^4}{384},$$

звідки

$$\Delta q = \frac{5 \cdot q \cdot l^4}{384 \cdot E \cdot I}.$$

Для схеми (рис. 7.4 д) прогин від N

$$E \cdot I \cdot \Delta N = 2 \cdot \int_0^{l/2} \left(-\frac{N}{2} \cdot x \cdot \frac{x}{2} \right) \cdot dx = -2 \cdot \int_0^{l/2} \frac{N \cdot x^2}{4} \cdot dx = \frac{N \cdot l^3}{48} = \frac{0,25 \cdot q \cdot l^4}{48},$$

звідки

$$\Delta N = \frac{0,25 \cdot q \cdot l^4}{48 \cdot E \cdot I}.$$

Занурення понтона визначимо із рівняння

$$N = \frac{q \cdot l}{4} = F_{Арх}, \quad (1)$$

де $F_{Арх}$ – Архімедова сила,

$$F_{Арх} = A \cdot h \cdot \gamma,$$

тут A – площа понтона;

γ – питома вага води.

Враховуючи, що занурення понтона

$$h = \Delta q - \Delta N = \frac{5 \cdot q \cdot l^4}{384 \cdot E \cdot I} - \frac{0,25 \cdot q \cdot l^4}{48 \cdot E \cdot I} = \frac{q \cdot l^4}{128 \cdot E \cdot I},$$

запишемо, що Архімедова сила

$$F_{Арх} = A \cdot \frac{q \cdot l^4}{128 \cdot E \cdot I} \cdot \gamma,$$

Звідки, враховуючи залежність (1), визначимо площу понтона

$$A = \frac{32 \cdot E \cdot I}{q \cdot l^3 \cdot \gamma}.$$

Відповідь: площа понтона $A = \frac{32 \cdot E \cdot I}{q \cdot l^3 \cdot \gamma}$.

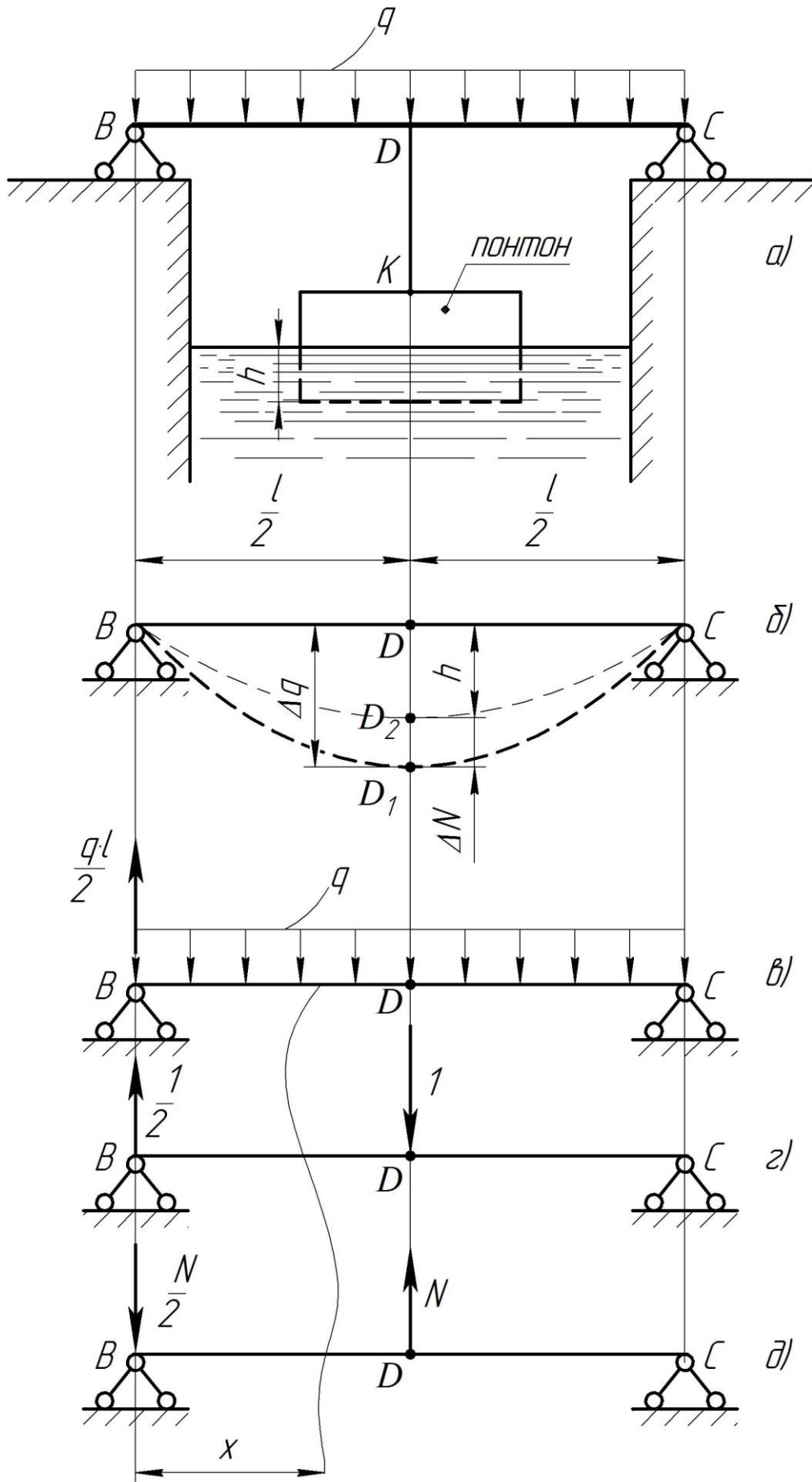


Рисунок 7.4

Приклад 7.5. Стальний стрижень постійного поперечного перетину обертається навколо вертикальної осі (рис. 7.5а) з постійною кутовою швидкістю ω . Визначити допустиму найбільшу довжину стрижня l_{KP} , виходячи із умови міцності при частоті обертання $n = 1200$ об/хв, його видовження, а також частоту обертання n_{max} при якій стрижень розірветься, $l = l_{KP}$. Дано: $[\sigma] = 100$ МПа; $\sigma_B = 800$ МПа; густина матеріалу стрижня $\gamma = 7,8 \cdot 10^3$ кг/м³; модуль пружності $E = 2 \cdot 10^5$ МПа.

Розв'язування

Стрижень обертаючись навколо вертикальної осі (рис. 7.5а), зазнає видовження за рахунок дії сили інерції. Найбільшу довжину стрижня визначимо з умови міцності на розтяг

$$\sigma_{max} = \frac{N_{max}}{A} \leq [\sigma], \quad (1)$$

враховуючи, що осьовою силою, яка виникає у стрижні, буде відцентрова сила інерції

$$N_{max} = F_{IH}.$$

Відцентрову силу інерції визначимо з таких міркувань. Виділимо елементарну масу стрижня $dm = \gamma \cdot A \cdot dx$ (рис. 7.5б), на яку діє доцентрове прискорення $a = \omega^2 \cdot x$, від якого виникає відцентрова сила інерції:

$$dF_{IH} = dm \cdot a = \gamma \cdot A \cdot \omega^2 \cdot x \cdot dx, \quad (2)$$

де A – площа поперечного перетину стрижня;

ω – кутова швидкість стрижня,

$$\omega = \frac{\pi \cdot n}{30} = \frac{\pi \cdot 1200}{30} = 125,6 \text{ с}^{-1}.$$

Результуюча максимальна сила інерції діє на осі стрижня

$$F_{IH.P} = \int_0^{l/2} \gamma \cdot A \cdot \omega^2 \cdot x \cdot dx = \frac{\gamma \cdot A \cdot \omega^2 \cdot x^2}{2} \Big|_0^{l/2} = \frac{\gamma \cdot A \cdot \omega^2 \cdot l^2}{8}.$$

Максимальну довжину стрижня l_{KP} визначимо з умови міцності на розтяг

$$\sigma_{\max} = \frac{N_{\max}}{A} = \frac{\gamma \cdot A \cdot \omega^2 \cdot l_{KP}^2}{8 \cdot A} \leq [\sigma],$$

де N_{\max} – максимальна нормальна сила, що виникає на осі стрижня,

$$N_{\max} = F_{IH.P} = \frac{\gamma \cdot A \cdot \omega^2 \cdot l_{KP}^2}{8}.$$

Критична довжина стрижня

$$l_{KP} = \sqrt{\frac{8 \cdot [\sigma]}{\gamma \cdot \omega^2}} = \sqrt{\frac{8 \cdot 100 \cdot 10^6}{7,8 \cdot 10^3 \cdot 125,6^2}} = 2,55 \text{ м.}$$

Видовження Δl елементарної ділянки стрижня dx відбувається завдяки силі інерції $F_{IH.x}$ ділянки $\left(\frac{l}{x} - x\right)$ і згідно закону Гука

$$\Delta l(dx) = \frac{F_{IH.x} \cdot dx}{E \cdot A}.$$

Результуючу силу інерції $F_{IH.x}$ ділянки $\left(\frac{l}{x} - x\right)$ на ділянку dx визначаємо із рівняння (2)

$$F_{IH.x} = \gamma \cdot A \cdot \omega^2 \int_x^{l/2} x \cdot dx = \gamma \cdot A \cdot \omega^2 \cdot \frac{x^2}{2} \Big|_x^{l/2} = \gamma \cdot A \cdot \omega^2 \cdot \left(\frac{l^2}{8} - \frac{x^2}{2}\right).$$

Видовження правої та лівої сторін стрижня буде

$$\begin{aligned} \Delta l_{0,5l} &= \frac{\gamma \cdot \omega^2}{E} \cdot \int_0^{l/2} \left(\frac{l^2}{8} - \frac{x^2}{2}\right) \cdot dx = \frac{\gamma \cdot \omega^2}{E} \cdot \left(\frac{l^2 \cdot x}{8} - \frac{x^3}{6}\right) \Big|_0^{l/2} = \\ &= \frac{\gamma \cdot \omega^2 \cdot l^3}{E \cdot 24}. \end{aligned}$$

Повне видовження стрижня

$$\Delta l = 2 \cdot \Delta l_{0,5l} = \frac{\gamma \cdot \omega^2 \cdot l^3}{E \cdot 12}.$$

Для визначеної довжини стрижня $l = l_{KP} = 2,55$ м повне видовження буде

$$\Delta l = \frac{125,6^2 \cdot 7,8 \cdot 10^3 \cdot 2,55^3}{2 \cdot 10^5 \cdot 12} = 0,85 \cdot 10^{-3} \text{ м} = 0,85 \text{ мм}.$$

Визначаємо частоту обертання n_{kp} при якій стрижень довжиною l_{KP} розірветься. Використовуємо умову

$$\sigma_{\max} = \frac{\gamma \cdot \omega_{KP}^2 \cdot l_{KP}}{8} \geq \sigma_B,$$

звідки

$$\omega_{KP} \geq \sqrt{\frac{8 \cdot \sigma_B}{\gamma \cdot l_{KP}}} = \omega \cdot \sqrt{\frac{\sigma_B}{[\sigma]}} = 125,6 \cdot \sqrt{\frac{800}{100}} = 355 \text{ с}^{-1},$$

відповідно частота обертів стрижня

$$n_{KP} = \frac{30 \cdot \omega_{KP}}{\pi} = \frac{30 \cdot 355}{\pi} = 3394 \frac{\text{об}}{\text{хв}}.$$

Відповідь: критично допустима довжина стрижня $l_{KP} = 2,55$ м;
загальне видовження стрижня $\Delta l = 0,85$ мм;
частота обертання при якій відбувається руйнування
стрижня $n_{KP} = 3394 \frac{\text{об}}{\text{хв}}.$

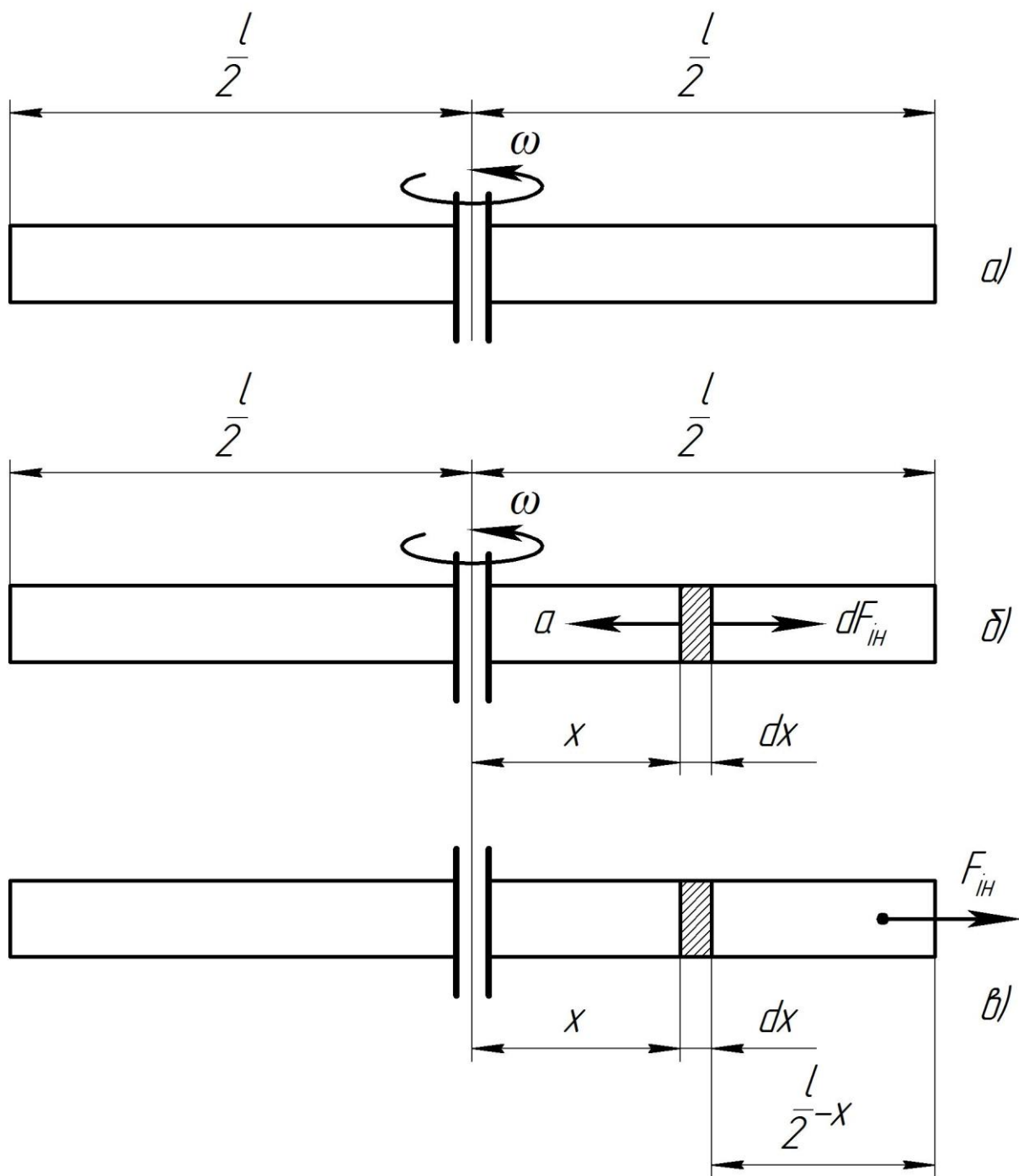


Рисунок 7.5

Приклад 7.6. Напівскінченний довгий стрижень площею поперечного перетину A лежить на горизонтальній площині. З одного боку до нього прикладена розтягуюча сила F (рис. 7.6а). Визначити залежність видовження стрижня від сили F , якщо питома вага матеріалу стрижня γ , модуль пружності E , коефіцієнт тертя між горизонтальною поверхнею і стрижнем f .

Розв'язування

Розтяг стрижня (рис. 7.6а) відбувається до того моменту поки $F_{TP} \geq F$. При $F > F_{mp}$ розпочнеться рух стрижня у горизонтальному напрямку.

Елементарна сила тертя (рис. 7.6б)

$$dF_{TP} = dN \cdot f, \quad (1)$$

де dN – елементарна сила нормального тиску стрижня на площину,

$$dN = dQ = A \cdot \gamma \cdot dx.$$

Визначаємо силу тертя на довжині стрижня l

$$dF_{TP} = A \cdot \gamma \cdot f \cdot dx,$$

звідки

$$F_{TP} = \int_0^l A \cdot \gamma \cdot f \cdot dx = A \cdot \gamma \cdot f \cdot l.$$

Використовуємо умову, що $F = F_{TP}$, визначаємо

$$l = \frac{F}{A \cdot \gamma \cdot f}. \quad (2)$$

Видовження ділянки стрижня довжиною x від сили F_{TP} згідно закону Гука

$$\Delta l(dx) = \frac{dF_{TP} \cdot x}{E \cdot A} = \frac{A \cdot \gamma \cdot f \cdot x \cdot dx}{E \cdot A},$$

звідки

$$\Delta l = \int_0^l \frac{A \cdot \gamma \cdot f \cdot x \cdot dx}{E \cdot A} = \frac{A \cdot \gamma \cdot f \cdot l^2}{2 \cdot E \cdot A} = \frac{F \cdot l}{2 \cdot E \cdot A}. \quad (3)$$

Підставивши рівняння (2) в (3) отримаємо залежність для видовження стрижня від сили F

$$\Delta l = \frac{F^2}{2 \cdot E \cdot A^2 \cdot \gamma \cdot f}.$$

Відповідь: залежність для видовження стрижня від сили F

$$\Delta l = \frac{F^2}{2 \cdot E \cdot A^2 \cdot \gamma \cdot f}, \text{ за умови що } F \leq F_{TP}.$$

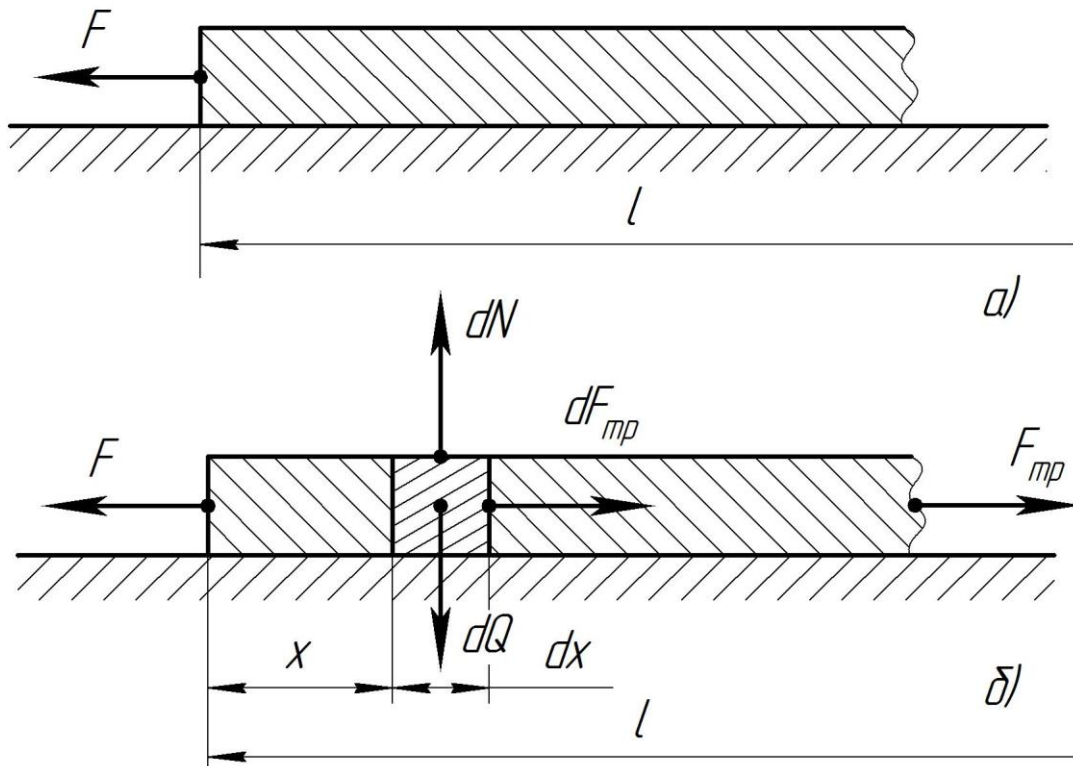
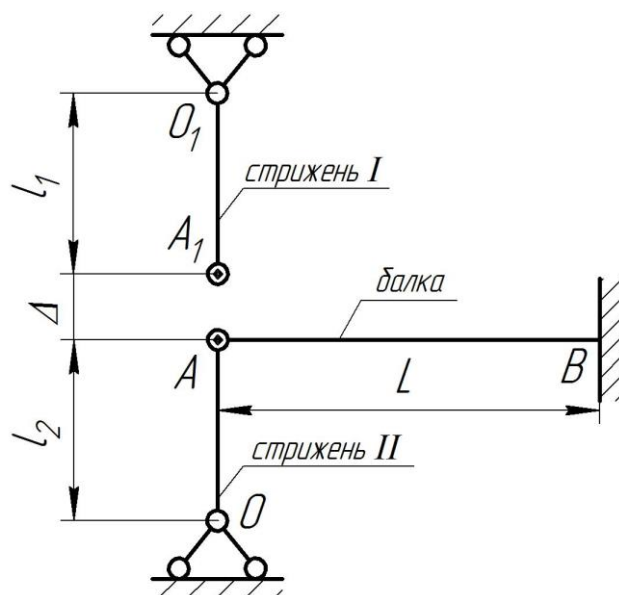


Рисунок 7.6

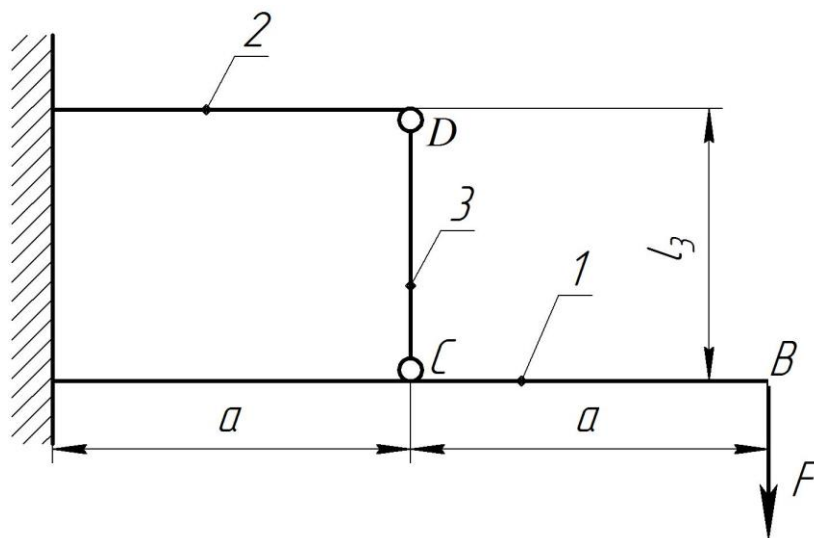
ЗАДАЧІ ДЛЯ САМОСТІЙНОГО РОЗВ'ЯЗУВАННЯ

Задача 7.1. Жорстко закріплена в опорі B балка шарнірно з'єднана з стрижнем II . Стрижні I і II шарнірно закріплені в опорах т. O_1 і т. O . Між кінцем стрижня I т. A_1 і вузлом т. A є зазор $\Delta = \alpha \cdot l_1 \cdot \Delta t$, який вибирають нагріванням стрижня I на $\Delta t = 100^\circ\text{C}$ при $\alpha = 12 \cdot 10^{-6} 1/^\circ\text{C}$.

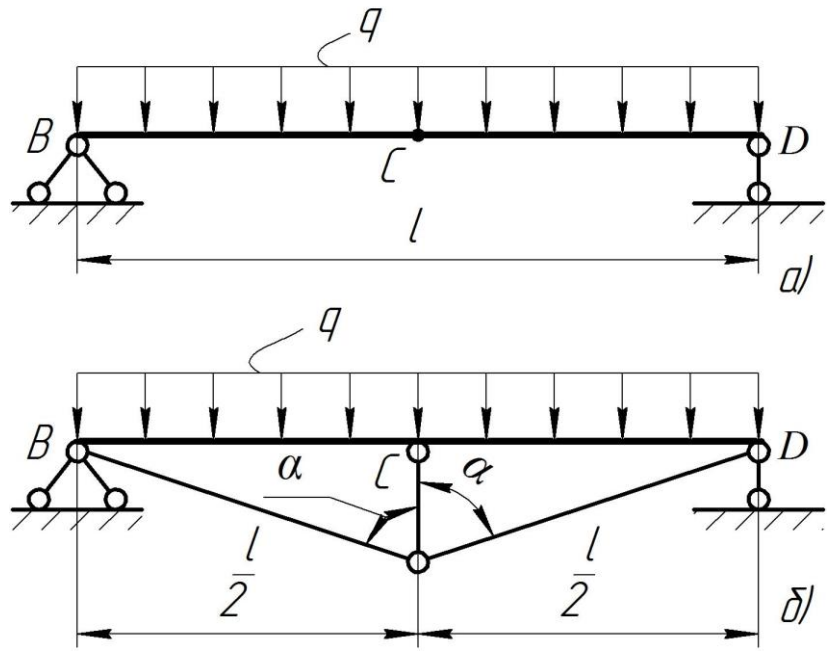


Характеристика балки: $L = 2$ м; $E_B = 7 \cdot 10^4$ МПа; $I_B = 22,5 \cdot 10^5$ м⁴.
 Характеристики стрижнів: для I : $l_1 = 1$ м; $A_1 = 2 \cdot 10^{-4}$ м²; $E_1 = 2 \cdot 10^5$ МПа;
 для II : $l_2 = 1$ м; $E_2 = 2 \cdot 10^5$ МПа; $A_2 = 2 \cdot 10^{-4}$ м². Після вибору зазору Δ , нагріванням стрижня I , стрижні I і II та балка з'єднуються у вузлі т. A . Визначити зусилля, що виникають у стрижнях I і II , та на кінці балки після охолодження до початкової температури.

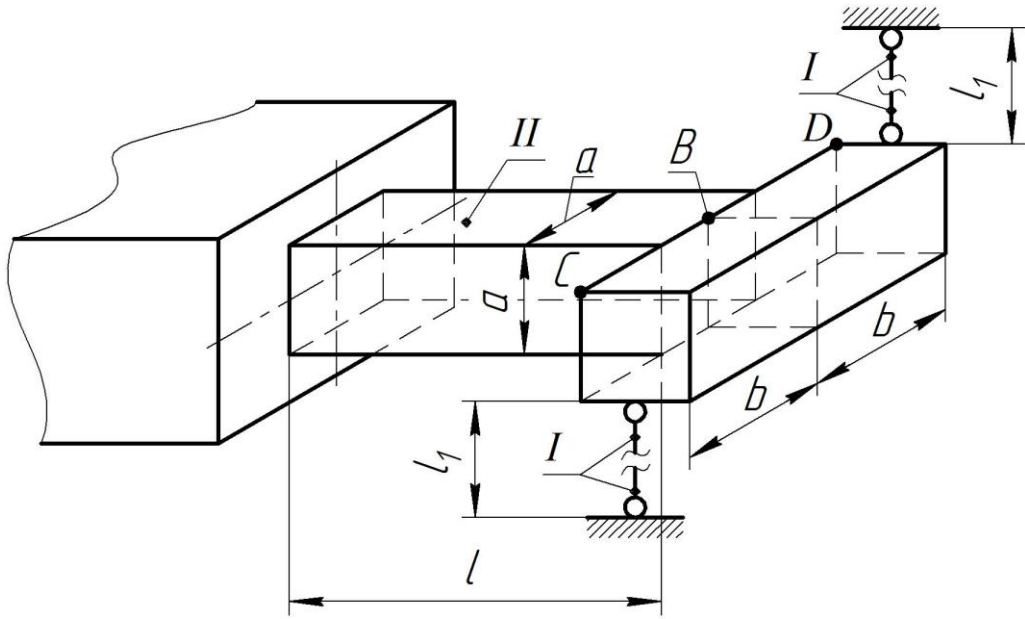
Задача 7.2. Дано дві балки 1 і 2 , у яких $E_1 \cdot I_1 = E_2 \cdot I_2$, з'єднані стрижнем 3 , для якого відомі E_3 , A_3 , l_3 . Нижня балка навантажена силою F (див. рис.). Визначити вертикальне переміщення точок B , C , D .



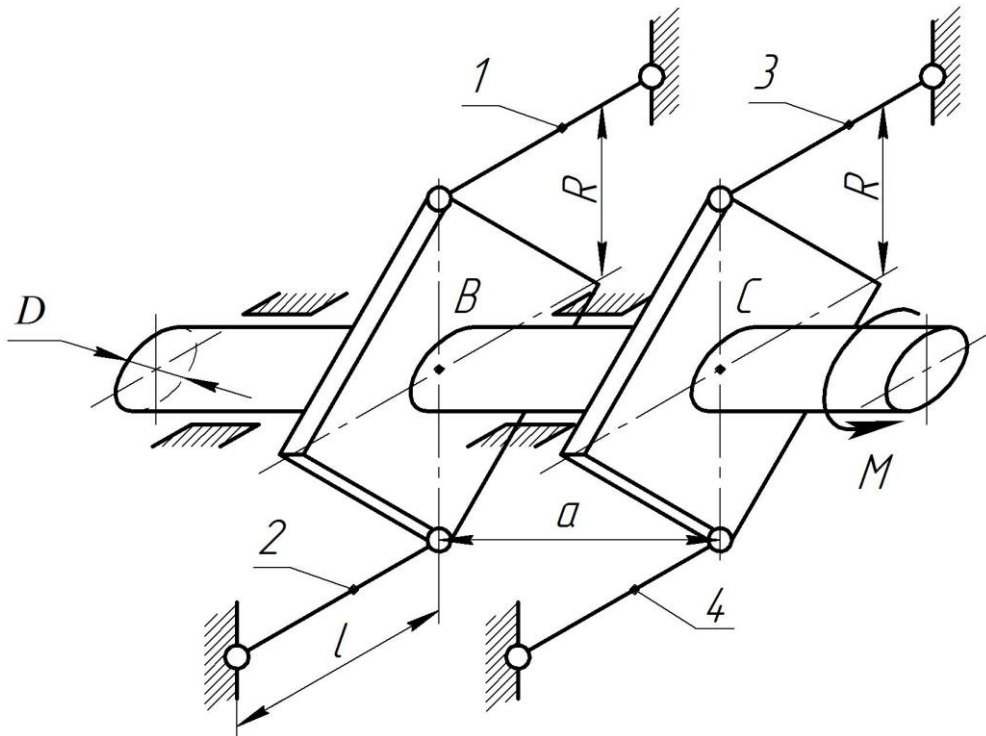
Задача 7.3. Балка підсилена трьома стрижнями (шпренгелем) (див. рис. б). Визначити площі поперечного перетину стрижнів, при яких вертикальне переміщення точки C буде у два рази менше максимального прогину балки, яка показана на рисунку a . Жорсткість балки $E \cdot I$ та її параметри q, a, l – задані. Площі всіх стрижнів шпренгеля однакові.



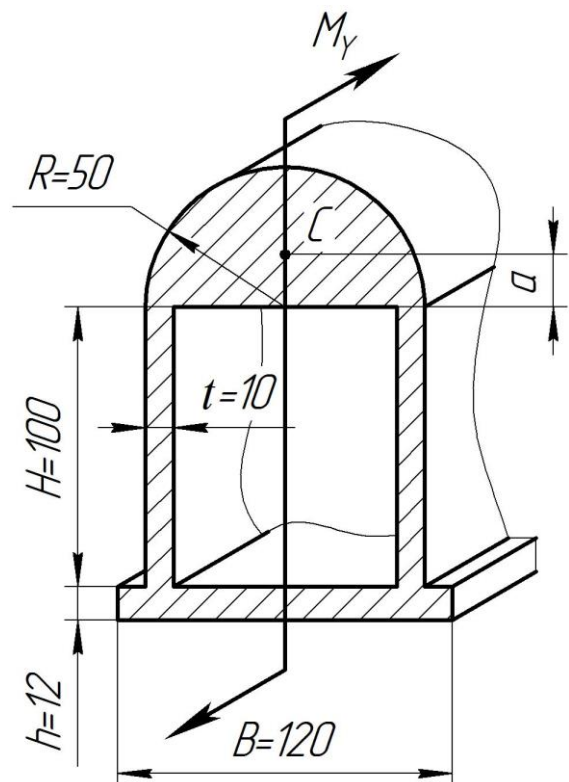
Задача 7.4. Дано: $a = 40$ мм; $b = 100$ мм; $l = 200$ мм; $G = 8 \cdot 10^4$ МПа; $A_1 = 2 \cdot 10^{-4}$ м²; $l_1 = 400$ мм; $E_1 = 2 \cdot 10^5$ МПа; $\alpha_1 = 125 \cdot 10^{-7}$ град⁻¹. Стрижень I нагріваються на $\Delta t = 80^\circ\text{C}$. Траверса CBD – абсолютно жорстка. Визначити τ_{\max} у стрижні II ; σ у стрижнях I і кут повороту перетину B стрижня II (див. рис.). Моменти інерції і моменти опору при крученні для квадратного поперечного перетину дорівнюють: $I_K = 0,14 a^4$; $W_K = 0,21 a^3$.



Задача 7.5. До вала закріпленого через два абсолютно жорсткі елементи B і C за допомогою чотирьох однакових стрижнів $1, 2, 3, 4$ діаметром d , прикладений момент M (див. рис.). Визначити відстань a між абсолютно жорсткими елементами B і C за умови, що зусилля у стрижнях 1 і 2 у два рази менші, ніж у стрижнях 3 і 4 . Вал і стрижні виготовленні із одного матеріалу, для якого $G = 0,4 E$.



Задача 7.6. У поперечному перетині балки заданої форми і радіусом $R = 50$ мм; $H = 100$ мм; $h = 12$ мм; $t = 10$ мм; $B = 120$ мм; діє згинальний момент M_Y , у площині симетрії. Центр ваги півкола на $a_c = 4 \cdot R / (3 \cdot \pi)$. Необхідно: 1) при $[\sigma] = 120$ МПа визначити необхідне значення M_Y ; 2) побудувати епюру розподілу деформацій і напружень у поперечному перетині балки на осі симетрії перетину.



ПЕРЕЛІК ВИКОРИСТАНОЇ І РЕКОМЕНДОВАНОЇ ЛІТЕРАТУРИ

1. Гевко Р.Б., Довбуш Т.А., Хомик Н.І., Довбуш А.Д. Опір матеріалів. Конкурсні задачі, приклади розв'язування: навч. посіб. Тернопіль: ФОП Паляниця В.А., 2020. 160 с.
2. Гевко Р.Б., Никеруй Ю.С., Довбуш Т.А. Результати експериментальних досліджень канатного механізму для завантаження малих складських приміщень овочами і фруктами у тарі. *Сільськогосподарські машини*. Луцьк: Луцький НТУ, 2020. Вип. 45. С.45–56.
3. Гевко Р.Б., Хомик Н.І., Жаровський О.С., Довбуш Т.А. Деталі машин та основи автоматизованого конструювання: навчальний посібник до лабораторних робіт Тернопіль: ФОП Паляниця В.А., 2021. 256 с.
4. Довбуш А.Д., Хомик Н.І. Опір матеріалів. Методичний посібник для виконання контрольних робіт. Тернопіль, 2011. 92 с.
5. Довбуш А.Д., Хомик Н.І. Опір матеріалів: навчально–методичний посібник до виконання курсової роботи для студентів напрямів підготовки «Машинобудування», «Інженерна механіка», «Зварювання», «Автомобільний транспорт» денної та заочної форм навчання. Тернопіль: Видавництво ТНТУ ім. І. Пулюя, 2014. 191 с.
6. Довбуш А.Д., Хомик Н.І. Крамар Г.М. Опір матеріалів: навчально–методичний посібник до виконання розрахунково–графічних робіт для студентів напряму підготовки «Будівництво». Тернопіль: ФОП Паляниця В.А., 2015. 76 с.
7. Довбуш Т.А., Хомик Н.І., Бабій А.В., Цьонь Г.Б., Довбуш А.Д. Опір матеріалів: навч. посіб. до виконання розрахунково–графічних робіт і самостійної роботи. Тернопіль: ФОП Паляниця В.А., 2022. 220 с.
8. Довбуш Т.А., Хомик Н.І., Довбуш А.Д. Методи проектування сільськогосподарських машин: навчально–методичний посібник до курсового проектування. Тернопіль: ФОП Паляниця В. А., 2019. 72 с.
9. Опір матеріалів / За ред. С.Е. Гарфа. К.: Вища школа, 1972. 230 с.
10. Опір матеріалів з основами теорії пружності й пластичності / За заг. ред. В.Т. Піскунова: у 2ч., 5 кн. К.: Вища школа, 1995.
11. Опір матеріалів. Теорія і практика розрахунків на міцність, жорсткість та стійкість елементів механізмів та споруд: навч. посібник /В.С. Кравчук, П.М. Калініченко, Л.В. Коломієць, О.М. Лимаренко; за ред. О.Ф. Дащенко. Одеса: ВМВ, 2009. 316 с.
12. Посацький Л.С. Опір матеріалів. Львів: в–во Львівського університету, 1973. 440 с.
13. Сопротивление материалов /Под ред. Г.С. Писаренко. К.: Вища школа, 1986. 775 с.
14. Хомик Н.І. Довбуш А.Д. Технічна механіка: курс лекцій. Тернопіль: в–во ТНТУ, 2011. 208 с.
15. Хомик Н.І. Довбуш А.Д. Технічна механіка: навчально–методичний посібник до курсової роботи Тернопіль: в–во ТНТУ, 2013. 192 с.
16. Хомик Н.І., Довбуш А.Д., Довбуш Т.А., Рубінець Н.А. Прикладна механіка і основи конструювання: навчально–методичний посібник до розра–хунково–графічної роботи. Тернопіль: ФОП Паляниця В.А., 2015. 116 с.
17. Хомик Н.І., Довбуш А.Д., Довбуш Т.А. Теорія механізмів і машин: навчально–методичний посібник до курсового проектування. Тернопіль: ФОП Паляниця В.А., 2018. 72 с.

18. Хомик Н.І., Довбуш Т.А., Рубінець Н.А. Опір матеріалів (спецкурс) і основи теорії пружності і пластичності: курс лекцій для студентів напряму підготовки «Будівництво». Тернопіль: ФОП Паляниця В.А., 2017. 232 с.
19. Babii Andrii, Dovbush Taras, Khomuk Nadiia, Dovbush Anatolii, Tson Anna, Oleksyuk Vasyl. Mathematical model of a loaded supporting frame of a solid fertilizers distributor. *Science Direct. Procedia Structural Integrity*, 2022. No 36. P. 203–210.
20. Dovbush Taras, Dovbush Anatolii, Khomyk Nadia, Tson Hanna. Substantiation of flexible screw conveyor metal consumption under productivity maintenance conditions. *Scientific Journal of the Ternopil national technical university*. Tern.: TNTU, 2021. Vol. 103. No. 3. P. 33–42.
21. Dovbush Taras, Khomyk Nadia, Dovbush Anatolii, Dunets Bogdan. Evaluation technique of frame residual operational life. *Scientific Journal of the Ternopil national technical university*. Tern.: TNTU, 2019. Vol. 93. No. 1. P. 61–69.
22. Dovbush T., Khomyk N., Dovbush A., Palyukh A. Estimation of the load capacity and the strain–stress state of rod transporters. *Scientific Journal of the Ternopil national technical university*. Tern.: TNTU, 2022. Vol 108, No 4, P. 5–15.
23. Dovbush Taras, Khomyk Nadia, Tson Hanna, Dovbush Anatolii, Improvement of prt–9 constructive system on the basis of frame elements strength balance. *Scientific Journal of the Ternopil national technical university*. Tern.: TNTU, 2020. Vol. 100. No. 4. P. 40–45
24. Hevko R.B., Dovbush T.A, Khomyk N.I., Dovbush A.D., Tson H.B. Strength of materials: course book for practical works. Ternopil, FOP Palianytsia V.A., 2020. 240 p.
25. Hevko I., Dovbush T., Tson O., Dovbush A., Stanko A. Synthesis of screw working bodies with elastic surfaces and results of working body research. *Agricultural Machines*, 2021. Vol. 47. P.63–72.
26. Hevko R.B., Tkachenko I.G., Khomyk N.I., Gumeniuk Y.P., Flonts I.V., Gumeniuk O.O. Determination of technical–and–economic indices of root crop conveyer–separator during their motion on curved path. *INMATEH – Agricultural Engineerin*, 2020. Vol. 61. Is. 2. P. 175–182.
27. Lyashuk O., Vovk Y., Sokil B., Klendii V., Ivasechko R., Dovbush T. Mathematical model of a dynamic process of transporting a bulk material by means of a tube scraping conveyor. *AgricEngInt: CIGR Journal*, 2019. Vol. 21. No. 1. P.74–81.
28. Popovych P., Poberezhny L., Shevchuk O., Murovani I., Dovbush T., Koval Y., Hrytsuliak H. Evaluation of strength of carrying metal structures of trailers. *Journal of Achievements in Materials and Manufacturing Engineering*, 2020. Vol. 100. Is. 2. P.58–69.
29. Trokhaniak O.M, Hevko R.B., Lyashuk O. L., Dovbush T.A., Pohrishchuk B.V., Dobizha N.V. Research of the of bulk material movement process in the inactive zone between screw sections. nmateh–agricultural engineering. *INMATEH: Agricultural engineering*, 2020. Vol. 60. No. 1. P. 261–268.
30. Tson Anna, Baranovskyi Viktor, Lyashuk Oleg, Dovbush Taras. Experimental researches of parameters technological process of the improved beets tops purifier. *Scientific Journal of the Ternopil national technical university*. Tern.: TNTU, 2018. Vol. 92. No. 4. P. 60–67.
31. Tson Anna, Khomuk Nadia, Dovbush Taras, Tson Oleh. Feasibility study of an auger conveyor performance of the haulm removing module. *Scientific Journal of the Ternopil national technical university*. Tern.: TNTU, 2018. Vol. 91. No 3. P. 101–106.

Додаток А



Додаток Б

ДИПЛОМ І СТУПЕННЯ



МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ,
МОЛОДІ ТА СПОРТУ УКРАЇНИ

НАГОРОДЖУЄТЬСЯ

ДОВБУШ ТАРАС АНАТОЛІЙОВИЧ,

*студент Тернопільського національного технічного
університету імені Івана Пулюя*

ПЕРЕМОЖЕЦЬ
ВСЕУКРАЇНСЬКОЇ СТУДЕНТСЬКОЇ ОЛІМПАДИ

З НАВЧАЛЬНОЇ ДИСЦИПЛІНИ
„ОПІР МАТЕРІАЛІВ”

Міністр



Д.В. Табачник

Наказ від 27.06.2012
№ 759

Додаток В

Міністерство освіти і науки України

ОДЕСЬКА ДЕРЖАВНА АКАДЕМІЯ БУДІВНИЦТВА
ТА АРХІТЕКТУРИ



ДИПЛОМ
I ступеня

нагороджується

Колісник Микола Богданович

Представник
Тернопільського національного
технічного університету ім. Івана Пулюя

за перемогу у II турі Всеукраїнської студентської олімпіади
з дисципліни «Опір матеріалів»
серед учасників, які вивчали дисципліну
в поточному році

*Голова оргкомітету,
ректор Одеської державної
академії будівництва
та архітектури*



А. В. Ковров

Додаток Д

Міністерство освіти і науки України
ОДЕСЬКА ДЕРЖАВНА АКАДЕМІЯ БУДІВНИЦТВА
ТА АРХІТЕКТУРИ



ДИПЛОМ
III ступеня

нагороджується

Колісник Микола Богданович

Представник
Тернопільського національного технічного
університету ім. Івана Пулюя

за перемогу у II турі Всеукраїнської студентської
олімпіади
з дисципліни «Опір матеріалів»
серед учасників, які вивчали дисципліну
в минулих роках

Заступник голови оргкомітету,
проректор НІПР Одеської
державної академії
будівництва
та архітектури



Ю.С. Крутій

**Тернопільський національний технічний університет
імені Івана Пулюя**

Кафедра технічної механіки та сільськогосподарських машин

Довбуш Тарас Анатолійович

Хомик Надія Ігорівна

Довбуш Анатолій Дмитрович

**ОПР МАТЕРІАЛІВ
КОНКУРСНІ ЗАДАЧІ
з прикладами розв'язування
НАВЧАЛЬНИЙ ПОСІБНИК
Частина 2**

Комп'ютерний набір: Хомик Надія Ігорівна, Довбуш Тарас Анатолійович

Графічне оформлення: Довбуш Тарас Анатолійович