МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ

Тернопільський національний технічний університет
імені Івана Пулюя

ІНЖЕНЕРНА ГРАФІКА ТА CAD СИСТЕМИ

Частина 1

ОСНОВИ НАРИСНОЇ ГЕОМЕТРІЇ

НАВЧАЛЬНИЙ ПОСІБНИК ДЛЯ СТУДЕНТІВ ТЕХНІЧНИХ СПЕЦІАЛЬНОСТЕЙ УСІХ ФОРМ НАВЧАННЯ

Тернопіль
2023

УДК 512.2
Б20

Автор:
Балабан С.М.

Розглянуто й затверджено на засіданні кафедри верстатів, інструментів та машин, протокол № 1 від 26. 08. 2022 р.

Рецензенти:
д.т.н., професор Стадник І.Я.
(Тернопільський національний технічний університет імені Івана Пулюя)
д.т.н., професор Горбатюк Р.М.
(Тернопільський національний педагогічний університет імені Володимира Гнатюка)

Б20 Балабан С.М. Інженерна графіка та CAD системи. Частина 1. Основи нарисної геометрії: навчальний посібник/ С.М.Балабан.–Тернопіль : Вид-во ТНТУ імені Івана Пулюя, 2023.–204с.

ISBN 978-966-305-122-2

Навчальний посібник підготовлено відповідно до програм вивчення курсів «Інженерна графіка» та «Інженерна графіка та CAD системи», затверджених Міністерством освіти і науки України для студентів механічних, електротехнічних і радіотехнічних спеціальностей.

Видання сприяє розвитку у читача логічного та просторового мислення, його геометричного та графічного кругозору. Підручник містить теоретичні положення, приклади розв'язування задач та виконання комплексних графічних завдань, питання для самопідготовки студентів. Видання корисне для інженерно-технічних працівників, студентів вищих навчальних закладів, технічних коледжів і ліцеїв.

УДК 512.2

ISBN 978-966-305-122-2

ЗМІСТ

ВСТУП

1. Предмет «Інженерна графіка та CAD системи», ціль і задачі курсу

Інженерна графіка та CAD системи належить до загальнотехнічних дисциплін, які є основними у підготовці спеціалістів з вищою технічною освітою і дає знання, необхідні для вивчення технічних дисциплін. Оволодіння курсом «Інженерна графіка та CAD системи» сприяє розвитку просторового мислення, удосконалює здібності створювати уявлення про форму геометричного об’єкта і готує майбутнього інженера до самостійної проектної роботи.

Предмет курсу «Інженерна графіка та CAD системи» – це викреслювання й читання креслень або графічних моделей геометричних фігур, які лежать в основі технічних виробів і креслень технічних виробів у цілому.

Ціль курсу – дати студентам знання, вміння і навики, необхідні для викладання технічної думки з допомогою креслення.

Задачі курсу:

- побудова креслень технічних виробів та елементів (деталей), з яких вони складаються з реально існуючих зразків або уяви (пряма задача);
- виготовлення елементів (деталей) технічних виробів та виконання робіт зі складання, експлуатації й ремонту технічних виробів з допомогою креслень (обернена задача).

Дисципліна складається з нарисної геометрії, технічного креслення та елементів комп’ютерної графіки. Нарисну геометрію вважають граматикою інженерної графіки, тому графічні методи, закони і правила, які вона вивчає, є теоретичними основами інженерної графіки.

2. Позначення на кресленнях геометричних фігур, символів позиційності й логічних операцій

Під геометричними фігурами або просторовими формами розуміють довільну множину точок. Геометричні фігури поділяють на три групи – точка, лінія, поверхня.

Точка – геометрична фігура яка характеризується положенням у просторі й не має геометричних розмірів. Точки позначають великими буквами латинського алфавіту (***A, B, C, … X, Y, Z)*** або арабськими цифрами (***1, 2, 3, …***).

Лінія – геометрична фігура, що являє собою геометричну множину точок і характеризується положенням у просторі. Лінії позначають малими буквами латинського алфавіту (***a, b, c, … x, y, z***).

Поверхня – геометрична фігура, що являє собою геометричну множину ліній і характеризується положенням у просторі. Поверхні позначають великими буквами грецького алфавіту (**Α, Γ, Δ, Ζ, Η, Θ, Λ**).

Кути позначають малими буквами грецького алфавіту (**α, β, γ, δ, ε, ζ, η**).

Площини, на які проекціюють геометричні фігури, називають площинами проекцій. Площини проекцій позначають великою грецькою літерою **П**. Залежно від розміщення площини проекцій у просторі для її позначення додатково використовують цифровий індекс:

$\mathbf{П_0}$ – площина проекцій довільно орієнтована у просторі;

$\mathbf{П_1}$ – горизонтальна площина проекцій;

$\mathbf{П_2}$ – фронтальна площина проекцій;

$\mathbf{П_3}$ – профільна площина проекцій.

Для позначення проекцій геометричних фігур використовують ті ж цифрові індекси, якими позначають відповідні площини проекцій:

A_1 – горизонтальна проекція точки ***A***;

A_2 – фронтальна проекція точки ***A***;

A_3 – профільна проекція точки ***A***.

Площини проекцій $\mathbf{П_1}$, $\mathbf{П_2}$, і $\mathbf{П_3}$ перпендикулярні між собою і перетинаються по прямих лініях, які називають осями проекцій. На кресленнях осі проекцій позначають буквами:

x – вісь абсцис;

y – вісь ординат;

z – вісь аплікат.

Осі проекцій однієї системи площин проекцій перетинаються в одній точці, яку називають початком осей проекцій і позначають буквою $\boldsymbol{O}$.

Для визначення положення геометричних фігур, відношення між ними та графічних дій використовують символи позиційності й логічних операцій:

$=$ результат графічної операції;

$\neq$ заперечення;

$\equiv$ збіг, тотожність;

$\|$ паралельність;

н непаралельність;

$\perp$ перпендикулярність;

$\overset{\circ}{\underline{\quad}}$ мимобіжність;

$\in$ належність (інцидентність);

$\subset$ лежить на ...;

$\supset$ проходить через ...;

$\cap$ перетин;

$\cup$ об'єднання;

$\rightarrow$ відображення, перетворення;

$\Rightarrow$ логічний наслідок;

$\Leftrightarrow$ логічна еквівалентність.

РОЗДІЛ 1. СПОСОБИ ГРАФІЧНИХ ВІДОБРАЖЕНЬ, ПРОЕКЦІЮВАННЯ ТОЧКИ

1.1. Спосіб центрального проекціювання

Проекція геометричного об'єкта – це відображення його на площині. Площину, на яку проекціюють геометричні об'єкти, називають площиною проекцій.

Універсальним способом отримання проекцій є спосіб центрального проекціювання. Для побудови центральної проекції точки ***A*** вибирають у просторі площину проекцій **$П_0$** і точку ***S*** – центр проекціювання. Точка ***S*** не належить **$П_0$** ($S \not\in П_0$). Під час проекціювання сполучають центр проекціювання ***S*** і заданою точкою ***A*** проекціювальним променем і продовжують його до перетину з площиною проекцій **$П_0$**. Отриману точку перетину A_0 називають центральною проекцією точки ***A***. Процес проекціювання не залежить від розміщення точок відносно **$П_0$** і ***S*** (рис 1.1). Якщо для деякої точки ***D*** проекціювальний промінь паралельний до **$П_0$**, то вважають, що проекція D_0 знаходиться у безмежності.

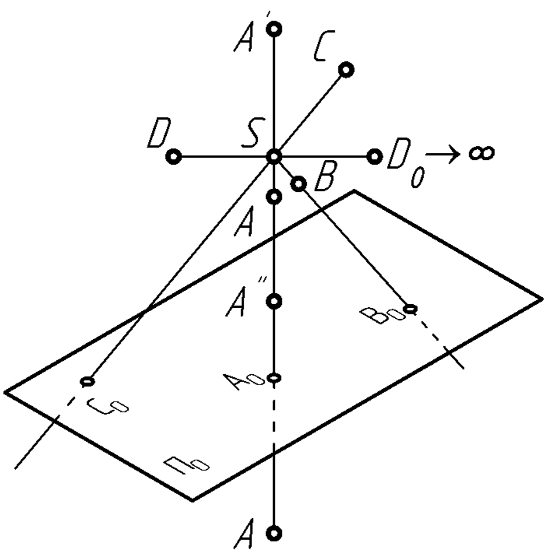


Рис. 1.1

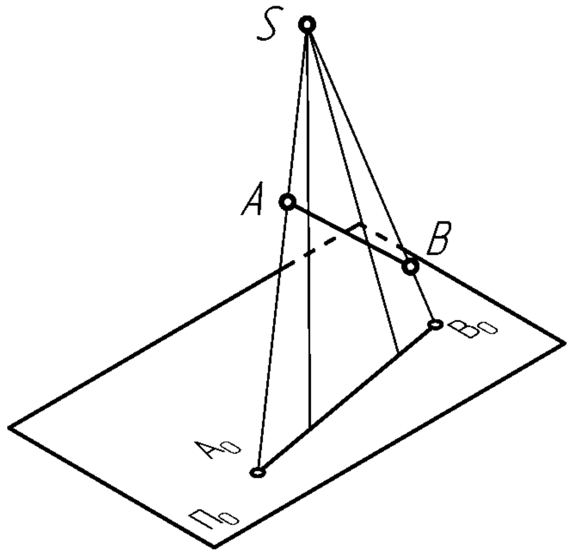


Рис. 1.2

Для побудови проекції прямої лінії необхідно спроекціювати дві її точки й отримані проекції сполучити (рис. 1.2). Під час побудови проекції довільної кривої лінії визначають її характерні точки, проекціюють їх на Π_0 й отримані проекції сполучають у відповідному порядку (рис. 1.3). Аналогічно будують проекції плоских фігур і поверхонь (рис. 1.4).

Спосіб центрального проекціювання складний у використанні, тому на практиці часто використовують спосіб паралельного проекціювання.

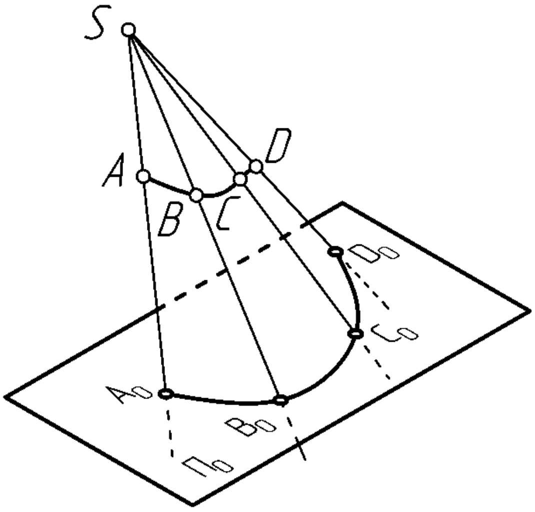


Рис. 1.3

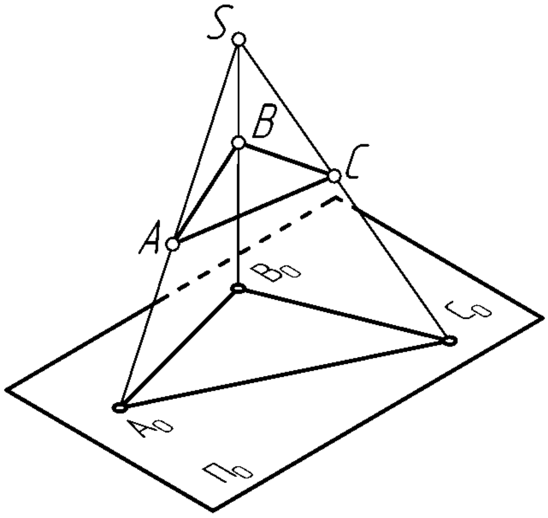


Рис. 1.4

1.2. Спосіб паралельного (циліндричного) проекціювання

Спосіб центрального проекціювання перетворюють у спосіб паралельного проекціювання шляхом переміщення центру проекціювання $\boldsymbol{S}$ відносно Π_0 на безконечно велику відстань. Паралельне проекціювання є окремим випадком центрального проекціювання, тому для нього справедливі більшість закономірностей центрального проекціювання.

Щоб використати спосіб паралельного проекціювання, достатньо вибрати площину проекцій Π_0 і напрям проекціювання $\boldsymbol{s}$.

Для побудови паралельної проекції довільної точки $\boldsymbol{A}$ достатньо провести через неї проекціювальний промінь, паралельний до напрямку проекціювання $\boldsymbol{s}$, до перетину з Π_0. Закономірності побудови проекцій точок, які займають різне положення відносно Π_0, а також ліній і поверхонь, аналогічні закономірностям побудови проекцій відповідних геометричних фігур, які описані у пункті 1.1 (рис. 1.5; 1.6; 1.7 і 1.8).

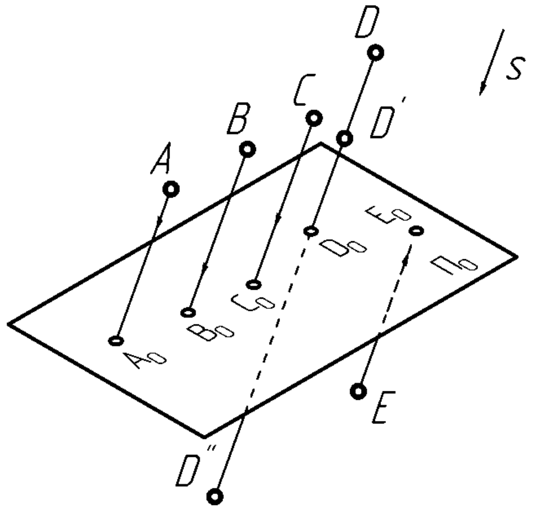


Рис. 1.5

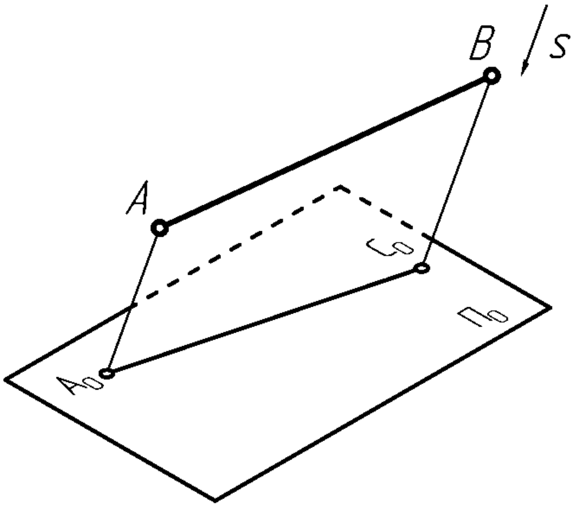


Рис. 1.6

Під час проекціювання прямих ліній необхідно пам'ятати:

- якщо точка лежить на лінії, то проекція точки лежить на проекції цієї лінії (рис. 1.9);

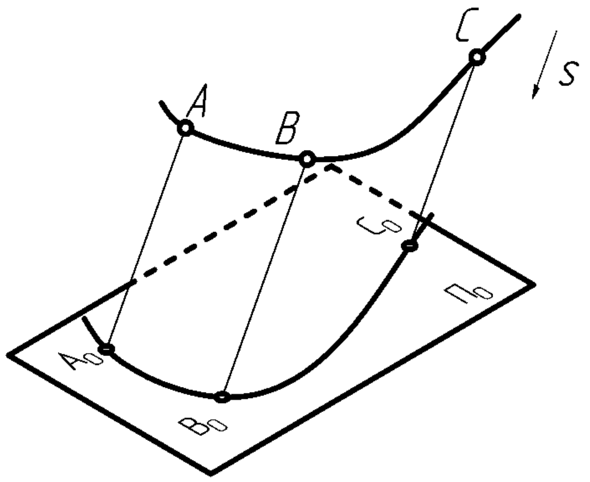


Рис. 1.7

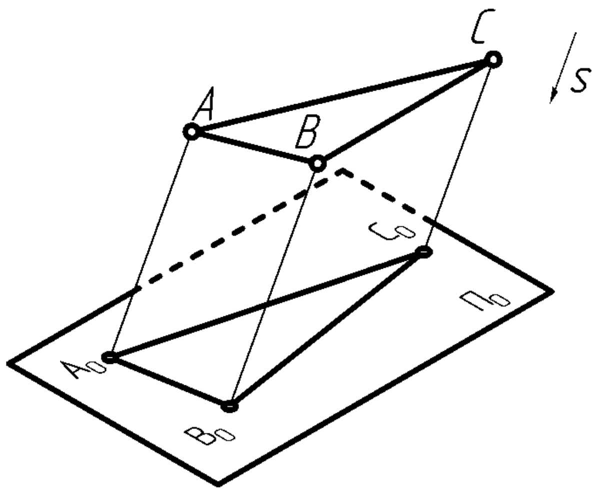


Рис. 1.8

- якщо пряма паралельна до напряму проекціювання, то проекцією прямої буде точка на площині проекцій;
- відрізок прямої лінії, паралельної до площини проекцій проекціюється на цю площину в натуральну величину;
- відношення величин проекцій відрізків, що лежать на паралельних

прямих, або на одній прямій, дорівнюють відношенню величин самих відрізків.

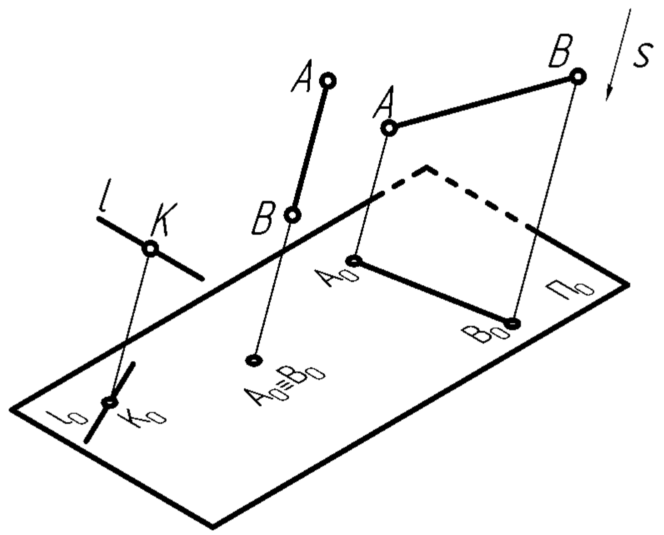


Рис. 1.9

Під час паралельного проекціювання на величину проекції геометричної фігури не впливає відстань до площини проекцій $\mathbf{П_0}$. Величина проекції геометричної фігури залежить від напряму проекціювання ***s***.

Паралельне проекціювання поділяють на косокутне і прямокутне (ортогональне). Проекціювання називають косокутним, якщо проекціювальні промені падають на площину проекцій під гострим кутом. Якщо проекціювальні промені падають на площину проекцій під кутом 90^0, проекціювання називають прямокутним (ортогональним).

1.3. Спосіб прямокутного (ортогонального) проекціювання

Прямокутне проекціювання є окремим випадком паралельного проекціювання, тому для нього справедливі закономірності центрального проекціювання. Під час прямокутного проекціювання напрям проекціювання s не вказують. Для побудови прямокутної проекції довільної точки **A** достатньо опустити з неї перпендикуляр до перетину з площиною проекцій $\mathbf{П_0}$ (рис. 1.10).

Спосіб прямокутного проекціювання дозволяє максимально спростити процес отримання проекцій геометричних фігур і встановити співвідношення між натуральною їх величиною і величиною проекцій. Саме його широко використовують у інженерній графіці. Але використання способу проекціювання на одну площину проекцій не дозволяє однозначно розв'язувати графічно обернену задачу інженерної графіки (рис. 1.11). Така задача допускає множину рішень, оскільки проекція $\boldsymbol{D_0}$ може відповідати кожній з точок, що лежать на проекціювальному промені (***D, D', D''***, ...).

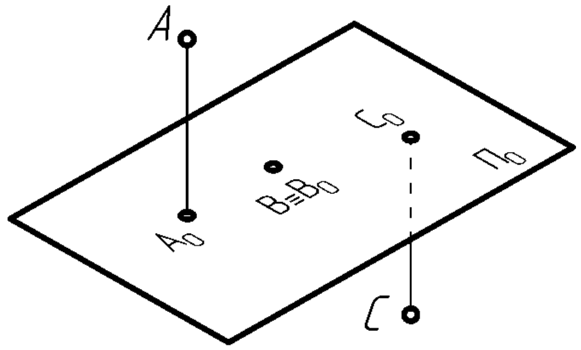


Рис. 1.10

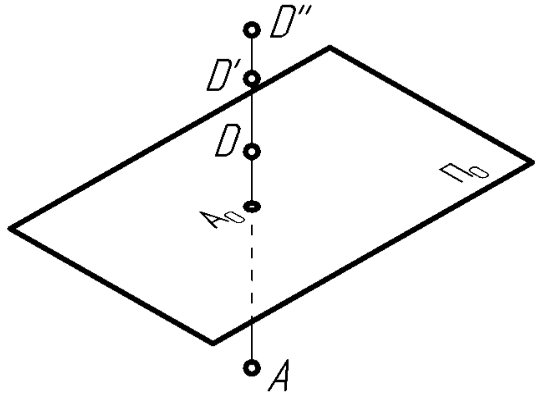


Рис. 1.11

Таким чином, розглянуті способи проекціювання не дозволяють визначити оригінал за його проекцією. Для отримання такої можливості в інженерній графіці використовують комплексні креслення на дві або три взаємно перпендикулярні площини проекцій або аксонометричні зображення.

1.4. Спосіб ортогонального проекціювання на дві взаємно перпендикулярні площини проекцій

Для виконання такого проекціювання використовують взаємно перпендикулярні площини проекцій $\boldsymbol{\Pi_1}$ і $\boldsymbol{\Pi_2}$. Площину $\boldsymbol{\Pi_1}$ розміщують горизонтально і називають горизонтальною площиною проекцій. Площину $\boldsymbol{\Pi_2}$ розміщують вертикально і називають фронтальною площиною проекцій (рис. 1.12). Дані площини перетинаються по прямій, яку називають віссю проекцій $\boldsymbol{x}$ і діляться на чотири півплощини ($\boldsymbol{\Pi_1}$, $\boldsymbol{-\Pi_1}$, $\boldsymbol{\Pi_2}$, $\boldsymbol{-\Pi_2}$). Площини $\boldsymbol{\Pi_1}$ і $\boldsymbol{\Pi_2}$ ділять простір на чотири частини, які називають чвертями.

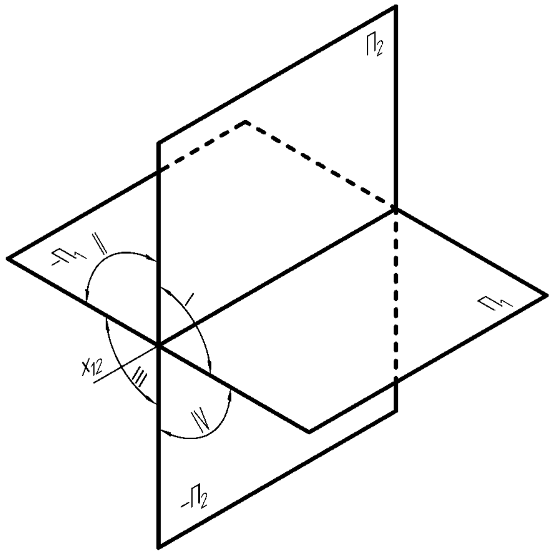


Рис. 1.12

Виконавши ортогональне проекціювання точки ***A*** на площини проекцій **Π_1** і **Π_2** отримують горизонтальну проекцію ***A_1*** на площині **Π_1** і фронтальну проекцію ***A_2*** на площині **Π_2** (рис. 1.13). Перпендикулярні між собою проекціюючі промені ***AA_1*** і ***AA_2*** визначають проекціюючу площину ***A_1AA_2***, яка перпендикулярна до **Π_1, Π_2** і осі проекцій ***x***. У такому випадку ***AA_1=A_2A_x*** – відстань від точки ***A*** до **Π_1, *AA_2=A_1A_x*** – відстань від точки ***A*** до **Π_2**. Отже, пара точок ***A_1*** і ***A_2***, які відповідно належать **Π_1** і **Π_2** і розміщені на перпендикулярах проведених до осі x через точку ***A_x***, визначають положення у просторі єдиної точки ***A***. Таким чином, якщо відомі проекції точки ***A_1*** і ***A_2*** на площини проекцій **Π_1** і **Π_2** (рис. 1.14), то провівши перпендикуляри через ***A_1*** до **Π_1** і через ***A_2*** до **Π_2**, отримують у пересіченні даних перпендикулярів положення точки A в просторі.

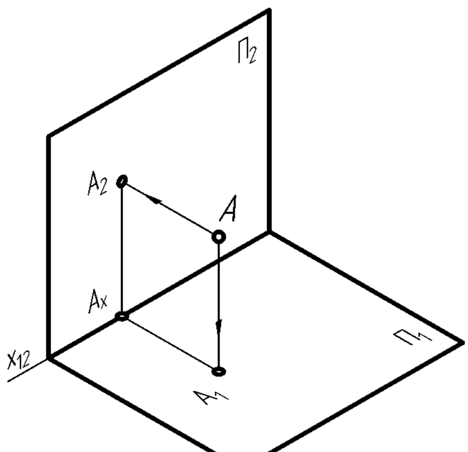


Рис. 1.13

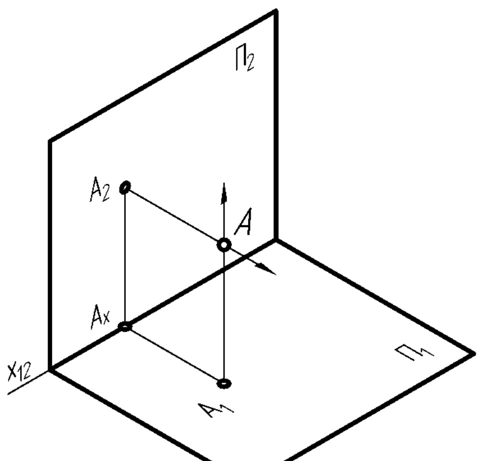


Рис. 1.14

Отже, ортогональне проекціювання на дві взаємно перпендикулярні площини проекцій дозволяє розв'язувати графічним способом обернену задачу інженерної графіки.

Представлену модель проекційно зображувальної системи називають умовно проективною. Вона дуже незручна для практичного використання оскільки дозволяє відобразити без спотворення лише відстань від точки до однієї з площин проекцій. Тому на її основі утворюють іншу модель, яку називають комплексним кресленням або епюром Монжа.

1.5. Епюр Монжа. Проекції точок у різних чвертях простору

Перехід від просторового зображення площин проекцій, що несуть на собі проекції елементів простору, до комплексного креслення здійснюють шляхом суміщення площин проекцій. З цією метою після закінчення

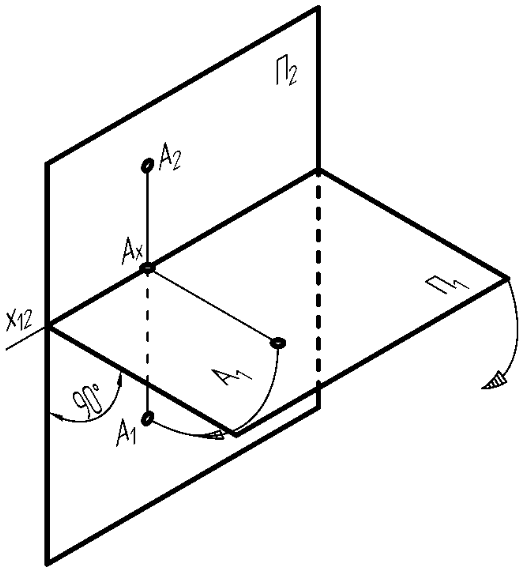


Рис. 1.15

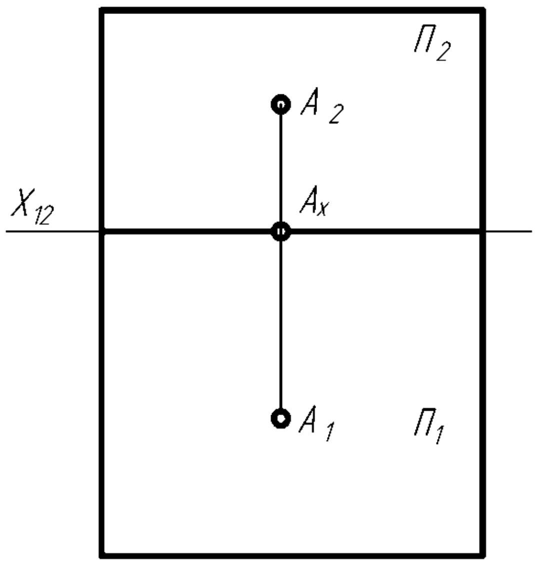


Рис. 1.16

процесу проекціювання оригінал – точку ***A***, проекціюючі промені й проекціюючу площину умовно вилучають (рис. 1.15) і обертають горизонтальну площину проекцій $\mathbf{П_1}$ разом з усіма отриманими на ній зображеннями навколо осі проекцій ***x*** вниз на 900 до суміщення із фронтальною площиною проекцій $\mathbf{П_2}$ (рис. 1.16).

Оскільки площини проекцій мають нескінчені розміри, рамочки, які на кресленні їх обмежують і позначення площин проекцій Π_1 і Π_2 вилучають. У результаті отримують комплексне креслення точки ***A*** в кінцевому вигляді (рис. 1.17). Пряма, яка сполучає A_1 і A_2, завжди перпендикулярна до ***x*** її називають вертикальною лінією проекційного зв'язку.

Використання комплексного креслення забезпечує точність, простоту побудов і зручність вимірювань. Комплексне креслення дозволяє графічно визначити відстань від точки до осі проекцій ***x*** (рис. 1.18). Вказана відстань дорівнює гіпотенузі прямокутного трикутника, якщо один його катет (A_2A_x) дорівнює відстані від точки до однієї площини проекцій (Π_1), а другий ($A_2A_0=A_1A_x$) дорівнює відстані від точки до іншої площини проекцій (Π_2).

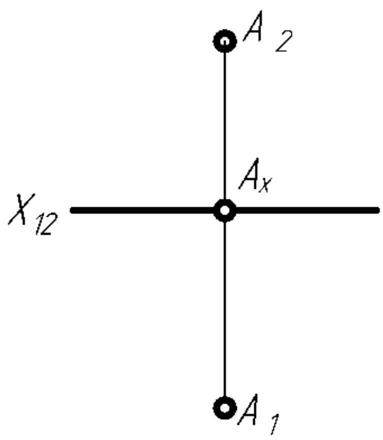


Рис. 1.17

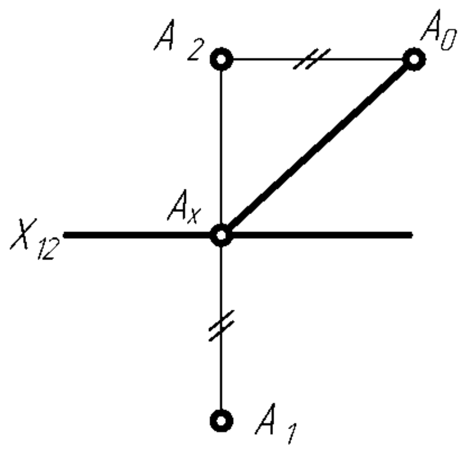


Рис. 1.18

Розташування проекцій точок відносно осі проекцій ***x*** залежить від того, в якій чверті знаходиться точка. Точка ***A*** знаходиться у **I** чверті, якщо її горизонтальна проекція A_1 розташована під віссю ***x***, а фронтальна проекція A_2 – над віссю ***x*** (рис. 1.19). Точка ***B*** знаходиться у **II** чверті, якщо горизонтальна B_1 і фронтальна B_2 її проекції розташовані над віссю ***x*** (рис. 1.20). Точка ***C*** знаходиться у **III** чверті, якщо її горизонтальна проекція C_1 розташована над віссю ***x***, а фронтальна проекція C_2 – під віссю ***x*** (рис. 1.21). Точка ***D*** знаходиться у **IV** чверті, якщо горизонтальна D_1 і фронтальна D_2 її проекції розташовані під віссю ***x*** (рис. 1.22). Точка ***E*** лежить на площині Π_1 ($E \subset \Pi_1$), якщо її фронтальна проекція E_2 лежить на осі ***x*** ($E_2 \subset x$) (рис. 1.23).

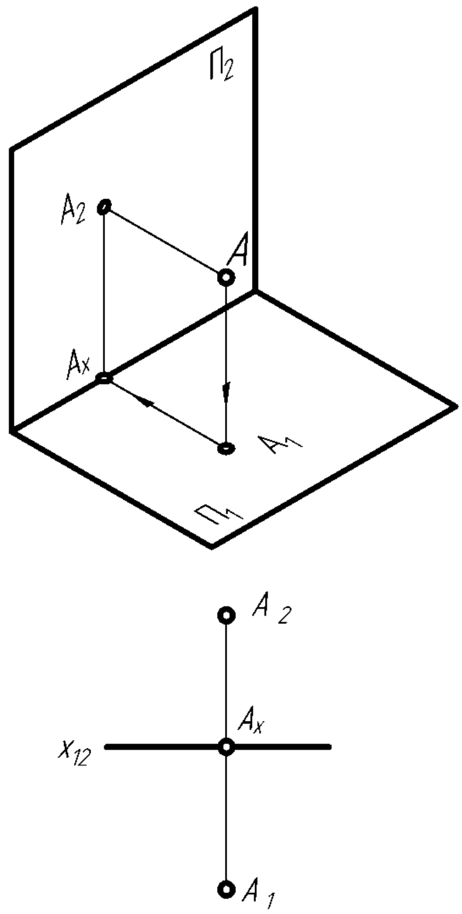


Рис. 1.19

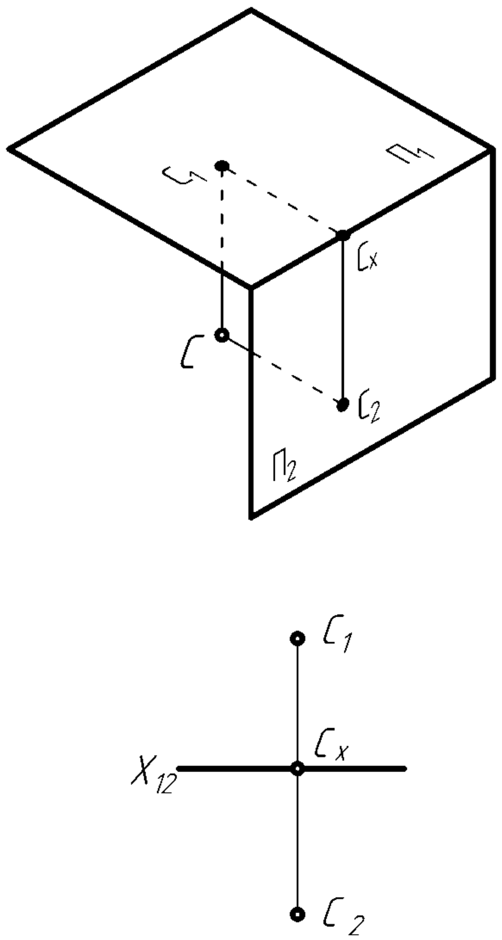


Рис. 1.20

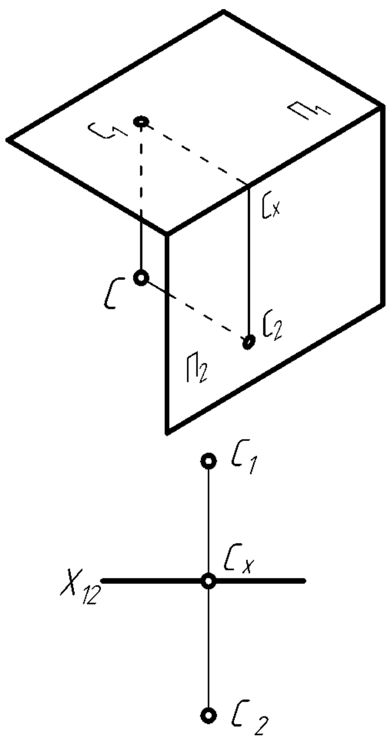


Рис. 1.21

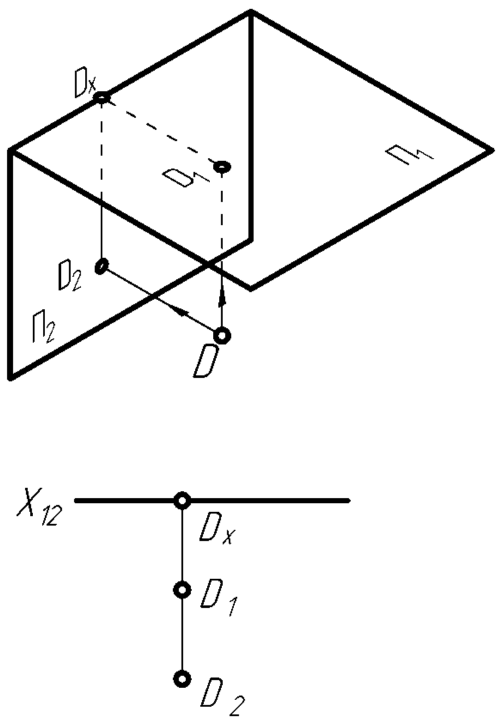


Рис. 1.22

Точка ***F*** лежить на площині **П₂** (***F*** ⊂ **П₂**), якщо її горизонтальна проекція $\boldsymbol{F_1}$ лежить на осі ***x*** ($\boldsymbol{F_1} \subset \boldsymbol{x}$) (рис. 1.24). Точка ***K*** лежить на осі ***x*** (***K*** ⊂ ***x***), якщо її горизонтальна $\boldsymbol{K_1}$ і фронтальна $\boldsymbol{K_2}$ проекції лежать на осі ***x*** ($\boldsymbol{K_1} \equiv \boldsymbol{K_2} \subset \boldsymbol{x}$) (рис. 1.25).

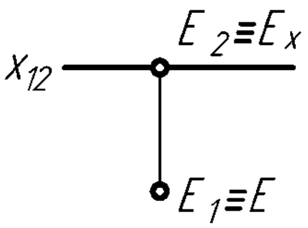


Рис. 1.23

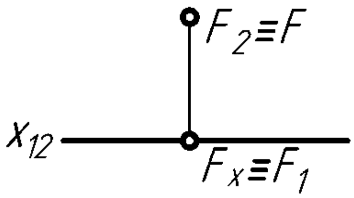


Рис. 1.24

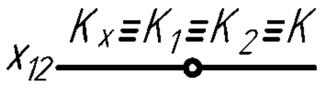


Рис. 1.25

1.6. Ортогональне проекціювання на три взаємно перпендикулярні площини проекцій

Проекціювання геометричної фігури на дві взаємно перпендикулярні площини проекцій дає уявлення про її форму й розташування у просторі. Але якщо до складу геометричної фігури входять прямі лінії, фронтальна і горизонтальна проекції яких перпендикулярні до осі проекцій ***x***, то для отримання графічної інформації про них використовують проекціювання на три взаємно перпендикулярні площини проекцій. Тобто до площин проекцій $\mathbf{П_1}$ і $\mathbf{П_2}$ додають перпендикулярну їм площину $\mathbf{П_3}$, яку називають профільною площиною проекцій (рис. 1.26). $\mathbf{П_3}$ перетинає $\mathbf{П_1}$ по осі проекцій ***y***, а $\mathbf{П_2}$ – по осі проекцій ***z***.

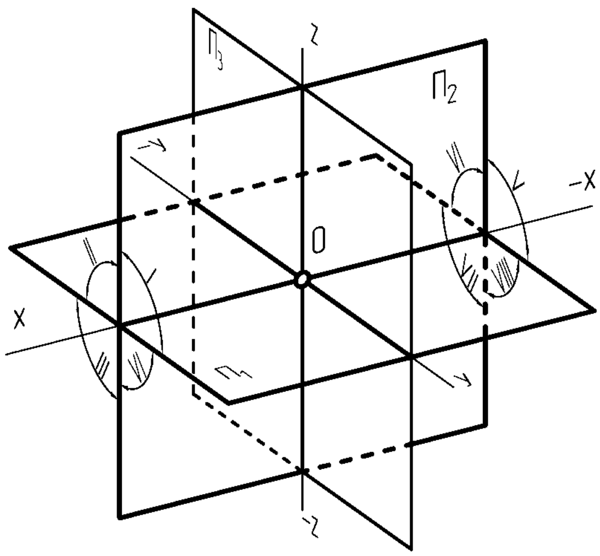


Рис. 1.26

Осі проекцій ***x***, ***y*** і ***z*** перетинаються у точці ***O***, яку називають початком осей проекцій. Площини **П₁**, **П₂** і **П₃** ділять простір на 8 октантів, нумерують які аналогічно чвертям. Виконавши ортогональне проекціювання точки ***A*** на площини проекцій **П₁**, **П₂** і **П₃**, отримують додатково до описаних у пункті 1.4 проекцій ***A₁*** і ***A₂*** профільну проекцію ***A₃*** на площині **П₃** (рис.1.27).

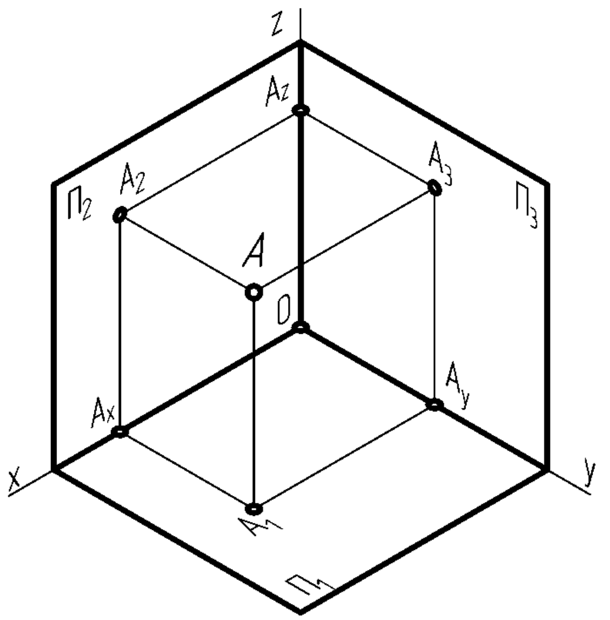


Рис. 1.27

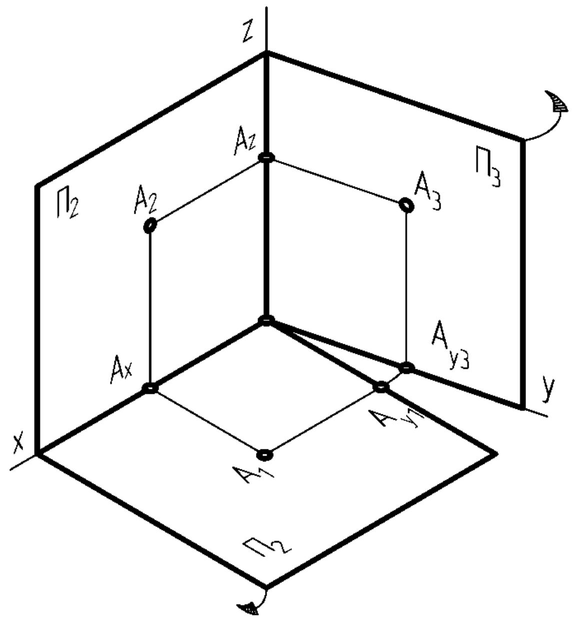


Рис. 1.28

Перехід від просторового зображення до комплексного креслення під час проекціювання на три взаємно перпендикулярні площини проекцій проводять аналогічно до описаного в пункті 1.5 переходу до комплексного креслення під час проекціювання на дві взаємно перпендикулярні площини проекцій (рис. 1.28). З цією метою вісь проекцій ***y*** умовно “розрізують” уздовж на дві частини, які відносять до **П₁** і **П₃** . **П₁** разом з усіма отриманими на ній зображеннями обертають навколо ***x*** вниз на 90^0 до суміщення з **П₂**, а **П₃** разом з усіма отриманими на ній зображеннями обертають навколо ***z*** проти годинникової стрілки на 90^0 теж до суміщення з **П₂**. У результаті отримують комплексне креслення (епюр Монжа) точки на три взаємно перпендикулярні площини проекцій (рис. 1.29).

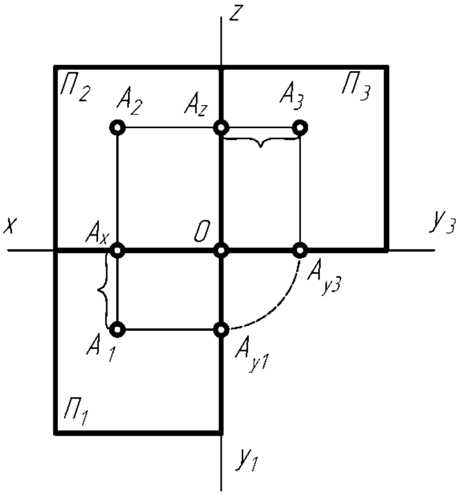


Рис. 1.29

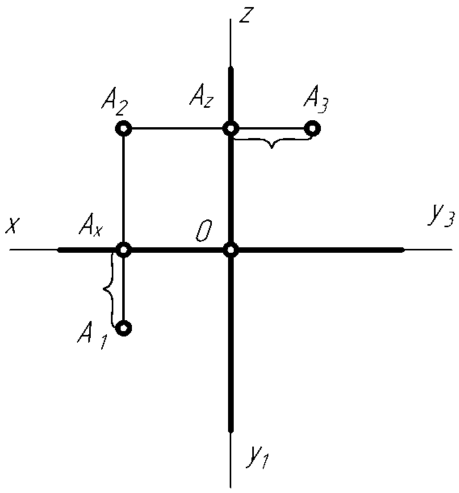


Рис. 1.30

Оскільки площини проекцій мають нескінчені розміри, рамочки, які їх обмежують, і позначення площин проекцій $\mathbf{П_1}$, $\mathbf{П_2}$ і $\mathbf{П_3}$ вилучають (рис. 1.30). Залишають на комплексному кресленні осі проекцій, які у подальшому сприймають як еквіваленти певних площин проекцій.

Під час проекціювання точки на три взаємно перпендикулярні площини проекцій необхідно виконувати три закони проекційного зв’язку:

1) Фронтальна A_2 та горизонтальна A_1 проекції точки ***A*** завжди знаходяться на прямій лінії, яка перпендикулярна до осі проекцій ***x*** і називається вертикальною лінією проекційного зв’язку.

2) Фронтальна A_2 та профільна A_3 проекції точки ***A*** завжди знаходяться на прямій лінії, яка паралельна до осі проекцій ***x*** і називається горизонтальною лінією проекційного зв’язку.

3) Відстань від горизонтальної проекції A_1 точки ***A*** до осі проекцій ***x*** дорівнює відстані від профільної проекції A_3 точки ***A*** до осі проекцій ***z*** ($A_1A_x=A_3A_z$).

Під час проекціювання на три взаємно перпендикулярні площини проекцій враховують, що кожному октанту відповідає своя система знаків напряму осей проекцій: додатні значення ***x*** відкладають ліворуч від ***O***, а від’ємні – праворуч; додатні значення ***y*** відкладають до нас від ***O***, а від’ємні – від нас; додатні значення ***z*** відкладають вгору від ***O***, а від’ємні – вниз. Перетворенням просторової системи осей проекцій ***x***, ***y***, ***z*** отримуємо їх комплексне креслення (рис. 1.31). Систему знаків осей проекцій в октантах наведено в табл. 1.1.

Таблиця 1.1

Вісь проекцій	Список в октанті							
	I	II	III	IV	V	VI	VII	VIII
X	+	+	+	+	-	-	-	-
Y	+	-	-	+	+	-	-	+
Z	+	+	-	-	+	+	-	-

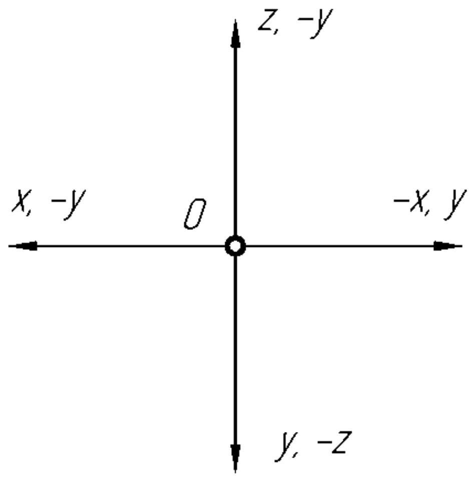


Рис. 1.31

Комплексні креслення точок, розміщених у різних октантах наведено на рис. 1.32.

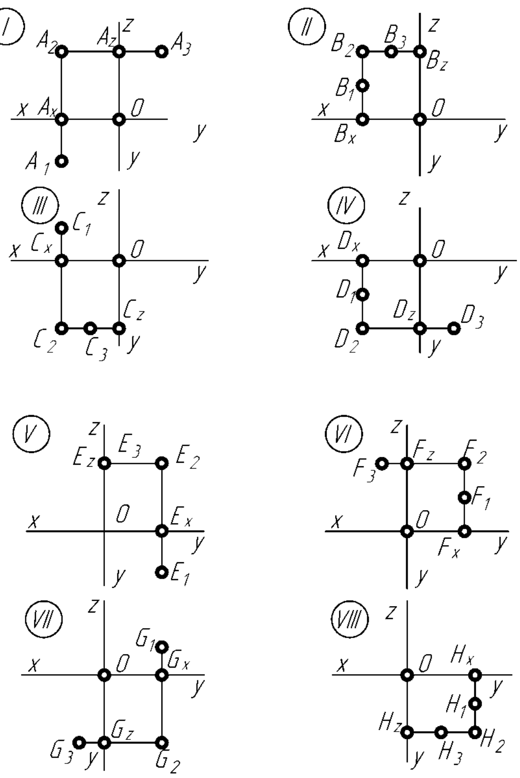


Рис. 1.32

1.7. Взаємне положення двох точок. Конкуруючі точки

У просторі точки можуть співпадати або не співпадати. Точки співпадають (***A≡B***), якщо їхні однойменні проекції співпадають ($A_1 \equiv B_1$; $A_2 \equiv B_2$; $A_3 \equiv B_3$) (рис. 1.33).

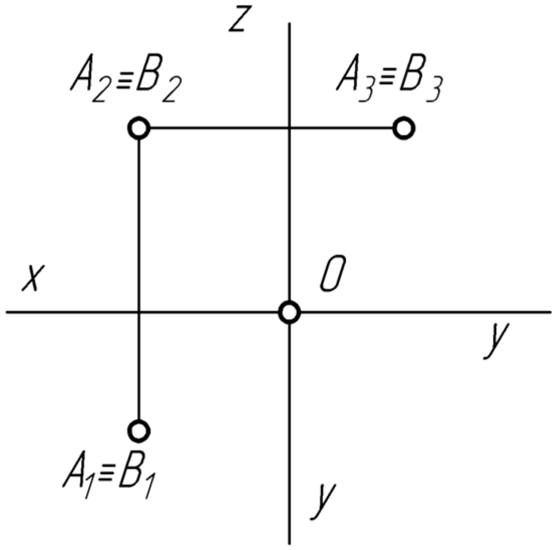


Рис. 1.33

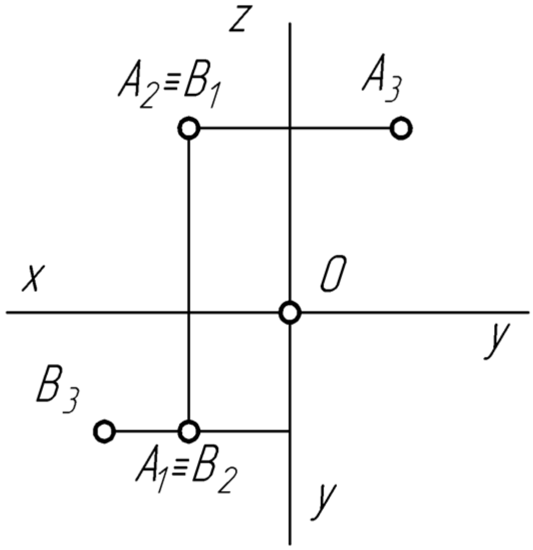


Рис. 1.34

Точки не співпадають($C \not\equiv D$), якщо їхні однойменні проекції не співпадають ($C_1 \not\equiv D_1; C_2 \not\equiv D_2; C_3 \not\equiv D_3;$) (рис. 1.34).

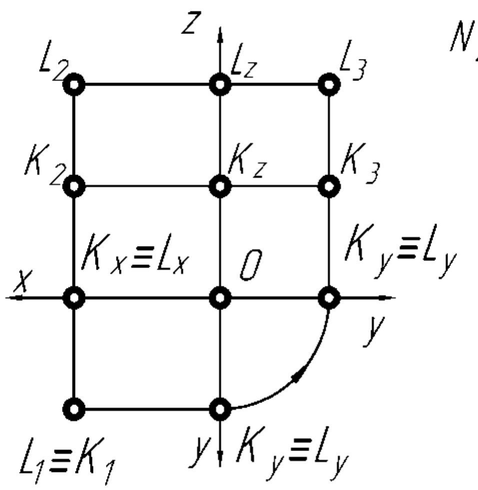
Особливе місце в інженерній графіці займають точки, проекції яких на одну з площин проекцій збігаються. Такі точки називають конкуруючими. Відстані конкуруючих точок до двох площин проекцій однакові. Для конкуруючих точок одна з двох ліній проекційного зв’язку завжди спільна. Якщо дві точки розміщені на спільній лінії проекційного зв’язку, то одна закриває іншу. Виникає необхідність визначити яка з цих точок видима, а яка невидима. Розрізняють горизонтально-конкуруючі, фронтально-конкуруючі і профільно-конкуруючі точки.

Горизонтально-конкуруючі точки розміщені на однакових відстанях від Π_2 і Π_3 (рис. 1.35), вертикальна лінія проекційного зв’язку для них спільна, а горизонтальні проекції співпадають ($K_1 \equiv L_1$). Видимість горизонтально-конкуруючих точок визначають за фронтальними їх проекціями. З рис. 1.35 бачимо, що точка ***L*** розміщена над точкою ***K***, отже вона видима.

Фронтально-конкуруючі точки розміщені на однакових відстанях від **П₁** і **П₃** (рис. 1.36), вертикальна лінія проекційного зв’язку для них спільна, а фронтальні проекції співпадають ($M_2 \equiv N_2$). Видимість фронтально-конкуруючих точок визначають за горизонтальними їх проекціями. З рис. 1.36 бачимо, що точка ***N*** розміщена перед точкою ***M***, отже вона видима.

Профільно-конкуруючі точки розміщені на однакових відстанях від **П₁** і **П₂** (рис. 1.37), горизонтальна лінія проекційного зв’язку для них спільна, а профільні проекції співпадають ($A_3 \equiv B_3$). Видимість профільно-конкуруючих точок визначають за горизонтальними або фронтальними їх проекціями. З рис. 1.37 бачимо, що точка ***A*** більш віддалена від осі **z**, отже вона видима.

У позначенні проекцій двох конкуруючих точок, які збігаються, прийнято позначати першою проекцію видимої точки, другою – невидимої.



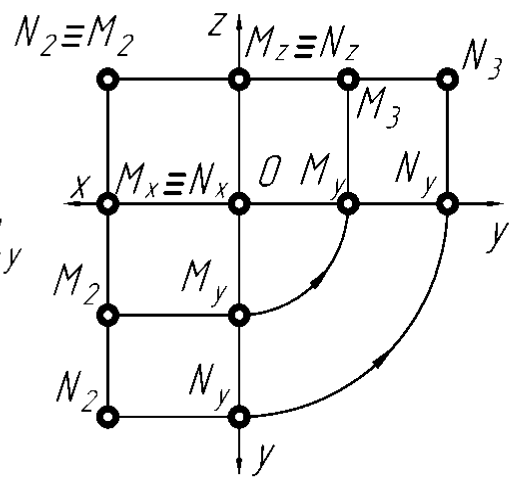


Рис. 1.35 **Рис. 1.36**

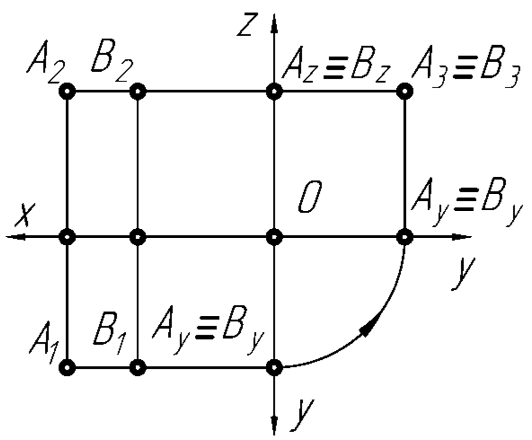


Рис. 1.37

1.8. Перехід від осного епюра до безосного і від безосного до осного

Під час виконання креслень користуються безосними епюрами. В безосних епюрах площини проекцій розміщують на довільних відстанях від об’єкта проекціювання з таким розрахунком, щоб він завжди знаходився у першій чверті або у першому октанті.

Як сказано вище (пункт 1.4), проекції точки на дві взаємно перпендикулярні площини проекцій дозволяють визначити положення точки в просторі (рис. 1.38). Якщо вісь ***x*** перенести паралельно самій собі в положення ***x’*** на відстань ***l***, то одна з площин проекцій (**$П_2$**) наблизиться до точки ***A*** на відстань ***l***, а інша площина проекцій (**$П_1$**) віддалиться від точки ***A*** на таку ж саму відстань. Отже, в результаті паралельного перенесення осі проекцій ***x*** ортогональні проекції точки на дві взаємно перпендикулярні площини не змінюють свого положення. Таким чином, на даному комплексному кресленні осі проекцій ***x*** можна не показувати (рис. 1.39).

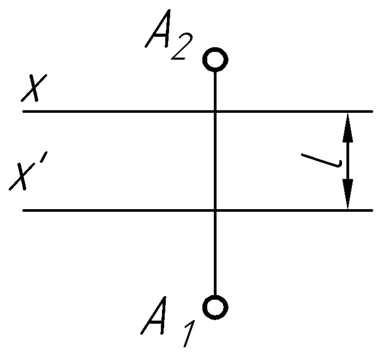


Рис. 1.38

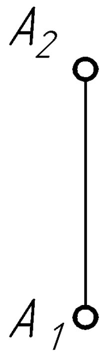


Рис. 1.39

До аналогічних висновків приходять аналізуючи комплексне креслення проекцій точки на три взаємно перпендикулярні площини проекцій (рис. 1.40). В результаті перенесення осі ***x*** вниз на відстань ***l*** площину проекцій **$П_2$** наближають до точки ***A***, а площини проекцій **$П_1$** і **$П_3$** віддаляють від неї на одну і ту ж відстань ***l***. При цьому вісь ***x*** переміщується у бісекторній площині, що йде з ***II*** в ***IV*** октант, а вісь ***z*** переміщується у бісекторній площині, що йде з ***II*** в **V** октант. Початок координат ***O*** переміщується по лінії перерізу вказаних бісекторних площин, яку називають постійною прямою креслення (***П.П.К.***). Отже, в результаті паралельного перенесення осей ***x, y, z*** ортогональні проекції точки на три взаємно перпендикулярні площини не змінюють свого положення. Таким чином на даному комплексному кресленні осі проекцій ***x, y*** і ***z*** можна не показувати (рис. 1.41).

Для виконання деяких графічних операцій з перетворення проекцій, або для побудови наочних (об'ємних) зображень геометричних фігур необхідно перейти до осного епюра.

Щоб перейти від безосного епюра до осного при проекціюванні точки на дві площини проекцій достатньо провести перпендикуляр до лінії проекційного зв'язку (A_1A_2).

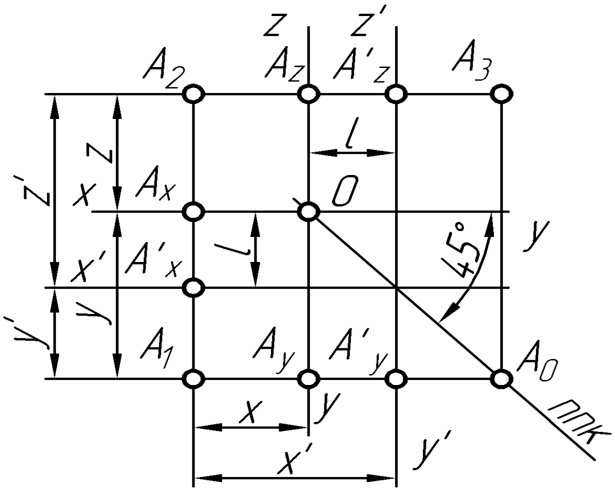


Рис. 1.40

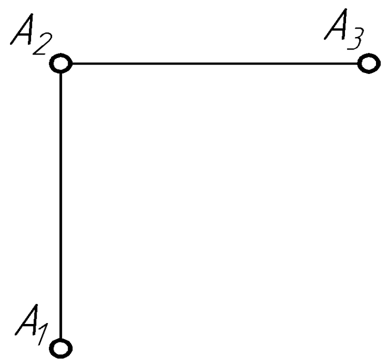


Рис. 1.41

Щоб безосний епюр перетворити в осний при проекціюванні точки на три площини проекцій використовують постійну пряму креслення (***П.П.К.***), (рис. 1.42). Для цього на базі прямого кута $A_1A_2A_3$ будують прямокутник $A_1A_2A_3A_0$, проводять бісектрису кута $A_1A_0A_3$, яка є ***П.П.К.*** На ***П.П.К.*** довільно вибирають початок осей проекцій ***O***, через який проводять осі проекцій ***x, y*** і ***z***. Якщо початок осей проекцій ***O*** знаходиться в середині прямокутника $A_1A_2A_3A_0$, то точка знаходиться у першому октанті.

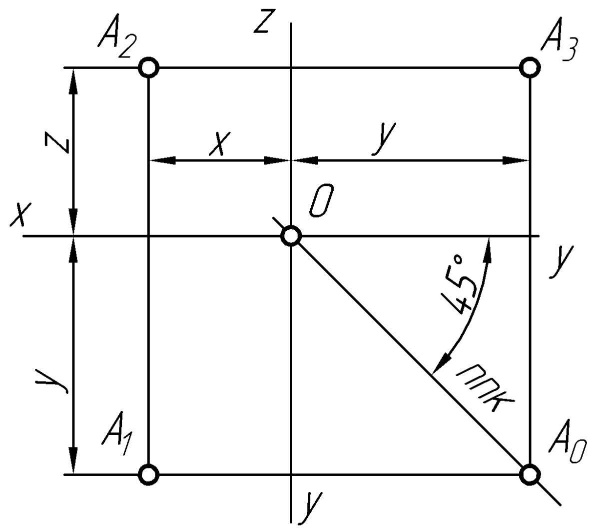


Рис. 1.42

1.9. Побудова проекцій точок за абсолютними координатами

Положення точки в просторі можна задавати з допомогою чисел. Для цього використовують координатний метод. У координатному методі використовують систему прямокутних координат ***Oxyz***. Система прямокутних координат складається з взаємно перпендикулярних осей координат ***x*** – вісь абсцис, ***y*** – вісь ординат і ***z*** – вісь аплікат, початку координат ***O*** і взаємно перпендикулярних площин координат ***xOy***, ***xOz*** і ***yOz***. Якщо систему взаємно перпендикулярних площин проекцій $\mathbf{П_1}$ $\mathbf{П_2}$ $\mathbf{П_3}$ суміщають з системою прямокутних координат, то отримують можливість будувати проекції точок за їхніми координатами ***x***, ***y*** і ***z*** відносно початку осей проекцій. Це і є побудова проекцій точок в абсолютних координатах.

Наприклад, дано точку $A(x_A;y_A;z_A)$ (рис. 1.43). Відповідно для побудови її проекцій використовують координати $A_1(x_A;y_A)$; $A_2(x_A;z_A)$; $A_3(y_A;z_A)$. Під час побудови проекцій точки ***A*** вздовж осі ***x*** від початку осей проекцій ***O*** відкладають x_A і отримують A_x. Через A_x проводять вертикальну лінію проекційного зв'язку і відклавши на ній від осі ***x*** y_A і z_A відповідно до напрямку осей ***y*** і ***z***, отримують A_1 і A_2. Через A_2 проводять горизонтальну лінію проекційного зв'язку, в місці перетину її з віссю ***z*** отримують точку A_z.

На горизонтальній лінії проекційного зв'язку від точки $\boldsymbol{A_z}$ відкладають $\boldsymbol{y_A}$ і отримують $\boldsymbol{A_3}$. Аналогічно будують проекції точки $\boldsymbol{B}(\boldsymbol{x_B;y_B;z_B})$.

Відповідно до значень координат точка може знаходитися в будь якому октанті. Якщо одна координата точки дорівнює нулю – точка лежить на одній з площин проекцій. Якщо дві координати точки дорівнюють нулю – точка лежить на одній з осей проекцій. Якщо три координати точки дорівнюють нулю – точка лежить у початку осей проекцій. Під час проекціювання проекції точок можуть накладатися.

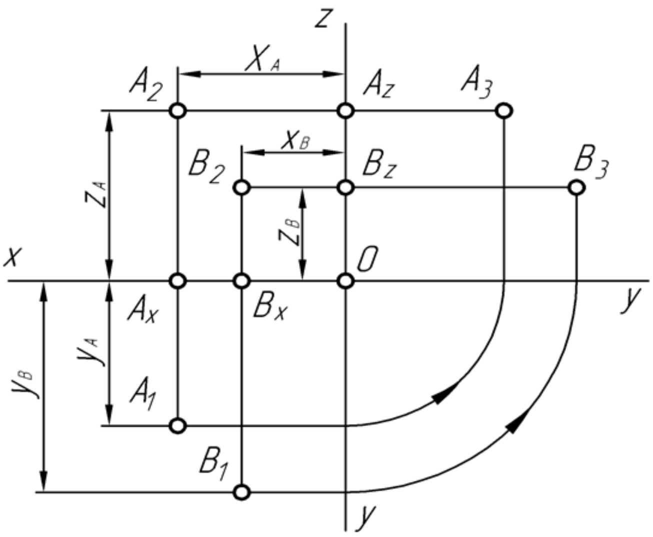


Рис. 1.43

Завдання 1.1. За абсолютними координатами побудувати проекції точки ***A(-40; 20; -30)***.

Розв'язування. Будують епюр осей проекцій (рис. 1.44). на осі ***x*** у від'ємному напрямку (праворуч від ***O***) відкладають 40 масштабних одиниць, проводять вертикальну лінію проекційного зв'язку і відкладають на ній низ (у додатковому напрямку осі ***y***) 20 масштабних одиниць від осі ***x***, отримують $\boldsymbol{A_1}$. На вертикальній лінії проекційного зв'язку (у від'ємному напрямку осі ***z***) відкладають 30 масштабних одиниць вниз від осі ***x***, отримують $\boldsymbol{A_2}$. Через $\boldsymbol{A_2}$ проводять горизонтальну лінію проекційного зв'язку і відкладають на ній праворуч від осі ***z*** (у додатному напрямку осі ***y***) 20 масштабних одиниць, отримують $\boldsymbol{A_3}$.

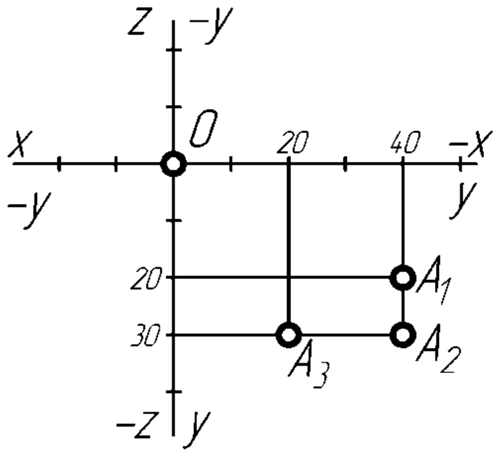


Рис. 1.44

1.10. Побудова проекцій точок за відносними координатами

Проекціювання точок за відносними координатами використовують під час виконання безосних епюрів. Для цього одну з заданих точок приймають за базову (основну), а інші точки пов'язують з базовою певними умовами. Для позначення базової точки використовують індекс **О**, який розміщують вгорі, ліворуч від букви, якою позначають базову точку ($^{O}\boldsymbol{A}$). Проекції базової точки розміщують на відповідних лініях проекційного зв'язку на довільних відстанях одна від другої, або вістані задають ($^{O}\boldsymbol{A}(l_1;l_2)$), де $l_1=A_1A_2$; $l_2=A_2A_3$. Положення точок, пов'язаних з базовою, задають приростами координат відносно базової точки ($\boldsymbol{B}(\Delta x_B;\ \Delta y_B;\ \Delta z_B)$).

Під час проекціювання довільно вибирають положення фронтальної проекції базової точки ($^{0}A_2$), проводять вертикальну і горизонтальну лінії проекційного зв'язку. На вертикальній лінії проекційного зв'язку на відстані l_1 від $^{0}A_2$ будують горизонтальну проекцію базової точки ($^{0}A_1$), на горизонтальній лінії проекційного зв'язку на відстані l_2 від $^{0}A_2$ будують профільну проекцію базової точки ($^{0}A_3$), (рис. 1.45). Через $^{O}A_1$ проводять перпендикуляр до $^{0}A_1{}^{0}A_2$ на відстані Δx_B від $^{0}A_1$ будують вертикальну лінію проекційного зв'язку для точки B, на якій будують B_1 нижче від $^{O}A_1$ на величину Δy_B, B_2 – вище від $^{0}A_2$ на величину Δz_B. Через B_2 проводять горизонтальну лінію проекційного зв'язку для точки B, на якій праворуч від

$^0A_3$ на відстані Δy_B будують B_3. Якщо прирости координат від'ємні, то проекції точок будуть у протилежних напрямках.

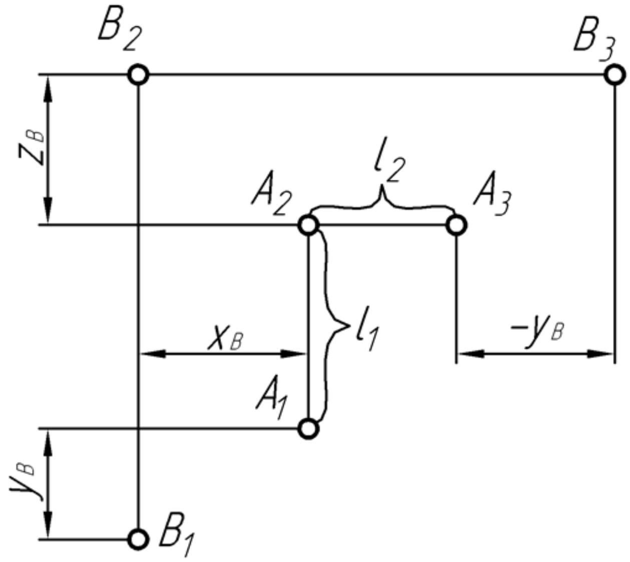


Рис. 1.45

Оскільки $^0A_1{}^0A_2=y_A+z_A$; а $^0A_2{}^0A_3=x_A+y_A$, завжди можна перейти від проекціювання за відносними координатами до проекціювання за абсолютними координатами.

Завдання 1.2. Побудувати комплексне креслення точок за відносними координатами $^0A(l_1=30;l_2=40)$, $B(40; -30; 20)$.

Розв'язування. Вибирають положення $^0A_2$, проводять горизонтальну і вертикальну лінії проекційного зв'язку для ^0A (рис. 1.46). На вертикальній лінії проекційного зв'язку на відстані 30 масштабних одиниць від $^0A_2$ будують $^0A_1$, на горизонтальній лінії проекційного зв'язку на відстані 40 масштабних одиниць від $^0A_2$ будують $^0A_3$. Через $^0A_1$ проводять перпендикуляр до $^0A_1{}^0A_2$. Ліворуч від $^0A_1{}^0A_2$ на відстані 40 масштабних одиниць проводять вертикальну лінію проекційного зв'язку для точки B, на якій вище від $^0A_1$ на 30 масштабних одиниць будують B_1 і вище від $^0A_2$ на 20 масштабних одиниць будують B_2. Через B_2 проводять горизонтальну лінію проекційного зв'язку для точки B, на якій ліворуч від $^0A_3$ на 30 масштабних одиниць будують B_3.

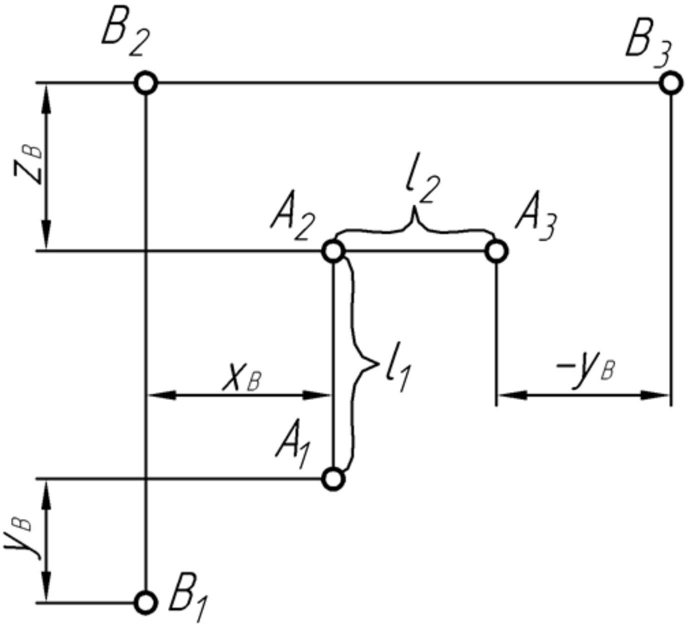


Рис. 1.46

Запитання для самоконтролю

1. В чому різниця між центральним і паралельним методом проекціювання?
2. За яких умов паралельна проекція прямої лінії набуває вид точки?
3. Що називають віссю проекцій?
4. В чому полягають три закони проекційного зв’язку при проекціюванні точки на три взаємно перпендикулярні площини проекцій?
5. Чим відрізняється утворення осі ***x*** та осі ***y***?
6. Які координати визначають розташування точки у просторі?
7. В результаті чого утворюються чверті у просторі?
8. В результаті чого утворюються октанти у просторі?
9. Як можна побудувати профільну проекцію точки за відомими її горизонтальною і фронтальною проекціями?
10. В чому спільне рішення прямої та оберненої задач інженерної графіки, та чим вони відрізняються?
11. У чому подібність ортогональних проекцій і системи прямокутних координат?
12. Коли точка займає особливе положення відносно площин проекцій?

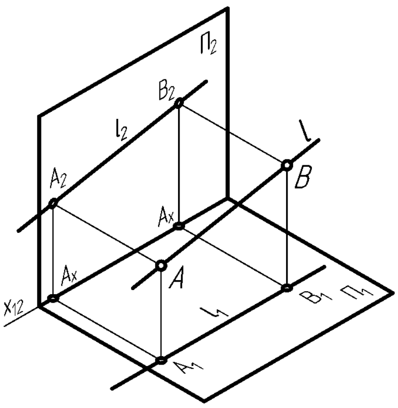
13. Які координати на епюрі визначають фронтальну та горизонтальну проекції точки?
14. Що таке безосний епюр?
15. Коли точка належить площині проекцій та осі проекцій?
16. Що таке конкуруючі точки?
17. Що таке базова точка та який порядок побудови відносно неї ортогональних проекцій інших точок?

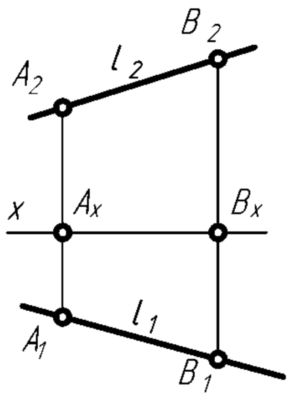
РОЗДІЛ 2. ПРОЕКЦІЮВАННЯ ПРЯМОЇ ЛІНІЇ

2.1. Проекціювання лінії загального положення

Пряму лінію у просторі визначають дві точки, що їй належать. В інженерній графіці прямі лінії розділяють на прямі загального й особливого (окремого) положення. Пряма загального положення не паралельна і не перпендикулярна жодній із площин проекцій. Пряма особливого (окремого) положення паралельна або перпендикулярна до однієї з площин проекцій.

Для побудови проекцій прямої виділяють дві точки (**A** і ***B***), що належать прямій, проекціюють їх на площини проекцій і отримані однойменні проекції точок сполучають між собою (рис. 2.1). Комплексне креслення прямої отримують відомим суміщенням $\mathbf{\Pi_1}$ і $\mathbf{\Pi_2}$ в одну площину (рис. 2.2). В результаті такої побудови отримують $\boldsymbol{l_1}$([$\boldsymbol{A_1B_1}$]) – горизонтальну проекцію прямої ***l*** (відрізка [***AB***]) і $\boldsymbol{l_2}$([$\boldsymbol{A_2B_2}$]) – фронтальну проекцію прямої ***l*** (відрізка [***AB***]). Безосний епюр прямої загального положення, спроекційованої на дві площини проекцій, зображено на рис. 2.3.





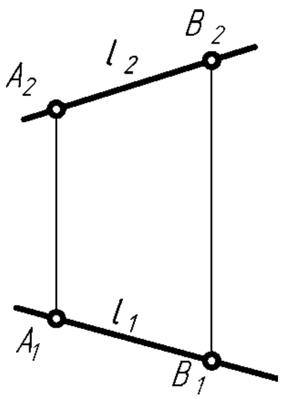


Рис. 2.1 **Рис. 2.2** **Рис. 2.3**

Ортогональні проекції точок, які задають пряму лінію, на дві площини проекцій визначають положення цих точок в просторі. Отже, побудовані на їх основі ортогональні проекції прямої визначають положення цієї прямої у просторі. Таким чином, якщо відомо дві проекції відрізка [***AB***] ([$\boldsymbol{A_1B_1}$] і [$\boldsymbol{A_2B_2}$]) на безосному епюрі, завжди можна побудувати третю його проекцію ([$\boldsymbol{A_3B_3}$]).

Для цього використовують постійну пряму креслення (***П.П.К.***) або координатний спосіб побудови третьої проекції.

Для реалізації побудови третьої проекції відрізка прямої з використанням ***П.П.К.*** на одній з вертикальних ліній проекційного зв'язку довільно вибирають початок осей проекцій ***O***, через який проводять ***П.П.К.*** (рис. 2.4). Через фронтальні проекції кінців відрізка [A_2B_2] проводять горизонтальні лінії проекційного зв'язку. З горизонтальних проекцій кінців відрізка [A_1B_1] проводять горизонтальні промені до перетину з ***П.П.К.***, в точках перетину заломлюють їх і продовжують у вертикальному напрямку до перетину з відповідними лініями проекційного зв'язку.

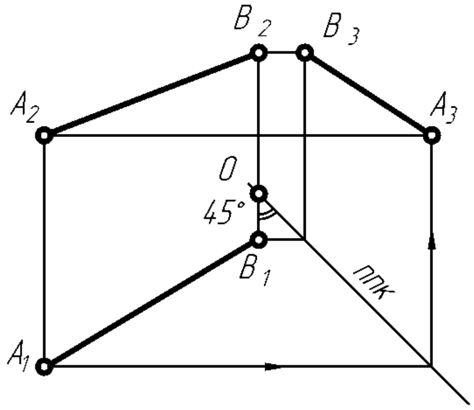


Рис. 2.4

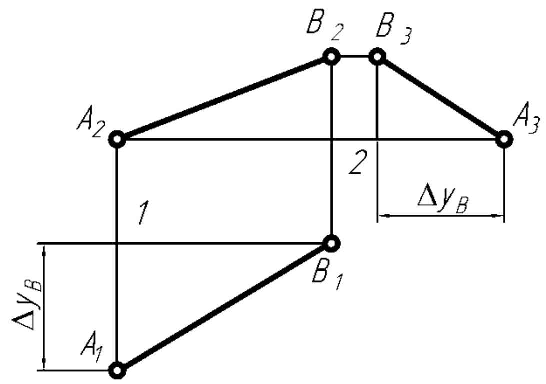


Рис. 2.5

Наведений метод побудови простий і зрозумілий, але для точок, які знаходяться у різних октантах, важко визначити напрям ***П.П.К.*** Тому на практиці часто користуються координатним методом побудови третьої проекції. Даний метод використовує різницю відстаней точок до Π_2.

Під час побудови проводять горизонтальні лінії проекційного зв'язку через фронтальні проекції кінців відрізка [A_2B_2], на одній з проведених горизонтальних ліній проекційного зв'язку довільно будують профільну проекцію точки (A_3), проводять з неї перпендикуляр до перетину з іншою горизонтальною лінією проекційного зв'язку (рис. 2.5). З отриманої точки перетину відкладають у потрібному напрямку приріст координати y (Δy_B) другої точки відносно першої праворуч, якщо B_1 нижче від A_1, або ліворуч, якщо B_1 вище від A_1 й отримують профільну проекцію іншої точки (B_3).

Завдання 2.1. Побудувати горизонтальну проекцію відрізка [***AB***], якщо відомі його фронтальна і профільна проекції ([A_2B_2], [A_3B_3]) (рис. 2.6).

Розв'язування. Побудову виконують, використовуючи описаний вище координатний метод. Через A_2 і B_2 проводять вертикальні лінії проекційного зв'язку. На вертикальній лінії проекційного зв'язку, яка проходить через A_2, довільно вибирають A_1, проводять через A_1 перпендикуляр до перетину з вертикальною лінією проекційного зв'язку, яка проходить через B_2, від отриманої точки перетину відкладають приріст координати y (Δy_B) і отримують B_1, сполучають A_1 з B_1 і отримують шукану горизонтальну проекцію відрізка [***AB***] ([A_1B_1]).

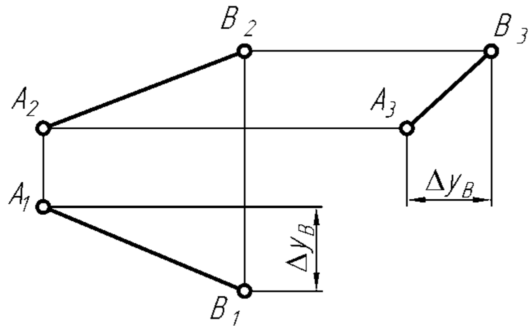


Рис. 2.6

2.2. Побудова проекцій слідів прямої на площинах проекцій

Слід прямої – це точка її перетину з площиною проекцій. Пряма загального положення перетинає три площини проекцій, отже утворює три сліди на площинах проекцій: горизонтальний слід прямої (***H***) – точка перетину прямої з Π_1; фронтальний слід прямої (***F***) – точка перетину прямої з Π_2; профільний слід прямої (***P***) – точка перетину прямої з Π_3. У результаті проекціювання слідів прямої на площини проекцій отримують: H_1 – горизонтальну проекцію горизонтального сліду; H_2 – фронтальну проекцію горизонтального сліду; H_3 – профільну проекцію горизонтального сліду; F_1 - горизонтальну проекцію фронтального сліду; F_2 – фронтальну проекцію фронтального сліду; F_3 – профільну проекцію фронтального сліду; P_1 – горизонтальну проекцію профільного сліду; P_2 – фронтальну проекцію профільного сліду; P_3 – профільну проекцію профільного сліду (рис. 2.7).

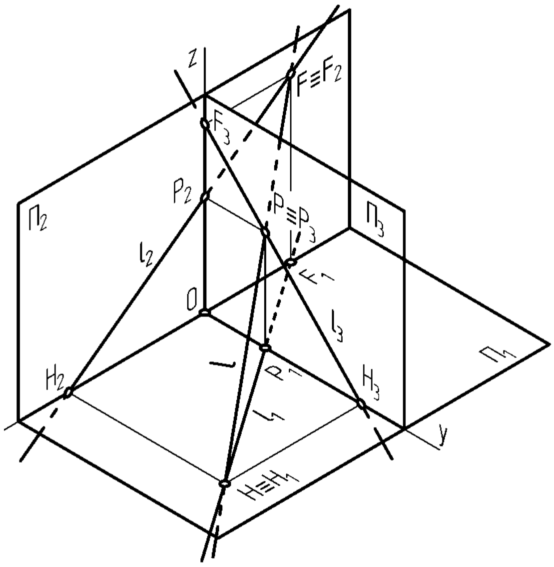


Рис. 2.7

Оскільки, за умовами побудови сліди прямої лежать в одній з площин проекцій, то дві з трьох проекцій сліду завжди лежать на відповідних осях проекцій. $\boldsymbol{H_2}$ і $\boldsymbol{F_1}$ лежать на осі $\boldsymbol{x}$ ($\boldsymbol{H_2 \subset x}$, $\boldsymbol{F_1 \subset x}$); $\boldsymbol{H_3}$ і $\boldsymbol{P_1}$ лежать на осі $\boldsymbol{y}$ ($\boldsymbol{H_3 \subset y}$, $\boldsymbol{P_1 \subset y}$); $\boldsymbol{F_3}$ і $\boldsymbol{P_2}$ лежать на осі $\boldsymbol{z}$ ($\boldsymbol{F_3 \subset z}$., $\boldsymbol{P_2 \subset z}$). Комплексне креслення слідів прямої зображено на рис. 2.8.

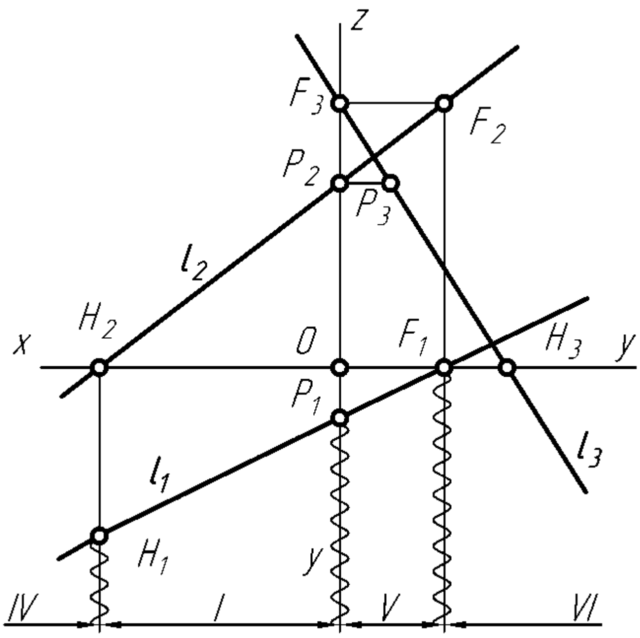


Рис. 2.8

Для графічного розв’язання багатьох задач інженерної графіки необхідно будувати проекції слідів прямої і визначати, через які чверті або октанти простору пряма проходить. Щоб побудувати проекцію горизонтального сліду прямої, продовжують її фронтальну проекцію до перетину з віссю $\boldsymbol{x}$ (рис. 2.9) й отримують $\boldsymbol{H_2}$ ($\boldsymbol{l_2 \cap x = H_2}$). Через $\boldsymbol{H_2}$ проводять вертикальну лінію проекційного зв'язку до перетину з горизонтальною проекцією прямої і отримують $\boldsymbol{H_1}$ ($\boldsymbol{H_1 \equiv H}$). Аналогічно будують проекції інших слідів прямої і отримують $\boldsymbol{F_2 \equiv F}$, $\boldsymbol{P_3 \equiv P}$.

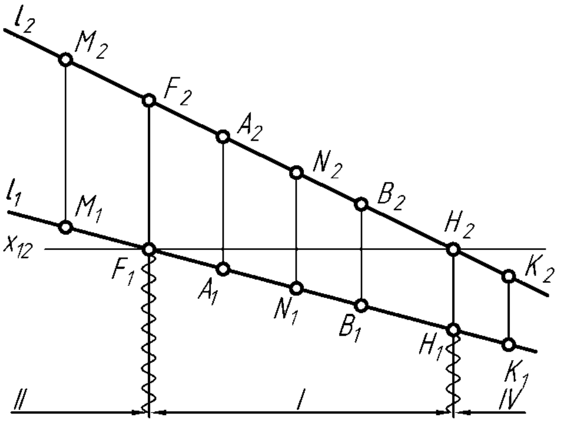


Рис. 2.9

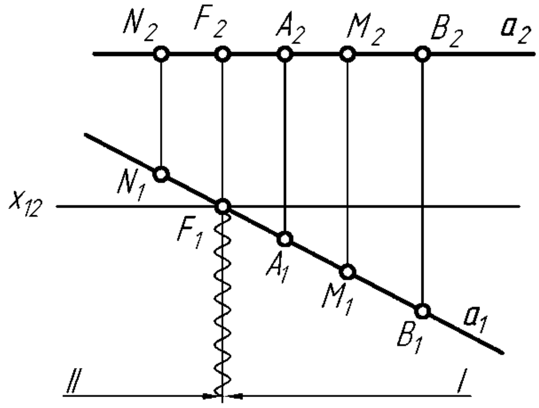


Рис. 2.10

Під час визначення чвертей простору, через які проходить пряма, враховують, що пряма проходить через три чверті простору, якщо вона утворює два сліди з площинами $\mathbf{\Pi_1}$ і $\mathbf{\Pi_2}$, якщо пряма утворює один слід, то вона проходить через дві чверті, якщо пряма з площинами $\mathbf{\Pi_1}$ і $\mathbf{\Pi_2}$ слідів не утворює, то вона проходить через одну чверть ($\boldsymbol{l} \perp \mathbf{\Pi_3}$). Для визначення, через які чверті простору пряма проходить ліворуч і праворуч від кожного сліду прямої, вибирають довільні точки, які їй належать (рис. 2.9) ($\boldsymbol{M \subset l, N \subset l, K \subset l}$) і визначають, в яких чвертях вони розміщені. $\boldsymbol{M_1}$ і $\boldsymbol{M_2}$ розміщені над віссю $\boldsymbol{x}$, отже точка $\boldsymbol{M}$ розміщена у другій чверті, а пряма $\boldsymbol{l}$ проходить через другу чверть; $\boldsymbol{N_1}$ розміщена під віссю $\boldsymbol{x}$, а $\boldsymbol{N_2}$ – над віссю $\boldsymbol{x}$, отже точка $\boldsymbol{N}$ розміщена у першій чверті, а пряма $\boldsymbol{l}$ проходить через першу чверть, $\boldsymbol{K_1}$ і $\boldsymbol{K_2}$ розміщені під віссю $\boldsymbol{x}$, отже $\boldsymbol{K}$ розміщена у четвертій чверті, а пряма $\boldsymbol{l}$ проходить через четверту чверть.

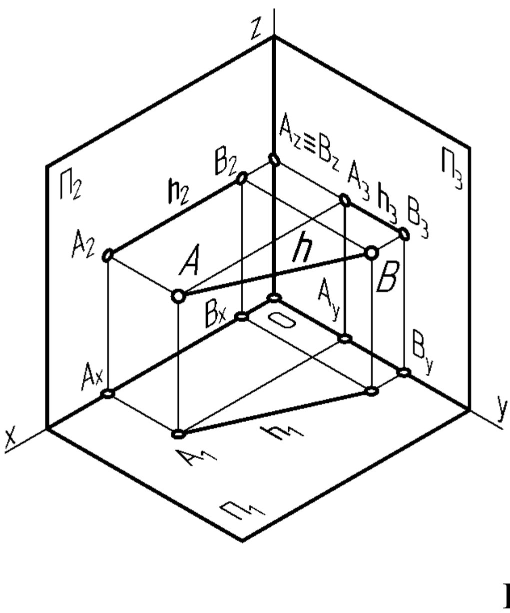
Завдання 2.2. Побудувати сліди прямої $\boldsymbol{a}$ і визначити, через які чверті простору вона проходить (рис. 2.10).

Розв'язування. Фронтальна проекція прямої паралельна осі $\boldsymbol{x}$ ($\boldsymbol{a_2 \parallel x}$), отже пряма утворює з площинами проекцій один слід ($\boldsymbol{F}$) і проходить через дві чверті. Продовжують a_1 до перетину з x і отримують F_1 ($a_1 \cap x = F_1$). Через F_1 проводять вертикальну лінію проекційного зв'язку до перетину з a_2 й отримують $F_2 \equiv F$. Ліворуч і праворуч від F довільно вибирають на a точки M, N. M_1 розміщена під віссю x, M_2 – над віссю x, отже праворуч від F пряма a проходить через першу чверть. N_1 і N_2 розміщені над віссю x, отже ліворуч від F пряма проходить через другу чверть.

2.3. Проекціювання прямих, які займають особливе положення відносно площин проекцій

Лінії особливого (окремого) положення поділяють на лінії рівня і лінії проекціюючі. Лінії рівня паралельні до однієї з площин проекцій і носять назву площини, до якої вони паралельні. Для їх позначень використовують букви h, f, p.

Пряму, паралельну до Π_1, називають горизонтальною прямою. Фронтальна проекція горизонтальної прямої паралельна до осі x ($h_2 \parallel x$), профільна її проекція паралельна до осі y ($h_3 \parallel y$) (рис. 2.11). Відрізок горизонтальної прямої проекціюють на Π_1 в натуральну величину ($AB = A_1B_1$).



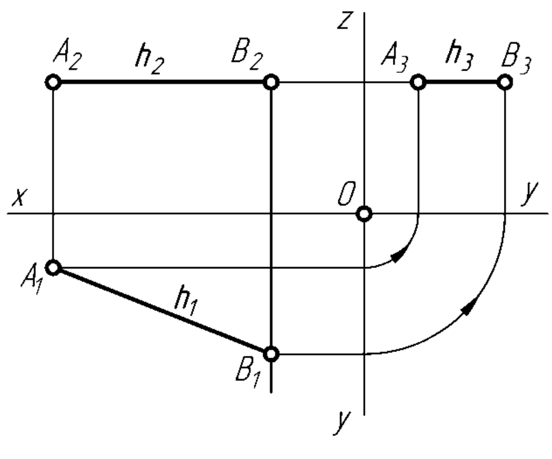


Рис. 2.11

Пряму, паралельну до Π_2, називають фронтальною прямою. Горизонтальна проекція фронтальної прямої паралельна до осі x ($f_1 \| x$), профільна її проекція паралельна до осі z ($f_3 \| z$) (рис. 2.12). Відрізок на фронтальній прямій проекціюють на Π_2 в натуральну величину ($CD = C_2D_2$).

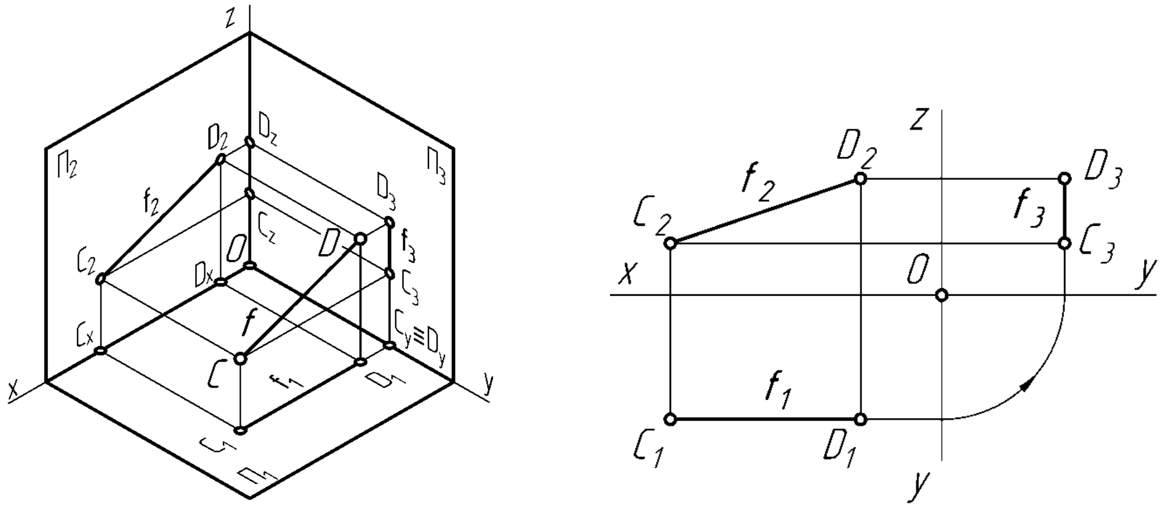


Рис. 2.12

Пряму, паралельну до **Π_3**, називають профільною прямою. Горизонтальна проекція профільної прямої паралельна до осі $\boldsymbol{y}$ ($\boldsymbol{p_1 \| y}$), фронтальна її проекція паралельна до осі $\boldsymbol{z}$ ($\boldsymbol{p_2 \| z}$) (рис. 2.13). Відрізок на профільній прямій проекціюють на **Π_3** у натуральну величину ($\boldsymbol{MN=M_3N_3}$).

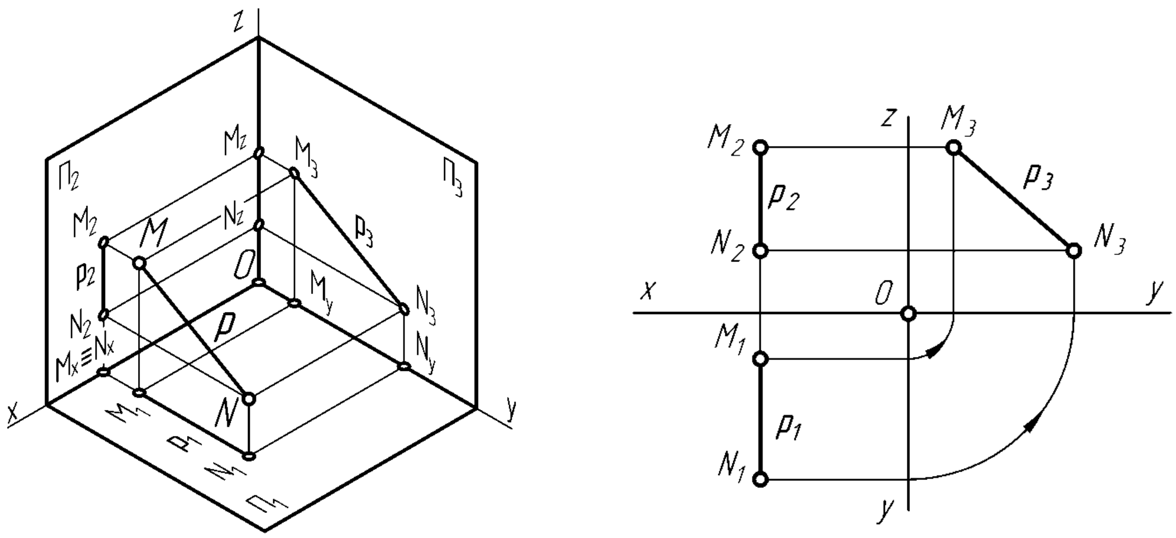


Рис. 2.13

Лінії проекціюючі паралельні до двох площин проекцій, перпендикулярні до третьої площини проекцій і носять назву площини, до якої вони перпендикулярні.

Пряму, перпендикулярну до **Π_1**, називають горизонтально-проекціюючою. Фронтальна проекція горизонтально-проекціюючої прямої перпендикулярна до осі ***x*** (***a*₂**⊥***x***), профільна її проекція перпендикулярна до осі ***y*** (***a*₃**⊥***y***) (рис. 2.14). На **П₁** горизонтально-проекціюючу пряму проекціюють у точку.

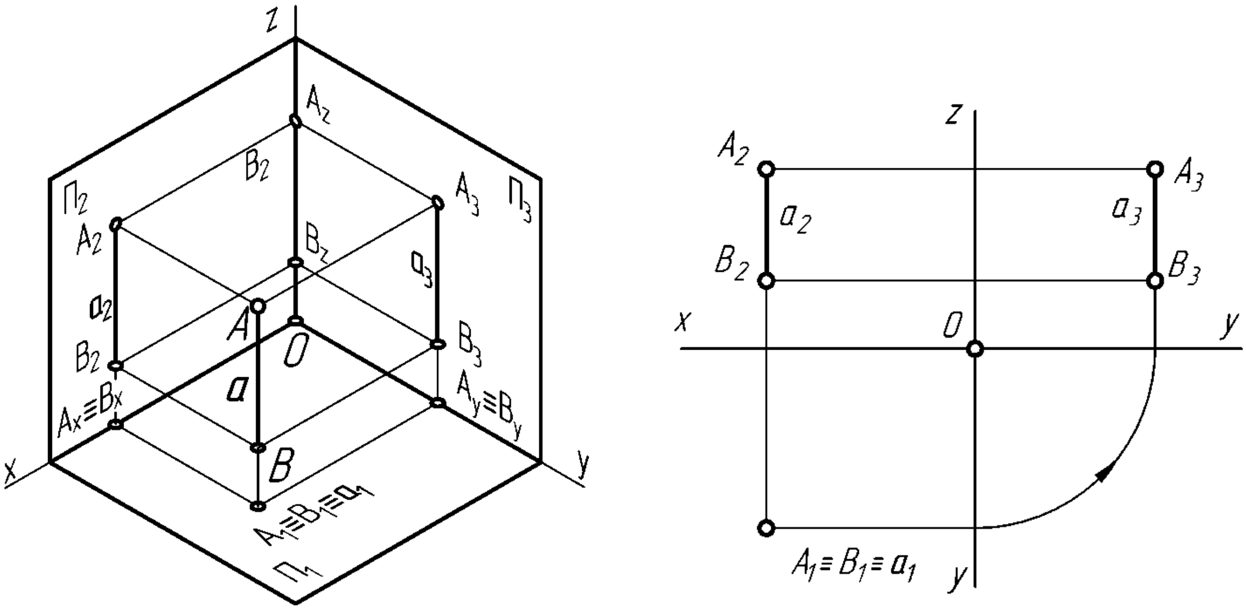


Рис. 2.14

Пряму, перпендикулярну до **П₂**, називають фронтально-проекціюючою. Горизонтальна проекція фронтально-проекціюючої прямої перпендикулярна до осі ***x*** (***b*₁**⊥***x***), профільна її проекція перпендикулярна до осі ***z*** (***b*₃**⊥***z***) (рис. 2.15). На **П₂** фронтально-проекціюючу пряму проекціюють у точку.

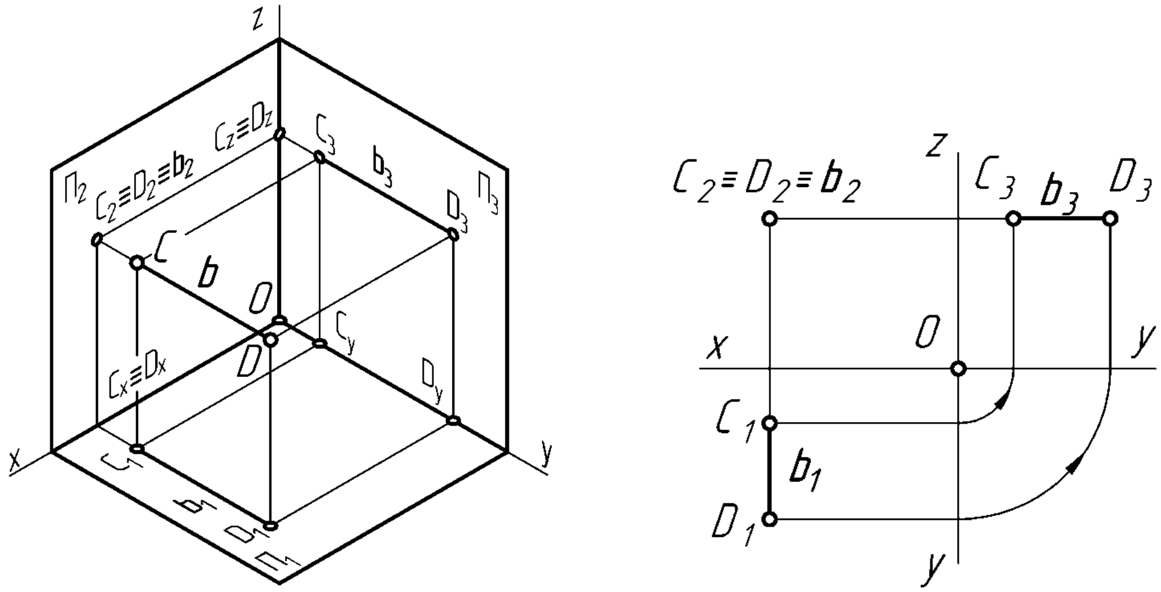


Рис. 2.15

Пряму, перпендикулярну до $\mathbf{\Pi_3}$, називають профільно-проекціюючою. Горизонтальна і фронтальна проекції профільно-проекціюючої прямої паралельні до осі $\boldsymbol{x}$ ($\boldsymbol{c_1 \| x \| c_2}$) (рис. 2.16). На $\mathbf{\Pi_3}$ профільно-проекціюючу пряму проекціюють у точку.

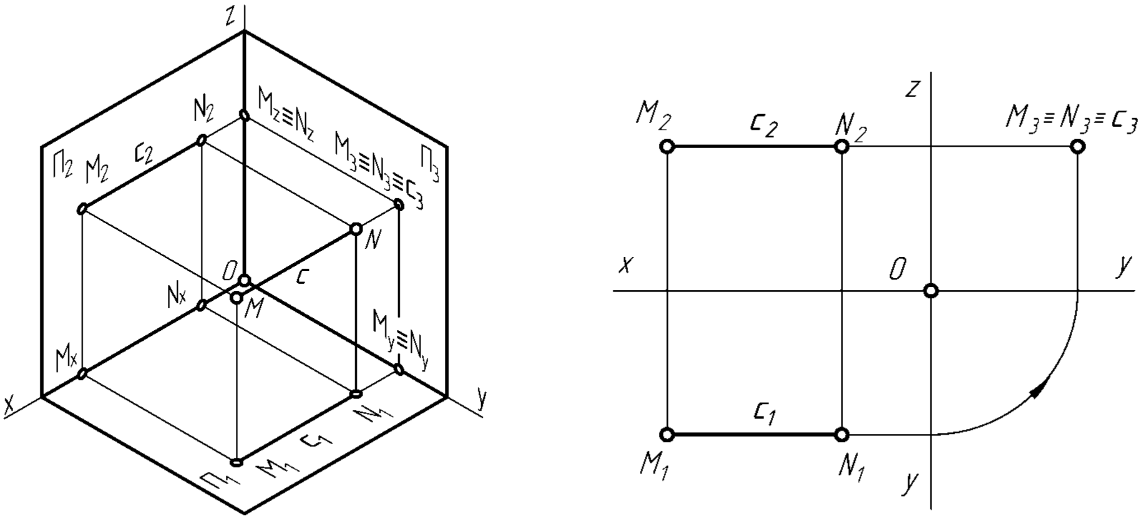
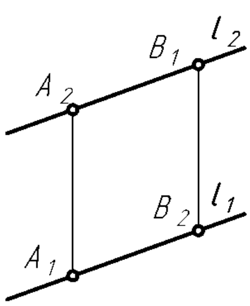


Рис. 2.16

2.4. Взаємне розміщення точки і прямої

Точка може належати прямій або знаходитися за її межами.

Точка належить прямій, якщо її проекції лежать на однойменних проекціях прямої ($\boldsymbol{A \subset l \Rightarrow A_1 \subset l_1, A_2 \subset l_2}$) (рис. 2.17). Якщо проекції точки лежать на різнойменних проекціях прямої – точка прямій не належить ($\boldsymbol{B \not\subset l}$), просто проекції точки накладаються на проекції прямої.



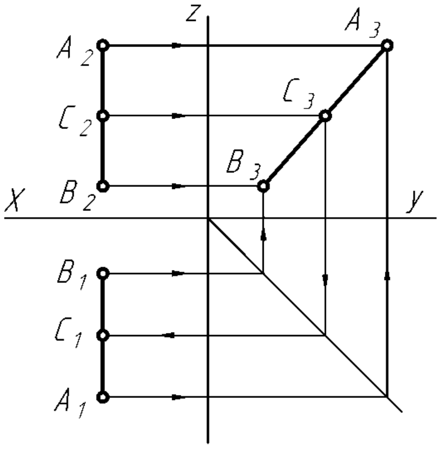


Рис. 2.17 **Рис. 2.18**

Дві проекції прямої особливого положення не завжди дозволяють визначити положення у просторі точок, які їй належать. Горизонтальна і фронтальна проекції профільної прямої не визначають положення у просторі точки, яка їй належить. Тому для побудови проекції точки $\boldsymbol{C}$, яка належить відрізку $[\boldsymbol{AB}]$ профільної прямої, використовують його профільну проекцію (рис. 2.18).

Для побудови на горизонтальній і фронтальній проекціях профільної прямої проекцій точки, яка їй належить, можна використовувати додаткову пряму $\boldsymbol{l_0}$ або промінь переломлення $\boldsymbol{s}$.

Нехай профільна пряма задана точками $\boldsymbol{A}(\boldsymbol{A_1},\boldsymbol{A_2})$ і $\boldsymbol{B}(\boldsymbol{B_1},\boldsymbol{B_2})$ і відомо положення горизонтальної проекції точки $\boldsymbol{C}(\boldsymbol{C_1})$, яка належить прямій $\boldsymbol{p}$. Для побудови $\boldsymbol{C_2}$ через одну з фронтальних проекцій кінців відрізка ($\boldsymbol{B_2}$) під довільним гострим кутом до $\boldsymbol{p_2}$ будують додаткову пряму $\boldsymbol{l_0}$, на якій методом засічок будують відрізок $\boldsymbol{B_2A_0}= \boldsymbol{B_1A_1}$ (рис. 2.19) і $\boldsymbol{B_2C_0}= \boldsymbol{B_1C_1}$. З'єднують між собою точки $\boldsymbol{A_0}$ і $\boldsymbol{A_2}$, через $\boldsymbol{C_0}$ проводять пряму, паралельну $\boldsymbol{A_0A_2}$ до перетину з $\boldsymbol{B_2A_2}$ й отримують $\boldsymbol{C_2}$ – фронтальну проекцію точки $\boldsymbol{C}$.

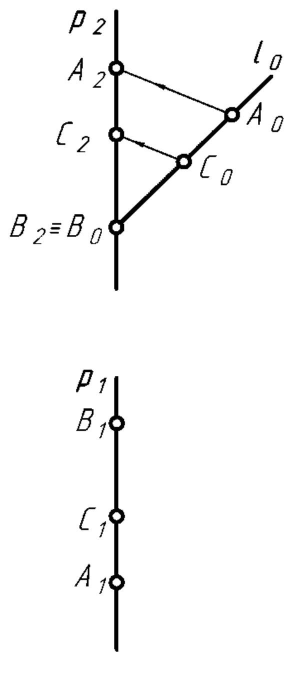


Рис. 2.19

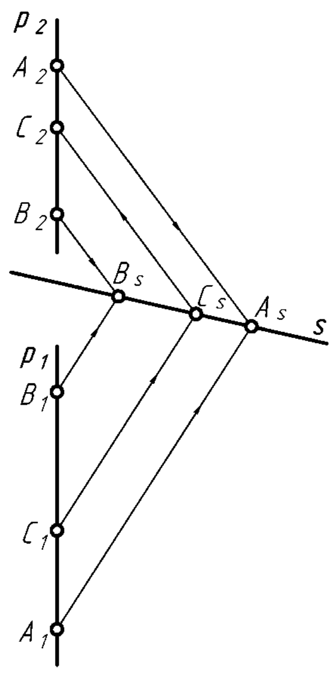


Рис. 2.20

Для побудови проекцій точки, яка належить профільній прямій з використанням променя переломлення $\boldsymbol{s}$ через однойменні проекції точок, які задають профільну пряму (A_1 і B_1), проводять два паралельні між собою довільно напрямлені промені до перетину в точках A_s і B_s з відповідними паралельними між собою променями, які будують аналогічно з інших однойменних проекцій точок, які задають профільну пряму (A_2 і B_2). Через A_s і B_s будують промінь переломлення s. Через відому проекцію точки C(C_1), яка належить заданій прямі, проводять промінь, паралельний до A_1A_s до перетину з s, отримують C_s. Через C_s проводять промінь, паралельний до A_sA_2 до перетину з B_2A_2 й отримують C_2 (рис. 2.20).

Виходячи зі сказаного вище, вважають: якщо хоча б одна з проекцій точки не лежить на однойменній проекції прямої – точка знаходиться за межами прямої (прямій не належить). Для зручності визначення положення точок відносно прямої використовують умовні характеристики розташування точок: “над”, “під”, “перед”, “за”, “праворуч”, “ліворуч”.

Приклади розташування точок відносно прямої в просторі зображено на рис. 2.21. На рис. 2.22 зображено комплексне креслення цих точок на **П1** і **П2**. Відповідно до розглянутого вище закону належності точка ***A*** належить прямій ***m*** (***A***$\subset$***m***); точка ***C*** розміщена над прямою; точка ***D*** розміщена під прямою; точка ***M*** розміщена перед прямою; точка ***L*** розміщена за прямою; точка ***E*** розміщена над і перед прямою; точка ***F*** розміщена над і за прямою; точка ***K*** розміщена під і перед прямою; точка ***N*** розміщена під і за прямою ***l***.

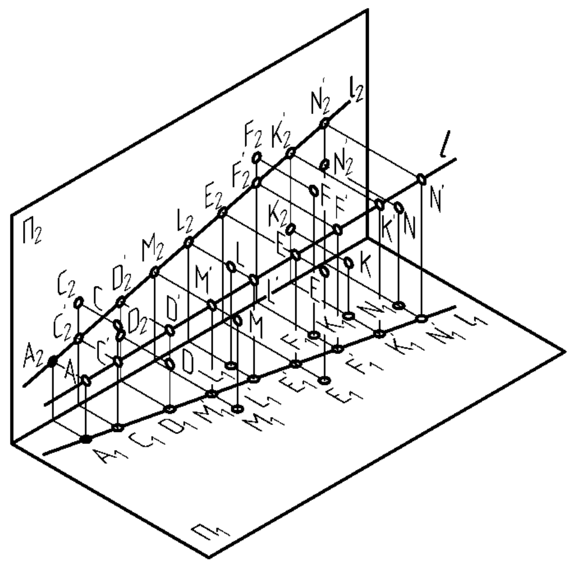


Рис. 2.21

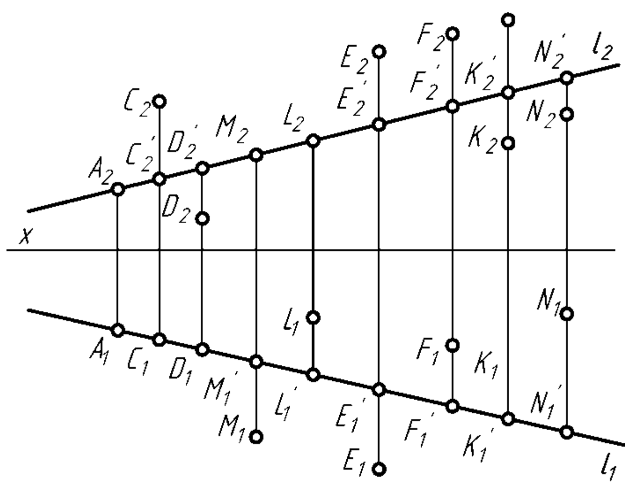


Рис. 2.22

Завдання 2.3. Побудувати другі проекції точок ***C*** і ***D***, які належать заданому відрізку [***AB***] профільної прямої (рис. 2.23).

Розв'язування. Будують промінь переломлення ***s***. Через A_1 і B_1 проводять під довільним кутом до A_1B_1 паралельні між собою промені. Через A_2 і B_2 проводять паралельні між собою промені до перетину з попередньо проведеними променями. В перетині променів, які проведені через проекції однойменних точок, отримують точки A_s і B_s ($A_1A_s \cap A_2A_s = A_s$, $B_1B_s \cap B_2B_s = B_s$). З'єднують точки A_s і B_s і отримують промінь переломлення ***s***.

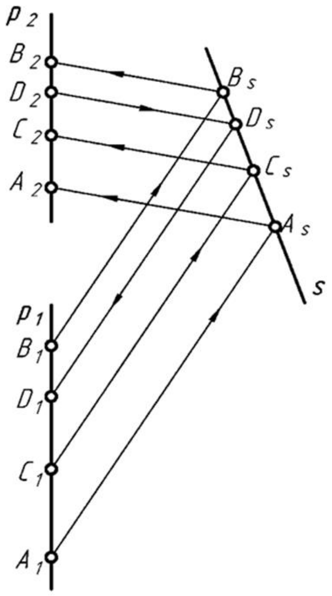


Рис. 2.23

Через C_1 проводять промінь, паралельний до A_1A_s до перетину з ***s***, отримують точку C_s ($A_1A_s \parallel C_1C_s$). Через C_s проводять промінь, паралельний до A_2A_s до перетину з A_2B_2, отримують точку C_2($A_2A_s \parallel C_2C_s$).

Через D_2 проводять промінь, паралельний до A_2A_s до перетину з ***s***, отримують точку D_s ($A_2A_s \parallel D_2D_s$). Через D_s проводять промінь, паралельний до A_1A_s до перетину з A_1B_1, отримують точку D_1($A_sA_1 \parallel D_sD_1$).

2.5. Поділ відрізка прямої у заданому відношенні

Поділ відрізка прямої у заданому відношенні зводять до побудови проекцій точки, яка належить відрізку прямої. Поділ ґрунтується на властивості паралельного проекціювання, що відношення відрізків прямої лінії дорівнює відношенню проекцій цих відрізків **($AM:MB=A_1M_1:M_1B_1= A_2M_2:M_2B_2$).**

Отже, для поділу відрізка прямої [$\boldsymbol{AB}$] у заданому відношенні достатньо поділити у такому відношенні одну з його проекцій і спроекціювати точку поділу на інші проекції відрізка.

Нехай відрізок [$\boldsymbol{AB}$] ([$\boldsymbol{A_1B_1}$], [$\boldsymbol{A_2B_2}$]) необхідно поділити у відношенні ***2:3***. Для цього через одну з проекцій кінців відрізка ($\boldsymbol{A_1}$) проводять довільну додаткову пряму $\boldsymbol{l_0}$ (рис. 2.24), на якій відкладають ***5*** довільних, але рівних між собою відрізків і отримують $\boldsymbol{B_0}$, сполучають $\boldsymbol{B_0}$ і $\boldsymbol{B_1}$. На відстані ***2/5*** від $\boldsymbol{A_1}$ будують $\boldsymbol{M_0}$, через $\boldsymbol{M_0}$ проводять пряму паралельну до $\boldsymbol{B_0B_1}$ до перетину з $\boldsymbol{A_1B_1}$ і отримують $\boldsymbol{M_1}$($\boldsymbol{M_1M_0} || \boldsymbol{B_0B_1}$). Через $\boldsymbol{M_1}$ проводять вертикальну лінію проекційного зв'язку до перетину з $\boldsymbol{A_2B_2}$ і отримують $\boldsymbol{M_2}$.

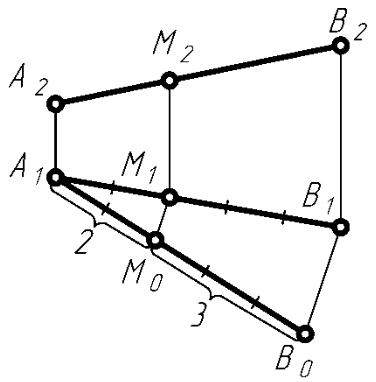


Рис. 2.24

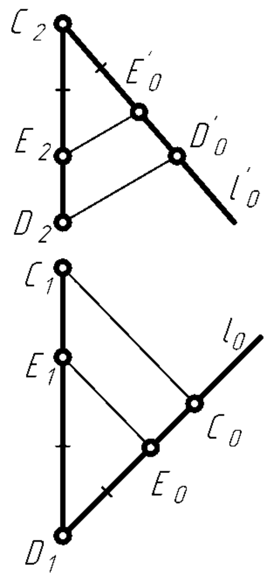


Рис. 2.25

Завдання 2.4. Поділити відрізок [$\boldsymbol{CD}$] профільної прямої точкою $\boldsymbol{E}$ у відношенні ***1:2*** (рис. 2.25).

Розв'язування. Через $\boldsymbol{D_1}$ проводять довільну додаткову пряму $\boldsymbol{l_0}$, на якій відкладають ***3*** рівних відрізки й отримують $\boldsymbol{C_0}$, сполучають $\boldsymbol{C_0}$ $\boldsymbol{C_1}$. На відстані ***1/3*** від $\boldsymbol{C_0}$ будують $\boldsymbol{E_0}$, проводять пряму, паралельну до $\boldsymbol{C_0C_1}$ до перетину з $\boldsymbol{C_1D_1}$ і отримують $\boldsymbol{E_1}$.

Через C_2 проводять довільну додаткову пряму l^1_0, на якій відкладають **3** рівних відрізки й отримують D^1_0, сполучають D^1_0 і D_2. На відстані **1/3** від C_2 будують E^1_0, через E^1_0 проводять пряму, паралельну до D_0D_2 до перетину з C_2D_2 і отримують E_2.

2.6. Побудова на кресленні натуральної величини відрізка прямої і кутів нахилу прямої до площин проекцій

Відрізки прямої загального положення не можуть проекціюватися на площини проекцій у натуральну величину. Тобто проекція відрізка прямої загального положення завжди менша за натуральну величину самого відрізка.

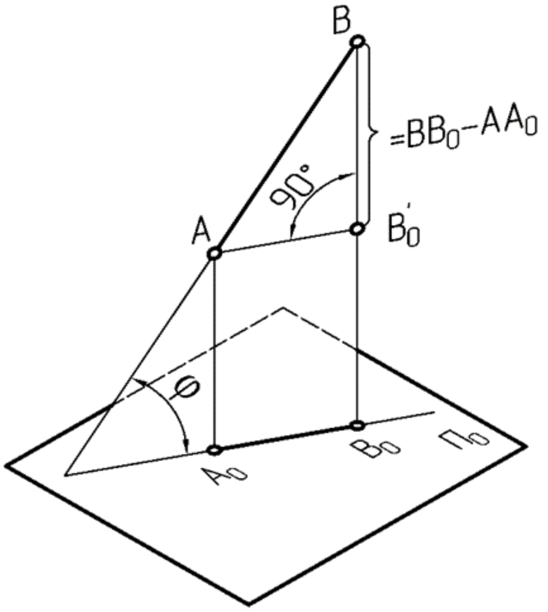


Рис. 2.26

Аналіз процесу ортогонального проекціювання відрізка прямої загального положення на довільну площину проекцій Π_0 (рис. 2.26) призводить до висновку, що відрізок [AB] є гіпотенузою прямокутного трикутника ABB^1_0, в якому один катет дорівнює проекції відрізка на Π_0 ($AB^1_0=A_0B_0$), а другий катет дорівнює різниці віддалей кінців відрізка до Π_0 ($BB^1_0=BB_0-AA_0$).

При цьому кут α нахилу прямої до Π_0 дорівнює куту між прямою і її проекцією на Π_0. Але для графічного визначення натуральної величини відрізка [AB] розглядають його проекції на Π_1 і Π_2 (рис. 2.27). Відрізок [AB] проекціюють на Π_1 і Π_2 і отримують [A_1B_1] – горизонтальну проекцію відрізка і [A_2B_2] – фронтальну проекцію відрізка. Через A проводять AB_0 паралельно до [A_1B_1] ($AB_0 \| [A_1B_1]$), через B проводять BA_0 паралельно до [A_2B_2] ($BA_0 \| [A_2B_2]$). Отримані два прямокутні трикутники AB_0B і AA_0B характеризує спільна гіпотенуза AB, яка одночасно є натуральною величиною відрізка [AB]. Відповідно кут $BAB_0=\alpha$ – кут нахилу [AB] до Π_1, кут $ABA_0=\beta$ – кут нахилу [AB]

до **П$_2$**. Оскільки $\boldsymbol{AB_0=A_1B_1}$, $\boldsymbol{A_0B=A_2B_2}$, а $\boldsymbol{B_0B}$ – різниця відстаней від кінців відрізка (точок $\boldsymbol{A}$ і $\boldsymbol{B}$) до **П$_1$** ($\boldsymbol{B_0B=BB_1\text{-}AA_1=z_B\text{-}z_A=\Delta z}$), $\boldsymbol{AA_0}$ – різниця відстаней від кінців відрізка (точок $\boldsymbol{A}$ і $\boldsymbol{B}$) до **П$_2$** ($\boldsymbol{AA_0=AA_1\text{-}BB_1=y_A\text{-}y_B=\Delta y}$) (рис. 2.28), отримують залежність $(\boldsymbol{AB})^2=(\boldsymbol{A_1B_1})^2+(\boldsymbol{\Delta z})^2=(\boldsymbol{A_2B_2})^2+(\boldsymbol{\Delta y})^2$.

Отримана залежність дозволяє сформулювати правило трикутника, яке використовують для графічного визначення натуральної величини відрізка прямої загального положення і величини кутів її нахилу до відповідних площин проекцій.

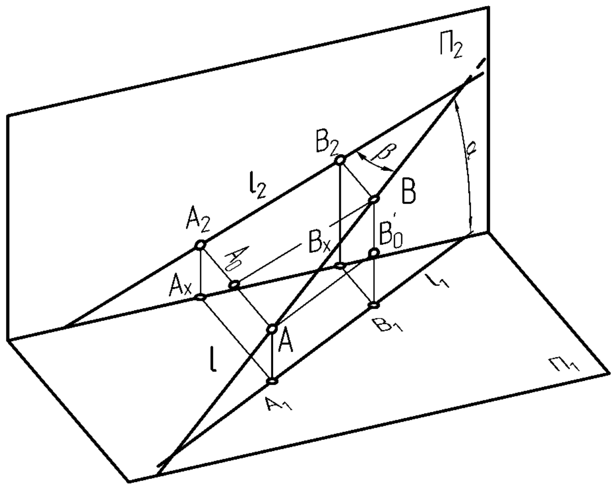


Рис. 2.27

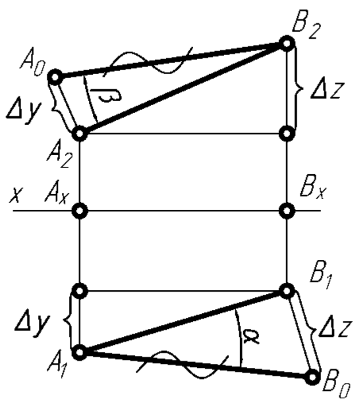


Рис. 2.28

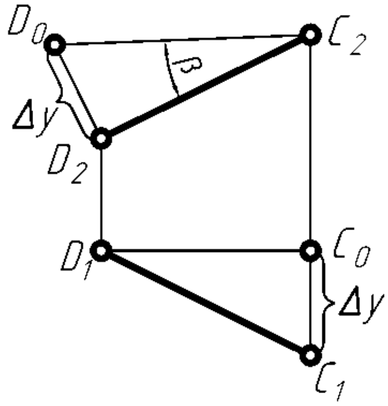


Рис. 2.29

Натуральна величина відрізка прямої дорівнює гіпотенузі прямокутного трикутника, якщо один його катет дорівнює проекції відрізка на одну з площин проекцій, а другий катет дорівнює різниці відстаней від кінців відрізка до тієї ж площини проекцій, кут між відповідною проекцією відрізка та його натуральною величиною також дорівнює натуральній величині кута нахилу прямої до цієї площини проекцій. Щоб визначити кути нахилу прямої до всіх площин проекцій необхідно, побудову його натуральної величини виконувати на проекціях відрізків на дані площини.

Завдання 2.5. Визначити натуральну величину відрізка [***CD***] і величину кута його нахилу до $\mathbf{\Pi_2}$ (рис. 2.29).

Розв'язування. Для визначення натуральної величини відрізка [***CD***] ([C_1D_1],[C_2D_2]) використовують правило прямокутного трикутника. Оскільки необхідно визначити кут нахилу відрізка [***CD***] до $\mathbf{\Pi_2}$, побудову виконують на фронтальній проекції відрізка ([C_2D_2]). Отже розглядають [C_2D_2] як катет прямокутного трикутника. Через D_2 проводять перпендикуляр до [C_2D_2], на якому відкладають Δy – різницю відстаней від C_1 і D_1 до $\mathbf{\Pi_2}$. Для визначення Δy через C_1 проводять вертикальний промінь, через D_1 – горизонтальний промінь. У точці перетину променів отримують C_0. Тоді $C_1C_0=\Delta y$. Відклавши на перпендикулярі від D_2 Δy, отримують D_0. Отже C_2D_0 – натуральна величина відрізка [***CD***], кут $D_2C_2C_0=\beta$ – величина кута нахилу [***CD***] до $\mathbf{\Pi_2}$.

2.7. Взаємне розташування прямих у просторі

У просторі прямі можуть збігатися, перетинатися, бути паралельними і мимобіжними.

Якщо прямі збігаються, то на комплексному кресленні їх однойменні проекції також збігаються ($a\equiv b\Rightarrow a_1\equiv b_1,\ a_2\equiv b_2$) (рис. 2.30).

Якщо прямі паралельні, то їх однойменні проекції також паралельні (рис. 2.31) ($c\|d\Rightarrow c_1\|d_1,\ c_2\|d_2$).

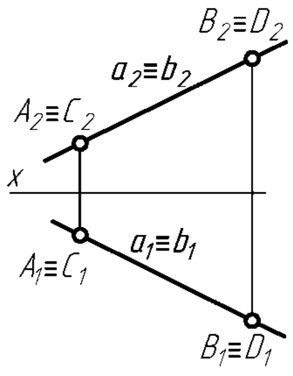


Рис. 2.30

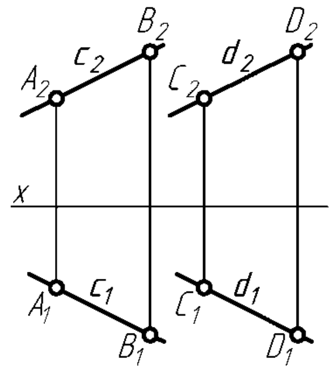


Рис. 2.31

Якщо прямі перетинаються, то їх однойменні проекції теж перетинаються і проекції точок перетину розташовані на відповідних лініях проекційного зв’язку (рис. 2.32) ($\boldsymbol{l \cap m = N \Rightarrow l_1 \cap m_1 = N_1,\ l_2 \cap m_2 = N_2}$).

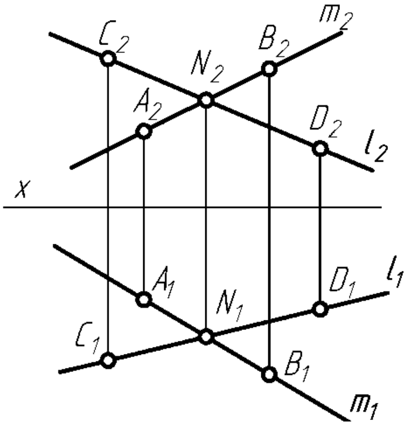


Рис. 2.32

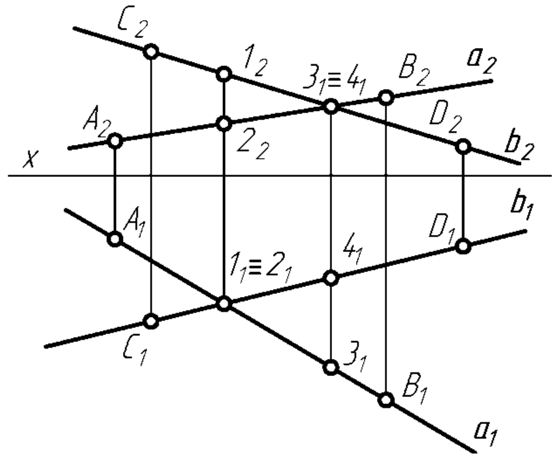


Рис. 2.33

Якщо прямі не паралельні й не перетинаються, то їх називають мимобіжними. Однойменні проекції мимобіжних прямих перетинаються, але проекції точок перетину не лежать на відповідних лініях проекційного зв’язку (рис. 2.33) ($a \overset{\circ}{\_} \boldsymbol{b}$).

Завдання 2.6. Через точку ***C***, яка не належить відрізку [***AB***], провести: а) пряму ***l***, паралельну [***AB***] ($\boldsymbol{l \| AB}$); б) пряму ***m***, що перетинає [***AB***] в точці ***D*** ($\boldsymbol{m \cap AB = D}$); в) пряму ***n***, мимобіжну до [***AB***] ($\boldsymbol{n} \overset{\circ}{\_} \boldsymbol{AB}$) (рис. 2.34).

Розв’язування. Прямі паралельні, якщо їхні однойменні проекції паралельні. Отже, через $\boldsymbol{C_2}$ будують $\boldsymbol{l_2}$ паралельно до $\boldsymbol{A_2B_2}$($\boldsymbol{l_2 \| A_2B_2}$), через $\boldsymbol{C_1}$ будують $\boldsymbol{l_1}$ паралельно до $\boldsymbol{A_1B_1}$($\boldsymbol{l_1 \| A_1B_1}$).

Прямі перетинаються в точці ***D***, якщо їхні однойменні проекції перетинаються в однойменних проекціях точки ***D***. Отже, на відрізку [***AB***] довільно вибирають точку ***D*** ($\boldsymbol{D_1 \subset A_1B_1,\ D_2 \subset A_2B_2}$), через $\boldsymbol{C_2}$ і $\boldsymbol{D_2}$ будують $\boldsymbol{m_2}$, через $\boldsymbol{C_1}$ і $\boldsymbol{D_1}$ будують $\boldsymbol{m_1}$.

Однойменні проекції мимобіжних прямих можуть перетинатися, але проекції їх точок перетину не лежать на відповідних лініях проекційного зв’язку. Отже, через $\boldsymbol{C_2}$ будують довільну пряму $\boldsymbol{n_2}$, яка не збігається з попередньо побудованими прямими $\boldsymbol{m_2}$ і $\boldsymbol{l_2}$. Через $\boldsymbol{C_1}$ проводять довільну пряму $\boldsymbol{n_1}$, точка перетину якої з $\boldsymbol{A_1B_1}$ не лежить на вертикальній лінії проекційного зв'язку з точкою перетину $\boldsymbol{n_2}$ і $\boldsymbol{A_2B_2}$.

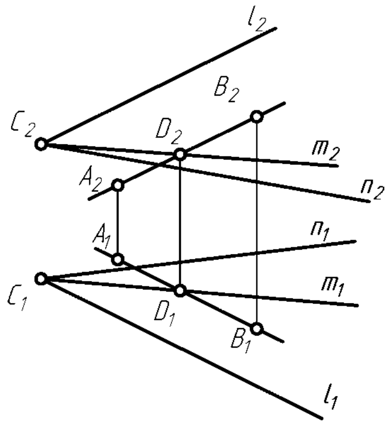


Рис. 2.34

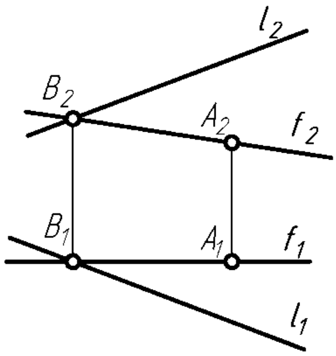


Рис. 2.35

Завдання 2.7. Через точку $\boldsymbol{A}$ провести фронтальну пряму $\boldsymbol{f}$, яка б перетинала пряму $\boldsymbol{l}$ (рис. 2.35).

Розв'язування. Горизонтальна проекція фронтальної прямої ($\boldsymbol{f_1}$) завжди паралельна осі $\boldsymbol{x}$ ($\boldsymbol{f_1}||\boldsymbol{x}$). Отже, через $\boldsymbol{A_1}$ проводять пряму, паралельну осі $\boldsymbol{x}$ до перетину з горизонтальною проекцією прямої ($\boldsymbol{l_1}$) і отримують $\boldsymbol{B_1}$ ($\boldsymbol{f_1 \cap l_1 = B_1}$). Через $\boldsymbol{B_1}$ проводять вертикальну лінію проекційного зв'язку до перетину з фронтальною проекцією прямої ($\boldsymbol{l_2}$), отримують фронтальну проекцію точки перетину прямої $\boldsymbol{l}$ ($\boldsymbol{l_2}$) з фронтальною проекцією фронтальної прямої ($\boldsymbol{f_2}$), ($\boldsymbol{B_2 = f_2 \cap l_2}$), сполучають $\boldsymbol{B_2}$ з $\boldsymbol{A_2}$ й отримують $\boldsymbol{f_2}$.

Запитання для самоконтролю

1. В чому полягає різниця між прямими загального і окремого положення?
2. Що спільного та чим відрізняються фронтально проекціююча пряма та фронтальна пряма?
3. Що називають слідом прямої лінії на площині?
4. Скільки слідів утворює пряма загального положення при її проекціюванні на три площини проекцій?

5. Скільки слідів утворює пряма рівня при її проекціюванні на три площини проекцій?
6. Скільки слідів утворює проекціююча пряма при її проекціюванні на три площини проекцій?
7. Які бувають випадки взаємного розміщення прямих у просторі?
8. Чи можна встановити паралельність двох профільних прямих за їх проекціями на площинах Π_1 і Π_2?
9. В чому полягає ознака належності точки до прямої?
10. Як визначити натуральну величину відрізка прямої загального положення?
11. Як визначити кути нахилу прямої загального положення до Π_1 і Π_2?
12. Що визначають конкуруючі точки прямих?

РОЗДІЛ 3. ПРОЕКЦІЮВАННЯ ПЛОЩИН

3.1. Способи зображення площин на кресленні

Площину уявляють як нескінчену множину положень прямої лінії, яка переміщається у просторі паралельно самій собі вздовж іншої прямої лінії. Такі лінії називають твірною і напрямною.

Площини можна задавати трьома точками, які не лежать на одній прямій (трикутником); прямою і точкою, яка не лежить на даній прямій; двома прямими, які перетинаються; двома паралельними прямими.

На кресленнях площини задають проекціями трьох точок, які не лежать на одній прямі $\boldsymbol{\alpha(A, B, C)}$ (рис. 3.1); проекціями прямої і точки яка не лежить на даній прямі; $\boldsymbol{\beta(A \notin l)}$ (рис. 3.2); проекціями двох прямих, які перетинаються $\boldsymbol{\Omega(c \cap d)}$ (рис. 3.3); проекціями двох паралельних прямих $\boldsymbol{\Delta(m || n)}$ (рис. 3.4).

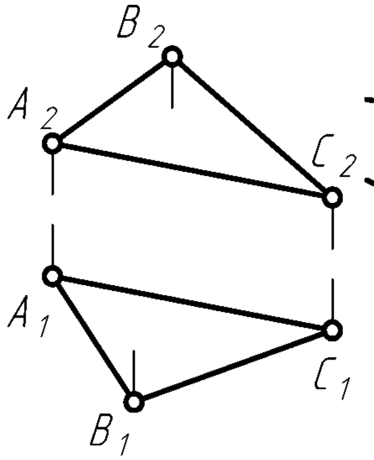


Рис. 3.1

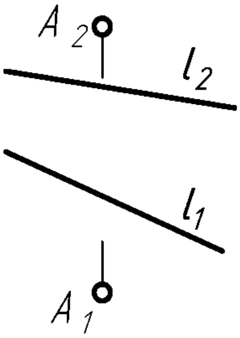


Рис. 3.2

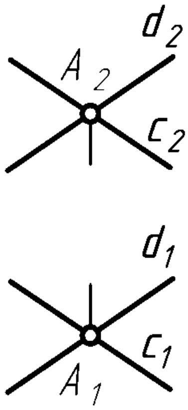


Рис. 3.3

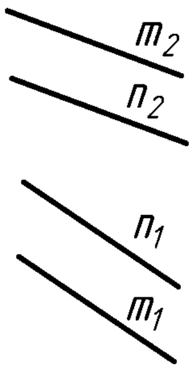


Рис. 3.4

Площини на кресленні можна задавати слідами $\boldsymbol{\Sigma(h_\Sigma, f_\Sigma)}$ (рис. 3.5). Слід площини – це пряма лінія, по якій дана площина перетинає площину проекцій. $\boldsymbol{h_\Sigma}$ – горизонтальний слід площини $\boldsymbol{\Sigma}$ – лінія перетину площин $\boldsymbol{\Sigma}$ і $\boldsymbol{\Pi_1}$ ($\boldsymbol{h_\Sigma = \Sigma \cap \Pi_1}$), $\boldsymbol{f_\Sigma}$ – фронтальний слід площини $\boldsymbol{\Sigma}$ – лінія перетину площин $\boldsymbol{\Sigma}$ і $\boldsymbol{\Pi_2}$ ($\boldsymbol{f_\Sigma = \Sigma \cap \Pi_2}$), $\boldsymbol{p_\Sigma}$ – профільний слід площини $\boldsymbol{\Sigma}$ – лінія перетину площин $\boldsymbol{\Sigma}$ і $\boldsymbol{\Pi_3}$ ($\boldsymbol{p_\Sigma = \Sigma \cap \Pi_3}$). Під час задавання площин завжди можна перейти від одного способу їх задавання до іншого.

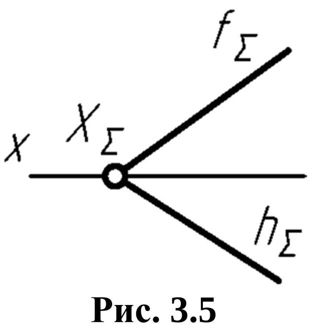


Рис. 3.5

3.2. Проекціювання площини загального положення

В інженерній графіці площини розділяють на площини загального й особливого (окремого) положення. Площина загального положення не паралельна і не перпендикулярна жодній із площин проекцій. Площина особливого (окремого) положення паралельна або перпендикулярна до однієї з площин проекцій.

На рис. 3.6 зображена площина загального положення. Сліди площини загального положення ніколи не паралельні до осей проекцій. Кожен слід площини загального положення перетинає дві відповідні осі проекцій. Два сліди однієї площини перетинають вісь проекцій у спільній точці, яку називають точкою збігу слідів. Сліди площини завжди лежать в одній з площин проекцій, отже є прямими особливого положення. В результаті проекціювання слідів площини на площини проекцій отримують (рис. 3.7): $h_{\Sigma 1}$ – горизонтальну проекцію горизонтального сліду; $h_{\Sigma 2}$ – фронтальну проекцію горизонтального сліду; $h_{\Sigma 3}$ – профільну проекцію горизонтального сліду; $f_{\Sigma 1}$ – горизонтальну проекцію фронтального сліду; $f_{\Sigma 2}$ – фронтальну проекцію фронтального сліду; $f_{\Sigma 3}$ – профільну проекцію фронтального сліду; $p_{\Sigma 1}$ – горизонтальну проекцію профільного сліду; $p_{\Sigma 2}$ – фронтальну проекцію профільного сліду; $p_{\Sigma 3}$ – профільну проекцію профільного сліду. Оскільки сліди площини лежать у площинах проекцій, то дві з трьох проекцій сліду завжди лежать на відповідних осях проекцій. Так $h_{\Sigma 2}$ і $f_{\Sigma 1}$ лежать на осі x ($h_{\Sigma 2} \equiv f_{\Sigma 1} \equiv x$); $h_{\Sigma 3}$ і $p_{\Sigma 1}$ лежать на осі y ($h_{\Sigma 3} \equiv p_{\Sigma 1} \equiv y$); $f_{\Sigma 3}$ і $p_{\Sigma 2}$ лежать на осі z ($f_{\Sigma 3} \equiv p_{\Sigma 2} \equiv z$).

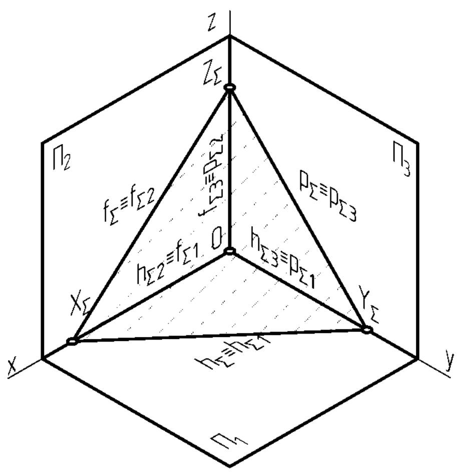


Рис. 3.6

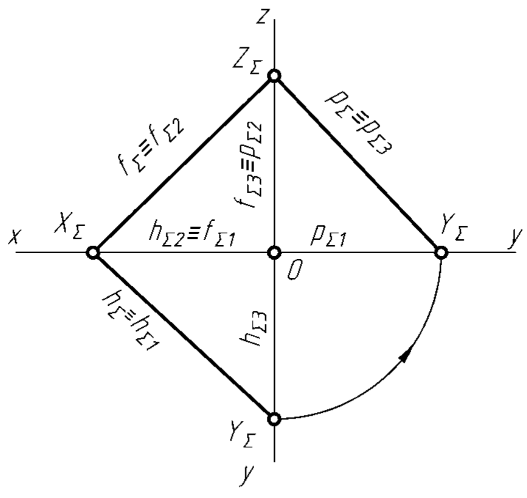


Рис. 3.7

3.3. Побудова слідів площини на площинах проекцій

Для побудови слідів площини достатньо в заданій площині виділити дві прямі, побудувати проекції їх слідів і отримані однойменні проекції слідів прямих сполучити прямими лініями.

Нехай площина задана двома прямими, які перетинаються $\alpha(a \cap b)$ (рис. 3.8). Для побудови доцільно використати прямі, якими задана площина α. Будують сліди прямої a: продовжують a_2 до перетину з x, отримують H_2 ($a_2 \cap x = H_2$), через H_2 проводять вертикальну лінію проекційного зв'язку до перетину з a_1, отримують $H_1 \equiv H$, продовжують a_1 до перетину з x, отримують F_1 ($a_1 \cap x = F_1$), через F_1 проводять вертикальну лінію проекційного зв'язку до перетину з a_2, отримують $F_2 \equiv F$. Будують сліди прямої b: продовжують b_2 до перетину з x, отримують H_2^1 ($b_2 \cap x = H_2^1$), через H_2^1 проводять вертикальну лінію проекційного зв'язку до перетину з b_1, отримують $H_1^1 \equiv H^1$, продовжують b_1 до перетину з x, отримують F_1^1 ($b_1 \cap x = F_1^1$), через F_1^1 проводять вертикальну лінію проекційного зв'язку до перетину з b_2, отримують $F_2^1 \equiv F^1$. Через H_1 і H_1^1 проводять h_α – горизонтальний слід площини α, через F_2 і F_2^1 проводять f_α – фронтальний слід площини α.

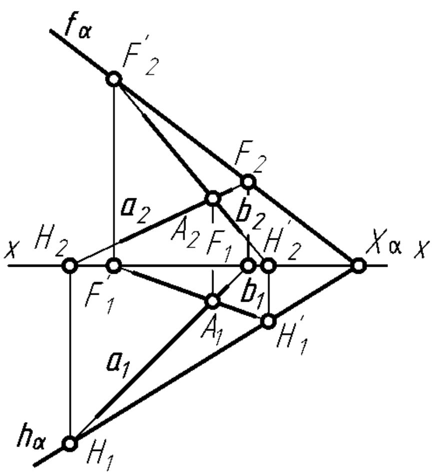


Рис. 3.8

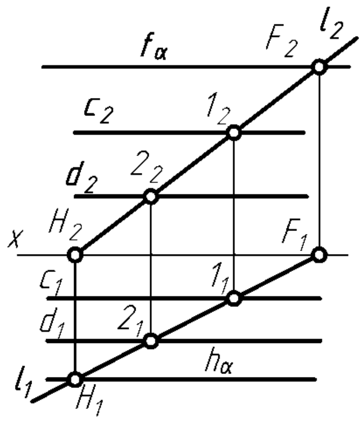


Рис. 3.9

Завдання 3.1. Побудувати сліди площини $\beta(c||d)$ (рис. 3.9).

Розв'язування. Проекції прямих, які задають площину β паралельні до x, отже це профільно-проекціюючі прямі. Таким чином площина β перпендикулярна до Π_3. Для побудови слідів такої площини необхідно побудувати її профільну проекцію, або побудувати проекції додаткової прямої, яка б належала заданій площині і була нахилена до Π_1 і Π_2. Перший шлях розв'язку технічно складніший, тому використовують побудову проекцій додаткової прямої $l(l_1, l_2)$. Через c_2 і d_2 довільно проводять l_2, нахилену до x, отримують точки 1_2 ($l_2 \cap c_2 = 1_2$) і 2_2 ($l_2 \cap d_2 = 2_2$), прямим проекціюванням (проводячи вертикальні лінії проекційного зв'язку) отримують 1_1 на c_1 і 2_1 на d_1 через 1_1 і 2_1 проводять l_1. Горизонтальний і фронтальний сліди площини, перпендикулярної до Π_3, паралельні осі x ($h_\beta || f_\beta || x$) і проходять через сліди прямої l. Отже будують сліди додаткової прямої l: продовжують l_2 до перетину з x і отримують H_2 ($l_2 \cap x = H_2$), прямим проекціюванням на 1_1 отримують H_1, продовжують 1_1 до перетину з x і отримують F_1 ($l_1 \cap x = F_1$), прямим проекціюванням на l_2 отримують F_2. Через H_1 проводять $h_\beta || x$, через F_2 проводять $f_\beta || x$.

3.4. Проекціювання площин, які займають особливе положення відносно площин проекцій

Площини особливого (окремого) положення поділяють на проекціюючі площини і площини рівня. Площини, перпендикулярні до однієї з площин проекцій, називають проекціюючими і носять назву площини, до якої вони перпендикулярні.

Площину, перпендикулярну до Π_1, називають горизонтально проекціюючою (рис. 3.10). фронтальний і профільний сліди такої площини паралельні осі z ($f_\alpha || z ||\ p_\alpha$). Кут нахилу горизонтального сліду h_α до осі x дорівнює куту нахилу горизонтально-проекціюючої площини α до Π_2 (рис. 3.11). Плоскі фігури, які лежать у горизонтально-проекціюючій площині проекціюються на її горизонтальний слід. На безосному епюрі горизонтально-проекціюючу площину задають горизонтальним слідом (рис. 3.12).

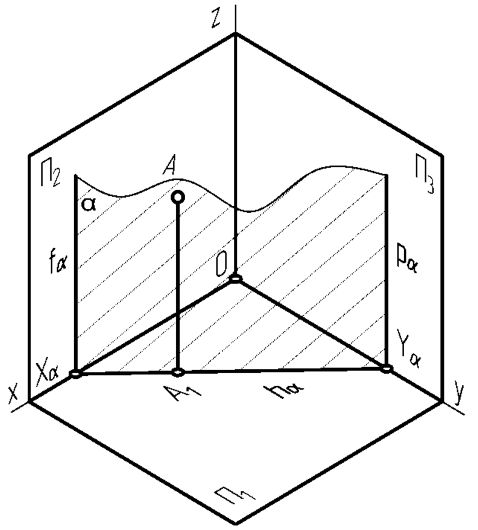


Рис. 3.10

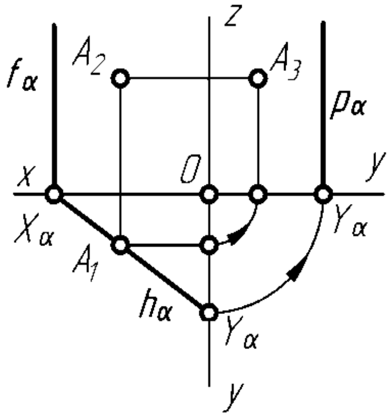


Рис. 3.11

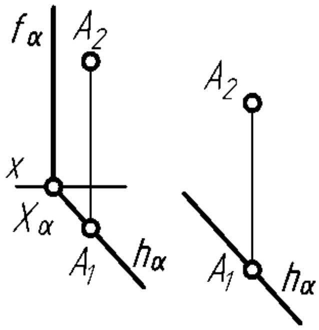


Рис. 3.12

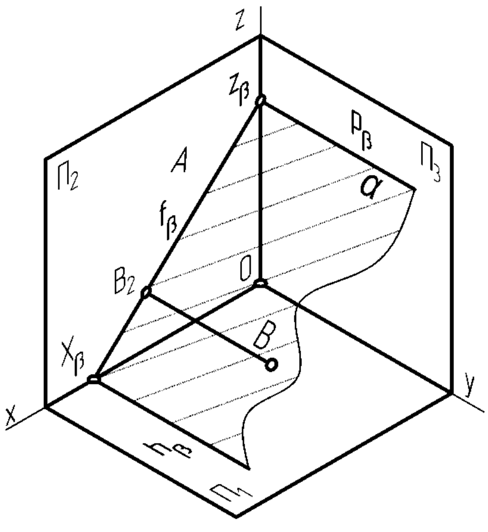


Рис. 3.13

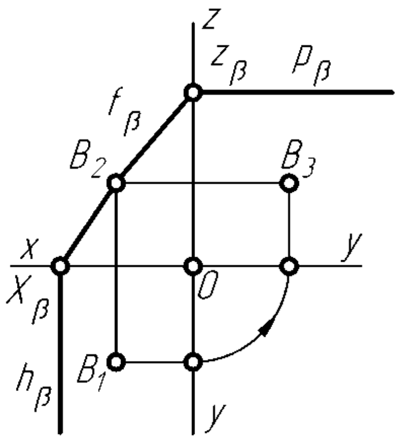


Рис. 3.14

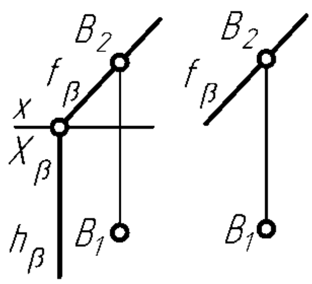


Рис. 3.15

Площину, перпендикулярну до $\mathbf{\Pi_2}$, називають фронтально проекціюючою (рис. 3.13). Горизонтальний і профільний сліди такої площини паралельні до осі $\boldsymbol{y}$ ($\boldsymbol{h_\beta}||\boldsymbol{y}||\boldsymbol{p_\beta}$). Кут нахилу фронтального сліду $\boldsymbol{f_\beta}$ до осі $\boldsymbol{x}$ дорівнює куту нахилу фронтально проекціюючої площини до $\mathbf{\Pi_1}$ (рис. 3.14). Відповідно, кут нахилу фронтального сліду $\boldsymbol{f_\beta}$ до осі $\boldsymbol{z}$ дорівнює куту нахилу фронтально проекціюючої площини до $\mathbf{\Pi_3}$. Плоскі фігури, які лежать у фронтально проекціюючій площині проекціюються на її фронтальний слід. На безосному епюрі фронтально проекціюючу площину задають фронтальним слідом (рис. 3.15).

Площину, перпендикулярну до **П**$_3$, називають профільно-проекціюючою (рис. 3.16). Горизонтальний і фронтальний сліди такої площини паралельні осі $\boldsymbol{x}(\boldsymbol{h}_\gamma||\boldsymbol{x}||\boldsymbol{f}_\gamma)$. Кут нахилу профільного сліду $\boldsymbol{p}_\gamma$ до осі $\boldsymbol{y}$ дорівнює куту нахилу профільно-проекціюючої площини до **П**$_1$ (рис. 3.17). Відповідно, кут нахилу профільного сліду $\boldsymbol{p}_\gamma$ до осі $\boldsymbol{z}$ дорівнює куту нахилу профільно-проекціюючої площини до **П**$_2$. Плоскі фігури, які лежать у профільно-проекціюючій площині, проекціюються на її профільний слід.

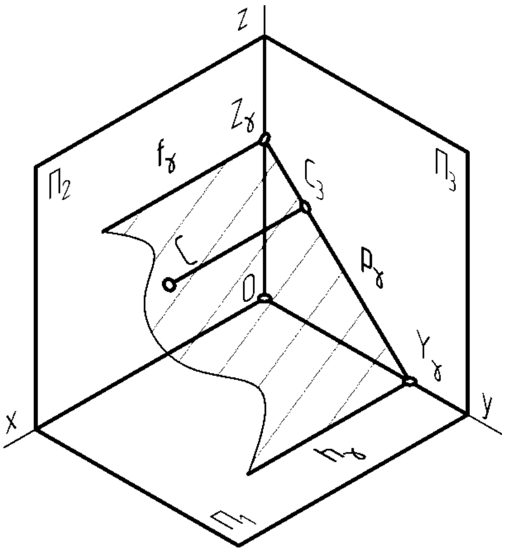


Рис. 3.16

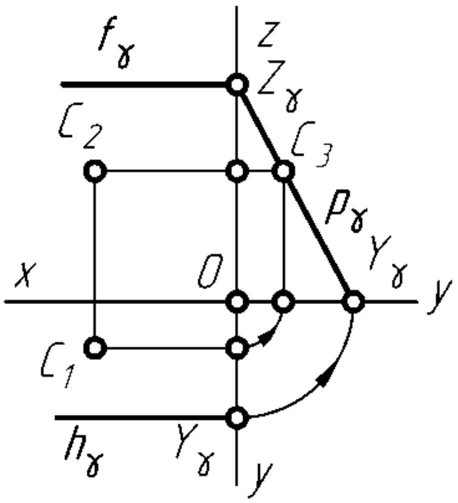


Рис. 3.17

Площини, паралельні до однієї з площин проекцій, називають площинами рівня і носять назву площин, до яких вони паралельні.

Площину, паралельну до **П**$_1$, називають горизонтальною (рис. 3.18). Фронтальний і профільний сліди такої площини перпендикулярні осі $\boldsymbol{z}(\boldsymbol{f}_\alpha\perp\boldsymbol{z}$, $\boldsymbol{p}_\alpha\perp\boldsymbol{z})$ (рис. 3.19). Плоскі фігури, які лежать у горизонтальній площині проекціюються на **П**$_1$ у натуральну величину.

Площину паралельну, до **П**$_2$, називають фронтальною (рис. 3.20). Горизонтальний і профільний сліди такої площини перпендикулярні осі $\boldsymbol{y}(\boldsymbol{h}_\beta\perp\boldsymbol{y}$, $\boldsymbol{p}_\beta\perp\boldsymbol{y})$ (рис. 3.21). Плоскі фігури, які лежать у фронтальній площині, проекціюються на **П**$_2$ у натуральну величину.

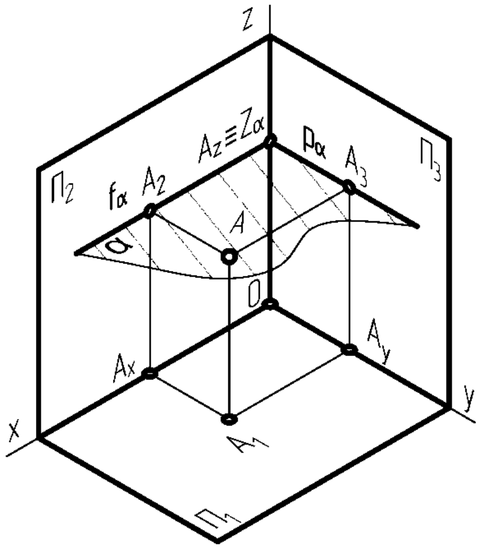


Рис. 3.18

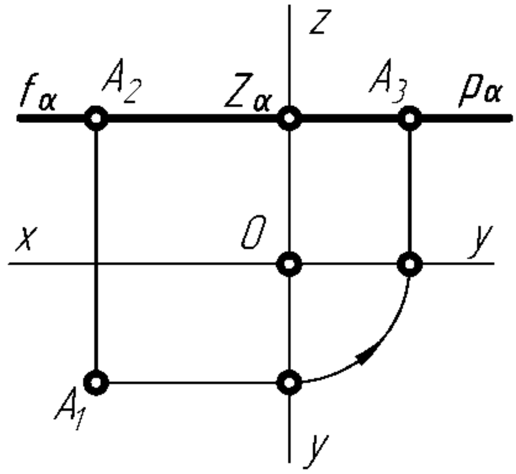


Рис. 3.19

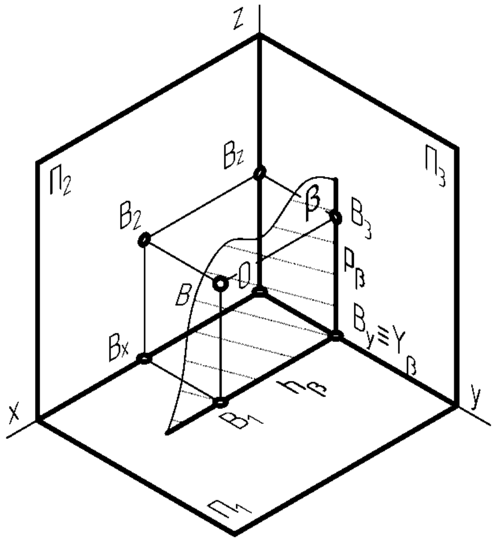


Рис. 3.20

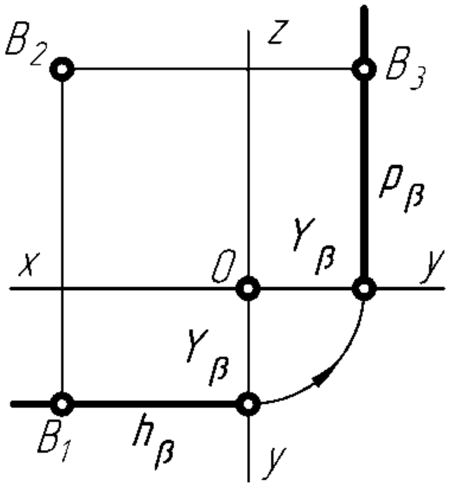


Рис. 3.21

Площину, паралельну до **П3**, називають профільною (рис. 3.22). Горизонтальний і фронтальний сліди такої площини перпендикулярні осі $x(h_\gamma \perp x,\ f_\gamma \perp x)$ (рис. 3.23). Плоскі фігури, які лежать у профільній площині проекціюються на **П3** у натуральну величину.

В інженерній графіці до окремої групи площин відносять осьові й бісекторні площини. Осьовими називають площини, які проходять через одну з осей проекцій. Бісекторними називають осьові площини, які ділять двогранні кути, утворені площинами проекцій навпіл.

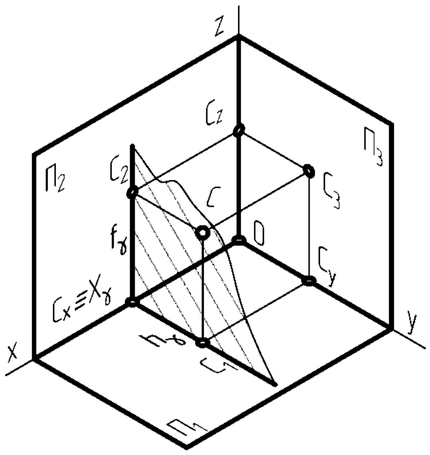


Рис. 3.22

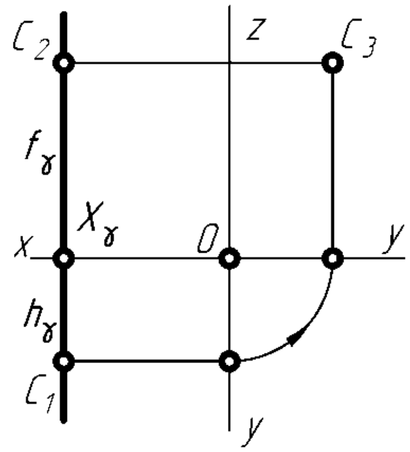


Рис. 3.23

3.5. Проекціювання прямих і точок, які належать площині

З геометрії відомі теореми про пряму, яка належить площині:

1. Пряма належить площині, якщо вона проходить через точку, яка розміщена в даній площині й паралельна до прямої, яка знаходиться в цій площині або паралельна до неї.

2. Пряма належить площині, якщо вона проходить через дві точки, які розміщені в даній площині.

Щоб побудувати пряму $\boldsymbol{l(l_1,l_2)}$, яка належить (інцидентна) площині $\boldsymbol{\alpha(a \cap b)}$ (рис. 3.24) на проекціях прямих, які задають площину, будують проекції точок $\boldsymbol{1(1_1,1_2)}$ і $\boldsymbol{2(2_1,2_2)}$, через $\boldsymbol{1_1}$ і $\boldsymbol{2_1}$ будують $\boldsymbol{l_1}$, через $\boldsymbol{1_2}$ і $\boldsymbol{2_2}$ будують $\boldsymbol{l_2}$. Пряма $\boldsymbol{l}$ розташована у площині $\boldsymbol{\alpha(l \in \alpha)}$, оскільки вона перетинає прямі, які задають площину в точках $\boldsymbol{1(l \cap a)}$ і $\boldsymbol{2(l \cap b)}$.

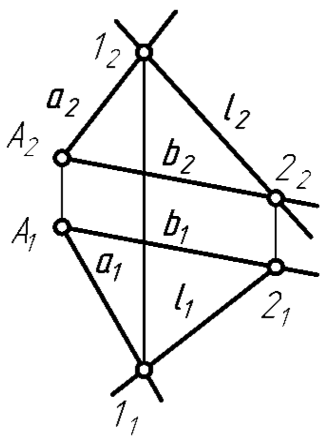


Рис. 3.24

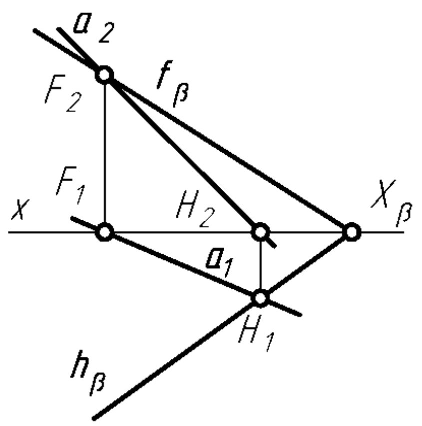


Рис. 3.25

Аналогічно будують проекції прямої, яка належить площині $\boldsymbol{\beta}$, заданій слідами $\boldsymbol{\beta}(\boldsymbol{h_\beta}, \boldsymbol{f_\beta})$ (рис. 3.25). На слідах площини вибирають дві довільні точки $\boldsymbol{H \subset h_\beta}$, $\boldsymbol{F \subset f_\beta}$. Відомо, якщо $\boldsymbol{F_2 \subset f_\beta}$, тоді $\boldsymbol{F_1 \subset x}$, оскільки $\boldsymbol{f_{\beta 1} \equiv x}$, якщо $\boldsymbol{H_1 \subset h_\beta}$, $\boldsymbol{H_2 \subset x}$, оскільки $\boldsymbol{h_{\beta 2} \equiv x}$. Отже, прямим проекціюванням на осі $\boldsymbol{x}$ отримують $\boldsymbol{F_1}$ і $\boldsymbol{H_2}$, через $\boldsymbol{H_1}$ і $\boldsymbol{F_1}$ проводять $\boldsymbol{a_1}$, через $\boldsymbol{H_2}$ і $\boldsymbol{F_2}$ проводять $\boldsymbol{a_2}$.

Точка належить площині, коли вона лежить на прямій, яка належить площині. Отже, щоб побудувати проекції точки $\boldsymbol{D}$, яка належить площині $\boldsymbol{\tau}(\boldsymbol{A},\boldsymbol{B},\boldsymbol{C})$ (рис. 3.26), будують довільну проекцію точки ($\boldsymbol{D_1}$). Через $\boldsymbol{D_1}$ проводять проекцію прямої $\boldsymbol{l_1}$, яка належить площині ($\boldsymbol{l \subset \tau}$), оскільки вона проходить через одну з точок, які задають площину ($\boldsymbol{A \subset l}$) і перетинає $\boldsymbol{BC}$ у точці $\boldsymbol{M}(\boldsymbol{l_1 \cap C_1B_1 = M_1})$. Прямим проекціюванням на $\boldsymbol{C_2B_2}$ будують $\boldsymbol{M_2}$, через $\boldsymbol{A_2}$ і $\boldsymbol{M_2}$ будують $\boldsymbol{l_2}$ і прямим проекціюванням на $\boldsymbol{l_2}$ будують $\boldsymbol{D_2}(\boldsymbol{D \subset l}, \boldsymbol{l \subset \tau \Rightarrow D \subset \tau})$.

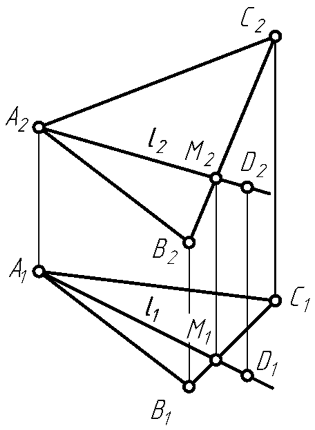


Рис. 3.26

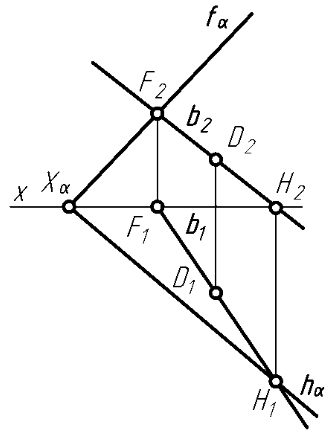


Рис. 3.27

Завдання 3.2. Побудувати горизонтальну проекцію точки $\boldsymbol{D}$, яка належить площині заданій слідами $\boldsymbol{\alpha}(\boldsymbol{h_\alpha}, \boldsymbol{f_\alpha})$ (рис. 3.27).

Розв'язування. Через $\boldsymbol{D_2}$ проводять фронтальну проекцію прямої $\boldsymbol{b}$, яка належить $\boldsymbol{\alpha}(\boldsymbol{b_2 \cap f_\alpha = F_2}, \boldsymbol{b_2 \cap x = H_2})$, прямим проекціюванням $\boldsymbol{F_2}$ на $\boldsymbol{x}$ будують $\boldsymbol{F_1}$, прямим проекціюванням $\boldsymbol{H_2}$ на $\boldsymbol{h_\alpha}$ будують $\boldsymbol{H_1}$, через $\boldsymbol{F_1}$ і $\boldsymbol{H_1}$ проводять $\boldsymbol{b_1}$, прямим проекціюванням $\boldsymbol{D_2}$ на $\boldsymbol{b_1}$ отримують $\boldsymbol{D_1}$.

3.6. Побудова проекцій плоских фігур

Геометричні фігури, усі точки яких лежать в одній площині, називають плоскими. Проекціювання плоских фігур зводять до побудови проекцій точок і ліній, які розташовані в одній площині. Під час такого проекціювання необхідно пам'ятати: плоска фігура проекціюється в дійсну величину, якщо вона паралельна до однієї з площин проекцій; плоска фігура проекціюється у пряму лінію, якщо вона перпендикулярна до однієї з площин проекцій; проекції плоских фігур, які займають загальне положення відносно площин проекцій завжди подібні до оригіналів.

Нехай задано площину прямими, які перетинаються $\alpha(a \cap b)$, і фронтальну проекцію трикутника ($A_2B_2C_2$), який належить площині α (рис. 3.28). Необхідно побудувати горизонтальну проекцію трикутника. Будують фронтальні проекції прямих k і l, які перетинають сторони трикутника і прямі a і b ($k_2 \cap a_2 = 1_2$, $k_2 \cap b_2 = 2_2$, $k_2 \cap A_2B_2 = 3_2$, $k_2 \cap A_2C_2 = 4_2$, $l_2 \cap b_2 = 5_2$, $l_2 \cap a_2 = 6_2$, $l_2 \cap A_2C_2 = 7_2$, $B_2 \subset l_2$), прямим проекціюванням 1_2 на a_1 отримують 1_1, прямим проекціюванням 2_2 на b_1 отримують 2_1, через 1_1 і 2_1 проводять k_1, прямим проекціюванням 3_2 на k_1 отримують 3_1, прямим проекціюванням 4_2 на k_1 отримують 4_1, прямим проекціюванням 5_2 на b_1 отримують 5_1, прямим проекціюванням 6_2 на a_1 отримують 6_1, через 5_1 і 6_1 проводять l_1, прямим проекціюванням 7_2 на l_1 отримують 7_1, прямим проекціюванням B_2 на l_1 отримують B_1, через 4_1 і 7_1 проводять пряму, прямим проекціюванням A_2 на 4_17_1 отримують A_1, прямим проекціюванням C_2 на 4_17_1 отримують C_1, сполучають A_1, B_1, і C_1 і отримують горизонтальну проекцію трикутника ($A_1B_1C_1$).

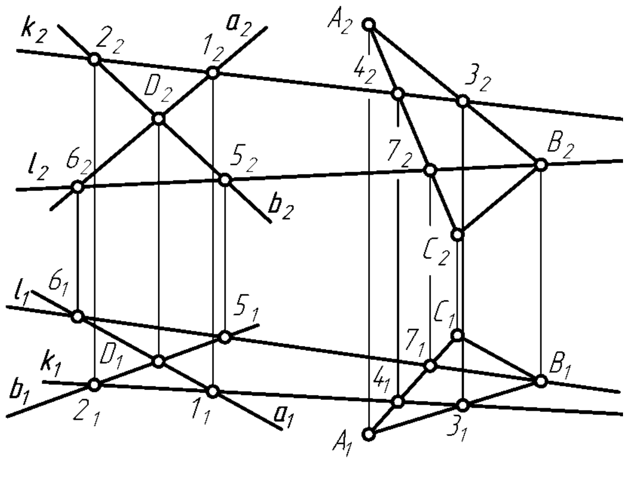


Рис. 3.28

Аналогічно виконують побудову другої проекції плоскої фігури, яка належить площині заданій слідами $\boldsymbol{\beta}(\boldsymbol{h}_{\beta}, \boldsymbol{f}_{\beta})$ (рис. 3.29).

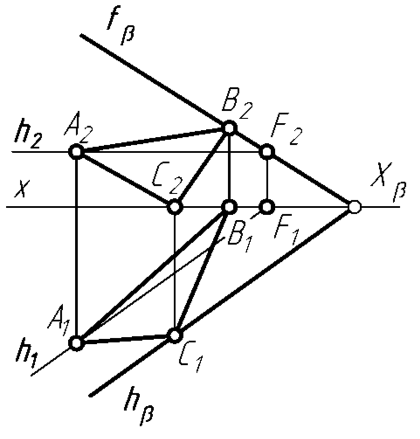


Рис. 3.29

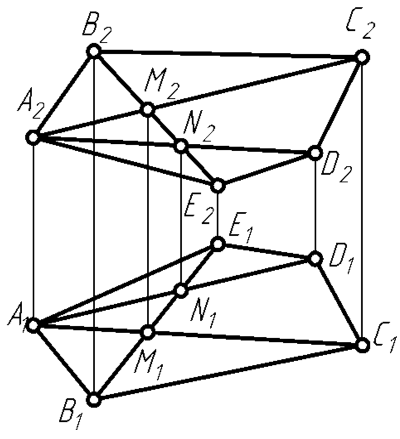


Рис. 3.30

Завдання 3.3. Побудувати фронтальну проекцію п’ятикутника, якщо відома його горизонтальна проекція ($\boldsymbol{A_1B_1C_1D_1E_1}$) і фронтальні проекції його трьох точок ($\boldsymbol{A_2}$, $\boldsymbol{B_2}$, і $\boldsymbol{C_2}$) (рис. 3.30).

Розв’язування. Для побудови приймають, що точки, проекції яких відомі, задають площину, тоді точки, фронтальні проекції яких потрібно побудувати, розміщені у даній площині. Одночасно вказані точки лежать на діагоналях заданого п’ятикутника. Таким чином будують горизонтальні проекції діагоналей $\boldsymbol{A_1D_1}$, $\boldsymbol{A_1C_1}$, $\boldsymbol{B_1E_1}$ і фронтальну проекцію діагоналі $\boldsymbol{A_2C_2}$. У точках перетину діагоналей отримують точки $\boldsymbol{M}$ і $\boldsymbol{N}$ ($\boldsymbol{B_1E_1 \cap A_1D_1 = N_1}$, $\boldsymbol{B_1E_1 \cap A_1C_1 = M_1}$), прямим проекціюванням $\boldsymbol{M_1}$ на $\boldsymbol{A_2C_2}$ отримують $\boldsymbol{M_2}$, проводять $\boldsymbol{B_2M_2}$, прямим проекціюванням $\boldsymbol{E_1}$ на $\boldsymbol{B_2M_2}$ отримують $\boldsymbol{E_2}$, будують $\boldsymbol{A_2E_2}$, прямим проекціюванням $\boldsymbol{N_1}$ на $\boldsymbol{B_2E_2}$ отримують $\boldsymbol{N_2}$, проводять $\boldsymbol{A_2N_2}$, прямим проекціюванням $\boldsymbol{D_1}$ на $\boldsymbol{A_2N_2}$ отримують $\boldsymbol{D_2}$, сполучають $\boldsymbol{A_2}$, $\boldsymbol{B_2}$, $\boldsymbol{C_2}$, $\boldsymbol{D_2}$ і $\boldsymbol{E_2}$ і отримують фронтальну проекцію п’ятикутника $\boldsymbol{ABCDE}$.

3.7. Проекціювання головних ліній площини

Прямі, які належать площині й паралельні до однієї з площин проекцій, називають головними лініями площини. До головних ліній площини відносять також прямі, перпендикулярні до прямих, які паралельні до однієї з площин проекцій.

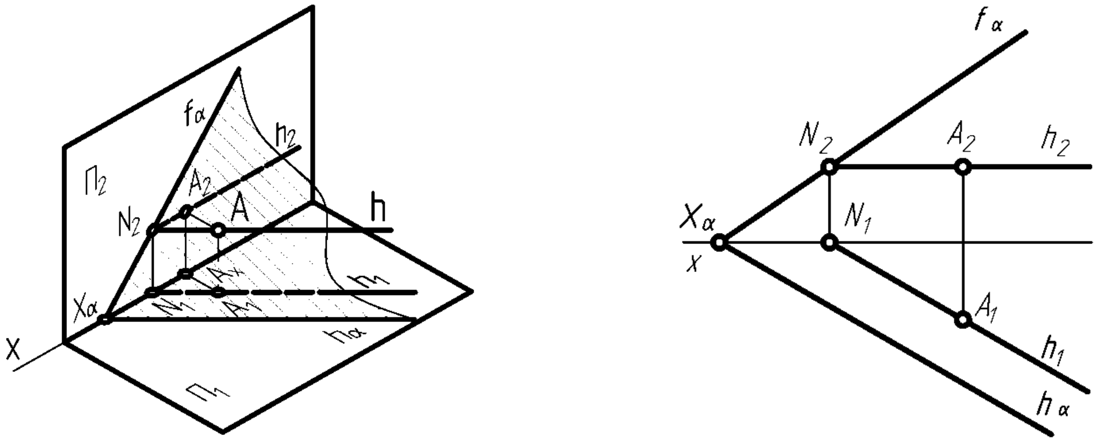


Рис. 3.31

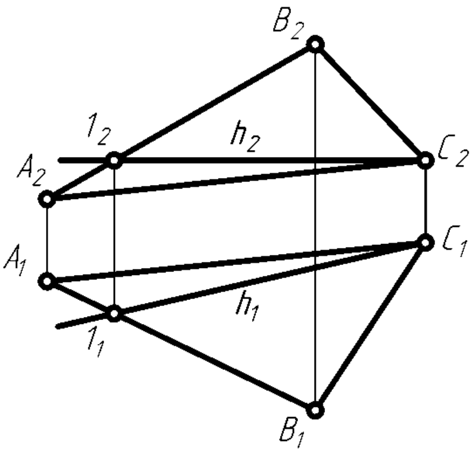
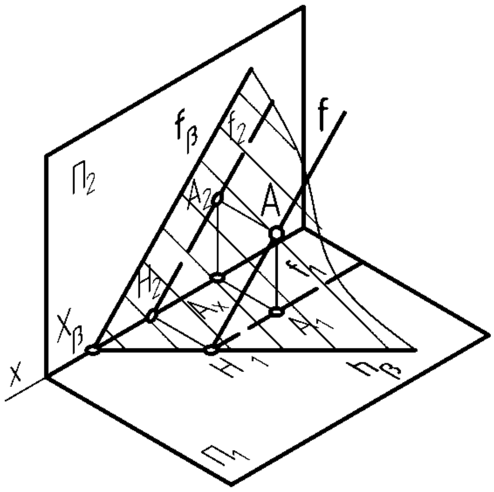


Рис. 3.32

Пряму, яка належить площині й паралельна до Π_1, називають горизонталлю (рис. 3.31). Горизонталі однієї площини паралельні між собою. Фронтальна проекція горизонталі (h_2) завжди паралельна осі x ($h_2 \| x$), горизонтальна проекція горизонталі (h_1) паралельна горизонтальному сліду площини ($h_1 \| h_\alpha$).

Для побудови проекцій горизонталі $h(h_1, h_2)$ у площині $\alpha(A,B,C)$ проводять $h_2 \| x$, ($C_2 \subset h_2$, $A_2B_2 \cap h_2 = 1_2$), прямим проєціюванням 1_2 на A_1B_1 отримують 1_1, через C_1 і 1_1 проводять h_1 (рис. 3.32).

Пряму, яка належить площині й паралельна до Π_2, називають фронталлю (рис. 3.33). Фронталі однієї площини паралельні між собою. Горизонтальна проекція фронталі (f_1) завжди паралельна осі x ($f_1||x$), фронтальна проекція фронталі (f_2) паралельна фронтальному сліду площини ($f_2||f_\beta$).



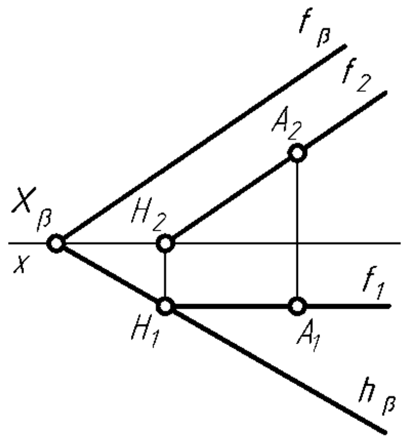


Рис. 3.33

Для побудови проекцій фронталі $f(f_1, f_2)$ у площині $\beta(a||b)$ (рис. 3.34) проводять $f_1||x$, ($f_1\cap a_1=1_1$, $f_1\cap b_1=2_1$), прямим проекціюванням 1_1 на a_2 отримують 1_2, прямим проекціюванням 2_1 на b_2 отримують 2_2, через 1_2 і 2_2 проводять f_2.

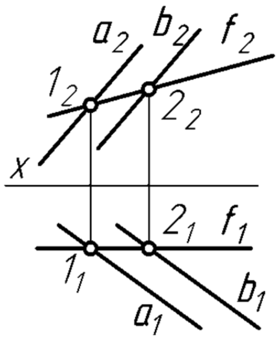


Рис. 3.34

Пряму, яка належить площині і паралельна до **П**$_3$, називають профільною прямою (рис. 3.35). Профільні прямі однієї площини паралельні між собою.

Горизонтальна і фронтальна проекції профільної прямої завжди перпендикулярні осі x ($p_1\perp x$, $p_2\perp x$), профільна проекція профільної прямої (p_3) паралельна профільному сліду площини ($p_3||p_\tau$).

Для побудови проекцій профільної прямої p (p_1, p_2, p_3) у площині $\tau(A,B,C)$ будують три проекції площини τ (рис. 3.36). Через $A_1B_1C_1$ проводять $p_1\perp x$ ($p_1\cap B_1C_1=1_1$, $p_1\cap A_1C_1=2_1$), прямим проекціюванням 1_1 на B_2C_2 отримують 1_2, прямим проекціюванням 2_1 на A_2C_2 отримують 2_2, через 1_2 і 2_2 проводять $p_2\perp x$, прямим проекціюванням 1_2 на B_3C_3 отримують 1_3, прямим проекціюванням 2_2 на A_3C_3 отримують 2_3, через 1_3 і 2_3 проводять p_3.

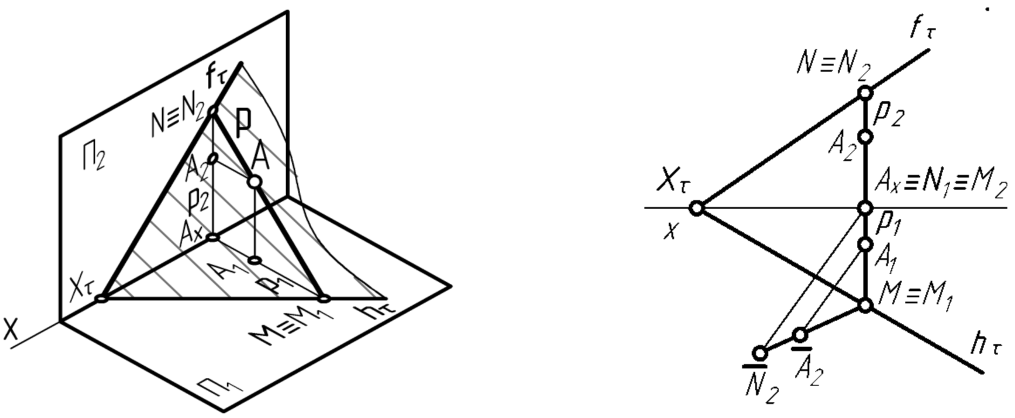


Рис. 3.35

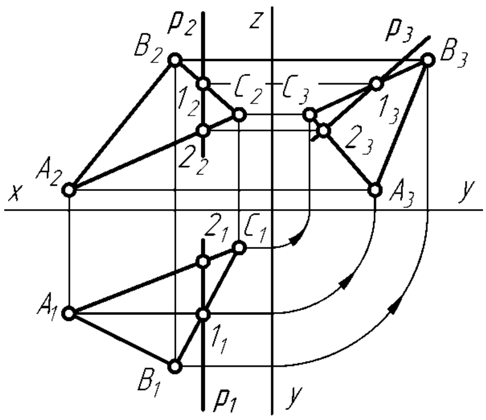


Рис. 3.36

Пряму, яка належить площині і перпендикулярна до її горизонталі, називають лінією найбільшого нахилу до **П₁** (лінією скату). Лінії найбільшого нахилу до **П₁** однієї площини паралельні між собою. Горизонтальна проекція лінії найбільшого нахилу до **П₁** (***p^h_1***) перпендикулярна до горизонтальної проекції горизонталі (***$p^h_1 \perp h_1$***) (рис. 3.37).

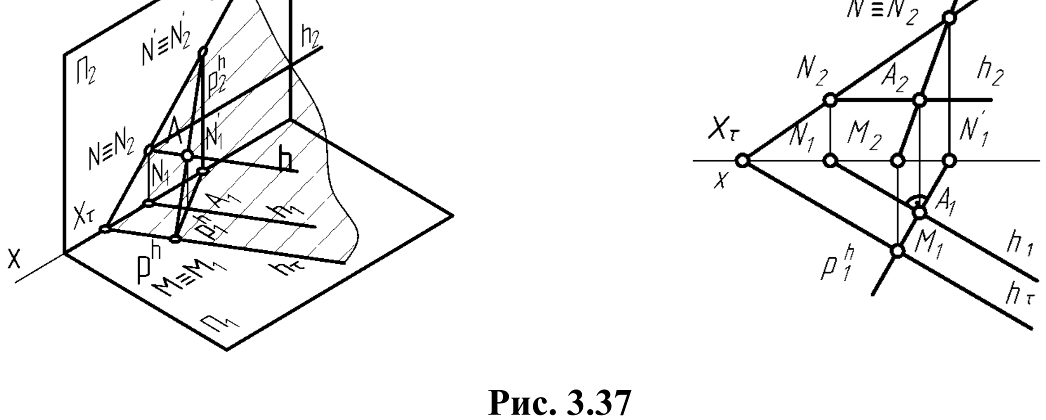


Рис. 3.37

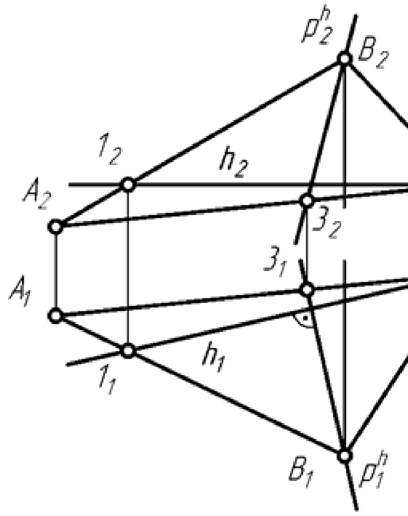


Рис. 3.38

Для побудови проекцій лінії найбільшого нахилу до **П₁** $\boldsymbol{p^h(p^h_1,\ p^h_2)}$ в площині $\boldsymbol{\alpha(A,B,C)}$ будують проекції горизонталі $\boldsymbol{h(h_1,\ h_2)}$, проводять горизонтальну проекцію лінії найбільшого нахилу до **П₁** ($\boldsymbol{p^h_1}$) перпендикулярно до горизонтальної проекції горизонталі ($\boldsymbol{p^h_1 \perp h_1}$) (рис. 3.38), ($\boldsymbol{B_1 \subset p^h_1,\ p^h_1 \cap A_1C_1 = 3_1}$), прямим проекціюванням $\boldsymbol{3_1}$ на $\boldsymbol{A_2C_2}$ отримують $\boldsymbol{3_2}$, через $\boldsymbol{3_2}$ і $\boldsymbol{B_2}$ проводять $\boldsymbol{p^h_2}$.

Пряму, яка належить площині й перпендикулярна до її фронталі, називають лінією найбільшого нахилу до **П₂**. Лінії найбільшого нахилу до **П₂** однієї площини паралельні між собою. Фронтальна проекція лінії найбільшого нахилу до **П₂** ($\boldsymbol{p^f_2}$) перпендикулярна до фронтальної проекції фронталі ($\boldsymbol{p^f_2 \perp f_2}$) (рис. 3.39).

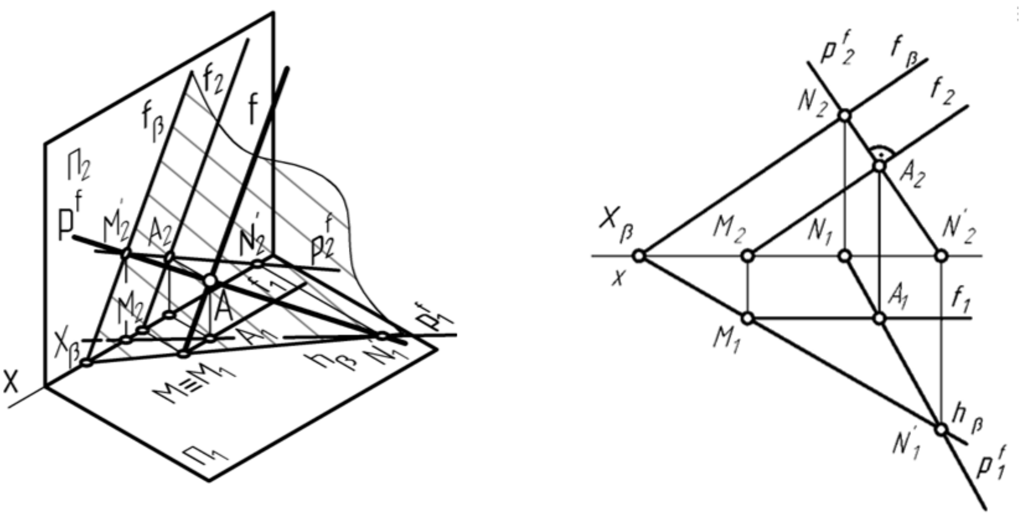


Рис. 3.39

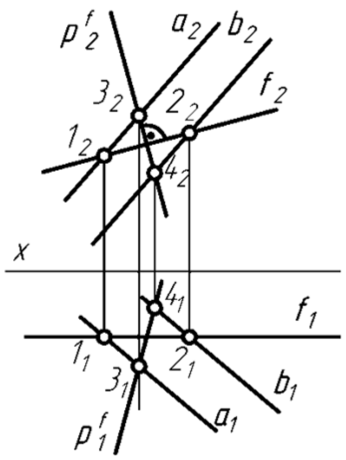


Рис. 3.40

Для побудови проекцій лінії найбільшого нахилу до **П**$_2$ $\boldsymbol{p^f}(\boldsymbol{p^f_1}, \boldsymbol{p^f_2})$ в площині $\boldsymbol{\beta}(\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b})$ будують проекції фронталі $\boldsymbol{f}(\boldsymbol{f_1}, \boldsymbol{f_2})$, проводять фронтальну проекцію лінії найбільшого нахилу до **П**$_2$ ($\boldsymbol{p^f_2}$) перпендикулярну до фронтальної проекції фронталі ($\boldsymbol{p^f_2}\perp\boldsymbol{f_2}$) (рис. 3.40), $\boldsymbol{p^f_2}\cap\boldsymbol{a_2}=\boldsymbol{3_2}$, $\boldsymbol{p^f_2}\cap\boldsymbol{b_2}=\boldsymbol{4_2}$), прямим проекціюванням $\boldsymbol{3_2}$ на $\boldsymbol{a_1}$ отримують $\boldsymbol{3_1}$, прямим проекціюванням $\boldsymbol{4_2}$ на $\boldsymbol{b_1}$ отримують $\boldsymbol{4_1}$, через $\boldsymbol{3_1}$ і $\boldsymbol{4_1}$ проводять $\boldsymbol{p^f_1}$.

Пряму, яка належить площині й перпендикулярна до її профільної прямої, називають лінією найбільшого нахилу до **П**$_3$. Лінії найбільшого нахилу до **П**$_3$ однієї площини паралельні між собою. Профільна проекція лінії найбільшого нахилу до **П**$_3$ ($\boldsymbol{p^p_3}$) перпендикулярна до профільної проекції профільної прямої ($\boldsymbol{p^p_3}\perp\boldsymbol{p_3}$) (рис. 3.41).

Для побудови проекцій лінії найбільшого нахилу до **П**$_3$ $\boldsymbol{p^p}(\boldsymbol{p^p_1}, \boldsymbol{p^p_2}, \boldsymbol{p^p_3})$ у площині $\boldsymbol{\tau}(\boldsymbol{A},\boldsymbol{B},\boldsymbol{C})$ будують проекції профільної прямої $\boldsymbol{p}(\boldsymbol{p_1}, \boldsymbol{p_2}, \boldsymbol{p_3})$, (рис. 3.42), проводять профільну проекцію лінії найбільшого нахилу до **П**$_3$ ($\boldsymbol{p^p_3}$), перпендикулярну до профільної проекції профільної прямої ($\boldsymbol{p^p_3}\perp\boldsymbol{p_3}$), ($\boldsymbol{A_3}\subset\boldsymbol{p^p_3}$, $\boldsymbol{p^p_3}\cap\boldsymbol{B_3C_3}=\boldsymbol{3_3}$), прямим проекціюванням $\boldsymbol{3_3}$ на $\boldsymbol{B_2C_2}$ отримують $\boldsymbol{3_2}$, прямим проекціюванням $\boldsymbol{3_2}$ на $\boldsymbol{B_1C_1}$ отримують $\boldsymbol{3_1}$, через $\boldsymbol{3_2}$ і $\boldsymbol{A_2}$ проводять $\boldsymbol{p^p_2}$, через $\boldsymbol{3_1}$ і $\boldsymbol{A_1}$ проводять $\boldsymbol{p^p_1}$.

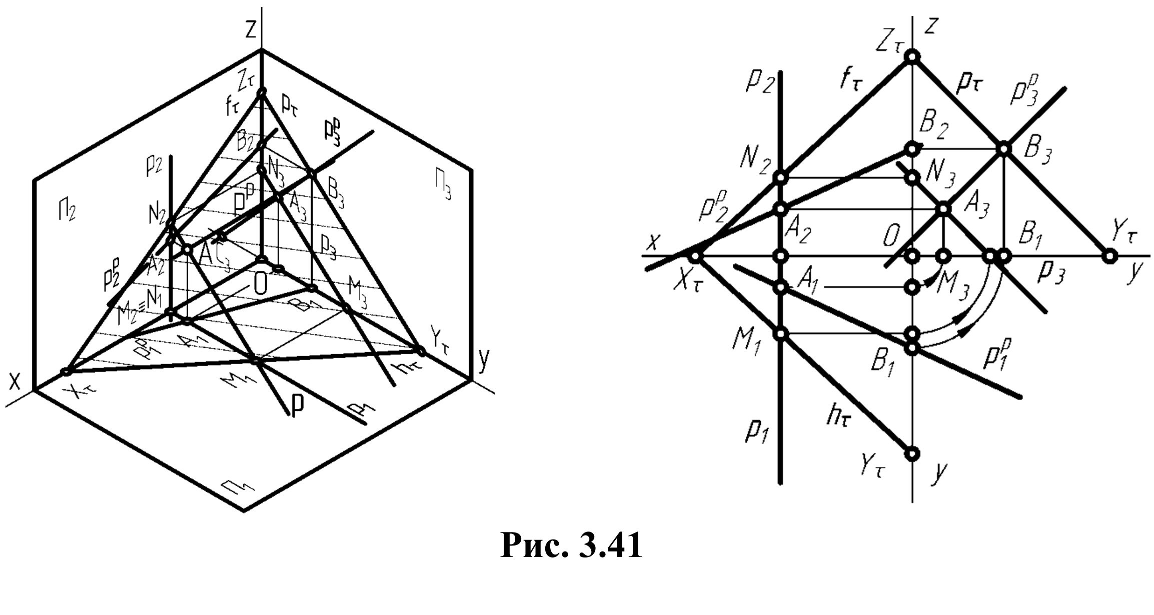


Рис. 3.41

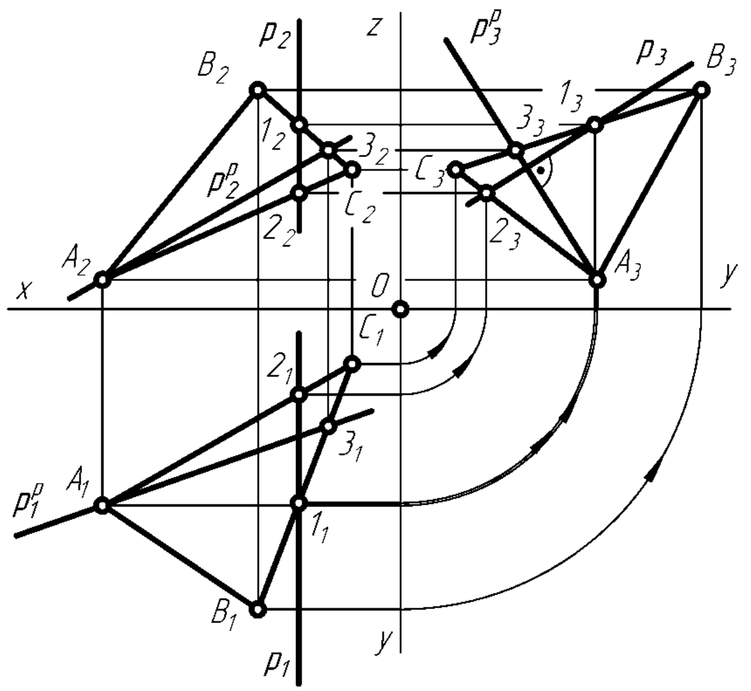


Рис. 3.42

Лінії найбільшого нахилу можна використовувати для визначення положення площини або для визначення кутів нахилу площини для площин проекцій.

Нехай площина $\boldsymbol{\alpha}$ задана слідами ($\boldsymbol{h_\alpha}$, $\boldsymbol{f_\alpha}$) (рис. 3.43). Для визначення кута нахилу площини до $\mathbf{\Pi_1}$ будують проекції лінії найбільшого нахилу до $\mathbf{\Pi_1}$ $\boldsymbol{MN}$($\boldsymbol{M_1N_1}$, $\boldsymbol{M_2N_2}$). Як сказано вище побудову починають з горизонтальної проекції. На $\boldsymbol{h_\alpha}$ вибирають $\boldsymbol{M_1}$($\boldsymbol{M_1 \subset h_\alpha}$), через $\boldsymbol{M_1}$ проводять горизонтальну проекцію лінії найбільшого нахилу до $\mathbf{\Pi_1}$ як перпендикуляр до $\boldsymbol{h_\alpha}$ і продовжують до перетину з віссю $\boldsymbol{x}$ у точці $\boldsymbol{N_1}$($\boldsymbol{M_1N_1 \perp h_\alpha}$), прямим проекціюванням $\boldsymbol{M_1}$ на вісь $\boldsymbol{x}$ отримують $\boldsymbol{M_2}$, прямим проекціюванням $\boldsymbol{N_1}$ на $\boldsymbol{f_\alpha}$ отримують $\boldsymbol{N_2}$, через $\boldsymbol{M_2}$ і $\boldsymbol{N_2}$ проводять фронтальну проекцію лінії найбільшого нахилу до $\mathbf{\Pi_1}$. Кут нахилу площини $\boldsymbol{\alpha}$ до $\mathbf{\Pi_1}$ визначають з допомогою правила прямокутного трикутника. Так через $\boldsymbol{N_1}$ проводять промінь, перпендикулярний до $\boldsymbol{M_1N_1}$, з $\boldsymbol{N_1}$ методом засічок на промені відкладають відрізок, що дорівнює величині різниці перевищень точок $\boldsymbol{M}$ і $\boldsymbol{N}$ над $\mathbf{\Pi_1}$($\boldsymbol{N_2N_1}$) і отримують точку $\boldsymbol{N_0}$, сполучають $\boldsymbol{N_0}$ і $\boldsymbol{M_1}$ і отримують кут $\boldsymbol{N_1M_1N_0 = \varphi}$ – кут нахилу площини $\boldsymbol{\alpha}$ до $\mathbf{\Pi_1}$.

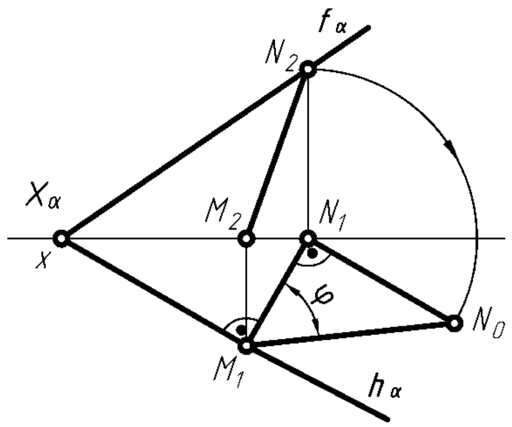


Рис. 3.43

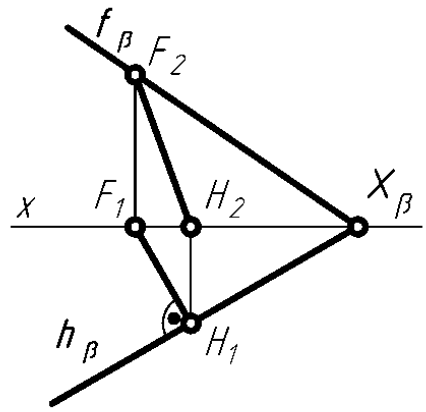


Рис. 3.44

Завдання 3.4. Побудувати сліди площини $\boldsymbol{\beta}(\boldsymbol{h_\beta}, \boldsymbol{f_\beta})$, якщо відомі проекції її лінії найбільшого нахилу до $\mathbf{\Pi_1}(\boldsymbol{H_1F_1}, \boldsymbol{H_2F_2})$, (рис. 3.44).

Розв'язування. Для виконання побудови переходять від безосного епюра до осного, тобто через $\boldsymbol{H_2}$ і $\boldsymbol{F_1}$ проводять вісь $\boldsymbol{x}$, через $\boldsymbol{H_1}$ проводять $\boldsymbol{h_\beta}$ перпендикулярно до $\boldsymbol{H_1F_1}$ ($\boldsymbol{h_\beta} \perp \boldsymbol{H_1F_1}$) і продовжують його до перетину з віссю $\boldsymbol{x}$ у точці збігу слідів $\boldsymbol{X_\beta}$ ($\boldsymbol{h_\beta} \cap \boldsymbol{x} = \boldsymbol{X_\beta}$), через $\boldsymbol{X_\beta}$ і $\boldsymbol{F_2}$ проводять $\boldsymbol{f_\beta}$.

3.8. Перетин довільних прямих та площин площинами окремого положення

Пряма і площина або дві площини можуть перетинатися, бути паралельними або збігатися. Якщо пряма і площина перетинаються, то існує у просторі точка, спільна для прямої і площини. Таку точку називають точкою перетину прямої з площиною, а побудову проекцій точки перетину вважають важливою задачею.

Під час побудови проекцій точки перетину прямої з проекціюючою площиною (рис. 3.45) використовують властивість проекціювання плоских геометричних фігур, які розміщені у проекціюючій площині. Зокрема такі фігури проекціюються на характерний слід проекціюючої площини. Так пряма $\boldsymbol{l}(\boldsymbol{l_1},\boldsymbol{l_2})$ перетинає горизонтально – проекціюючу площину $\boldsymbol{\alpha}(\boldsymbol{h_\alpha}, \boldsymbol{f_\alpha})$ у точці $\boldsymbol{K}(\boldsymbol{l} \cap \boldsymbol{\alpha} = \boldsymbol{K})$, горизонтальна проекція точки перетину $\boldsymbol{K_1}$ лежить у точці перетину

l_1 і ***h_α*** (***$l_1 \cap h_\alpha = K_1$***), фронтальну проекцію точки ***K***(***K_2***) знаходять прямим проекціюванням ***K_1*** на ***l_2***.

Якщо дві площини перетинаються, то існує у просторі пряма спільна для даних площин. Таку пряму називають лінією перетину двох площин. Щоб побудувати лінію перетину двох площин, необхідно побудувати дві точки, які розміщені на даній лінії.

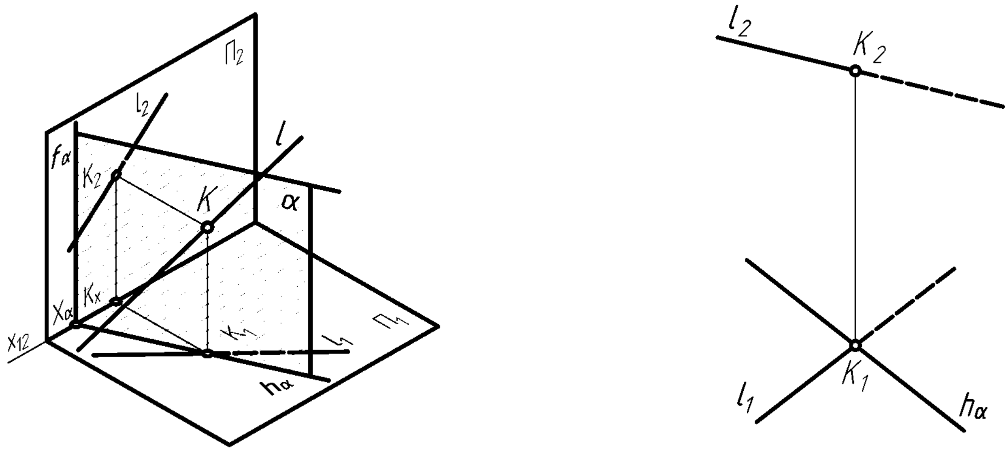


Рис. 3.45

Під час побудови проекцій лінії перетину площини загального положення ***α***(***$m \cap n$***) з горизонтально – проекціюючою площиною ***β***(***h_β***), (рис. 3.46) у площині загального положення виділяють дві прямі (***m*** і ***n***), будують проекції точок перетину ***m*** і ***n*** з площиною ***β***(***$m \cap \beta = M$***, ***$n \cap \beta = N$***), отримані однойменні проекції точок сполучають між собою (***$N_1, M_1 \in l_1$***, ***$N_2, M_2 \in l_2$***).

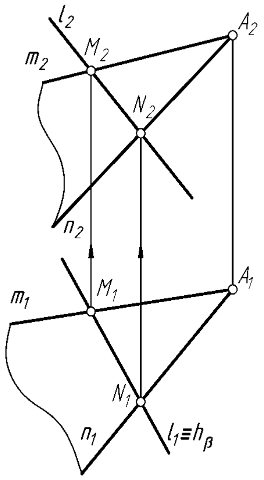


Рис. 3.46

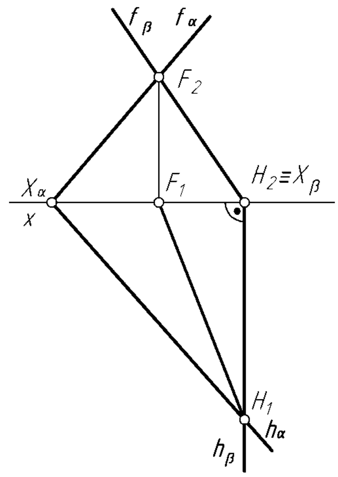


Рис. 3.47

Якщо площини задані слідами $\boldsymbol{\alpha}(\boldsymbol{h_\alpha}, \boldsymbol{f_\alpha})$ – площина загального положення, $\boldsymbol{\beta}(\boldsymbol{h_\beta}, \boldsymbol{f_\beta})$ – фронтально-проекціююча площина (рис. 3.47), то в якості прямих, які належать площині загального положення, вибирають сліди $\boldsymbol{h_\alpha}$ і $\boldsymbol{f_\alpha}$. Тоді проекції точок перетину площин лежать у точках перетину однойменних слідів ($\boldsymbol{h_\alpha} \cap \boldsymbol{h_\beta} = \boldsymbol{H_1}$, $\boldsymbol{f_\alpha} \cap \boldsymbol{f_\beta} = \boldsymbol{F_2}$), прямим проекціюванням $\boldsymbol{H_1}$ і $\boldsymbol{F_2}$ на вісь $\boldsymbol{x}$ отримують $\boldsymbol{H_2}$ і $\boldsymbol{F_1}$, через $\boldsymbol{H_1}$ і $\boldsymbol{F_1}$ проводять горизонтальну проекцію лінії перетину площин $\boldsymbol{\alpha}$ і $\boldsymbol{\beta}$ ($\boldsymbol{H_1F_1}$), через $\boldsymbol{H_2}$ і $\boldsymbol{F_2}$ проводять фронтальну проекцію лінії перетину площин $\boldsymbol{\alpha}$ і $\boldsymbol{\beta}$ ($\boldsymbol{H_2F_2}$).

3.9. Перетин прямої з площиною загального положення та визначення видимості прямої на епюрі

Під час виконання й читання креслень необхідно визначати взаємне розміщення прямої і площини. Існує три випадки взаємного розміщення прямої і площини: пряма належить площині ($\boldsymbol{l} \subset \boldsymbol{\alpha}$), пряма паралельна до площини ($\boldsymbol{b} || \boldsymbol{\alpha}$), пряма перетинає площину ($\boldsymbol{c} \cap \boldsymbol{\alpha}$). Щоб визначити взаємне розміщення прямої і площини на еп'юрі використовують площину-посередник (рис. 3.48). Через пряму $\boldsymbol{l}$ проводять площину $\boldsymbol{\beta}(\boldsymbol{l} \subset \boldsymbol{\beta})$ до перетину з площиною $\boldsymbol{\alpha}$, будують лінію перетину площин $\boldsymbol{\alpha}$ і $\boldsymbol{\beta}$ ($\boldsymbol{\alpha} \cap \boldsymbol{\beta} = \boldsymbol{MN}$).

Якщо $\boldsymbol{MN}$ збігається з прямою $\boldsymbol{l}(\boldsymbol{MN} \equiv \boldsymbol{l})$ – пряма $\boldsymbol{l}$ належить площині $\boldsymbol{\alpha}(\boldsymbol{l} \subset \boldsymbol{\alpha})$.

Якщо $\boldsymbol{MN}$ паралельна до $\boldsymbol{l}$ ($\boldsymbol{MN} || \boldsymbol{l}$) – пряма $\boldsymbol{l}$ паралельна до площини $\boldsymbol{\alpha}(\boldsymbol{l} || \boldsymbol{\alpha})$.

Якщо $\boldsymbol{MN}$ перетинає пряму $\boldsymbol{l}$ ($\boldsymbol{MN} \cap \boldsymbol{l}$) – пряма $\boldsymbol{l}$ перетинає площину $\boldsymbol{\alpha}(\boldsymbol{l} \cap \boldsymbol{\alpha})$.

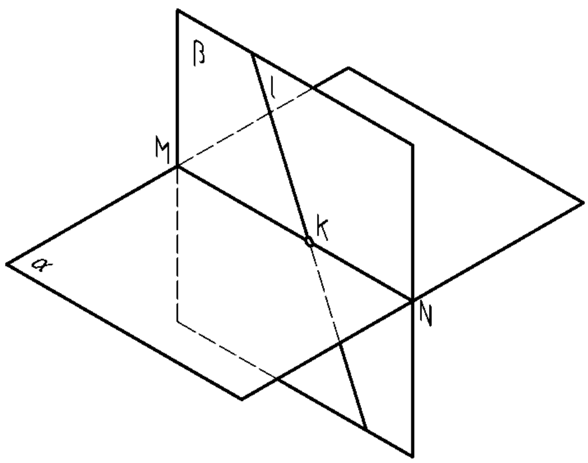


Рис. 3.48

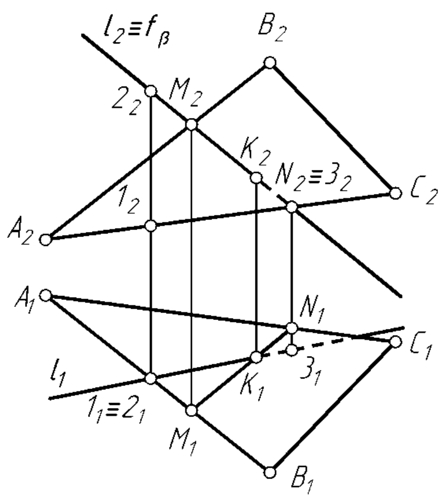


Рис. 3.49

Нехай дані проекції прямої $\boldsymbol{l(l_1,l_2)}$ і площини $\boldsymbol{\alpha(A_1B_1C_1,\ A_2B_2C_2)}$, які не паралельні між собою і займають довільне положення відносно площин проекцій (рис. 3.49). Необхідно побудувати проекції точки перетину прямої з площиною $\boldsymbol{K(K_1,K_2)}$ і визначити видимість прямої.

В якості площини-посередника використовують проекціюючу площину. Тоді її характерний слід збігається з однойменною проекцією прямої.

Для розв'язування поставленої задачі через $\boldsymbol{l}$ проводять фронтально-проекціюючу площину $\boldsymbol{\beta(f_\beta \equiv l_2)}$, будують фронтальну проекцію лінії перетину площин $\boldsymbol{\alpha}$ і $\boldsymbol{\beta}$ $\boldsymbol{M_2N_2}$ $(\boldsymbol{f_\beta \cap A_2B_2 = M_2,\ f_\beta \cap A_2C_2 = N_2})$, прямим проекціюванням $\boldsymbol{M_2}$ на $\boldsymbol{A_1B_1}$ отримують $\boldsymbol{M_1}$, прямим проекціюванням $\boldsymbol{N_2}$ на $\boldsymbol{A_1C_1}$ отримують $\boldsymbol{N_1}$, через $\boldsymbol{M_1}$ і $\boldsymbol{N_1}$ проводять горизонтальну проекцію лінії перетину площин $\boldsymbol{\alpha}$ і $\boldsymbol{\beta}$, в точці перетину $\boldsymbol{M_1N_1}$ з $\boldsymbol{l_1}$ отримують $\boldsymbol{K_1}$ – горизонтальну проекцію точки перетину прямої $\boldsymbol{l}$ з площиною $\boldsymbol{\alpha}$ $(\boldsymbol{M_1N_1 \cap l_1 = K_1})$, прямим проекціюванням $\boldsymbol{K_1}$ на $\boldsymbol{l_2}$ отримують $\boldsymbol{K_2}$ – фронтальну проекцію точки перетину прямої $\boldsymbol{l}$ з площиною $\boldsymbol{\alpha}$.

Для визначення видимості прямої до точки перетину з площиною і після неї використовують проекції конкуруючих точок.

Для визначення видимості на горизонтальній проекції розглядають точки $\boldsymbol{1 \subset AC}$ і $\boldsymbol{2 \subset l}$. Горизонтальні проекції точок співпадають $(\boldsymbol{1_1 \equiv 2_1})$, отже дані точки лежать на проекціюючій прямі. Прямим проекціюванням $\boldsymbol{1_1}$ на $\boldsymbol{A_2C_2}$ і $\boldsymbol{2_1}$ на $\boldsymbol{l_2}$ отримують $\boldsymbol{1_2}$ і $\boldsymbol{2_2}$ і визначають, що точка $\boldsymbol{2}$ лежить відносно до площини $\boldsymbol{\Pi_1}$ вище, ніж точка $\boldsymbol{1}$. Тобто на горизонтальній проекції видимою є точка $\boldsymbol{2}$, яка належить прямій $\boldsymbol{l}$. Це означає, що $\boldsymbol{l_1}$ від точки $\boldsymbol{2_1}$ до $\boldsymbol{K_1}$ видима. Відповідно праворуч від $\boldsymbol{K_1}$ $\boldsymbol{l_1}$ невидима.

Аналогічно визначають видимість на фронтальній проекції, використовуючи конкуруючі точки $\boldsymbol{N \subset AC}$ і $\boldsymbol{3 \subset l}$.

Побудову проекцій точки перетину прямої $\boldsymbol{a}$ з площиною $\boldsymbol{\beta(h_\beta,\ f_\beta)}$ заданою слідами виконують аналогічно розглянутому вище випадку (рис. 3.50): через пряму $\boldsymbol{a}$ проводять горизонтально проекціюючу площину $\boldsymbol{\gamma(a_1 \equiv h_\gamma)}$, будують проекції лінії перетину площин $\boldsymbol{\beta}$ і $\boldsymbol{\gamma}$ $\boldsymbol{HF(H_1F_1,\ H_2F_2)}$, $(\boldsymbol{H_1 = h_\beta \cap h_\gamma,\ F_2 = f_\beta \cap f_\gamma})$, будують проекції точки перетину $\boldsymbol{K(K_1,K_2)}$ прямої $\boldsymbol{a}$ з площиною $\boldsymbol{\beta}$ $(\boldsymbol{a_2 \cap H_2F_2 = K_2})$.

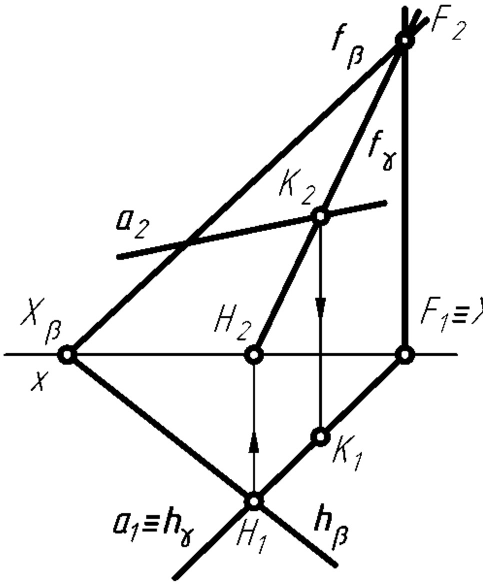


Рис. 3.50

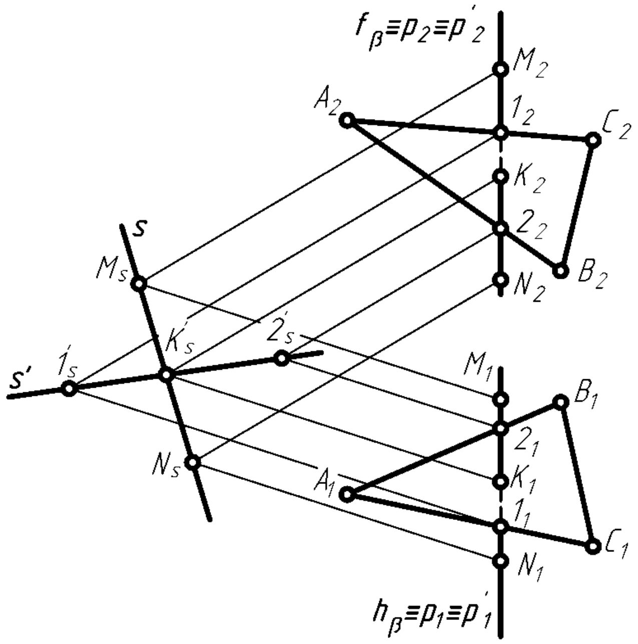


Рис. 3.51

Завдання 3.5. Побудувати проекції точки перетину профільної прямої ***p*** з площиною загального положення α(***ABC***) (рис. 3.51).

Розв'язування. Для побудови використовують промені переломлення. Через проекції точок $M(M_1,M_2)$ і $N(N_1,N_2)$, які належать прямій ***p***, виконують побудову променя переломлення $s(M_s,N_s)$, через пряму ***p*** проводять профільну площину $\beta(h_\beta, f_\beta)$, яка перетинає площину α по профільній прямі $p^1(p^1{}_1,p^1{}_2)$, точки $1(1_1,1_2)$ і $2(2_1,2_2)$ належать p^1 ($f_\beta \cap A_2C_2=1_2$, $f_\beta \cap A_2B_2=2_2$, $h_\beta \cap A_1B_1=2_1$, $h_\beta \cap A_1C_1=1_1$), через проекції точок ***1*** і ***2*** виконують побудову променя переломлення $s^1(1s^1,2s^1)$. Промені переломлення ***s*** і s^1 перетинаються в точці K_s ($s \cap s^1=K_s$), яка і є точкою перетину прямої ***p*** з площиною α, K_1 і K_2 будують як проекції точки ***K***, яка належить профільній прямі.

Видимість прямої ***p*** відносно площини α визначають з допомогою променів переломлення або за просторовою уявою.

Завдання 3.6. Побудувати проекції точки перетину прямої $b(b_1, b_2)$ з площиною $\alpha(h_\alpha,f_\alpha)$, причому сліди площини на кресленні збігаються, а проекції прямої паралельні до слідів площини ($b_1||h_\alpha \equiv f_\alpha||b_2$) (рис. 3.52).

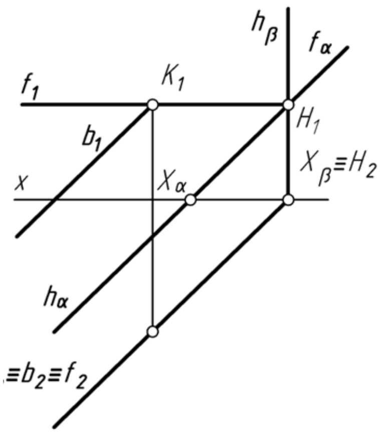


Рис. 3.52

Розв'язування. Через пряму $\boldsymbol{b}$ проводять фронтально-проекціюючу площину $\boldsymbol{\beta}$ ($\boldsymbol{b_2 \equiv f_\beta}$), будуючи проекції лінії перетину площин $\boldsymbol{\alpha}$ і $\boldsymbol{\beta}$ враховують, що фронтальні сліди площин не перетинаються ($\boldsymbol{f_\alpha || f_\beta}$), отже фронтальна проекція лінії перетину площин $\boldsymbol{f_2}$ збігається з $\boldsymbol{f_\beta}$ як пряма, що лежить у фронтально-проекціюючій площині ($\boldsymbol{f_\beta \equiv b_2 \equiv f_2}$). Горизонтальна проекція лінії перетину площин $\boldsymbol{f_1}$ паралельна осі $\boldsymbol{x}$ і проходить через точку перетину горизонтальних слідів площин $\boldsymbol{H_1}$ ($\boldsymbol{h_\alpha \cap h_\beta = H_1}$). Горизонтальна проекція точки перетину прямої $\boldsymbol{b}$ з площиною $\boldsymbol{\alpha}$ знаходиться у точці перетину $\boldsymbol{f_1}$ з $\boldsymbol{b_1}$ ($\boldsymbol{f_1 \cap b_1 = K_1}$), прямим проекціюванням $\boldsymbol{K_1}$ на $\boldsymbol{b_2}$ отримують $\boldsymbol{K_2}$.

3.10. Побудова проекцій лінії взаємного перерізу площин

Площини перерізаються по прямих лініях, які називають лініями взаємного перерізу площин. Для побудови проекцій ліній взаємного перерізу площин на кресленні використовують проекціюючі площини-посередники.

Якщо на кресленні однойменні проекції відсіків площин накладаються, тоді для побудови проекцій лінії взаємного перерізу площин достатньо виділити у площинах дві прямі лінії, побудувати проекції точок їхнього перетину з площинами й отримані однойменні проекції точок сполучити між собою.

Нехай потрібно побудувати проекції лінії взаємного перерізу площини $\boldsymbol{\alpha(ABC)}$ з площиною $\boldsymbol{\beta(a||b)}$ (рис. 3.53). Для виконання побудови вибирають прямі, які задають площини. При цьому, прямі можуть належати одній з них або двом різним площинам. У нашому випадку для побудови використовують прямі $\boldsymbol{AB}$ і $\boldsymbol{BC}$. Через $\boldsymbol{AB}$ проводять фронтально-проекціюючу площину $\boldsymbol{\tau(f_\tau \equiv A_2B_2)}$ і будують проекції точки перетину $\boldsymbol{AB}$ з $\boldsymbol{\beta}$ ($\boldsymbol{AB \cap \beta = M}$), через $\boldsymbol{BC}$ проводять горизонтально-проекціюючу площину $\boldsymbol{\gamma}$ ($\boldsymbol{h_\gamma \equiv B_1C_1}$) і будують проекції точки перетину $\boldsymbol{BC}$ з $\boldsymbol{\beta}$ ($\boldsymbol{BC \cap \beta = N}$). В результаті побудови отримують $\boldsymbol{M_2N_2}$ – фронтальну проекцію і $\boldsymbol{M_1N_1}$ – горизонтальну проекцію лінії взаємного перерізу площин $\boldsymbol{\alpha}$ і $\boldsymbol{\beta}$.

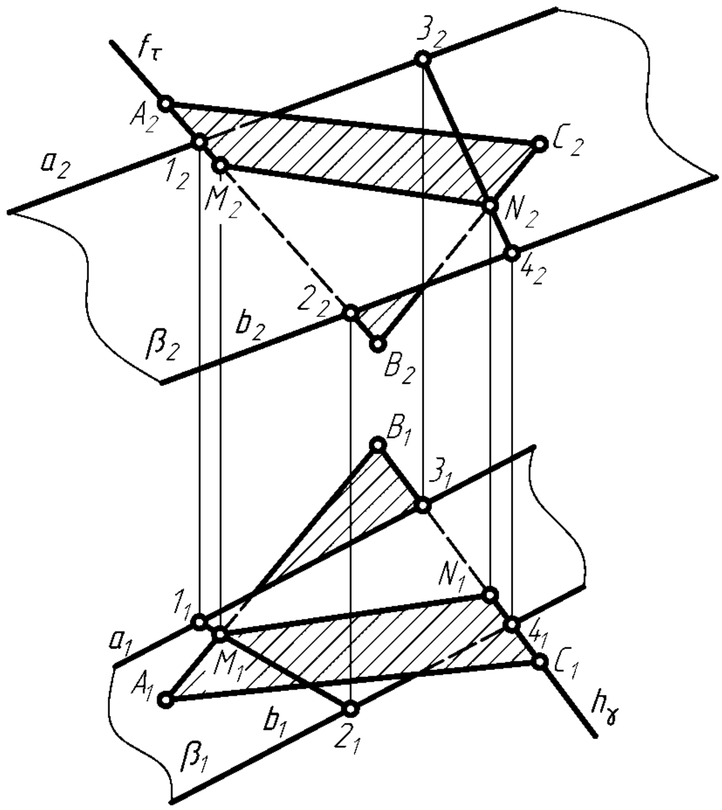


Рис. 3.53

Видимість елементів площин визначають з допомогою описаного вище методу конкуруючих точок.

Якщо на кресленні однойменні проекції відсіків площин не накладаються, тоді для побудови проекцій лінії взаємного перерізу площин достатньо використати дві проекціюючі площини-посередники, які перерізають кожну із заданих площин. Відповідно лінії перерізу заданих площин з площиною посередником перетинаються й отримана точка перетину лежить на лінії перерізу заданих площин. Таким чином, побудувавши проекції ліній перерізу заданих площин з двома площинами-посередниками, отримують проекції двох точок, які лежать на лінії взаємного перерізу заданих площин. Сполучивши однойменні проекції побудованих точок, отримують проекції лінії взаємного перерізу заданих площин. Якщо лінії перерізу заданих площин з площиною-посередником паралельні між собою, то задані площини теж паралельні.

Нехай потрібно побудувати проекції лінії взаємного перерізу площини $\boldsymbol{\alpha}(\boldsymbol{a} \cap \boldsymbol{b})$ з площиною $\boldsymbol{\beta}(\boldsymbol{m} || \boldsymbol{n})$ (рис. 3.54). Для виконання побудови використовують фронтально-проекціюючі площини $\boldsymbol{\tau}$ і $\boldsymbol{\gamma}$.

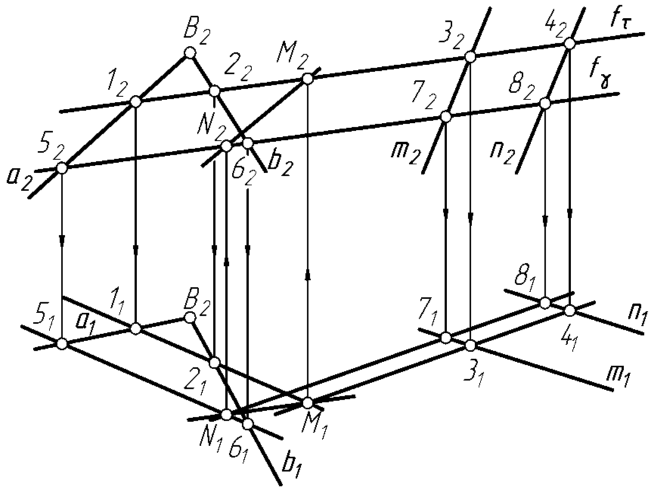


Рис. 3.54

Площина $\boldsymbol{\tau}$ перерізає площину $\boldsymbol{\alpha}$ – по прямій ***12***, а площину $\boldsymbol{\beta}$ – по прямій ***34***, фронтальні проекції прямих ***12*** і ***34*** збігаються з фронтальним слідом площини $\boldsymbol{\tau}$ ($1_2 2_2 \equiv f_\tau$, $3_2 4_2 \equiv f_\tau$). Прямим проекціюванням на горизонтальні проекції прямих, які задають площини $\boldsymbol{\alpha}$ і $\boldsymbol{\beta}$, отримують 1_1, 2_1, 3_1 і 4_1. Через 1_1 і 2_1 проводять горизонтальну проекцію лінії перерізу заданої площини $\boldsymbol{\alpha}$ з площиною-посередником $\boldsymbol{\tau}$. Через 3_1 і 4_1 проводять горизонтальну проекцію лінії перерізу заданої площини $\boldsymbol{\beta}$ з площиною-посередником $\boldsymbol{\tau}$. Точка перетину $1_1 2_1$ і $3_1 4_1$ ($1_1 2_1 \cap 3_1 4_1 = N_1$) лежить на горизонтальній проекції лінії взаємного перерізу площин $\boldsymbol{\alpha}$ і $\boldsymbol{\beta}$. Прямим проекціюванням N_1 на f_τ отримують N_2.

Аналогічно будують проекції точки $M(M_1, M_2)$ яка лежить на лінії взаємного перерізу площин $\boldsymbol{\alpha}$ і $\boldsymbol{\beta}$, використовуючи для цього фронтально проекціюючу площину $\boldsymbol{\gamma}$.

У результаті побудови отримують $M_1 N_1$ – горизонтальну проекцію і $M_2 N_2$ – фронтальну проекцію лінії взаємного перерізу площин $\boldsymbol{\alpha}$ і $\boldsymbol{\beta}$.

Побудова проекцій ліній взаємного перерізу площин, заданих слідами залежить від їхнього розташування. Під час аналізу такого розташування виділяють три випадки:

1) однойменні сліди площин перетинаються у межах креслення;
2) одна пара однойменних слідів у межах креслення не перетинається;
3) обидві пари однойменних слідів у межах креслення не перетинаються.

Нехай потрібно побудувати проекції лінії взаємного перерізу площин $\boldsymbol{\alpha}(\boldsymbol{h}_{\alpha},\boldsymbol{f}_{\alpha})$ і $\boldsymbol{\beta}(\boldsymbol{h}_{\beta},\boldsymbol{f}_{\beta})$, однойменні сліди яких перетинаються в точках $\boldsymbol{H}(\boldsymbol{H}\equiv\boldsymbol{H}_1)$ і $\boldsymbol{F}(\boldsymbol{F}\equiv\boldsymbol{F}_2)$, $(\boldsymbol{h}_{\alpha}\cap\boldsymbol{h}_{\beta}=\boldsymbol{H}_1,\ \boldsymbol{f}_{\alpha}\cap\boldsymbol{f}_{\beta}=\boldsymbol{F}_2)$ (рис. 3.55).

Прямим проекціюванням $\boldsymbol{H}_1$ і $\boldsymbol{F}_2$ на вісь $\boldsymbol{x}$ отримують $\boldsymbol{H}_2$ і $\boldsymbol{F}_1$, сполучають однойменні проекції точок $\boldsymbol{H}$ і $\boldsymbol{F}$ і отримують $\boldsymbol{H}_1\boldsymbol{F}_1$ – горизонтальну проекцію і $\boldsymbol{H}_2\boldsymbol{F}_2$ – фронтальну проекцію лінії взаємного перерізу площин $\boldsymbol{\alpha}$ і $\boldsymbol{\beta}$.

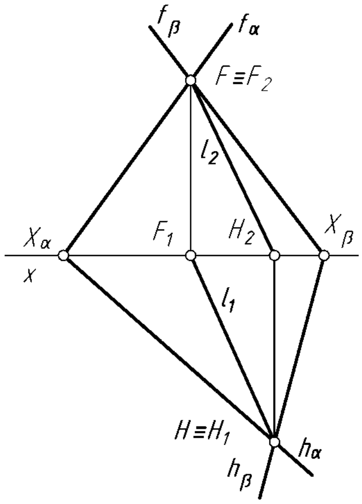


Рис. 3.55

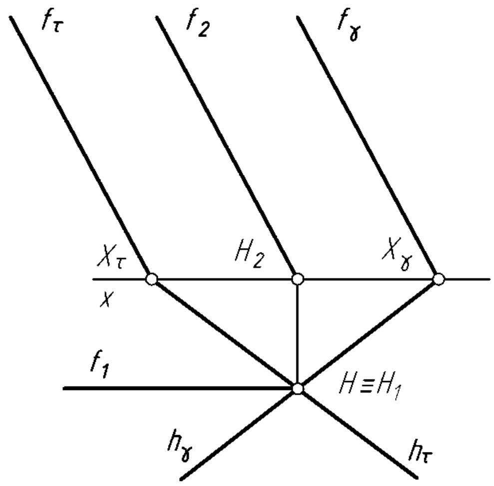


Рис. 3.56

Якщо одна пара однойменних слідів у межах креслення не перетинається, сліди можуть бути паралельними або перетинатися поза межами креслення.

Нехай у площинах $\boldsymbol{\tau}(\boldsymbol{h}_{\tau},\boldsymbol{f}_{\tau})$ і $\boldsymbol{\gamma}(\boldsymbol{h}_{\gamma},\boldsymbol{f}_{\gamma})$ фронтальні сліди паралельні $(\boldsymbol{f}_{\tau}||\boldsymbol{f}_{\gamma})$ (рис. 3.56). Лінія взаємного перерізу вказаних площин – фронталь-горизонтальна проекція $\boldsymbol{f}_1$, якої проходить через точку перетину $\boldsymbol{h}_{\tau}$ і $\boldsymbol{h}_{\gamma}$ $(\boldsymbol{h}_{\tau}\cap\boldsymbol{h}_{\gamma}=\boldsymbol{H}_1)$, прямим проекціюванням $\boldsymbol{H}_1$ на $\boldsymbol{x}$ отримують $\boldsymbol{H}_2$, фронтальна проекція фронталі $\boldsymbol{f}_2$ перетинає вісь $\boldsymbol{x}$ у точці $\boldsymbol{H}_2$ і паралельна до фронтальних слідів заданих площин $(\boldsymbol{f}_2\cap\boldsymbol{x}=\boldsymbol{H}_2,\ \boldsymbol{f}_{\tau}||\boldsymbol{f}_{\gamma}||\boldsymbol{f}_2)$.

Якщо одна пара слідів заданих площин $\boldsymbol{\Delta}(\boldsymbol{h_\Delta}, \boldsymbol{f_\Delta})$ і $\boldsymbol{\Sigma}(\boldsymbol{h_\Sigma}, \boldsymbol{f_\Sigma})$ у межах креслення не перетинається (рис. 3.57), положення однієї спільної точки визначають на перетині однойменних слідів ($\boldsymbol{h_\Delta \cap h_\Sigma = H_1 \equiv H}$). Для побудови проекцій другої спільної точки використовують проекціюючу площину-посередник $\boldsymbol{\alpha}$. Доцільно, щоб така площина займала положення площини рівня (була паралельна до однієї з площин проекцій). Горизонтальна площина $\boldsymbol{\alpha}$ перерізає задані площини $\boldsymbol{\Delta}$ і $\boldsymbol{\Sigma}$ по горизонталях $\boldsymbol{h}$ і $\boldsymbol{h^1}$ ($\boldsymbol{\alpha \cap \Delta = h}$, $\boldsymbol{\alpha \cap \Sigma = h^1}$). Фронтальні проекції даних горизонталей збігаються з характерним слідом площини-посередника ($\boldsymbol{h_2 \equiv h^1{}_2 \equiv f_\alpha}$), горизонтальні їх проекції будують як проекції горизонталей, які лежать у площинах, заданих слідами ($\boldsymbol{h_1 || h_\Delta}$, $\boldsymbol{h^1{}_1 || h_\Sigma}$). На перетині $\boldsymbol{h_1}$ і $\boldsymbol{h^1{}_1}$ отримують горизонтальну проекцію другої спільної точки площин $\boldsymbol{\Delta}$ і $\boldsymbol{\Sigma}$ ($\boldsymbol{h_1 \cap h^1{}_1 = F_1}$), прямим проекціюванням $\boldsymbol{F_1}$ на $\boldsymbol{f_\alpha}$ отримують $\boldsymbol{F_2}$, сполучають однойменні проекції точок $\boldsymbol{H}$ і $\boldsymbol{F}$ і отримують $\boldsymbol{H_1F_1}$ – горизонтальну проекцію і $\boldsymbol{H_2F_2}$ – фронтальну проекцію лінії взаємного перерізу площин $\boldsymbol{\Delta}$ і $\boldsymbol{\Sigma}$.

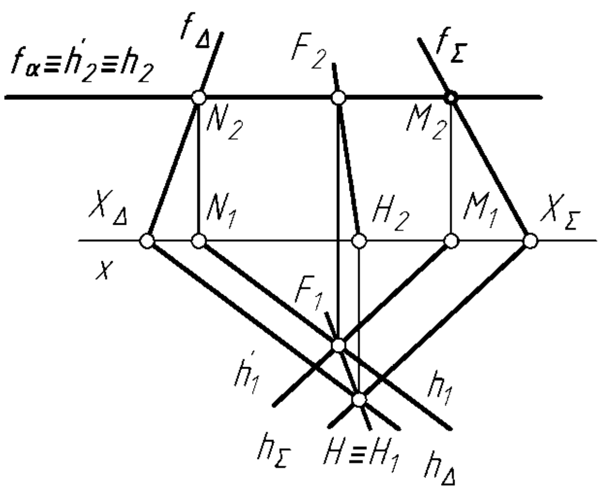


Рис. 3.57

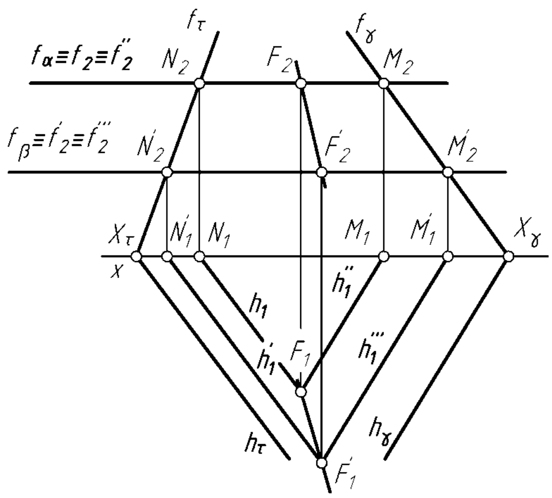


Рис. 3.58

Якщо дві пари слідів заданих площин $\boldsymbol{\tau}(\boldsymbol{h_\tau}, \boldsymbol{f_\tau})$ і $\boldsymbol{\gamma}(\boldsymbol{h_\gamma}, \boldsymbol{f_\gamma})$ у межах креслення не перетинаються (рис. 3.58), для побудови проекцій спільних точок використовують проекціюючі площини-посередники $\boldsymbol{\alpha}$ і $\boldsymbol{\beta}$. Побудову виконують аналогічно приведеній вище побудові проекцій точки $\boldsymbol{F}$, сполучають однойменні проекції точок $\boldsymbol{F}$ і $\boldsymbol{F^1}$ і отримують $\boldsymbol{F_1F^1{}_1}$ – горизонтальну проекцію і $\boldsymbol{F_2F^1{}_2}$ – фронтальну проекцію лінії взаємного перерізу площин $\boldsymbol{\tau}$ і $\boldsymbol{\gamma}$.

Завдання 3.7. Побудувати проекції лінії перерізу двох площин, заданих різними способами $\boldsymbol{\alpha}(\boldsymbol{h}_{\alpha},\boldsymbol{f}_{\alpha})$, $\boldsymbol{\beta}(\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b})$, (рис. 3.59).

Розв'язування. Побудову проводять шляхом заключення двох прямих, які належать площині задані явним способом, у проекціюючі площини, або з використанням проекціюючих площин посередників. Оскільки сліди проекціюючих площин, у які заключені прямі, не завжди перетинаються з однойменними слідами заданої площини у межах креслення, рекомендують використовувати другий метод.

Для побудови використовують проекціюючі площини-посередники $\boldsymbol{\tau}$ і $\boldsymbol{\gamma}$. Площина $\boldsymbol{\tau}$ перерізає площину $\boldsymbol{\alpha}$ по лінії $\boldsymbol{h}$ ($\boldsymbol{h_2}\equiv\boldsymbol{f_\tau}$, $\boldsymbol{h_1}||\boldsymbol{h}_\alpha$) і площину $\boldsymbol{\beta}$ по лінії $\boldsymbol{12}$($\boldsymbol{1_2 2_2}\equiv\boldsymbol{f_\tau}$). На перетині $\boldsymbol{h_1}$ і $\boldsymbol{1_1 2_1}$ отримують горизонтальну проекцію спільної точки $\boldsymbol{M}$($\boldsymbol{h_1}\cap\boldsymbol{1_1 2_1}=\boldsymbol{M_1}$), прямим проекціюванням $\boldsymbol{M_1}$ на $\boldsymbol{f_\tau}$ отримують $\boldsymbol{M_2}$.

Площина $\boldsymbol{\gamma}$ перерізає площину $\boldsymbol{\alpha}$ по лінії $\boldsymbol{h^1}$ ($\boldsymbol{h^1{}_2}\equiv\boldsymbol{f_\gamma}$, $\boldsymbol{h^1{}_1}||\boldsymbol{h}_\alpha$) і площину $\boldsymbol{\beta}$ по лінії $\boldsymbol{34}$($\boldsymbol{3_2 4_2}\equiv\boldsymbol{f_\gamma}$). На перетині $\boldsymbol{h^1{}_1}$ і $\boldsymbol{3_1 4_1}$ отримують горизонтальну проекцію спільної точки $\boldsymbol{N}$($\boldsymbol{h_1}\cap\boldsymbol{3_1 4_1}=\boldsymbol{N_1}$), прямим проекціюванням $\boldsymbol{N_1}$ на $\boldsymbol{f_\gamma}$ отримують $\boldsymbol{N_2}$, сполучають однойменні проекції точок $\boldsymbol{M}$ і $\boldsymbol{N}$ і отримують $\boldsymbol{M_1N_1}$ – горизонтальну проекцію і $\boldsymbol{M_2N_2}$ – фронтальну проекцію лінії перерізу площин $\boldsymbol{\alpha}$ і $\boldsymbol{\beta}$, заданих різними способами.

Завдання 3.8. Побудувати проекції точки перетину трьох площин заданих слідами $\boldsymbol{\alpha}(\boldsymbol{h}_\alpha,\boldsymbol{f}_\alpha)$, $\boldsymbol{\beta}(\boldsymbol{h}_\beta,\boldsymbol{f}_\beta)$, $\boldsymbol{\gamma}(\boldsymbol{h}_\gamma,\boldsymbol{f}_\gamma)$ (рис. 3.60).

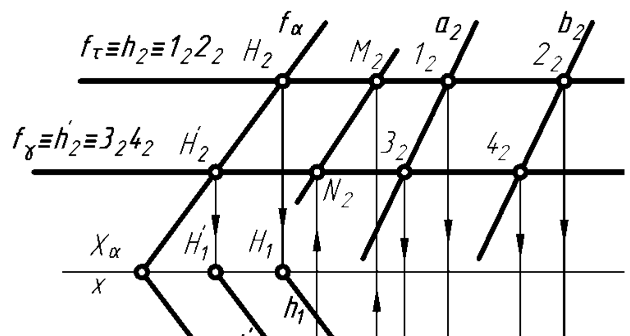


Рис. 3.59

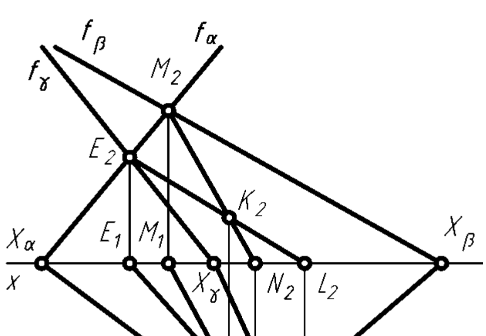


Рис. 3.60

Розв'язування. Точка перетину трьох площин лежить на перетині ліній взаємного перерізу даних площин. Тому з-поміж заданих площин вибирають дві і будують проекції їхньої лінії перерізу. Після побудови вибирають іншу пару площин і будують проекції їхньої лінії перерізу. На перетині побудованих проекцій ліній взаємного перерізу площин отримують проекції точки перетину заданих трьох площин.

Отже будують – проекції лінії перерізу площин α і β ($\alpha \cap \beta = MN(M_1N_1, M_2N_2)$). Аналогічно будують проекції лінії перерізу площин α і γ ($\alpha \cap \gamma = EL(E_1L_1, E_2L_2)$). На перетині однойменних проекцій MN і EL отримують проекції точки $K(M_1N_1 \cap E_1L_1 = K_1,\ M_2N_2 \cap E_2L_2 = K_2)$.

3.11. Визначення кута між двома площинами, які перерізаються

Якщо площини перерізаються і не є взаємно перпендикулярними, то між ними існує гострий φ і тупий ψ кути (рис. 3.61). Кутом між двома площинами вважають той, який відповідає гострому. Тупий кут називають додатковим. Сума величин кута між двома площинами і додаткового кута завжди дорівнює 180^0($\varphi + \psi = 180^0$). Мірою двогранного кута є плоский кут між прямими m і n, які перпендикулярні до ребра двогранного кута l, кожна з них відповідно належить площині α і β ($m \subset \alpha,\ n \subset \beta$). При цьому вершину кута A вибирають на ребрі l довільно, а потім через неї проводять прямі m і n (рис. 3.62).

Для побудови величини кута між площинами необхідно:

1) побудувати лінію перерізу l заданих площин α і β;

2) вибрати на лінії l довільну точку A;

3) через точку A провести площину$\Delta(m \cap n)$, перпендикулярну до прямої l;

4) побудувати лінії перетину m і n площини Δ з площинами α і β ($\Delta \cap \alpha = m$, $\Delta \cap \beta = n$).

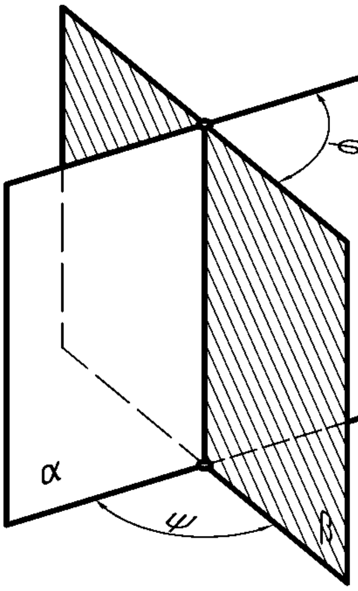


Рис. 3.61

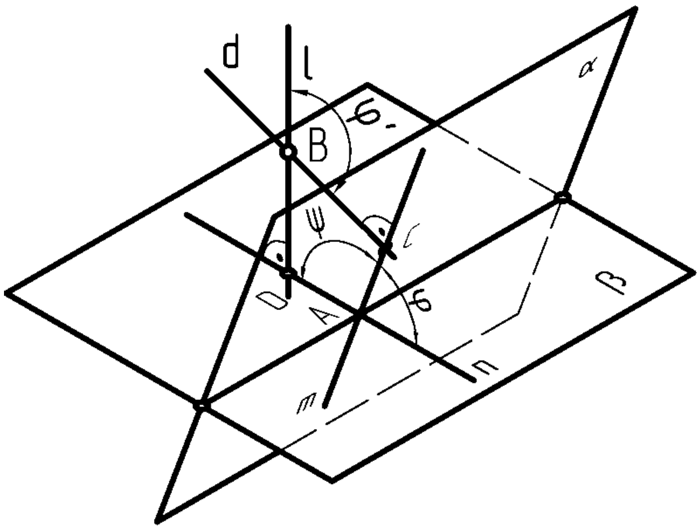


Рис. 3.62

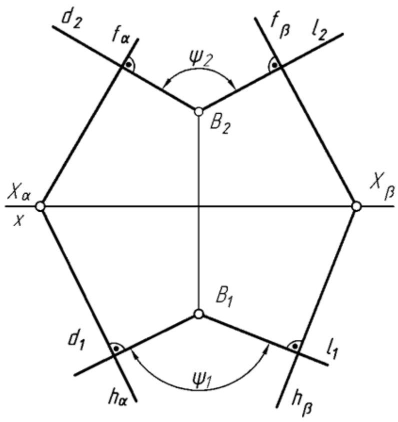


Рис. 3.63

Часто для побудови величини кута між площинами у просторі вибирають довільну точку ***B***, опускають з неї перпендикуляри до перетину з заданими площинами ($d\perp\alpha,\ d\cap\alpha=C$), ($l\perp\beta,\ l\cap\beta=D$), через точки ***C*** і ***D*** проводять прямі ***m*** і ***n***, перпендикулярні до ***l*** ($m\perp\alpha,\ n\perp l$), і отримують точку ***A***. За побудовою кути ***BCA*** і ***BDA*** прямі, отже, якщо кут ***CBD*** гострий, то його величина дорівнює величині кута між заданими площинами.Якщо кут ***CBD*** тупий, то його доповнюють кутом φ^1 до 180^0 і цей кут є шуканим.

Якщо площини задані слідами $\alpha(h_\alpha,f_\alpha)$ і $\beta(h_\beta,f_\beta)$, (рис. 3.63) побудову проводять аналогічно. Будують проекції довільної точки $B(B_1,B_2)$ через які проводять проекції перпендикулярів до площин ($d_1\perp h_\alpha,\ d_2\perp f_\alpha,\ l_1\perp h_\beta,\ l_2\perp f_\beta$). У результаті отримують проекції кута $\psi(\psi_1,\psi_2)$ між площинами α і β.

Запитання для самоконтролю

1. Як можна задавати площину в просторі і на епюрі?
2. Що називають слідом площини?

3. В чому полягає різниця між площинами загального і окремого положення?
4. Що спільне для фронтального і горизонтального сліду профільної площини?
5. В якій площині повинен бути розташованим трикутник, щоб одна з його проекцій дорівнювала його натуральній величині?
6. У якому випадку трикутник проектується на площину проекцій у вигляді відрізка прямої?
7. Які площини називають проектуючими?
8. Які площини називають площинами рівня?
9. В чому полягає ознака належності прямої до площини?
10. В чому полягає ознака намежності точки до площини?
11. Які лінії називають головними лініями площини?
12. Який алгоритм побудови проекцій точки перетину прямої з площиною?
13. Який алгоритм побудови проекцій лінії перетину двох площин одноіменні проекції відсіків яких накладаються?
14. Який алгоритм побудови проекцій лінії перетину двох площин одноіменні проекції відсіків яких не накладаються?
15. Які особливості побудови проекцій лінії перетину двох площин заданих слідами?

РОЗДІЛ 4. ПЕРПЕНДИКУЛЯРНІСТЬ ПРЯМИХ І ПЛОЩИН. МЕТРИЧНІ ЗАДАЧІ

4.1. Проекціювання плоских кутів. Проекціювання прямого кута

Плоский кут проекціюється на довільну площину проекцій у дійсну величину, якщо його сторони паралельні до даної площини проекцій. В усіх інших випадках проекції гострих і тупих кутів не дорівнюють їхнім дійсним величинам. Якщо одна сторона гострого кута паралельна до площини проекцій, то його проекція на цю площину менша від дійсної величини кута. Якщо одна сторона тупого кута паралельна до площини проекцій, то його проекція на цю площину більша від дійсної величини кута.

Якщо плоский кут прямий і одна його сторона паралельна до площини проекцій, а друга займає загальне положення відносно цієї площини проекцій, то його проекція на цю площину дорівнює дійсній величині кута.

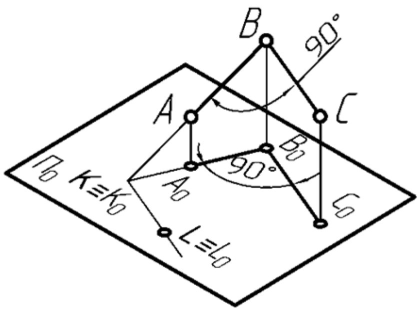
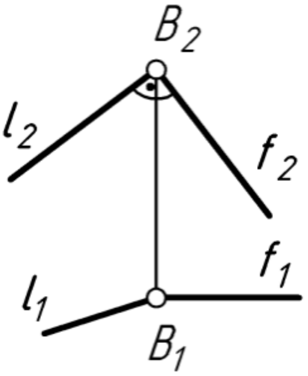


Рис. 4.1

Дану теорему доводять наступною побудовою. Нехай кут $\boldsymbol{ABC}$ прямий. ($\llcorner \boldsymbol{ABC=90^0}$), пряма $\boldsymbol{BC}$ паралельна до $\boldsymbol{\Pi_0}$ ($\boldsymbol{BC}||\boldsymbol{\Pi_0}$), пряма $\boldsymbol{AB}$ займає загальне положення відносно $\boldsymbol{\Pi_0}$ (рис. 4.1). Ортогональним проекціюванням на $\boldsymbol{\Pi_0}$ отримують $\boldsymbol{A_0}$, $\boldsymbol{B_0}$, $\boldsymbol{C_0}$, продовжують $\boldsymbol{AB}$ до перетину з $\boldsymbol{\Pi_0}$ у точці $\boldsymbol{K\equiv K_0}$. Якщо $\boldsymbol{BC}||\boldsymbol{\Pi_0}$, тоді $\boldsymbol{BK\perp B_0C_0}$. У площині $\boldsymbol{\Pi_0}$ через $\boldsymbol{K_0}$ будують пряму $\boldsymbol{K_0L_0}$, паралельну $\boldsymbol{B_0C_0}$($\boldsymbol{K_0L_0}||\boldsymbol{B_0C_0}$). Якщо $\boldsymbol{K_0L_0}||\boldsymbol{B_0C_0}||\boldsymbol{BC}$, а $\llcorner \boldsymbol{BK_0L_0=90^0}$, тоді згідно з теоремою про три перпендикуляри $\llcorner \boldsymbol{B_0K_0L_0=90^0}$ відповідно $\llcorner \boldsymbol{A_0B_0C_0=90^0}$.

Рис. 4.2

Дві взаємно перпендикулярні прямі можуть перетинатися або бути мимобіжними. Для обох випадків справедливі твердження, що проекції взаємно перпендикулярних прямих зберігають свою перпендикулярність у горизонтальній (рис. 4.2) або фронтальній (рис. 4.3) площинах проекцій, коли одна із цих прямих є відповідно горизонталлю або фронталлю.



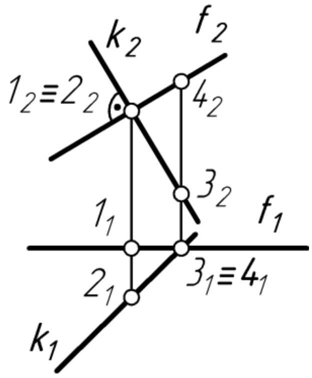


Рис. 4.3

4.2. Побудова проекцій перпендикуляра до площини

Пряма перпендикулярна до площини, якщо вона перпендикулярна до двох прямих, що перетинаються і задають площину або знаходяться в ній. Таку пряму називають перпендикуляром до площини, а сама пряма перпендикулярна до кожної прямої, яка лежить у цій площині. Отже перпендикуляр до площини перпендикулярний до кожної горизонталі $\boldsymbol{h}$ і фронталі $\boldsymbol{f}$ даної площини. Ця перпендикулярність зберігається для горизонталі у горизонтальній проекції і для фронталі у фронтальній проекції ($\boldsymbol{p_1 \perp h_1}$, $\boldsymbol{p_2 \perp f_2}$).

Щоб побудувати проекції перпендикуляра до площини загального положення необхідно і достатньо побудувати перпендикуляри до горизонтальної проекції горизонталі й фронтальної проекції фронталі. Справедливе й обернене твердження.

Нехай відомі проекції площини загального положення заданої двома прямими, що перетинаються $\boldsymbol{\alpha_1(a_1 \cap b_1)}$ і $\boldsymbol{\alpha_2(a_2 \cap b_2)}$ і довільної точки $\boldsymbol{D(D_1, D_2)}$ (рис. 4.4). Необхідно побудувати проекції перпендикуляра $\boldsymbol{p(p_1, p_2)}$, проведеного з точки $\boldsymbol{D}$ до площини $\boldsymbol{\alpha}$.

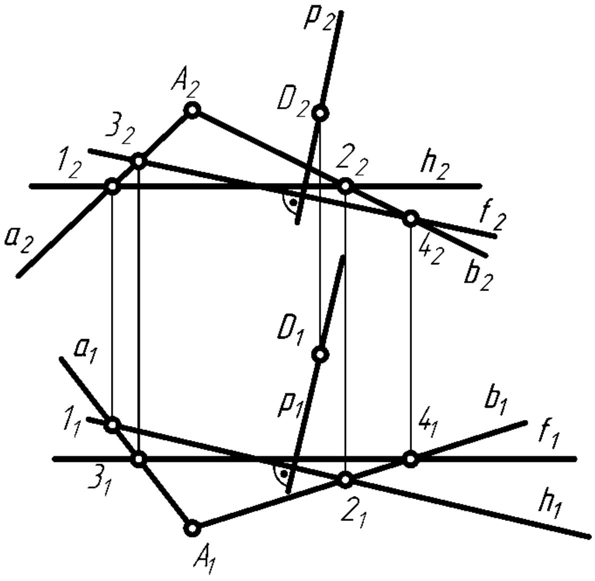


Рис. 4.4

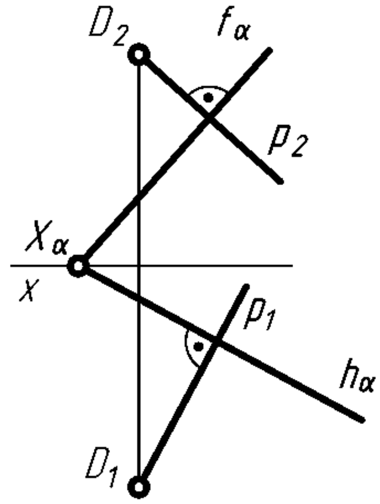


Рис. 4.5

Будують проекції горизонталі $\boldsymbol{h}(\boldsymbol{h_1},\boldsymbol{h_2})$ і фронталі $\boldsymbol{f}(\boldsymbol{f_1},\boldsymbol{f_2})$ площини $\boldsymbol{\alpha}$, через $\boldsymbol{D_2}$ будують перпендикуляр до $\boldsymbol{f_2}$ ($\boldsymbol{p_2}\perp\boldsymbol{f_2}$), через $\boldsymbol{D_1}$ будують перпендикуляр до $\boldsymbol{h_1}$ ($\boldsymbol{p_1}\perp\boldsymbol{h_1}$). Отже $\boldsymbol{p_1}$ і $\boldsymbol{p_2}$ є проекції перпендикуляра, проведеного з точки $\boldsymbol{D}$ до площини $\boldsymbol{\alpha}$.

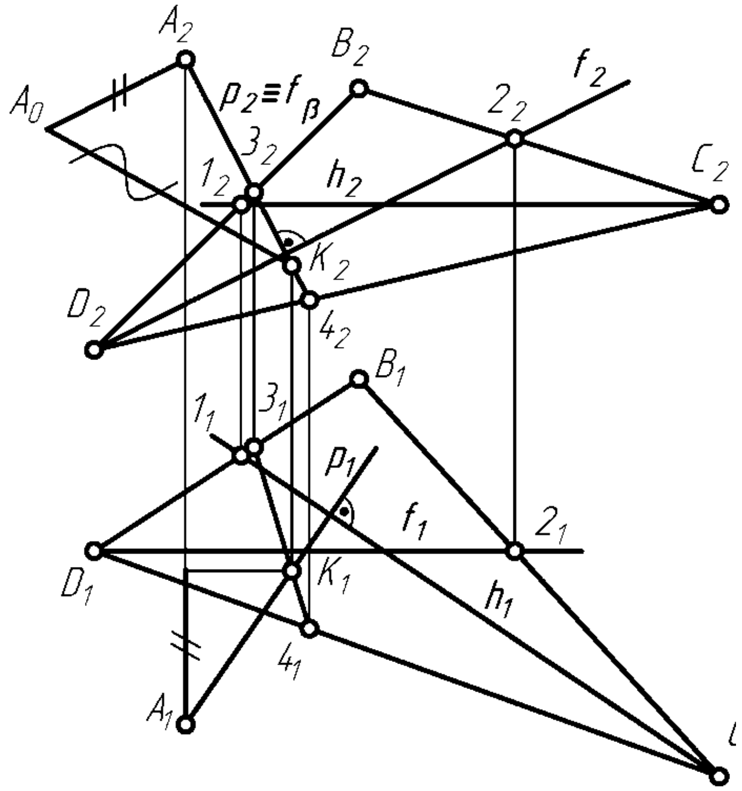
Якщо площина задана слідами $\boldsymbol{\alpha}(\boldsymbol{h_\alpha},\boldsymbol{f_\alpha})$, побудову проекцій перпендикуляра виконують аналогічно (рис. 4.5). Під час побудови враховують, що горизонтальний слід площини збігається з горизонтальною його проекцією ($\boldsymbol{h_\alpha}\equiv\boldsymbol{h_{\alpha1}}$), а фронтальний слід площини збігається з фронтальною його проекцією ($\boldsymbol{f_\alpha}\equiv\boldsymbol{f_{\alpha2}}$). Отже вибирають довільну точку $\boldsymbol{D}(\boldsymbol{D_1},\boldsymbol{D_2})$, через $\boldsymbol{D_2}$ будують перпендикуляр до $\boldsymbol{f_\alpha}$ ($\boldsymbol{p_2}\perp\boldsymbol{f_\alpha}$), через $\boldsymbol{D_1}$ будують перпендикуляр до $\boldsymbol{h_\alpha}$ ($\boldsymbol{p_1}\perp\boldsymbol{h_\alpha}$).

Якщо площина задана слідами, то горизонтальна проекція перпендикуляра до площини перпендикулярна до горизонтального її сліду, а фронтальна проекція перпендикуляра до площини перпендикулярна до фронтального її сліду.

4.3. Визначення дійсної величини відстані від точки до площини

Відстань від точки до площини дорівнює відрізку перпендикуляра побудованого із заданої точки до точки його перетину з площиною.

Нехай відомі проекції площини, заданої трьома точками $\alpha_1(B_1C_1D_1)$ і $\alpha_2(B_2C_2D_2)$ і точки $A(A_1,A_2)$, (рис. 4.6). Необхідно визначити дійсну величину відстані від точки A до площини α.



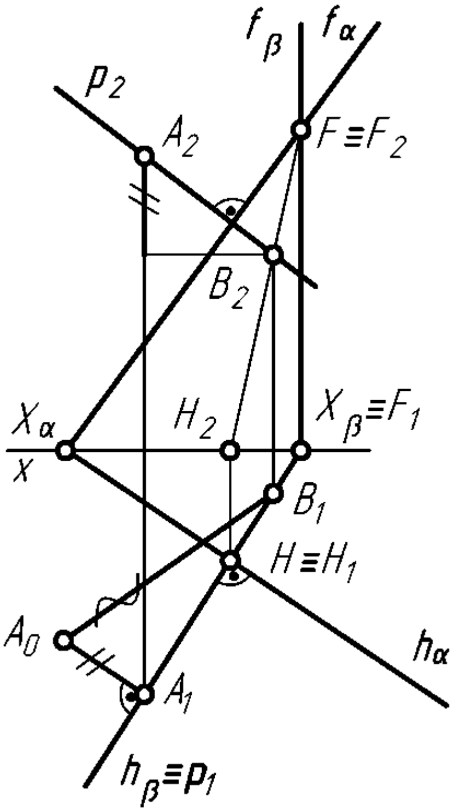


Рис. 4.6 **Рис. 4.7**

Будують проекції горизонталі $h(h_1,h_2)$ і фронталі $f(f_1,f_2)$ площини α, через проекції точки A будують проекції перпендикуляра до площини α ($p_1 \perp h_1$, $p_2 \perp f_2$), через перпендикуляр p проводять проекціюючу площину β ($p_2 \equiv f_\beta$) і будують проекції точки перетину p з α $K(K_1,K_2)$, використовуючи метод прямокутного трикутника будують дійсну величину відстані від точки A до площини α.

З допомогою аналогічної побудови визначають дійсну величину відстані від точки A до площини, заданої слідами $\alpha(h_\alpha,f_\alpha)$ (рис. 4.7.).

Завдання 4.1. На відстані ***30*** мм від площини, заданої слідами $\alpha(h_\alpha,f_\alpha)$ побудувати точку B (рис. 4.8).

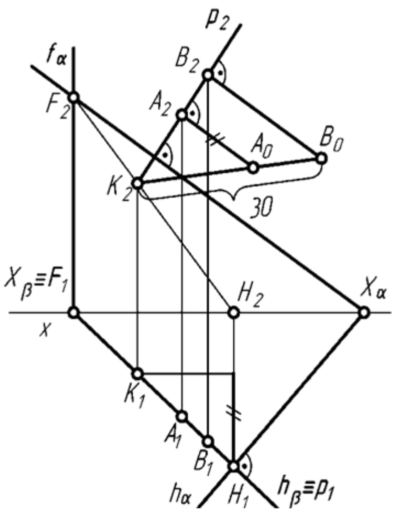


Рис. 4.8

Розв'язування. Будують проекції довільної точки $\boldsymbol{A}(\boldsymbol{A_1},\boldsymbol{A_2})$, через які проводять однойменні проекції перпендикуляра до площини $\boldsymbol{\alpha}$ ($\boldsymbol{p_1 \perp h_\alpha}$, $\boldsymbol{p_2 \perp f_\alpha}$), через перпендикуляр проводять горизонтально-проекціюючу площину $\boldsymbol{\beta}$ ($\boldsymbol{h_\beta \equiv p_1}$, $\boldsymbol{f_\beta \perp x}$) і будують проекції лінії перетину площин $\boldsymbol{\alpha}$ і $\boldsymbol{\beta}$ $\boldsymbol{HF}(\boldsymbol{H_1F_1},\boldsymbol{H_2F_2})$. У точці перетину $\boldsymbol{H_2F_2}$ з $\boldsymbol{p_2}$ отримують фронтальну проекцію точки перетину перпендикуляра $\boldsymbol{p}$ з площиною $\boldsymbol{\alpha}$ ($\boldsymbol{H_2F_2 \cap p_2 = K_2}$), прямим проекціюванням $\boldsymbol{K_2}$ на $\boldsymbol{p_1}$ отримують $\boldsymbol{K_1}$, використовуючи метод прямокутного трикутника будують дійсну величину відрізка $\boldsymbol{AK}$, на якій від точки $\boldsymbol{K_2}$ відкладають **30** мм і отримують точку $\boldsymbol{B_0}$, через $\boldsymbol{B_0}$ проводять пряму паралельну до $\boldsymbol{A_0A_2}$ до перетину з $\boldsymbol{p_2}$ і отримують $\boldsymbol{B_2}$, прямим проекціюванням $\boldsymbol{B_2}$ на $\boldsymbol{p_1}$ отримують $\boldsymbol{B_1}$.

4.4. Побудова проекцій площин, перпендикулярних між собою

Відомі дві ознаки перпендикулярності двох площин:

- дві площини перпендикулярні між собою, якщо одна з них перпендикулярна до прямої, яка лежить у другій площині або паралельна до неї;
- дві площини перпендикулярні між собою, якщо одна з площин проходить через пряму, перпендикулярну до другої площини.

Тому побудову проекцій площин, перпендикулярних між собою можна виконувати двома шляхами:

- будувати проекції перпендикуляра до заданої площини, а потім будувати проекції площини в якій лежить даний перпендикуляр;
- в заданій площині виділяти пряму лінію і до її проекцій будувати проекції перпендикулярної площини.

Нехай відомі проекції площини заданої, трьома точками $\boldsymbol{\alpha_1}(\boldsymbol{A_1B_1C_1})$ і $\boldsymbol{\alpha_2}(\boldsymbol{A_2B_2C_2})$ і довільної точки $\boldsymbol{D}(\boldsymbol{D_1},\boldsymbol{D_2})$, (рис. 4.9). Необхідно через $\boldsymbol{D}$ провести площину $\boldsymbol{\beta}$, перпендикулярну до площини $\boldsymbol{\alpha}$.

Будують проекції горизонталі $\boldsymbol{h}(\boldsymbol{h_1},\boldsymbol{h_2})$ і фронталі $\boldsymbol{f}(\boldsymbol{f_1},\boldsymbol{f_2})$ площини $\boldsymbol{\alpha}$, через $\boldsymbol{D_1}$ проводять горизонтальну проекцію перпендикуляра $\boldsymbol{p_1}(\boldsymbol{p_1}\perp\boldsymbol{h_1})$, через $\boldsymbol{D_2}$ проводять фронтальну проекцію перпендикуляра $\boldsymbol{p_2}$ $(\boldsymbol{p_2}\perp\boldsymbol{f_2})$. Через точку $\boldsymbol{D}$ можна провести безліч площин, перпендикулярних до площини $\boldsymbol{\alpha}$. Отже, провівши через $\boldsymbol{D_1}$ і $\boldsymbol{D_2}$ проекції довільної прямої $\boldsymbol{a}(\boldsymbol{a_1},\boldsymbol{a_2})$ отримують проекції площини $\boldsymbol{\beta}(\boldsymbol{p}\cap\boldsymbol{a})$, яка перпендикулярна до площини $\boldsymbol{\alpha}$ $(\boldsymbol{\alpha}\perp\boldsymbol{\beta})$.

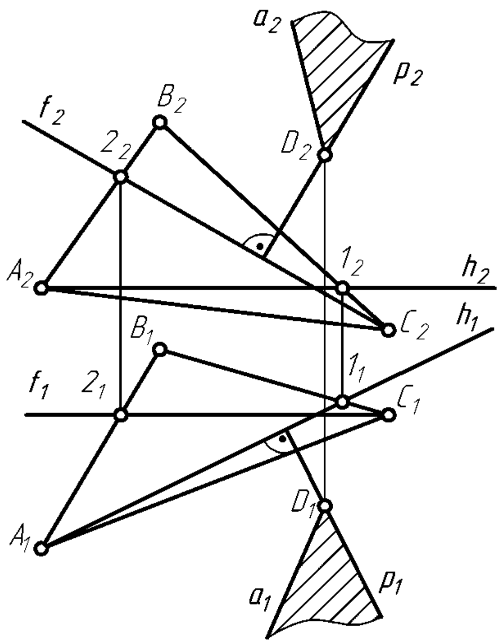


Рис. 4.9

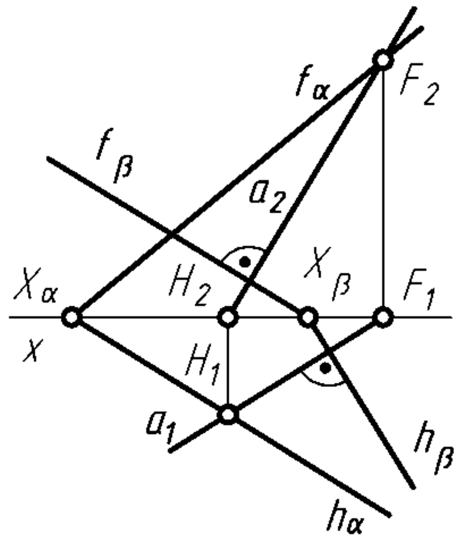


Рис. 4.10

Під час побудови проекцій перпендикулярних між собою площин, заданих слідами у площині $\boldsymbol{\alpha}(\boldsymbol{h_\alpha},\boldsymbol{f_\alpha})$, будують довільну пряму $\boldsymbol{a}(\boldsymbol{a_1},\boldsymbol{a_2})$ (рис. 4.10), на осі $\boldsymbol{x}$ вибирають точку збігу слідів для площини $\boldsymbol{\beta}(\boldsymbol{X_\beta})$, через яку проводять $\boldsymbol{h_\beta}$ $(\boldsymbol{h_\beta}\perp\boldsymbol{a_1})$ і $\boldsymbol{f_\beta}$ $(\boldsymbol{f_\beta}\perp\boldsymbol{a_2})$.

Будуючи проекції перпендикулярних між собою площин, заданих слідами, необхідно пам’ятати:

- якщо однойменні сліди двох площин загального положення перпендикулярні між собою, то самі площини між собою не перпендикулярні, оскільки при цьому не виконуються умови перпендикулярності;

- однойменні сліди площин рівня перпендикулярні між собою на тій площині проекцій, до якої дані площини перпендикулярні (рис. 4.11);

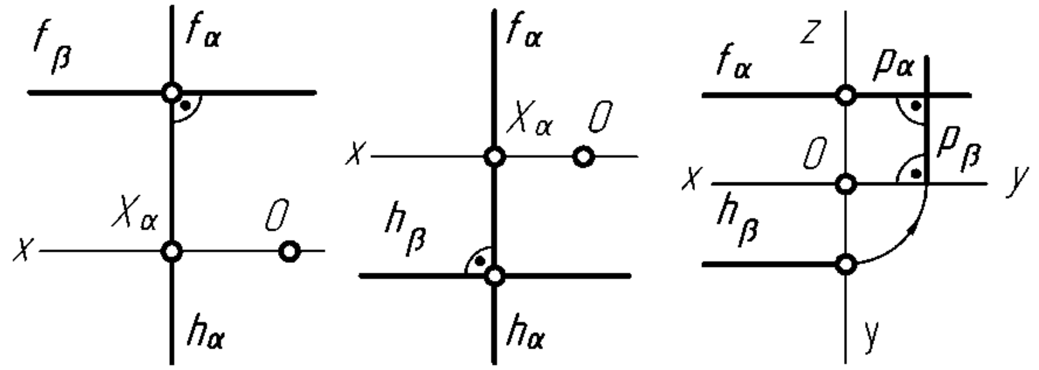


Рис. 4.11

Одноймені сліди проекціюючих площин перпендикулярні між собою лише на тій площині проекцій, до якої обидві задані площини перпендикулярні (рис. 4.12).

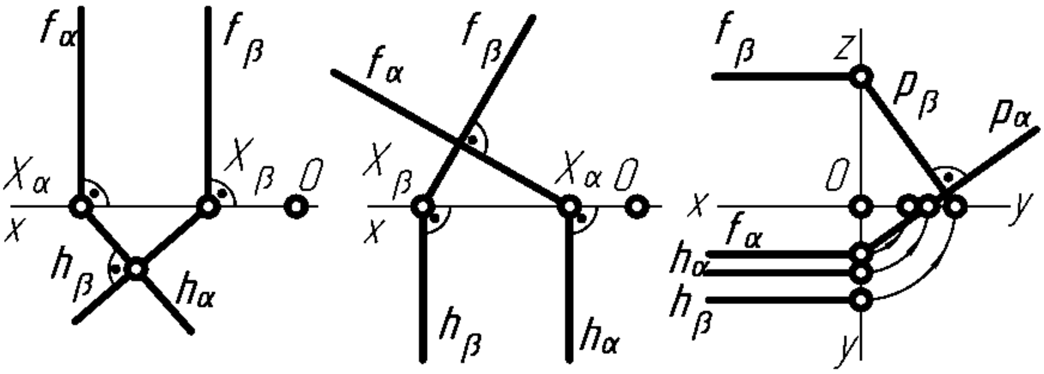


Рис. 4.12

Завдання 4.2. Побудувати проекції площини, перпендикулярної до прямої $\boldsymbol{l}(\boldsymbol{l_1},\boldsymbol{l_2})$ (рис. 4.13).

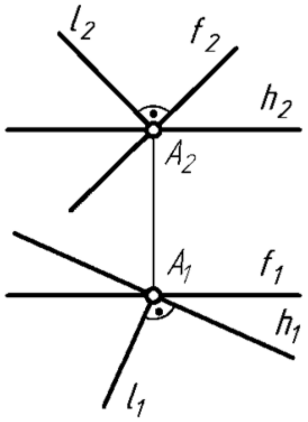


Рис. 4.13

Розв'язування. Площина перпендикулярна до прямої, якщо горизонтальна проекція її горизонталі перпендикулярна до горизонтальної проекції прямої ($\boldsymbol{h_1 \perp l_1}$), а фронтальна проекція фронталі перпендикулярна до фронтальної проекції прямої ($\boldsymbol{f_2 \perp l_2}$). Площину на кресленні задають двома прямими, які перетинаються у точці $\boldsymbol{A}$. Для цього на проекціях прямої вибирають проекції точки $\boldsymbol{A}(\boldsymbol{A_1},\boldsymbol{A_2})$.

Прямі, які задають шукану площину одночасно є горизонталлю і фронталлю даної площини.

Через A_1 проводять $h_1(h_1 \perp l_1)$ і $f_1(f_1 || x)$, через A_2 проводять $h_2(h_2 || x)$ і $f_2(f_2 \perp l_2)$.

4.5. Побудова проекцій прямих перпендикулярних між собою

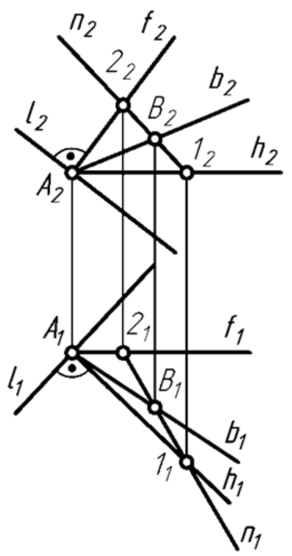


Рис. 4.14

Як було сказано вище, кут між перпендикулярними прямими загального положення не проекціюється на жодну з площин проекцій у натуральну величину. Тому побудову проекцій перпендикулярних між собою прямих загального положення зводять до побудови проекцій площини, перпендикулярної до заданої прямої.

Отже, на проекціях заданої прямої $l(l_1,l_2)$ (рис. 4.14) вибирають проекції довільної точки $A(A_1,A_2)$ через які необхідно провести проекції прямої b, перпендикулярної до l. Площину α задають двома прямими, які перетинаються у точці A і є горизонталлю і фронталлю даної площини ($h_1 \perp l_1$, $f_1 || x$, $h_2 || x$, $f_2 \perp l_2$). Вибирають проекції двох точок, які належать площині α ($1 \subset h$, $2 \subset f$), через проекції яких проводять проекції прямої $n(n \subset \alpha)$. На n вибирають довільну точку $B(B_1,B_2)$, сполучають однойменні проекції точок A і B і отримують проекції прямої b перпендикулярної до прямої l ($b \perp l$).

4.6. Побудова проекцій прямої паралельної до площини

Пряма паралельна до площини, якщо площині належить хоча б одна пряма, паралельна до заданої прямої.

Під час виконання креслень виникає необхідність побудови прямої, паралельної до заданої площини або перевірки чи паралельні між собою задані пряма і площина. Для вирішення першого завдання у заданій площині

$\boldsymbol{\alpha}(\boldsymbol{c} \cap \boldsymbol{d})$, (рис. 4.15) будують довільну пряму $\boldsymbol{b}(\boldsymbol{b_1},\boldsymbol{b_2})$, а потім будують проекції $\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}$ $(\boldsymbol{a_1}||\boldsymbol{b_1},\ \boldsymbol{a_2}||\boldsymbol{b_2})$.

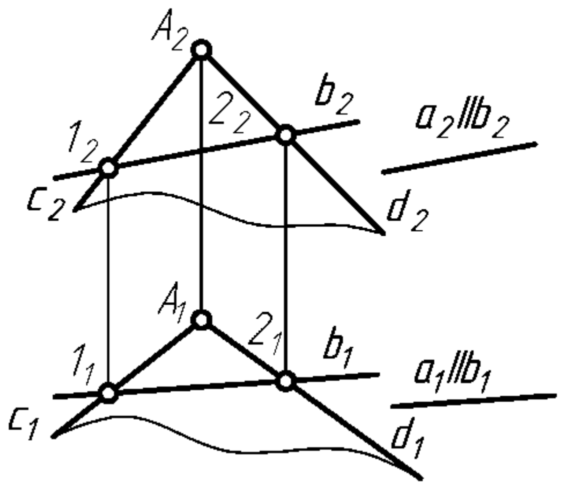


Рис. 4.15

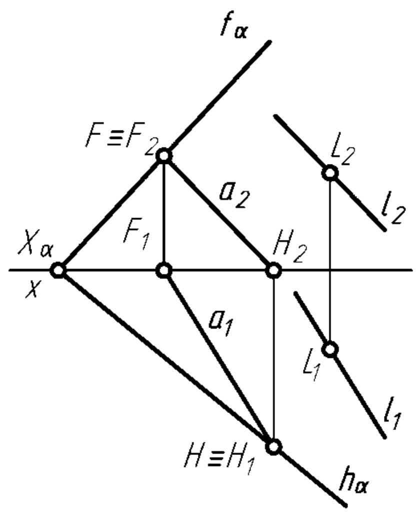


Рис. 4.16

Якщо площина задана слідами $\boldsymbol{\alpha}(\boldsymbol{h}_\alpha,\boldsymbol{f}_\alpha)$ побудову паралельної прямої виконують аналогічно (рис. 4.16). На слідах заданої площини вибирають точки $\boldsymbol{H}(\boldsymbol{H} \subset \boldsymbol{h}_\alpha)$ і $\boldsymbol{F}(\boldsymbol{F} \subset \boldsymbol{f}_\alpha)$, через однойменні проекції точок $\boldsymbol{H}$ і $\boldsymbol{F}$ будують проекції прямої $\boldsymbol{a}(\boldsymbol{a_1},\ \boldsymbol{a_2})$, яка належить площині $\boldsymbol{\alpha}$, через проекції довільно вибраної точки $\boldsymbol{L}(\boldsymbol{L_1},\boldsymbol{L_2})$ будують $\boldsymbol{l}||\boldsymbol{a}$ $(\boldsymbol{l_1}||\boldsymbol{a_1},\ \boldsymbol{l_2}||\boldsymbol{a_2})$.

Для перевірки чи паралельні між собою задані пряма і площина, якщо відомі їхні проекції (рис. 4.17), у площині будують пряму, одна з проекцій якої паралельна до однойменної проекції заданої прямої $(\boldsymbol{l_2}||\boldsymbol{a_2})$. Якщо побудована прямим проекціюванням друга проекція прямої паралельна до однойменної проекції заданої прямої $(\boldsymbol{l_1}||\boldsymbol{a_1})$, то задані пряма і площина паралельні між собою. Якщо ж проекції не паралельні $(\boldsymbol{l_1}||\boldsymbol{a_1})$ то пряма і площина не паралельні.

Завдання 4.3. На відстані ***30 мм*** від площини, заданої слідами $\boldsymbol{\alpha}(\boldsymbol{h}_\alpha,\boldsymbol{f}_\alpha)$ побудувати пряму $\boldsymbol{l}$, паралельну до $\boldsymbol{\alpha}$ (рис. 4.18).

Розв'язування. Будують проекції точки $\boldsymbol{A}(\boldsymbol{A_1},\boldsymbol{A_2})$, віддаленої від площини $\boldsymbol{\alpha}$ на ***30 мм***. Для цього вибирають довільну точку $\boldsymbol{B}(\boldsymbol{B_1},\boldsymbol{B_2})$, через яку проводять проекції перпендикуляра до площини $\boldsymbol{p}(\boldsymbol{p_1} \perp \boldsymbol{h_\alpha},\ \boldsymbol{p_2} \perp \boldsymbol{f_\alpha})$, будують проекції точки перетину перпендикуляра з площиною $\boldsymbol{K}(\boldsymbol{K_1}, \boldsymbol{K_2})$, $(\boldsymbol{p} \cap \boldsymbol{\alpha} = \boldsymbol{K})$, знаходять натуральну величину відрізка ***BK***, на якій на відстані ***30 мм*** від ***K*** будують $\boldsymbol{A_0}$, оберненим паралельним проекціюванням на проекціях перпендикуляра ***p*** отримують проекції точки $\boldsymbol{A}(\boldsymbol{A_1} \subset \boldsymbol{p_1},\ \boldsymbol{A_2} \subset \boldsymbol{p_2})$.

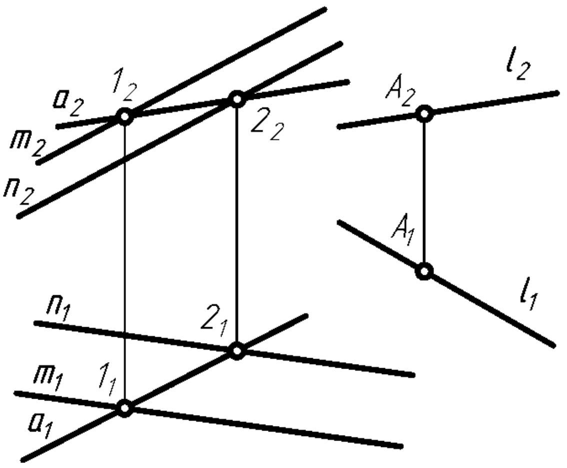


Рис. 4.17

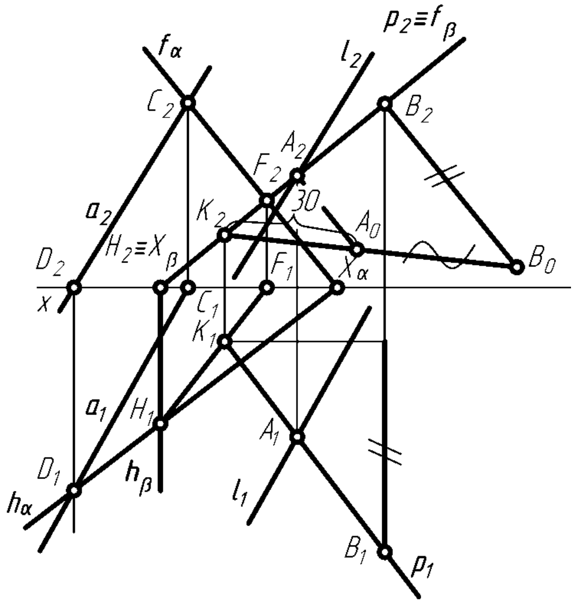


Рис. 4.18

У заданій площині будують пряму $\boldsymbol{a}(\boldsymbol{a_1}, \boldsymbol{a_2})$. Через проекції точки $\boldsymbol{A}(\boldsymbol{A_1}, \boldsymbol{A_2})$ будують однойменні проекції прямої $\boldsymbol{l}(\boldsymbol{l_1} \| \boldsymbol{a_1},\ \boldsymbol{l_2} \| \boldsymbol{a_2})$.

4.7. Побудова проекцій площин, паралельних між собою

Площини паралельні між собою, якщо дві прямі, які перетинаються і належать першій площині, паралельні до двох прямих, які перетинаються і належать другій площині.

Якщо горизонталі й фронталі двох площин паралельні між собою то площини паралельні.

Нехай через точку $\boldsymbol{K}(\boldsymbol{K_1}, \boldsymbol{K_2})$ необхідно провести площину $\boldsymbol{\beta}(\boldsymbol{c} \cap \boldsymbol{d})$ паралельну до площини $\boldsymbol{\alpha}(\boldsymbol{a} \cap \boldsymbol{b})$ (рис. 4.19).

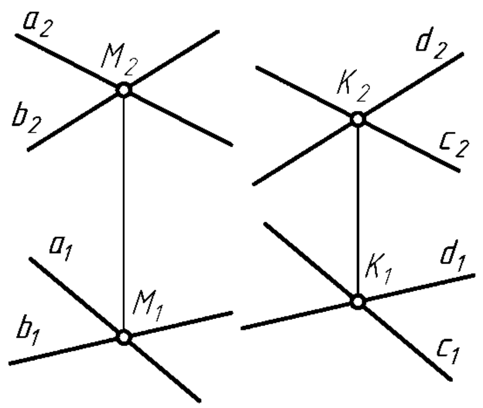


Рис. 4.19

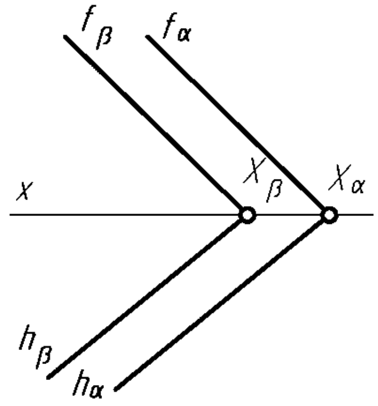


Рис. 4.20

Для побудови площини $\boldsymbol{\beta}$ достатньо через K_1 провести $c_1 || a_1$ і $d_1 || b_1$, а через K_2 провести $c_2 || a_2$ і $d_2 || b_2$.

Площини, задані слідами паралельні між собою якщо їхні однойменні сліди паралельні (рис. 4.20).

Щоб перевірити чи паралельні між собою задані площини, достатньо побудувати проекції їхніх горизонталей і фронталей (рис. 4.21). Якщо однойменні проекції головних ліній площин паралельні, площини між собою паралельні, в іншому випадку – площини не паралельні.

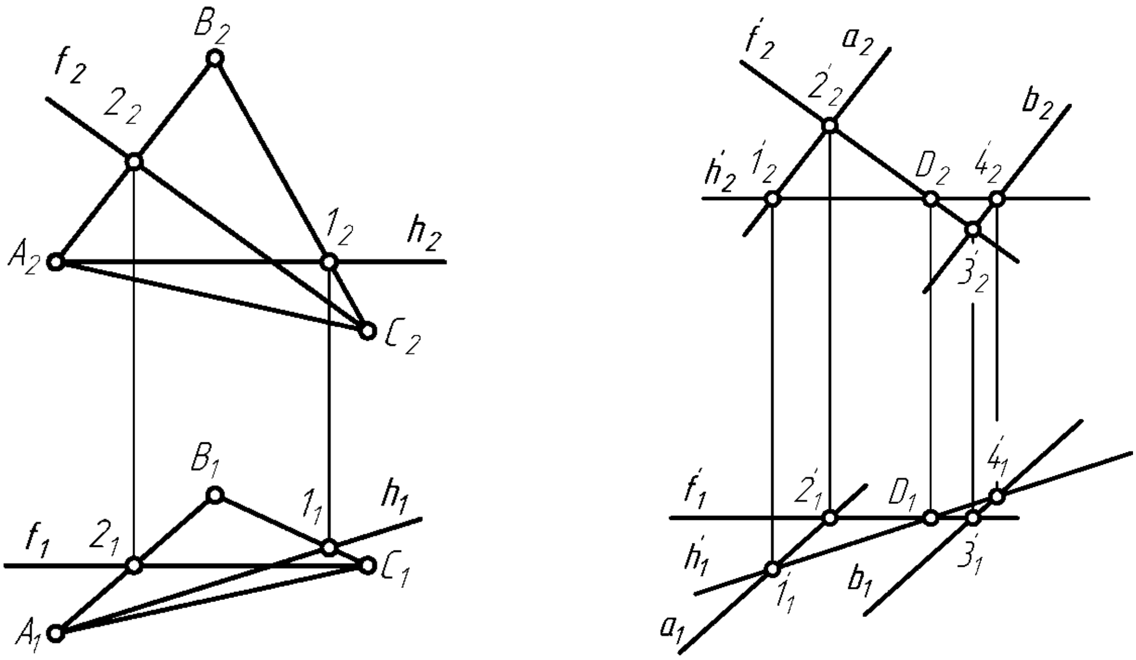


Рис. 4.21

Завдання 4.4. Через точку $\boldsymbol{A}(\boldsymbol{A_1},\boldsymbol{A_2})$ провести площину $\boldsymbol{\beta}(\boldsymbol{h_\beta},\boldsymbol{f_\beta})$, паралельну до заданої площини $\boldsymbol{\alpha}(\boldsymbol{h}_\alpha,\boldsymbol{f_\alpha})$ (рис. 4.22).

Розв'язування. Через проекції точки $\boldsymbol{A}$ проводять однойменні проекції однієї з головних ліній площини $\boldsymbol{\beta}$ ($\boldsymbol{A_2}\subset\boldsymbol{h}_2||\boldsymbol{x}$, $\boldsymbol{A_1}\subset\boldsymbol{h}_1||\boldsymbol{h}_\alpha$). Точка перетину $\boldsymbol{h}_1$ з

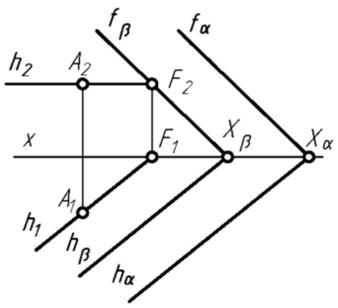


Рис. 4.22

віссю $\boldsymbol{x}$ є горизонтальною проекцією фронтального сліду горизонталі $\boldsymbol{h}$ площини $\boldsymbol{\beta}$ ($\boldsymbol{h}_1\cap\boldsymbol{x}=\boldsymbol{F_1}$). Прямим проекціюванням $\boldsymbol{F_1}$ на $\boldsymbol{h}_2$ отримують $\boldsymbol{F_2}$ – фронтальну проекцію фронтального сліду горизонталі $\boldsymbol{h}$ площини $\boldsymbol{\beta}$. Отже через $\boldsymbol{F_2}$ будують фронтальний слід площини $\boldsymbol{\beta}$ ($\boldsymbol{f_\beta}||\boldsymbol{f_\alpha}$) до перетину з віссю $\boldsymbol{x}$ і отримують точку збігу слідів площини $\boldsymbol{\beta}$ ($\boldsymbol{f_\beta}\cap\boldsymbol{x}=\boldsymbol{X_\beta}$). Через $\boldsymbol{X_\beta}$ будують горизонтальний слід площини $\boldsymbol{\beta}$ ($\boldsymbol{h_\beta}||\boldsymbol{h}_\alpha$). Таким чином, площини $\boldsymbol{\alpha}$ і $\boldsymbol{\beta}$ паралельні, оскільки їхні однойменні сліди паралельні.

Запитання для самоконтролю

1. В чому полягає особливість проектування прямого кута на площини проекцій?
2. Які ознаки перпендикулярності прямої до площини і площини до прямої?
3. Які особливості побудови проекцій перпендикуляра до площини загального положення?
4. Який алгоритм побудови натуральної величини відстані до площини загального положення?
5. Який алгоритм побудови проекцій взаємно перпендикулярних площин загального положення?
6. Які ознаки перпендикулярності двох прямих загального положення?
7. Що спільного і чим відрізняються ознаки паралельності прямої відносно площини і площини відносно прямої?
8. Який алгоритм перевірки паралельності прямої відносно площини?

9. Який алгоритм побудови проекцій прямої що проходить через задану точку і паралельна до двох прямих загального положення що перетинаються?
10. В чому полягає ознака паралельності двох площин загального положення?
11. Який алгоритм побудови проекцій площини паралельної до заданої площини загального положення?
12. Яка ознака паралельності двох площин заданих слідами?

РОЗДІЛ 5. МЕТОДИ ПЕРЕТВОРЕННЯ ОРТОГОНАЛЬНИХ ПРОЕКЦІЙ

5.1. Різновидності й особливості методів перетворення ортогональних проекцій

Розв'язування позиційних і метричних задач можна значно спростити, якщо задані геометричні фігури розмістити паралельно або перпендикулярно відносно площин проекцій $\mathbf{П_1}$, $\mathbf{П_2}$ і $\mathbf{П_3}$. Але під час виконання креслень геометричної фігури складної форми неможливо знайти таке положення, щоб усі її елементи займали особливе положення відносно площин проекцій. Тому в інженерній графіці часто використовують перетворення комплексних креслень, які дозволяють окремі елементи (лінії або площини) геометричних фігур із загального положення перевести в особливе положення відносно площин проекцій. Такі перетворення виконують шляхом заміни взаємного положення геометричної фігури та площин проекцій, або зміни напряму проекціювання. У нашому розділі принцип зміни напряму проекціювання не розглядають.

Заміну взаємного положення геометричної фігури та площин проекцій виконують методом заміни площин проекцій або методом плоскопаралельного переміщення. Заміну площин проекцій виконують при непорушній геометричній фігурі, а плоскопаралельне переміщення виконують при непорушній системі площин проекцій.

У свою чергу з плоскопаралельного переміщення як окремі випадки виділяють методи обертання навколо проекціюючих прямих і прямих рівня.

Використовуючи методи перетворення ортогональних проекцій, розв'язують чотири типи задач:

- перетворення прямої загального положення у пряму рівня, тобто визначення дійсної величини відрізка прямої і кутів нахилу його до площин проекцій;

- перетворення площини загального положення у проекціюючу площину, тобто визначення відстані від точки до площини і кута нахилу площини до площин проекцій;

- перетворення прямої загального положення у проекціюючу пряму, тобто визначення відстаней між точкою і прямою, між двома паралельними або мимобіжними прямими, визначення натуральної величини двогранного кута;
- перетворення площини загального положення у площину рівня, тобто визначення дійсних величин і форм плоских фігур та лінійних кутів.

5.2. Метод заміни площин проекцій

Перетворення за допомогою заміни площин проекцій полягає в тому, що потрібне розташування геометричної фігури відносно площин проекцій досягають заміною однієї системи площин проекцій на іншу при непорушній геометричній фігурі. Під час кожної такої заміни нова система двох площин проекцій має у своєму складі одну площину проекцій від попередньої системи, а нова площина проекцій обов'язково перпендикулярна до площини проекцій зі старої системи.

Нехай на систему площин проекцій **Π_1** і **Π_2** спроекційована точка $\boldsymbol{A(A_1,A_2)}$ (рис. 5.1). Перпендикулярно до **Π_1** проводять нову вертикальну площину **Π_4**, на яку ортогонально проекціюють точку $\boldsymbol{A(A_4)}$. В результаті заміни отримують систему площин проекцій **Π_1** і **Π_4** з проекціями точки $\boldsymbol{A_1}$ і $\boldsymbol{A_4}$. При такій заміні відстань від фронтальної проекції точки до $\boldsymbol{x_{12}}$ дорівнює відстані від нової проекції точки $\boldsymbol{A_4}$ до нової осі $\boldsymbol{x_{14}}$.

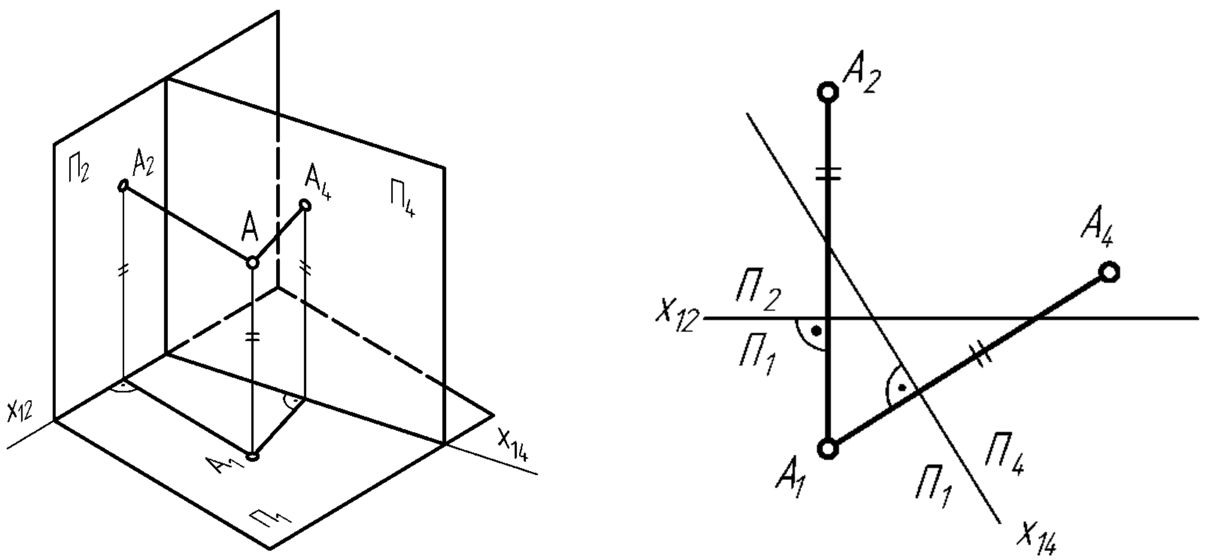


Рис. 5.1

Заміною однієї площини проекцій відрізок прямої загального положення може стати паралельним до нової площини проекцій Π_4, що дає можливість визначити його натуральну величину і кут нахилу до однієї з площин проекцій.

Нехай відомі проекції на Π_1 і Π_2 відрізка прямої загального положення $CD(C_1D_1, C_2D_2)$ (рис. 5.2). Необхідно визначити натуральну величину відрізка CD і кут його нахилу до Π_2.

Замінюють Π_1 на $\Pi_4 \perp \Pi_2$, при цьому нова вісь $x_{24} || C_2D_2$, з C_2 і D_2 опускають перпендикуляри на x_{24} і відкладають на них перевищення C_1 і D_1 над x_{12}. Отримана проекція C_4D_4 дорівнює натуральній величині відрізка CD, а кут φ дорівнює куту нахилу прямої до Π_2.

Для перетворення прямої загального положення у проекціюючу пряму необхідно виконати два рази заміну площин проекцій (рис. 5.3). Під час першої заміни пряма стає паралельною до однієї з площин проекцій. Під час другої заміни площина Π_5 перерізає площину Π_4 по осі x_{45}, яка перпендикулярна до A_4B_4, під час побудови нової проекції прямої вона вироджується в точку.

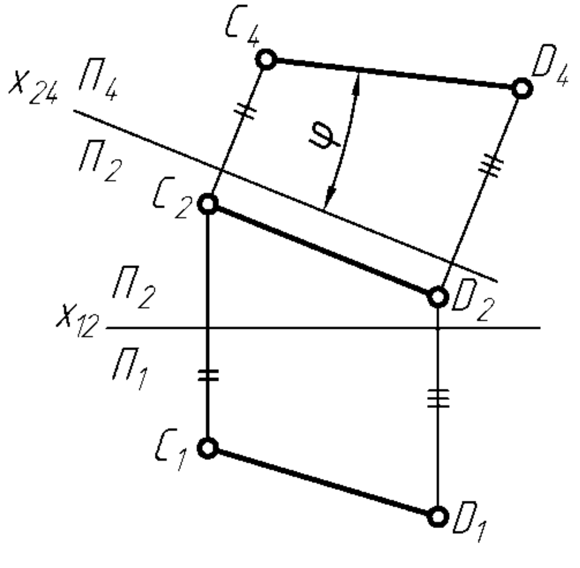


Рис. 5.2

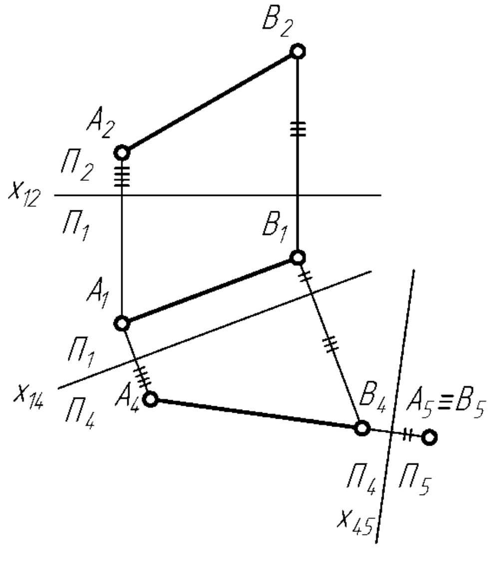


Рис. 5.3

Таку побудову використовують під час визначення відстаней від точки до прямої і між паралельними або мимобіжними прямими.

Завдання 5.1. Визначити відстань між мимобіжними прямими l і m і побудувати проекції відстані у вихідній системі проекцій (рис. 5.4).

Розв’язування. Відстань між мимобіжними прямими це найкоротша відстань, яку визначає їх взаємний перпендикуляр.

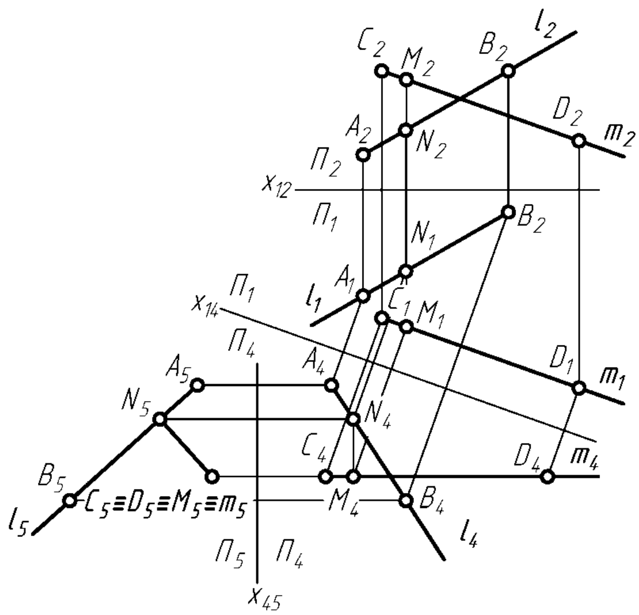


Рис. 5.4

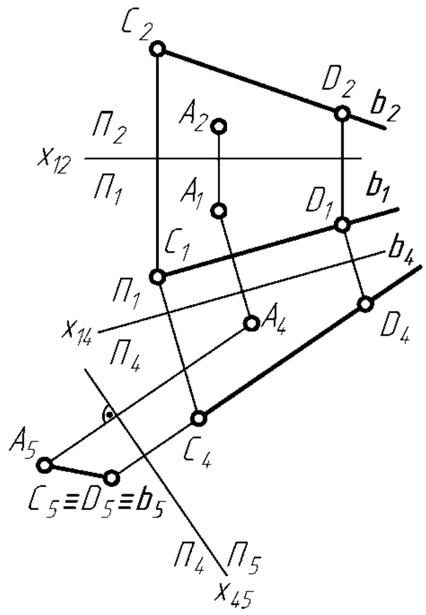


Рис. 5.5

На заданих прямих вибирають відрізки ($\boldsymbol{AB \subset l}$, $\boldsymbol{CD \subset m}$) і виконують заміну $\mathbf{П_2}$ на $\mathbf{П_4}$, яка паралельна до однієї з заданих прямих ($\mathbf{П_4} || \boldsymbol{m}$), проводять $\boldsymbol{x_{14} || m_1}$, будують $\boldsymbol{A_4B_4}$ і $\boldsymbol{C_4D_4}$, площину $\mathbf{П_1}$ замінюють площиною $\mathbf{П_5}$, яка перпендикулярна до $\boldsymbol{m}$, проводять $\boldsymbol{x_{45} \perp m_4}$ і будують $\boldsymbol{A_5B_5}$ і $\boldsymbol{C_5D_5}$. На $\mathbf{П_5}$ пряма $\boldsymbol{m}$ проекціюється в точку ($\boldsymbol{m_5 \equiv C_5 \equiv D_5}$). З $\boldsymbol{C_5}$ опускають перпендикуляр на $\boldsymbol{A_5B_5}$. Кінці побудованого перпендикуляра належать заданим прямим ($\boldsymbol{M_5 \subset m_5}$, $\boldsymbol{N_5 \subset l_5}$) і є найближчими точками на мимобіжних прямих. Вихідні проекції точок $\boldsymbol{M}$ і $\boldsymbol{N}$ будують зворотним проекціюванням.

Завдання 5.2. Визначити відстань між точкою $\boldsymbol{A}$ і прямою $\boldsymbol{b}$ (рис. 5.5).

Розв’язування. На проекціях заданої прямої вибирають проекції точок $\boldsymbol{C}$ і $\boldsymbol{D}$, площину $\mathbf{П_2}$ замінюють площиною $\mathbf{П_4}$, яка перпендикулярна до $\mathbf{П_1}$ і паралельна до $\boldsymbol{b}$ ($\mathbf{П_1 \perp П_4} || \boldsymbol{b}$), проводять $\boldsymbol{x_{14} || l_1}$, будують $\boldsymbol{C_4}$, $\boldsymbol{D_4}$ і $\boldsymbol{A_4}$, через $\boldsymbol{C_4}$ і $\boldsymbol{D_4}$ проводять $\boldsymbol{b_4}$, площину $\mathbf{П_1}$ замінюють площиною $\mathbf{П_5}$, яка перпендикулярна до $\boldsymbol{b}$, ($\mathbf{П_4 \perp П_5} \perp \boldsymbol{b_5}$) проводять $\boldsymbol{x_{45} \perp b_4}$, будують $\boldsymbol{C_5}$, $\boldsymbol{D_5}$ і $\boldsymbol{A_5}$. На $\mathbf{П_5}$ пряма $\boldsymbol{b}$

проекціюється у точку ($b_5 \equiv C_5 \equiv D_5$). Будують відрізок A_5C_5, який і дорівнює відстані між точкою A і прямою b.

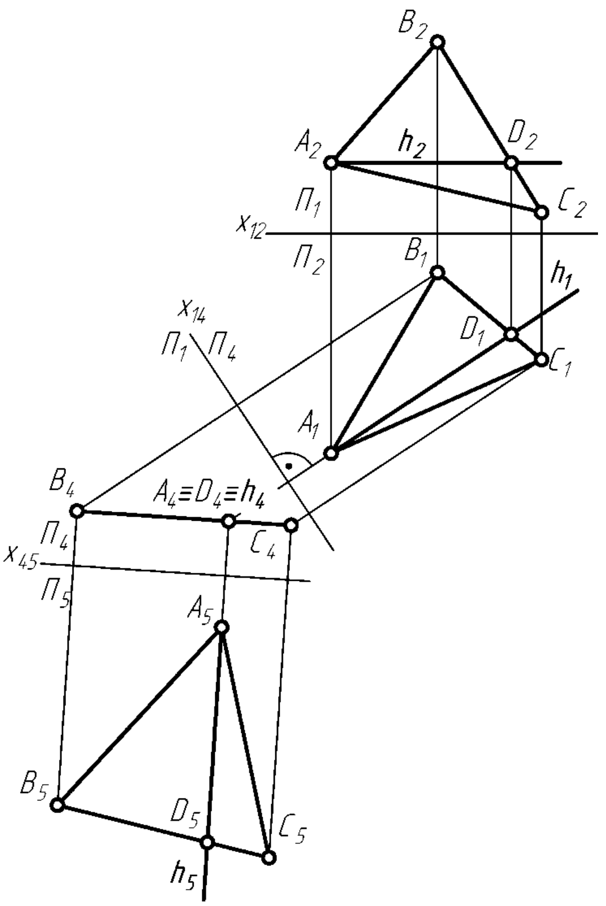
Завдання 5.3. Визначити натуральну величину трикутника ABC, який займає загальне положення відносно Π_1 і Π_2 (рис. 5.6).

Розв'язування. Оскільки плоска геометрична фігура проекціюється в натуральну величину на паралельну до неї площину проекцій, заданий трикутник шляхом послідовної заміни площин проекцій переводять спочатку у положення проекціюючої площини, а потім – у положення площини рівня. При цьому одна з головних ліній площини трикутника стає проекціюючою прямою.

Отже, у площині заданого трикутника $ABC(A_1B_1C_1,\ A_2B_2C_2)$ будують горизонталь $h(h_1,\ h_2)$, площину Π_2 замінюють площиною Π_4, яка перпендикулярна до $h(x_{14} \perp h_1)$, будують $A_4,\ B_4,\ C_4$. На Π_4 площина заданого трикутника проекціюється у пряму лінію $A_4\ B_4\ C_4$. Площину Π_1 замінюють площиною Π_5, яка паралельна до трикутника ABC, проводять $x_{45} || A_4\ B_4\ C_4$ і будують $A_5B_5C_5$. На Π_5 трикутник ABC проекціюється у натуральну величину.

Завдання 5.4. Методом заміни площин проекцій площину загального положення $\alpha(h_\alpha, f_\alpha)$ перетворити у положення проекціюючої площини (рис. 5.7) і визначити величину кута нахилу площини α до Π_1.

Розв'язування. Площина, задана слідами, проекціююча, якщо один з її слідів перпендикулярний до осі проекцій. Оскільки горизонтальний слід фронтально-проекціюючої площини завжди перпендикулярний до осі x, замінюють площину Π_2 площиною Π_4 і на комплексному кресленні площини α будують $x_{14} \perp h_\alpha$. Для побудови нового фронтального сліду $f_{\alpha 4}$ на f_α вибирають довільну точку $F(F_1,\ F_2)$, проводять через F_1 перпендикуляр до x_{14}, на якому будують F_4, через F_4 і точку збігу слідів площини α на осі x_{14} ($X_{\alpha 4}$) будують слід площини α на Π_4 – $f_{\alpha 4}$. Кут φ утворений віссю x_{14} і слідом $f_{\alpha 4}$ дорівнює куту нахилу площини α до Π_1.



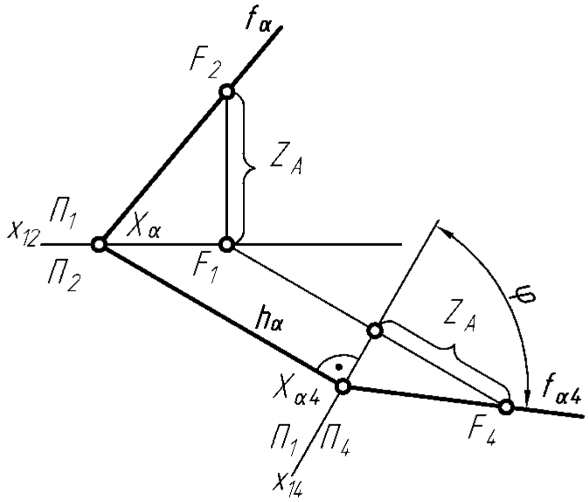


Рис. 5.6 **Рис. 5.7**

5.3. Метод плоскопаралельного переміщення

Перетворення за допомогою плоскопаралельного переміщення полягає у тому, що потрібне розташування геометричної фігури відносно площин проекцій досягають переміщенням геометричної фігури при незмінній системі площин проекцій. Під час плоскопаралельного переміщення всі точки геометричної фігури переміщують у площинах між собою паралельних і паралельних до однієї з площин проекцій, а відстані між точками залишають незмінними.

Якщо геометричну фігуру переміщують паралельно до **$П_1$**, то всі її точки переміщуються у площинах, паралельних до **$П_1$**, тобто фронтальні проекції всіх її точок переміщуються по фронтальних слідах площин, перпендикулярних до вертикальних ліній проекційного зв’язку.

Якщо геометричну фігуру переміщують паралельно до **$П_2$**, то всі її точки переміщуються у площинах, паралельних до **$П_2$**, тобто горизонтальні проекції всіх її точок переміщуються по горизонтальних слідах площин, перпендикулярних до вертикальних ліній проекційного зв'язку.

Під час плоскопаралельного переміщення геометричну фігуру, яка займає загальне положення відносно системи площин проекцій переміщують до тих пір, поки вона не прийме особливе положення відносно тієї ж системи площин проекцій.

Нехай відомі проекції на $\mathbf{\Pi_1}$ і $\mathbf{\Pi_2}$ відрізка прямої загального положення $\boldsymbol{AB}(\boldsymbol{A_1B_1},\ \boldsymbol{A_2B_2})$ (рис. 5.8). Використовуючи метод плоскопаралельного переміщення необхідно побудувати натуральну величину $\boldsymbol{AB}$.

У результаті переміщення $\boldsymbol{AB}$ повинен зайняти положення прямої рівня, тобто одна з його проекцій повинна стати паралельною до осі $\boldsymbol{x}$. Отже, на вільному місці аркуша проводять горизонтальну пряму, на якій вибирають $\boldsymbol{\bar{A}_1}$, від $\boldsymbol{\bar{A}_1}$ відкладають $\boldsymbol{\bar{B}_1}$ ($\boldsymbol{A_1B_1}=\boldsymbol{\bar{A}_1\bar{B}_1}$). Під час переміщення фронтальні проекції кінців відрізка переміщуються у фронтальних слідах площин $\boldsymbol{\alpha}$ і $\boldsymbol{\beta}$ ($\boldsymbol{f_\alpha}||\boldsymbol{f_\beta}||\boldsymbol{x}$) і знаходяться у проекційному зв'язку з відповідними горизонтальними проекціями кінців відрізка. Отже, через $\boldsymbol{A_2}$ і $\boldsymbol{B_2}$ проводять $\boldsymbol{f_\alpha}$ і $\boldsymbol{f_\beta}$, через $\boldsymbol{\bar{A}_1}$ проводять вертикальну лінію проекційного зв'язку до перетину з $\boldsymbol{f_\alpha}$ й отримують $\boldsymbol{\bar{A}_2}$, через $\boldsymbol{B_1}$ проводять вертикальну лінію проекційного зв'язку до перетину з $\boldsymbol{f_\beta}$ й отримують $\boldsymbol{\bar{B}_2}$. Побудована $\boldsymbol{\bar{A}_2\bar{B}_2}$ являється натуральною величиною відрізка $\boldsymbol{AB}$, а кут $\boldsymbol{\varphi}$ дорівнює куту нахилу відрізка $\boldsymbol{AB}$ до $\mathbf{\Pi_1}$.

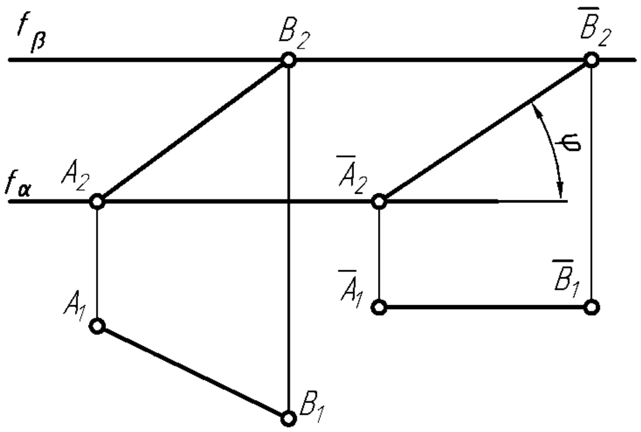


Рис. 5.8

Для визначення форми і дійсних розмірів плоскої фігури необхідно останню поперемінно переміщувати відносно двох площин проекцій, причому під час першого переміщення фігура займає положення проекціюючої площини, під час другого переміщення плоска фігура займає положення площини рівня. Для виконання такого плоскопаралельного переміщення необхідно побудувати проекції однієї з головних ліній площини.

Щоб визначити дійсну величину трикутника ***ABC*** (рис. 5.9) проводять проекції фронталі $\boldsymbol{f(f_1,\ f_2)}$ і площину трикутника ***ABC*** переміщують у горизонтально-проекціююче положення. В результаті такого переміщення $\boldsymbol{f_2}$ займає вертикальне положення, а горизонтальна проекція трикутника ($\overline{A}_1\overline{B}_1\overline{C}_1$) вироджується у пряму лінію.

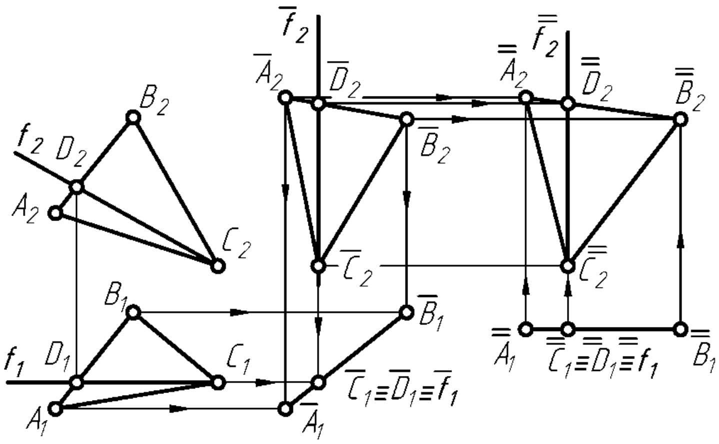


Рис. 5.9

Побудову починають з викреслювання на вільному місці аркуша вертикальної прямої, яка відповідає $\overline{f}_2$, вибирають $\overline{B}_2$ і, використовуючи метод засічок будують $\overline{A}_2\overline{B}_2\overline{C}_2 = A_2B_2C_2$, за правилами побудови проекцій точок під час плоскопаралельного переміщення будують $\overline{A}_1\overline{B}_1\overline{C}_1$. У результаті переміщення трикутника ***ABC*** у положення площини рівня горизонтальна його проекція стає паралельною осі $\boldsymbol{x}$. Тобто, на вільному місці аркуша викреслюють горизонтальну пряму, на якій, використовуючи метод засічок, будують $\overline{\overline{A}}_1\overline{\overline{B}}_1\overline{\overline{C}}_1 = \overline{A}_1\overline{B}_1\overline{C}_1$. За правилами побудови проекцій точок під час плоскопаралельного переміщення будують $\overline{\overline{A}}_2\overline{\overline{B}}_2\overline{\overline{C}}_2 = ABC$.

5.4. Метод обертання навколо осі перпендикулярної до площини проекцій (проекціюючої прямої)

Плоскопаралельне переміщення називають обертанням навколо уявних осей, перпендикулярних до **$П_1$** і **$П_2$**, а обертання навколо проекціюючих прямих або прямих рівня – окремими випадками плоскопаралельного переміщення. Тому для обертання навколо осі, перпендикулярної до площини проекцій, характерні всі особливості плоскопаралельного переміщення.

Для виконання обертання геометричної фігури визначають п’ять постійних і два змінних елементи обертання:

- об’єкти обертання – характерні точки геометричної фігури;
- вісь обертання – пряма, навколо якої обертають об’єкт обертання;
- площини обертання – площини, в яких обертають об’єкти обертання, завжди перпендикулярні до осі обертання;
- центри обертання – точки перетину осі обертання з площинами обертання;
- радіуси обертання – відстані від об’єктів обертання до центрів обертання, для виконання обертання визначають натуральні величини радіусів обертання.

До змінних елементів обертання відносять кут і напрям обертання, які залежать від поставленої задачі й умов обертання.

Механізм обертання точки ***A*** зображено на рис. 5.10.

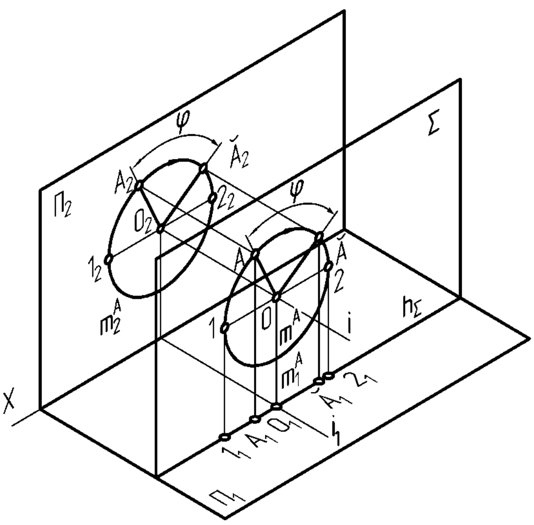


Рис. 5.10

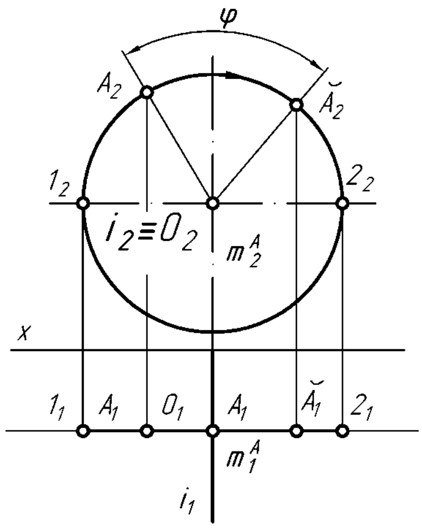


Рис. 5.11

Елементи механізму обертання:

- об’єкт обертання – точка $\boldsymbol{A}$;
- вісь обертання – фронтально-проекціююча пряма $\boldsymbol{i}$ ($\boldsymbol{i}\perp\Pi_2$);
- площина обертання – фронтальна площина $\boldsymbol{\Sigma}(\boldsymbol{A}\subset\boldsymbol{\Sigma}\perp\boldsymbol{i})$;
- центр обертання – точка $\boldsymbol{O}(\boldsymbol{i}\cap\boldsymbol{\Sigma}=\boldsymbol{O})$;
- радіус обертання $\boldsymbol{R=OA}$ – під час обертання навколо проекціюючої прямої одна з проекцій радіуса обертання дорівнює його натуральній величині, тому графічно її визначати не потрібно.

Обертаючись, точка $\boldsymbol{A}$ описує коло $\boldsymbol{m}$, яке розташоване у площині $\boldsymbol{\Sigma}$. Оскільки площина $\boldsymbol{\Sigma}$ паралельна до Π_2, фронтальна проекція кола $\boldsymbol{m}$ дорівнює його натуральній величині ($\boldsymbol{m=m_2}$), а на Π_1 коло $\boldsymbol{m}$ проекціюють у відрізок прямої, який розташований перпендикулярно до $\boldsymbol{i_1}$ ($\boldsymbol{m_1\perp i_1}$) на горизонтальному сліді площини $\boldsymbol{\Sigma}(\boldsymbol{h_\Sigma\equiv m_1})$ (рис. 5.11).

Під час обертання точки $\boldsymbol{A}$ на кут $\boldsymbol{\alpha}$, з положення $\boldsymbol{OA}$ в положення $\boldsymbol{O\breve{A}_2}$, фронтальна проекція точки $\boldsymbol{A}$ з положення $\boldsymbol{A_2}$ переміщається по колу $\boldsymbol{m_2}$ у положення $\boldsymbol{\breve{A}_2}$, а горизонтальна проекція з $\boldsymbol{A_1}$ в $\boldsymbol{\breve{A}_1}$ переміщається по прямій $\boldsymbol{m_1}$.

Аналогічні переміщення виконує точка під час обертання навколо горизонтально-проекціюючої осі (рис. 5.12).

Метод обертання навколо осі, перпендикулярної до площини проекцій, використовують для визначення натуральної величини відрізка $\boldsymbol{AB}$ прямої загального положення і величини кута його нахилу до площини проекцій (рис. 5.13). Побудову виконують за описаним вище порядком. Визначають елементи механізму обертання:

- об’єкти обертання – точки $\boldsymbol{A}(\boldsymbol{A_1}, \boldsymbol{A_2})$ і $\boldsymbol{B}(\boldsymbol{B_1}, \boldsymbol{B_2})$;
- вісь обертання – горизонтально-проекціююча пряма $\boldsymbol{i}(\boldsymbol{i_1}, \boldsymbol{i_2})$, для полегшення процесу обертання проводять через один з об’єктів обертання ($\boldsymbol{A\subset i}$);
- площина обертання – горизонтальна площина $\boldsymbol{\beta}$ проходить через точку $\boldsymbol{B}(\boldsymbol{B_2\subset f_\beta})$;
- центр обертання $\boldsymbol{O}(\boldsymbol{O_1}, \boldsymbol{O_2})$;

- радіус обертання $R(R_1=B_1O_1;\ R_2=B_2O_2)$;
- кут і напрям обертання вибирають так, щоб траєкторія точки B була мінімальною.

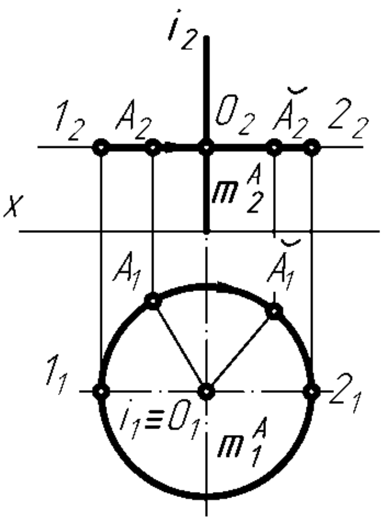


Рис. 5.12

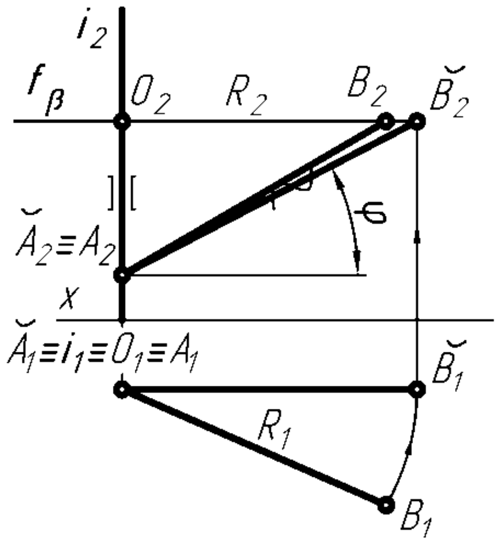


Рис. 5.13

Відрізок AB повертають до положення фронтальної прямої ($\breve{A}_1\breve{B}_1 || x$), A належить осі обертання, тому $A_1 \equiv \breve{A}_1$, через A_1 проводять горизонтальну пряму і радіусом $R=R_1=B_1O_1$ обертають B_1 до суміщення з горизонтальною прямою, отримують $\breve{B}_1$, через $\breve{B}_1$ проводять вертикальну лінію проекційного зв'язку до перетину з f_β й отримують $\breve{B}_2$. Таким чином $\breve{A}_2\breve{B}_2=AB$ – натуральна величина відрізка AB, φ – величина кута нахилу відрізка AB до Π_1.

Методом обертання навколо проекціюючої прямої площину, яка займає загальне положення відносно площин проекцій, перетворюють у проекціюючу площину. Для цього одну з головних ліній площини обертають у положення проекціюючої прямої.

Нехай площина задана трьома точками, які не лежать на одній прямі (A, B, C) (рис. 5.14). Необхідно, обертаючи задану площину навколо горизонтально проекціюючої прямої $i(i \perp \Pi_1)$, перевести у фронтально-проекціююче положення.

Сполучають однойменні проекції точок $\boldsymbol{A}$, $\boldsymbol{B}$ і $\boldsymbol{C}$ прямими лініями. Через точку $\boldsymbol{C}$ будують горизонталь $\boldsymbol{C1}(\boldsymbol{C_2 1_2} || \boldsymbol{x},\ \boldsymbol{C_1 1_1})$, через $\boldsymbol{C}$ проводять вісь обертання $\boldsymbol{i}$ ($\boldsymbol{i_2} \perp \boldsymbol{x},\ \boldsymbol{i_1} \equiv \boldsymbol{C_1}$), повертають $\boldsymbol{A_1B_1C_1}$ до положення, в якому $\boldsymbol{C_1 1_1}$ займе вертикальне положення ($\breve{\boldsymbol{C}}_{\boldsymbol{1}}\breve{\boldsymbol{1}}_{\boldsymbol{1}} \perp \boldsymbol{x}$), $\breve{\boldsymbol{C}}_{\boldsymbol{1}} \equiv \boldsymbol{C_1}$ і $\breve{\boldsymbol{C}}_{\boldsymbol{2}} \equiv \boldsymbol{C_2}$ як проекції точки яка лежить на осі обертання, методом засічок. Використовуючи положення точок $\boldsymbol{C_1}$ і $\boldsymbol{1_1}$ будують $\breve{\boldsymbol{A}}_{\boldsymbol{1}}\breve{\boldsymbol{B}}_{\boldsymbol{1}}\breve{\boldsymbol{C}}_{\boldsymbol{1}} = \boldsymbol{A_1B_1C_1}$, через $\boldsymbol{A_2}$ і $\boldsymbol{B_2}$ будують фронтальні сліди горизонтальних площин $\boldsymbol{\alpha}$ і $\boldsymbol{\beta}$, в яких обертають точки $\boldsymbol{A}$ і $\boldsymbol{B}$, через $\breve{\boldsymbol{A}}_{\boldsymbol{1}}$ проводять вертикальну лінію проекційного зв'язку до перетину з $\boldsymbol{f_\alpha}$ й отримують $\breve{\boldsymbol{A}}_{\boldsymbol{2}}$, через $\breve{\boldsymbol{B}}_{\boldsymbol{1}}$ проводять вертикальну лінію проекційного зв'язку до перетину з $\boldsymbol{f_\beta}$ і отримують $\breve{\boldsymbol{B}}_{\boldsymbol{2}}$. У новому положенні площину спроекціювали у пряму $\breve{\boldsymbol{A}}_{\boldsymbol{2}}\breve{\boldsymbol{B}}_{\boldsymbol{2}}\breve{\boldsymbol{C}}_{\boldsymbol{2}}$, отже, вона стала фронтально проекціюючою, а кут $\boldsymbol{\alpha}$ дорівнює куту нахилу заданої площини до $\boldsymbol{\Pi_1}$.

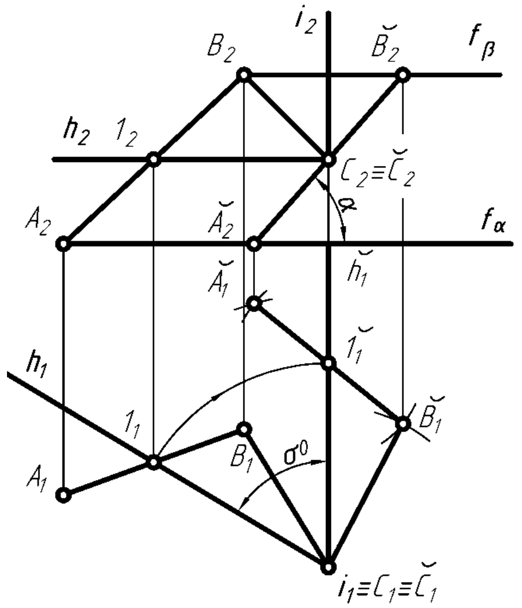


Рис. 5.14

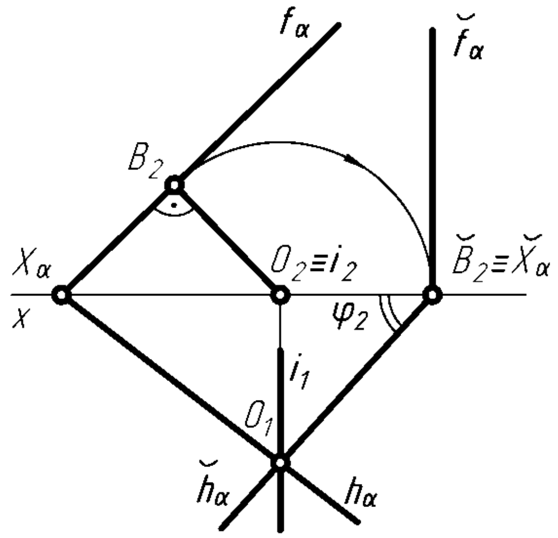


Рис. 5.15

Для перетворення площини загального положення заданої слідами $\boldsymbol{\alpha}(\boldsymbol{h_\alpha}, \boldsymbol{f_\alpha})$ (рис. 5.15) у положення проекціюючої площини (наприклад, горизонтально-проекціюючої) вибирають фронтально-проекціюючу вісь обертання $\boldsymbol{i}$ ($\boldsymbol{i} \perp \boldsymbol{\Pi_2}$), яка б належала $\boldsymbol{\Pi_1}$ ($\boldsymbol{i_1} \perp \boldsymbol{x},\ \boldsymbol{i_2} \subset \boldsymbol{x}$). Для побудови проекцій осі обертання $\boldsymbol{i}$ на $\boldsymbol{h}_\alpha$ вибирають довільну точку $\boldsymbol{O}$ ($\boldsymbol{O_1 \subset h_\alpha}$, $\boldsymbol{O_2 \subset x}$), через $\boldsymbol{O_1}$ проводять $\boldsymbol{i_1}$ і визначають $\boldsymbol{i_2}$, яка збігається з $\boldsymbol{O_2}$ ($\boldsymbol{i_2 \equiv O_2}$), опускають з $\boldsymbol{O_2}$ перпендикуляр на $\boldsymbol{f_\alpha}$, обертають його основу $\boldsymbol{B \equiv B_2}$ до суміщення з віссю $\boldsymbol{x}$ і отримують $\breve{\boldsymbol{B}}_2$, яка є точкою збігу слідів площини $\boldsymbol{\alpha}$ у новому положенні. Через $\breve{\boldsymbol{B}}_2$ проводять $\breve{f}_\alpha \perp \boldsymbol{x}$, через $\boldsymbol{O_1}$ і $\breve{\boldsymbol{B}}_2 \equiv \breve{\boldsymbol{X}}_\alpha$ проводять $\breve{\boldsymbol{h}}_\alpha$. Таким чином площина $\boldsymbol{\alpha}$ займає положення горизонтально проекціюючої площини, а кут $\boldsymbol{\varphi}$ дорівнює куту нахилу площини $\boldsymbol{\alpha}$ до $\mathbf{\Pi_2}$.

Завдання 5.5. Визначити кут нахилу $\boldsymbol{\varphi}$ площини трикутника $\boldsymbol{ABC}$ до $\mathbf{\Pi_1}$ (рис. 5.16).

Розв'язування. Для визначення кута нахилу площини загального положення до однієї з площин проекцій використовують властивості лінії найбільшого нахилу до цієї площини проекцій: лінія найбільшого нахилу – це пряма, яка лежить у заданій площині й перпендикулярна до однойменної головної лінії даної площини; вона визначає кут нахилу заданої площини до однойменної площини проекцій. Отже, кут між лінією найбільшого нахилу до $\mathbf{\Pi_1}$ і площиною проекцій $\mathbf{\Pi_1}$ визначає кут нахилу заданої площини до $\mathbf{\Pi_1}$.

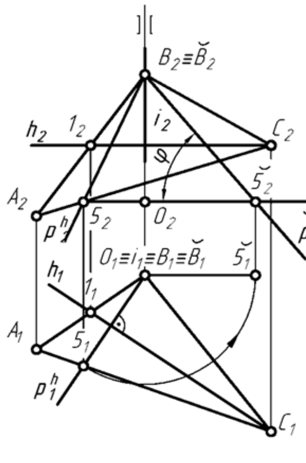


Рис. 5.16

Через точку $\boldsymbol{C}$ проводять горизонталь $\boldsymbol{h}(\boldsymbol{h_2} || \boldsymbol{x}, \boldsymbol{h_1})$ трикутника $\boldsymbol{ABC}$, з $\boldsymbol{B_1}$ опускають перпендикуляр на $\boldsymbol{h_1}$, який є горизонтальною проекцією лінії найбільшого нахилу до $\mathbf{\Pi_1}$ ($\boldsymbol{p_1^h}$), У точці перетину $\boldsymbol{p_1^h}$ і $\boldsymbol{A_1C_1}$ отримують точку $\boldsymbol{5_1}$ ($\boldsymbol{p_1^h \cap A_1C_1 = 5_1}$), прямим проекціюванням $\boldsymbol{5_1}$ на $\boldsymbol{A_2C_2}$ отримують $\boldsymbol{5_2}$, через $\boldsymbol{B_2}$ і $\boldsymbol{5_2}$ будують фронтальну проекцію лінії найбільшого нахилу до $\mathbf{\Pi_1}$ $\boldsymbol{p_2^h}$.

Для отримання натуральної величини шуканого кута необхідно лінію найбільшого нахилу до $\mathbf{\Pi_1}$ повернути в положення фронтальної прямої. Отже, визначають елементи механізму обертання:

- об'єкти обертання – точки $\boldsymbol{B}(\boldsymbol{B_1}, \boldsymbol{B_2})$ і $\boldsymbol{5}(\boldsymbol{5_1}, \boldsymbol{5_2})$;

- вісь обертання – горизонтально-проекціююча пряма $i(i_1, i_2)$, яка проходить через точку B, тобто $B_1 \equiv \breve{B}_1$, $B_2 \equiv \breve{B}_2$, як проекції точок, які лежать на осі обертання;

- площина обертання – горизонтальна площина α фронтальний слід якої проходить через 5_2 ($f_\alpha || x$);

- центр обертання $O(O_2 = i_2 \cap f_\alpha, O_1 \equiv B_1 \equiv i_1)$;

- радіус обертання R ($R_2 = O_2 5_2$, $R_1 = O_1 5_1 = O5$);

- кут і напрям обертання повинні забезпечити суміщення точки 5_1 з горизонтальною прямою на вільному місці аркуша.

Через B_1 проводять горизонтальну пряму і радіусом $R = R_1 = O_1 5_1$ обертають 5_1 до суміщення з горизонтальною прямою, отримують $\breve{5}_1$, через $\breve{5}_1$ проводять вертикальну лінію проекційного зв'язку до перетину з f_α і отримують $\breve{5}_2$, сполучають $\breve{5}_2$ і $\breve{B}_2$ й отримують фронтальну проекцію повернутої лінії найбільшого нахилу до Π_1 $\breve{p}_2^h$. Таким чином кут φ дорівнює натуральній величині кута нахилу площини трикутника ABC до Π_1.

5.5. Метод обертання навколо прямої рівня

Обертання навколо прямої рівня виконують аналогічно обертанню навколо проекціюючої прямої. Але оскільки жодна проекція перпендикуляра до прямої рівня не дорівнює натуральній величині самого перпендикуляра, то проекції траєкторій руху точок не проекціюються без спотворень, а для виконання обертання необхідно визначати натуральні величини радіусів обертання.

Метод обертання навколо прямої рівня використовують для визначення натуральної величини плоскої геометричної фігури. Щоб плоска геометрична фігура стала паралельною до Π_1, її обертають навколо горизонталі, а щоб вона стала паралельною до Π_2 – навколо фронталі.

Для визначення натуральної величини трикутника $ABC(A_1B_1C_1, A_2B_2C_2)$ (рис. 5.17) будують горизонталь $h(h_2 || x, h_1)$, яку обирають за вісь обертання.

Горизонталь $\boldsymbol{h}$ проходить через точки $\boldsymbol{A}$ і $\boldsymbol{1}$, які в процесі обертання залишаються нерухомими ($A_1 \equiv \breve{A}_1$, $1_1 \equiv \breve{1}_1$). Отже, обертають точку $\boldsymbol{B}$ в площині $\boldsymbol{\alpha}$ і точку $\boldsymbol{C}$ у площині $\boldsymbol{\beta}$. Площини обертання перпендикулярні до осі обертання, отже $h_\alpha \perp h_1$ і $h_\beta \perp h_1$ і в перетині з нею утворюють центри обертання $O(O_1, O_2)$ і O' (O_1', O_2'). Для обертання точки $\boldsymbol{B}$ будують проекції радіуса обертання $OB(O_1B_1, O_2B_2)$ і визначають його натуральну величину O_1B_0 за правилом прямокутного трикутника. Із точки O_1 як центра радіусом O_1B_0 проводять дугу до перетину з h_α і отримують $\breve{B}_1$. Точка $\breve{C}_1$ одночасно належить h_β і прямій $\breve{B}_1\breve{1}_1$.

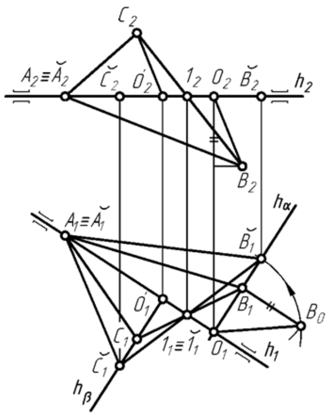


Рис. 5.17

Отже, через $\breve{B}_1$ і $\breve{1}_1$ проводять пряму до перетину з h_β і отримують $\breve{C}_1$, з'єднують між собою $\breve{A}_1$, $\breve{B}_1$, $\breve{C}_1$ і отримують натуральну величину трикутника $\breve{A}_1\breve{B}_1\breve{C}_1 = ABC$ і дійсні величини його кутів. Фронтальна проекція повернутого трикутника збігається з фронтальною проекцією осі обертання ($\breve{A}_2\breve{B}_2\breve{C}_2 \equiv h_2$).

Обертання навколо слідів площини розглядають як окремий випадок обертання навколо прямої рівня і називають методом суміщення. Метод суміщення використовують для визначення натуральних величин геометричних фігур, які лежать у площинах загального положення заданих слідами, або побудови у цих площинах фігур, які мають певну конфігурацію і розміри.

Суть методу у тому, що площину загального положення $\boldsymbol{\alpha}$ за допомогою обертання навколо одного зі слідів приводять у таке положення, коли вона повністю збігається з однойменною площиною проекцій. При цьому слід, як вісь обертання не змінює свого положення. Тому для побудови суміщеного положення площини $\boldsymbol{\alpha}$ досить побудувати положення тільки однієї точки, яка належить площині, виключаючи ті точки, які належать сліду.

Нехай площину $\alpha(h_\alpha, f_\alpha)$ необхідно повернути навколо h_α до суміщення з Π_1 (рис. 5.18). Для спрощення геометричних побудов вибирають

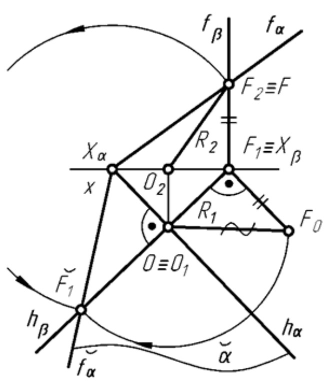


Рис. 5.18

точку, яка належить фронтальному сліду площини ($F\subset f_\alpha$). Будують проекції точки F($F_2\equiv F\subset f_\alpha$, $F_1\subset x$), визначають проекції радіуса обертання ($F_1F_0=F_2F_1$, $F_0O_2=R$). З центра $O\equiv O_1$ радіусом R описують дугу до перетину з h_β й отримують суміщене положення точки F – точку $\breve{F}_1$. $\breve{F}_2$ можна отримати обертаючи F_2 навколо X_α. Через X_α і $\breve{F}_1$ будують $\breve{f}_\alpha$ – суміщене положення сліду f_α й отримують $\breve{\alpha}$ суміщене положення площини α.

Завдання 5.6. Способом суміщення площини α з площиною проекцій Π_1 визначити дійсну величину трикутника ABC, який лежить у площині α (рис. 5.19).

Розв'язування. Через A, B і C проводять горизонталі площини α $h^A(h_1^A, h_2^A)$, $h^B(h_1^B, h_2^B)$, $h^C(h_1^C, h_2^C)$, суміщають площину α з площиною Π_1, обертанням навколо h_α будують на $\breve{f}_\alpha$ точки $\breve{F}_1^A$, $\breve{F}_1^B$, $\breve{F}_1^C$, через які проходять суміщені проекції горизонталей $\breve{h}_1^A \parallel \breve{h}_1^B \parallel \breve{h}_1^C \parallel h_\alpha$. Через A_1, B_1 і C_1 проводять перпендикуляри до h_α до перетину з $\breve{h}_1^A$, $\breve{h}_1^B$, $\breve{h}_1^C$ й отримують суміщені положення вершин трикутника $\breve{A}_1, \breve{B}_1, \breve{C}_1$, сполучають побудовані точки й отримують дійсну величину трикутника $\breve{A}_1\breve{B}_1\breve{C}_1$.

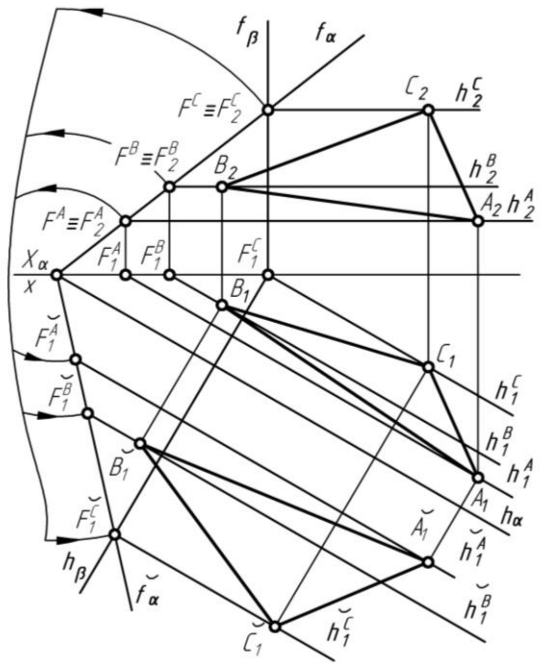


Рис. 5.19

Завдання 5.7. Способом суміщення площини $\boldsymbol{\beta}$ з $\boldsymbol{\Pi_2}$ побудувати проекції рівностороннього трикутника $\boldsymbol{ABC}$, який лежить у площині $\boldsymbol{\beta}$, за відомою горизонтальною проекцією його сторони $\boldsymbol{A_1B_1}$ (рис. 5.20).

Розв'язування. За ознакою належності точок площині будують фронтальні проекції точок $\boldsymbol{A(A_2)}$ і $\boldsymbol{B(B_2)}$, суміщають площину $\boldsymbol{\beta}$ з площиною $\boldsymbol{\Pi_2}$, обертанням навколо $\boldsymbol{f_\beta}$ будують на $\boldsymbol{h_\beta}$ точки $\boldsymbol{H^A_1}$, $\boldsymbol{H^B_1}$, через які проводять суміщені проекції фронталей $\breve{f}_2^A \,||\, \breve{f}_2^B \,||\, f_\beta$. Через $\boldsymbol{A_2}$ і $\boldsymbol{B_2}$ проводять перпендикуляри до $\boldsymbol{f_\beta}$ до перетину з $\breve{f}_2^A$ і $\breve{f}_2^B$ й отримують суміщені положення точок $\breve{A}_2$, $\breve{B}_2$, сполучають побудовані точки й отримують $\breve{A}_2\breve{B}_2$ – дійсну величину сторони рівностороннього трикутника. Методом засічок на базі сторони $\breve{A}_2\breve{B}_2$ будують рівносторонній трикутник $\breve{A}_2\breve{B}_2\breve{C}_2$.

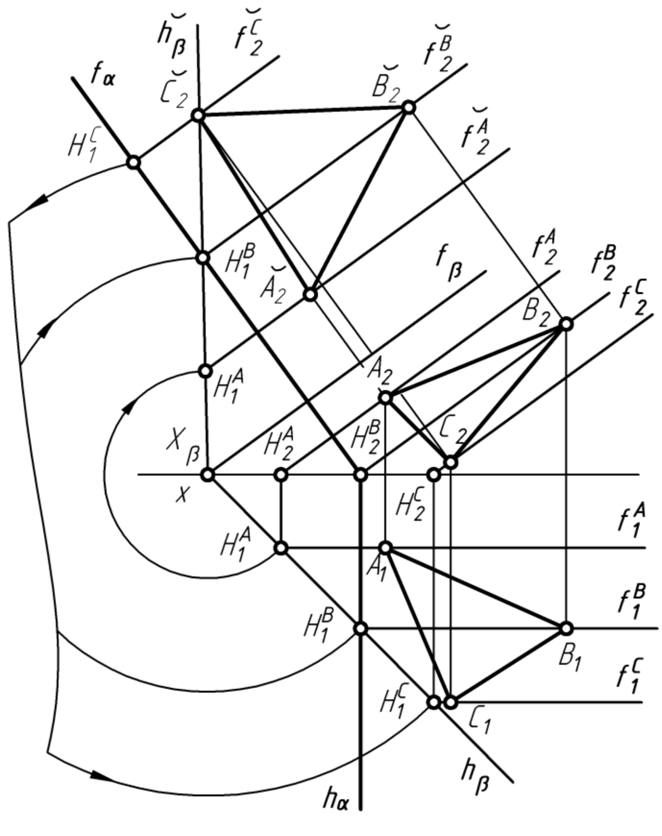


Рис. 5.20

Через $\breve{C}_2$ проводять суміщену проекцію фронталі $\breve{f}_2^C \,||\, f_\beta$ до перетину з $\breve{h}_\beta$ й отримують $\breve{H}_1^C$, обертають $\breve{H}_1^C$ до суміщення з $\boldsymbol{h_\beta}$ й отримують $\boldsymbol{H_1^C}$, через

H_1^C проводять $\breve{f}_1^C||x$. Через $\breve{C}_2$ проводять перпендикуляр до f_β до перетину з f_2^C і отримують C_2, через C_2 проводять вертикальну лінію проекційного з'язку до перетину з f_1^C і отримують C_1. Сполучають однойменні проекції точок A, B, C й отримують проекції рівностороннього трикутника ABC($A_1B_1C_1$, $A_2B_2C_2$).

5.6. Визначення натуральних величин кутів між геометричними фігурами

В інженерній графіці відомі кути між двома прямими, між прямою і площиною, між двома площинами. Якщо вказані геометричні фігури займають загальне положення відносно площин проекцій, то на жодну з площин проекцій кути між ними не проекціюються у натуральні величини. Тому для визначення натуральних величин кутів між геометричними фігурами використовують методи перетворення проекцій.

Не паралельні між собою прямі можуть перетинатися або бути мимобіжними. Кут між мимобіжними прямими дорівнює куту між прямими, які перетинаються і відповідно паралельні до даних мимобіжних прямих. Прямі, які перетинаються, задають площину. Тому визначення натуральної величини кута між двома прямими загального положення, які перетинаються, проводять аналогічно визначенню натуральної величини плоскої геометричної фігури (трикутника).

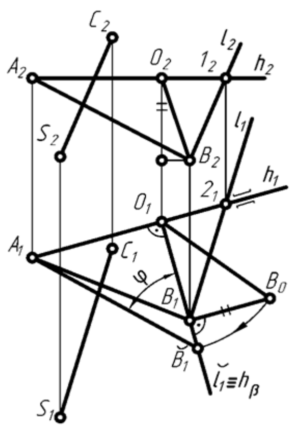


Рис. 5.21

Завдання 5.8. Визначити натуральну величину кута φ між відрізками мимобіжних прямих AB і SC (рис. 5.21).

Розв'язування. Через точку B проводять пряму l паралельну до SC ($l_1||S_1C_1$, $l_2||S_2C_2$). Кут між AB і SC дорівнює куту між AB і l, величину якого визначають обертанням навколо лінії рівня.

Через A будують горизонталь h($h_2||x$, h_1) і приймають її за вісь обертання. Через B_1 проводять горизонтальний слід площини обертання для точки $\boldsymbol{B}(\boldsymbol{h_\beta} \perp \boldsymbol{h_1})$, будують проекції центра обертання точки $\boldsymbol{B}(\boldsymbol{O_1}=\boldsymbol{h_\beta} \cap \boldsymbol{h_1}, \boldsymbol{O_2} \subset \boldsymbol{h_2})$, методом прямокутного трикутника визначають натуральну величину радіуса обертання $\boldsymbol{r}=\boldsymbol{O_1 B_0}$, обертають $\boldsymbol{B_1}$ у положення $\breve{\boldsymbol{B}}_1$. Кут $\boldsymbol{A_1} \breve{\boldsymbol{B}}_1 \boldsymbol{B_1}=\boldsymbol{\varphi}$ є шуканий.

Під кутом між прямою і площиною розуміють гострий кут між прямою та її ортогональною проекцією на цю площину. Вказаний кут розміщений при точці перетину прямої з площиною. Тому побудова його проекцій часто технічно складна або неможлива. Якщо визначають натуральну величину кута без зображення його проекцій то розв’язок спрощують шляхом визначення кута між прямою і перпендикуляром до площини (рис. 5.22), а шуканий кут знаходять з допомогою рівняння $\boldsymbol{\varphi=90\text{-}\Psi}$.

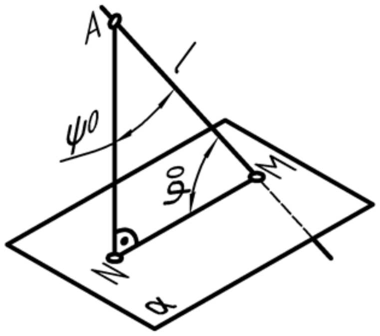


Рис. 5.22

Завдання 5.9. Визначити натуральну величину кута між прямою $\boldsymbol{l}$ та площиною $\boldsymbol{\alpha(ABC)}$ (рис. 5.23).

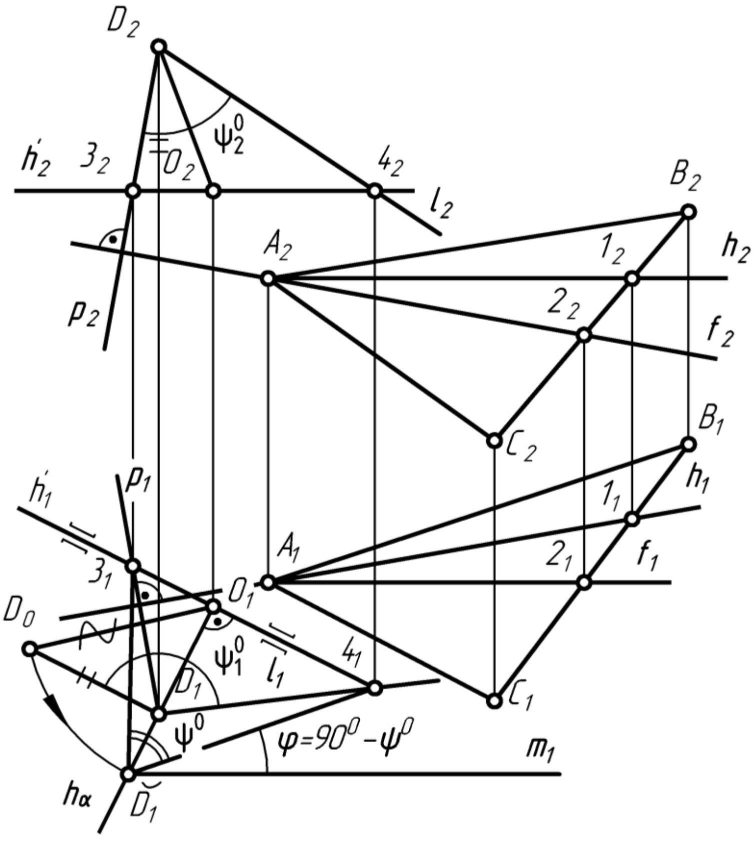


Рис. 5.23

Розв'язування. Будують проекції горизонталі $h(h_1, h_2)$ і фронталі $f(f_1, f_2)$ заданої площини, на прямій $l(l_1, l_2)$ вибирають довільну точку $D(D_1,D_2)$, з якої будують проекції перпендикуляра до площини $p(p_1 \perp h_1,\ p_2 \perp f_2)$. Кут Ψ між l і p є доповнювальним до шуканого. Натуральну величину його визначають за описаною вище методикою, повертаючи у положення паралельне до однієї з площин проекцій. Для цього будують проекції горизонталі h' (h'_1, h'_2) й обертають навколо неї точку D у положення $\breve{D}_1$. Кут $3_1 \breve{D}_1 4_1$ дорівнює натуральній величині доповнювального кута Ψ. Тому через $\breve{D}_1$ проводять перпендикуляр m_1 до $3_1 \breve{D}_1$ $(m_1 \perp 3_1 \breve{D}_1)$ й отримують натуральну величину шуканого кута φ.

Завдання 5.10. Визначити натуральну величину кута між прямою a та площиною $\beta(h_\beta, f_\beta)$ (рис. 5.24).

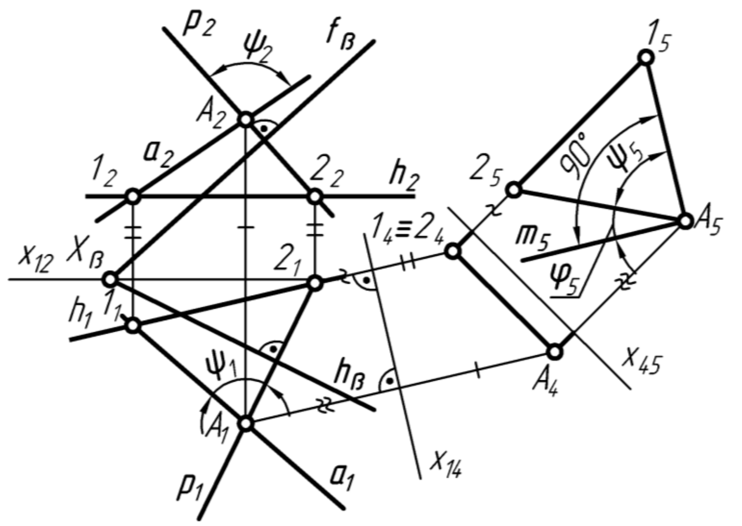


Рис. 5.24

Розв'язування. На прямій $a(a_1,a_2)$ вибирають довільну точку $A(A_1,A_2)$ і проводять через неї перпендикуляр до β $p(p_1 \perp h_\beta,\ p_2 \perp f_\beta)$. Кут між a і p Ψ (Ψ_1, Ψ_2) є доповнювальним до шуканого. Натуральну величину його визначають з допомогою методу заміни площин проекцій. З цією метою проводять у площині кута горизонталь $h(h_1, h_2)$ і замінюють Π_2 на Π_4 за умовою $\Pi_4 \perp h$. Тобто на вільному місці будують $x_{14} \perp h_1$ і отримують проекції точок $A,1,2$ на $\Pi_4(A_4,1_4,2_4)$.

Площина кута $\boldsymbol{\Psi}$ спроекціювалася на $\mathbf{П_4}$ у пряму лінію, адже вона стала проекціюючою до $\mathbf{П_4}$. Замінюють $\mathbf{П_1}$ на площину $\mathbf{П_5}$ паралельну до площини кута $\boldsymbol{\Psi}$. Тобто на вільному місці будують $\boldsymbol{x_{45}||A_4 1_4 2_4}$ й отримують $\boldsymbol{A_5 1_5 2_5}$. Отриманий кут $\boldsymbol{1_5 A_5 2_5}$ дорівнює натуральній величині доповнювального кута $\boldsymbol{\Psi}$. Тому через $\boldsymbol{A_5}$ проводять перпендикуляр $\boldsymbol{m_5}$ до $\boldsymbol{1_5 A_5}$($\boldsymbol{m_5 \perp 1_5 A_5}$) і отримують натуральну величину шуканого кута $\boldsymbol{\varphi}$.

Кут між двома площинами називають двогранним і вимірюють лінійним гострим кутом, який утворюють прямі перерізу граней з площиною, перпендикулярною до ребра двогранного кута. Такий лінійний кут проекціюється в натуральну величину на площину, перпендикулярну до ребра двогранного кута. Отже, якщо відома лінія взаємного перерізу двох площин, то величину кута між ними визначають з допомогою методу заміни площин проекцій, зробивши дану лінію взаємного перерізу проекціюючою прямою. Якщо ребро двогранного кута на кресленні не задано, задачу розв'язують шляхом побудови перпендикулярів до заданих площин через довільно вибрану точку у просторі.

Завдання 5.11. Визначити натуральну величину двогранного кута $\boldsymbol{\varphi}$ при ребрі $\boldsymbol{BC}$ піраміди $\boldsymbol{SABC}$ (рис. 5.25).

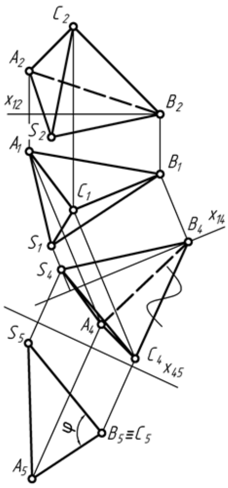


Рис. 5.25

Розв'язування. Оскільки ребро $\boldsymbol{BC(B_1C_1,\ B_2C_2)}$ є лінією взаємного перерізу площин $\boldsymbol{ABC(A_1B_1C_1,\ A_2B_2C_2)}$ і $\boldsymbol{SBC(S_1B_1C_1,\ S_2B_2C_2)}$ використовують заміну площин проекцій і перетворюють його спочатку у пряму рівня, а потім у проекціюючу пряму. Для спрощення побудови $\boldsymbol{x_{12}}$ проводять через $\boldsymbol{B_2}$. $\mathbf{П_2}$ замінюють на $\mathbf{П_4}$ за умовою $\mathbf{П_4}||\boldsymbol{B_1C_1}$ й отримують проекцію заданої піраміди на $\mathbf{П_4}\boldsymbol{(S_4A_4B_4C_4)}$.

Замінюють $\mathbf{П_1}$ на $\mathbf{П_5}$ за умовою $\mathbf{П_5}\boldsymbol{\perp BC}$. Тобто на вільному місці будують $\boldsymbol{x_{45} \perp B_4C_4}$ і отримують проекцію заданої піраміди на $\mathbf{П_5}\boldsymbol{(S_5A_5B_5C_5)}$. Оскільки ребро $\boldsymbol{BC}$ спроекційоване в точку $\boldsymbol{(B_5 \equiv C_5)}$, а кожна з розглядуваних граней – у пряму лінію ***(A_5S_5, B_5S_5)***, то отриманий кут ***φ*** дорівнює натуральній величині двогранного кута при ребрі ***BC*** піраміди ***SABC***.

Завдання 5.12. Визначити натуральну величину двогранного кута ***φ*** між площинами ***$\alpha(h_\alpha, f_\alpha)$*** і ***$\beta(h_\beta, f_\beta)$***, які задані слідами (рис. 5.26).

Розв'язування. Оскільки на кресленні лінія взаємного перерізу заданих площин не побудована, вибирають довільну точку ***$B(B_1, B_2)$*** і будують проекції перпендикулярів до заданих площин ***$p(p_1 \perp h_\alpha,\ p_2 \perp f_\alpha)$*** і ***$p'(p'_1 \perp h_\beta,\ p'_2 \perp f_\beta)$***. Отримані проекції лінійного кута між прямими ***p*** і ***p'*** дорівнюють проекціям шуканого двогранного кута ***$\varphi(\varphi_1, \varphi_2)$***.

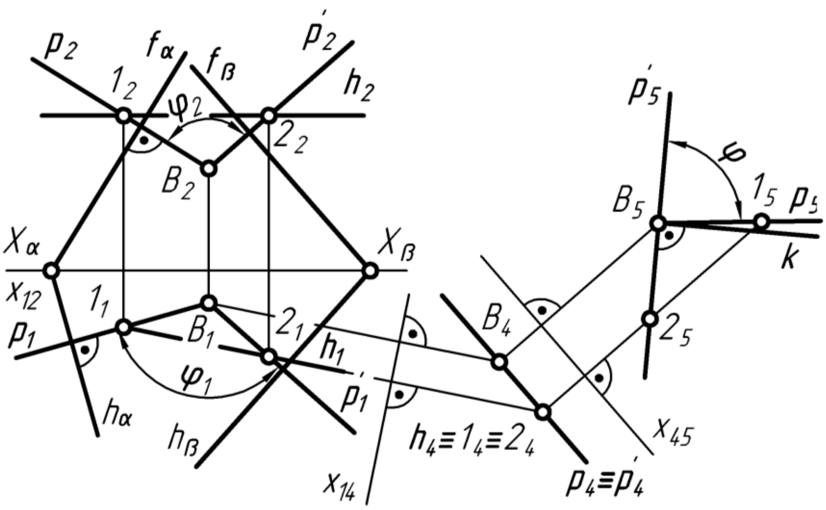


Рис. 5.26

З допомогою методу заміни площин проекцій площину отриманого кута ***φ*** розташовують паралельно до площини **Π_5**. Для цього будують проекції горизонталі ***$h(h_1, h_2)$*** і замінюють **Π_2** на **Π_4**, за умовою **Π_4** перпендикулярна до площини кута ***φ***.

Тобто на вільному місці будують ***$x_{14} \perp h_1$*** і отримують проекцію площини кута ***φ***, вироджену у пряму ***($p_4 \equiv p'_4$, $h \equiv 1_4 \equiv 2_4$)***. Замінюють **Π_1** на **Π_5** за умовою **Π_5** паралельна до площини кута ***φ***. Тобто на вільному місці будують ***$x_{45} \| p_4 \equiv p'_4$*** й отримують проекцію площини кута ***φ*** на **Π_5*($p_5 \cap p'_5$)***, яка дорівнює натуральній величині двогранного кута ***φ*** між заданими площинами.

Завдання 5.13. Визначити натуральну величину двогранного кута φ, утвореного площинами $\alpha(ABC)$ і $\beta(a||b)$ (рис. 5.27).

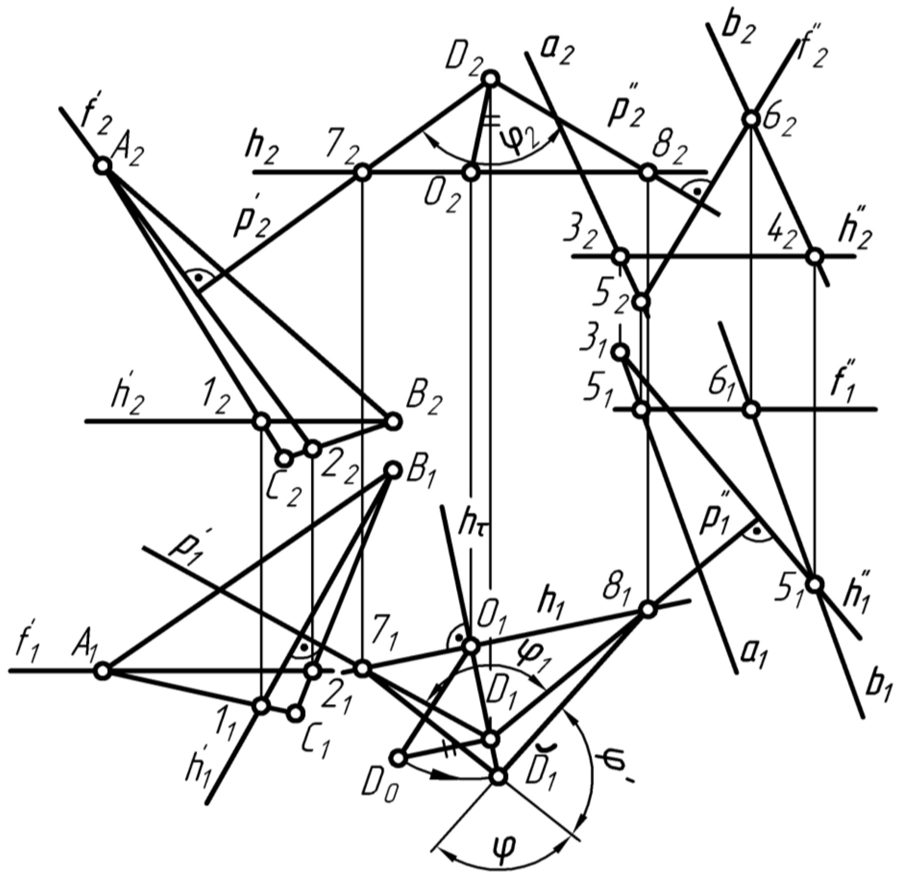


Рис. 5.27

Розв'язування. На кресленні лінія взаємного перетину заданих площин не побудована. Тому вибирають у просторі довільну точку $D(D_1, D_2)$, будують проекції горизонталі площини α h' $(h'_2||x,\ h'_1)$, фронталі площини α f' $(f'_1||x,\ f'_2)$, горизонталі площини β h'' $(h''_2||x,\ h''_1)$, фронталі площини β f'' $(f''_1||x,\ f''_2)$, перпендикуляра до площини α p' $(p'_1 \perp h'_1,\ p'_2 \perp f'_2)$ і перпендикуляра до площини β p'' $(p''_1 \perp h''_1, p''_2 \perp f''_2)$. Отримані проекції лінійного кута між прямими p' і p'' дорівнюють проекціям шуканого двогранного кута $\varphi(\varphi_1, \varphi_2)$.

Натуральну величину кута φ визначають, використовуючи метод обертання навколо горизонталі $h(h_2||x,\ h_1)$, яка розміщена в площині кута φ. Обертання виконують аналогічно випадку, описаному у завданні 5.8.

Через $\boldsymbol{D_1}$ проводять горизонтальний слід площини обертання для точки $\boldsymbol{D}$ $(\boldsymbol{h_\tau}, \perp \boldsymbol{h_1})$, будують проекції центра обертання точки $\boldsymbol{D(O_1=h_\tau \cap h_1,\ O_2 \subset h_2)}$, методом прямокутного трикутника визначають натуральну величину радіуса обертання $\boldsymbol{r=O_1D_0}$, обертають $\boldsymbol{D_1}$ у положення $\breve{D}_1$. Отриманий кут $\boldsymbol{7_1D_18_1}$ тупий, отже шуканий кут між площинами $\boldsymbol{\alpha}$ і $\boldsymbol{\beta}$ дорівнює $\boldsymbol{\varphi' = 180 - \varphi}$.

Запитання для самоконтролю

1. Які методи перетворення ортогональних проекцій використовують в інженерній графіці?
2. Які типи задач можна розв’язувати використовуючи методи перетворення ортогональних проекцій?
3. В чому суть методу заміни площин проекцій?
4. В чому суть методу плоско паралельного переміщення?
5. В чому суть методу обертання навколо фіксованої осі?
6. Які елементи обертання необхідно визначити для виконання обертання?
7. Який алгоритм визначення натуральної величини відрізка прямої загального положення методом заміни площин проекцій?
8. Який алгоритм перетворення прямої загального положення у проектуючу пряму методом заміни площин проекцій?
9. Який алгоритм визначення відстані від точки до прямої загального положення методом заміни площин проекцій?
10. Який алгоритм визначення найкоротшої відстані між мимобіжними прямими загального положення?
11. Який алгоритм визначення натуральної величини трикутника, який розміщений у площині загального положення, методом заміни площин проекцій?
12. Який алгоритм перетворення площини загального положення заданої слідами у проектуючу площину методом заміни площин проекцій?
13. Який алгоритм визначення натуральної величини відрізка прямої загального положення методом плоско паралельного переміщення?

14. Який алгоритм визначення натуральної величини трикутника, який розміщений у площині загального положення, методом заміни площин проекцій?
15. Який алгоритм визначення натуральної величини відрізка прямої загального положення методом обертання навколо проектуючої прямої?
16. Який алгоритм визначення натуральної величини трикутника, який розміщений у площині загального положення, методом обертання навколо лінії рівня?

РОЗДІЛ 6. ПРОЕКЦІЮВАННЯ ПОВЕРХОНЬ

6.1. Визначення, утворення, класифікація поверхонь

Поверхню представляють як спільну частину двох суміжних областей простору. В інженерній графіці поверхню розглядають як неперервну сукупність послідовних положень лінії, яка переміщується за певним законом. Під час утворення поверхні лінія може залишатися незмінною або змінювати свою форму. Лінію, яка утворює поверхню, називають твірною і позначають буквою ***p***. Закон переміщення твірної на кресленні представляють у вигляді напрямної лінії і позначають буквою ***m*** (рис. 6.1). Якщо твірні й напрямні лінії поміняти місцями, поверхня не зміниться.

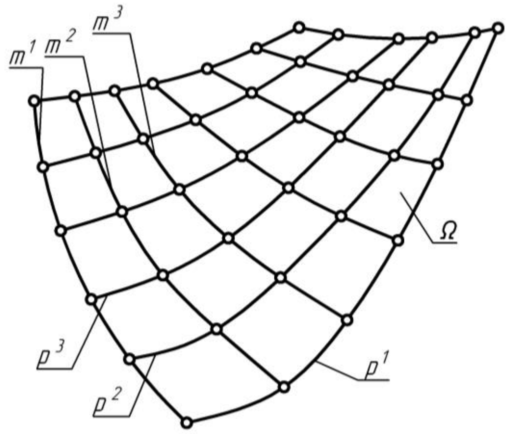


Рис. 6.1

Для спрощення процесу дослідження поверхонь їх класифікують. За основу класифікації поверхонь беруть спільні ознаки і властивості. Класифікація найбільш відомих на цей час поверхонь наведена на рис. 6.2.

Поверхні поділяють на плоскі, гранні й криві. Плоскі поверхні називають площинами і утворюють рухом прямих твірних ліній уздовж напрямних прямих ліній. Гранні поверхні утворюють з кривих шляхом заміни кривих напрямних ліній ламаними лініями.

До кривих поверхонь відносять поверхні обертання, лінійчасті і нелінійчасті поверхні. Поверхні обертання утворюють прямі або криві твірні лінії під час їхнього обертання навколо нерухомої осі. Лінійчасті поверхні утворюють прямі твірні лінії. Нелінійчаті поверхні утворюють криві твірні лінії.

До лінійчатих поверхонь відносять розгортувані та нерозгортувані поверхні. Розгортувані поверхні можна сумістити з площиною (розгорнути) без розривів і складок. Сумістити з площиною (розгорнути) нерозгортувані поверхні можна тільки наближено.

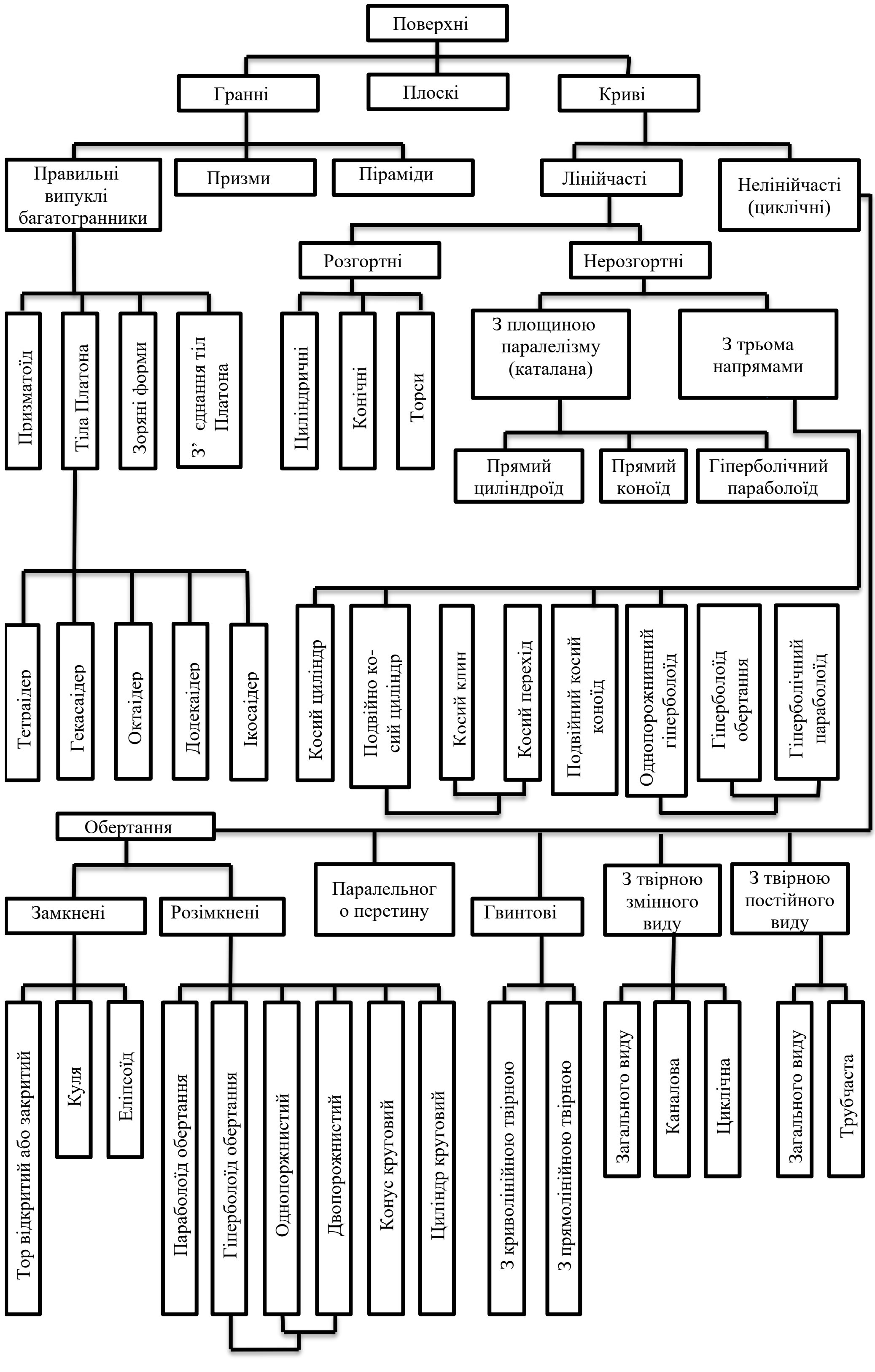


Рис. 6.2

До розгортуваних поверхонь відносять циліндричні, конічні й торси. У нашому випадку розглядають конічні і циліндричні поверхні, а також гранні поверхні, які їм відповідають – піраміди і призми.

Конусом називають поверхню, утворену прямою ***p***, яка ковзає по нерухомій напрямній кривій ***m*** і має одну нерухому точку ***S***, яку називають вершиною (рис. 6.3). На кресленні конічну поверхню задають проекціями вершини $\boldsymbol{S(S_1, S_2)}$ і сліду $\boldsymbol{m(m_1, m_2)}$, який можна розглядати як напрямну лінію.

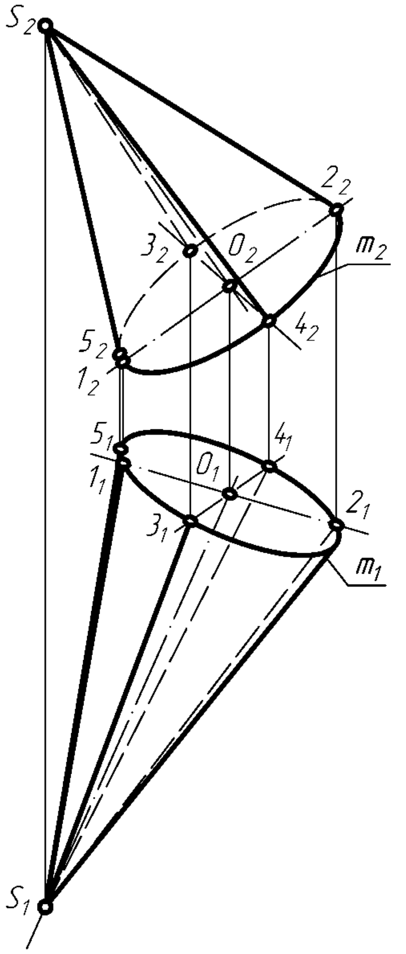


Рис. 6.3

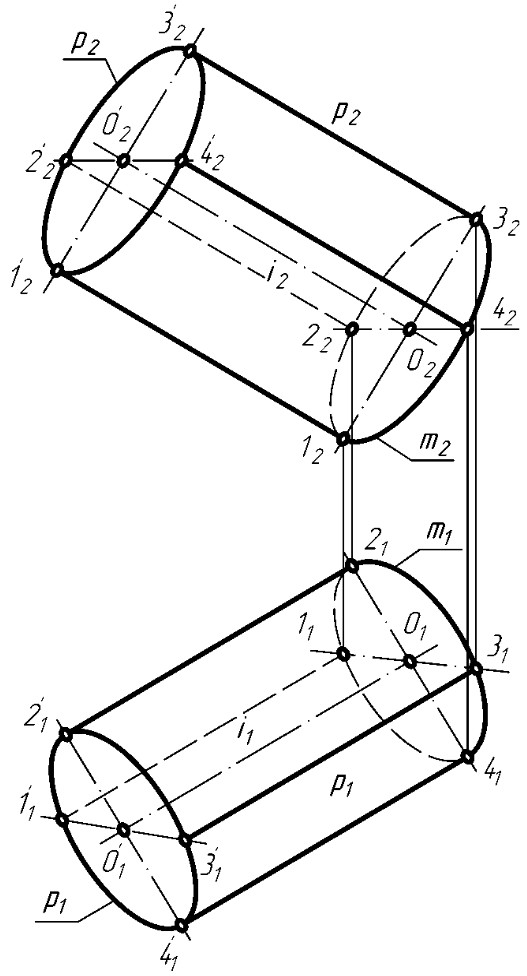


Рис. 6.4

Якщо вершину ***S*** відвести на нескінченно велику відстань, то конус перетворюється у циліндр. Циліндром називають поверхню, утворену твірною ***p***, яка ковзає по напрямній кривій ***m*** і під час свого переміщення залишається паралельною заданому напрямку ***s*** (рис. 6.4). На кресленні циліндричну поверхню задають проекціями її сліду $\boldsymbol{m(m_1, m_2)}$, осі $\boldsymbol{i(i_1, i_2)}$ і твірної $\boldsymbol{p(p_1, p_2)}$.

Конус перетворюють у піраміду, замінюючи напрямну криву ламаною лінією, яка складається з прямолінійних ланок (рис. 6.5). На кресленні піраміду задають проекціями вершини ***S(S₁, S₂)*** і проекціями напрямної ламаної лінії ***m(m₁,m₂)***, або проекціями точок перетину напрямної ламаної лінії з боковими ребрами піраміди.

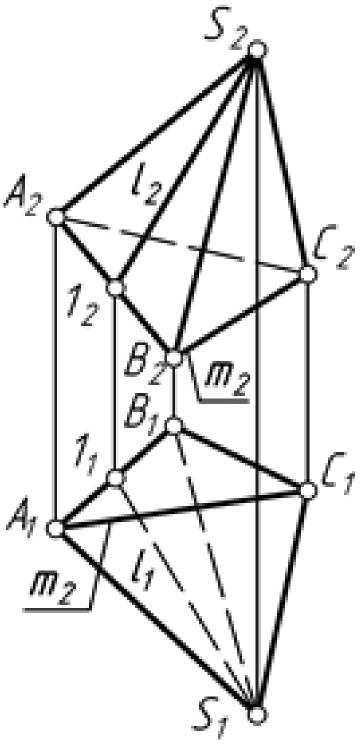


Рис. 6.5

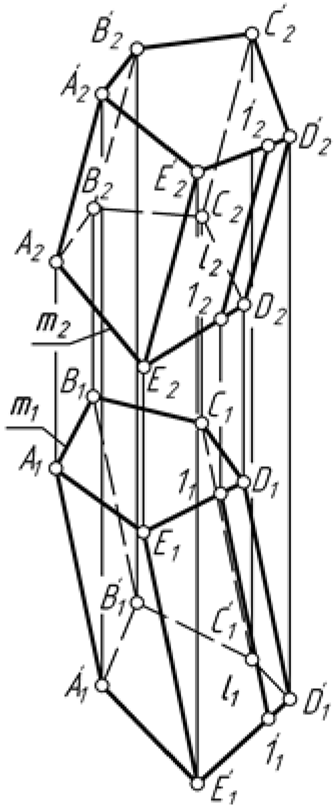


Рис. 6.6

Циліндр перетворюють у призму, замінюючи напрямну криву ламаною лінією, яка складається з прямолінійних ланок (рис. 6.6). На кресленні призму задають проекціями напрямної ламаної лінії ***m(m₁, m₂)*** і бокових ребер призми.

6.2. Побудова проекцій точок і ліній, які належать поверхням геометричних тіл

Поверхня задана, якщо можна побудувати будь яку кількість точок, які їй належать. В інженерній графіці для розв’язування ряду практичних задач використовують способи побудови проекцій точок, які належать заданим поверхням. До таких задач відносять побудову проекцій точок перетину прямих з поверхнями, побудову проекцій ліній взаємного перетину поверхонь та інші. Побудову проекцій точок, які належать поверхням, проводять з допомогою ліній, які належать поверхням та січним площинам. В якості прикладів розглянемо побудову проекцій точок, які належать поверхням піраміди, призми, конуса, циліндра і сфери.

Нехай задана шестигранна пряма піраміда з основою ***ABCDEF*** ***($A_1B_1C_1D_1E_1F_1$, $A_2B_2C_2D_2E_2F_2$, $A_3B_3C_3D_3E_3F_3$)*** і вершиною ***S(S_1, S_2, S_3)*** (рис. 6.7). Основа піраміди паралельна до **Π_1**. Необхідно побудувати проекції точки ***K***, яка належить боковій поверхні піраміди і відома її фронтальна проекція ***K_2***.

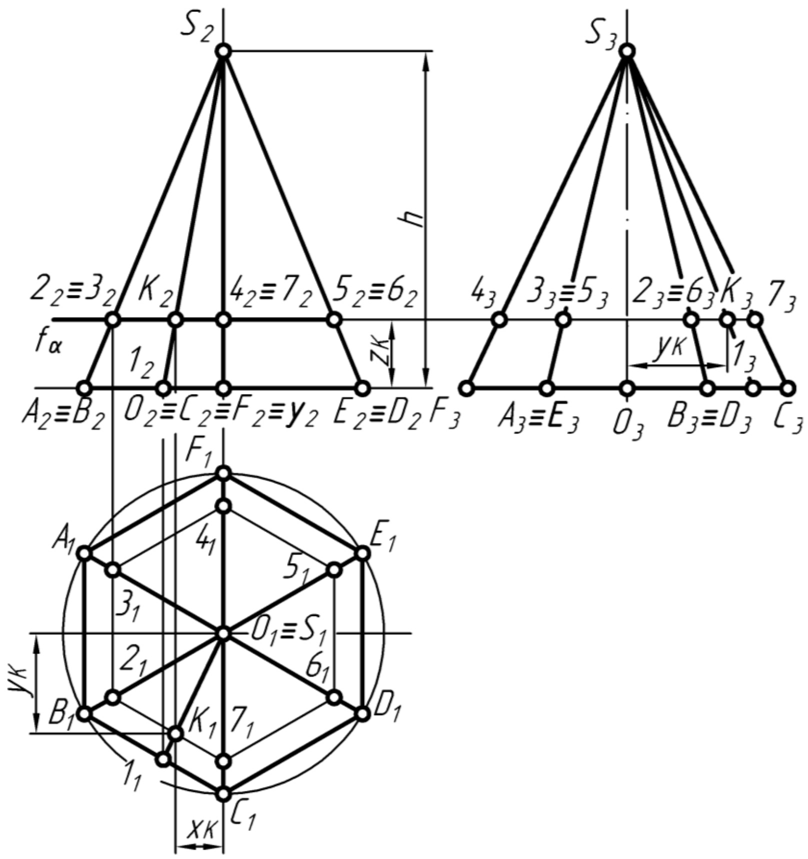


Рис. 6.7

Точка ***K*** належить бічній грані ***BSC***, яка займає загальне положення відносно площин проекцій. Тому для побудови ***K_1*** використовують побудову проекцій прямої, яка належить площині ***BSC*** і проходить через точку ***K***. Через ***S_2*** і ***K_2*** проводять пряму до перетину з ***B_2C_2($S_2K_2 \cap B_2C_2 = 1_2$)***, прямим проекціюванням ***1_2*** на ***B_1C_1*** отримують ***1_1*** горизонтальну проекцію прямої, на якій розміщена точка $\boldsymbol{K}$, прямим проекціюванням $\boldsymbol{K_2}$ на $\boldsymbol{S_1 1_1}$ отримують $\boldsymbol{K_1}$. Профільну проекцію точки $\boldsymbol{K}$ будують використовуючи правило побудови третьої проекції за двома відомими.

Для розв'язування даної задачі можна використовувати січну площину-посередник. Січні площини-посередники у кожному випадку вибирають із розрахунку отримання найпростішого розв'язування задачі. У нашому випадку використовують горизонтальну січну площину $\boldsymbol{\alpha}$, фронтальний слід якої $\boldsymbol{f_\alpha}$ проходить через $\boldsymbol{K_2}$ і перетинає бокові ребра піраміди в точках **2**, **3**, **4**, **5**, **6**, **7**, отримують $\boldsymbol{2_2}$, $\boldsymbol{3_2}$, $\boldsymbol{4_2}$, $\boldsymbol{5_2}$, $\boldsymbol{6_2}$, $\boldsymbol{7_2}$, прямим проекціюванням на горизонтальні проекції відповідних ребер піраміди отримують $\boldsymbol{2_1}$, $\boldsymbol{3_1}$, $\boldsymbol{4_1}$, $\boldsymbol{5_1}$, $\boldsymbol{6_1}$, $\boldsymbol{7_1}$, прямим проекціюванням $\boldsymbol{K_2}$ на $\boldsymbol{2_1 3_1}$ отримують $\boldsymbol{K_1}$, використовуючи правило побудови третьої проекції за двома відомими будують $\boldsymbol{K_3}$.

Побудову проекцій точки, яка лежить на поверхні призми виконують аналогічно. Нехай задана тригранна пряма призма з нижньою основою $\boldsymbol{ABC(A_1B_1C_1,\ A_2B_2C_2,\ A_3B_3C_3)}$ і верхньою основою $\boldsymbol{A^1B^1C^1(A^1{}_1B^1{}_1C^1{}_1,\ A^1{}_2B^1{}_2C^1{}_2,\ A^1{}_3B^1{}_3C^1{}_3)}$ (рис. 6.8). Необхідно побудувати проекції точки $\boldsymbol{K}$, яка належить боковій поверхні призми і відома її фронтальна проекція $\boldsymbol{K_2}$.

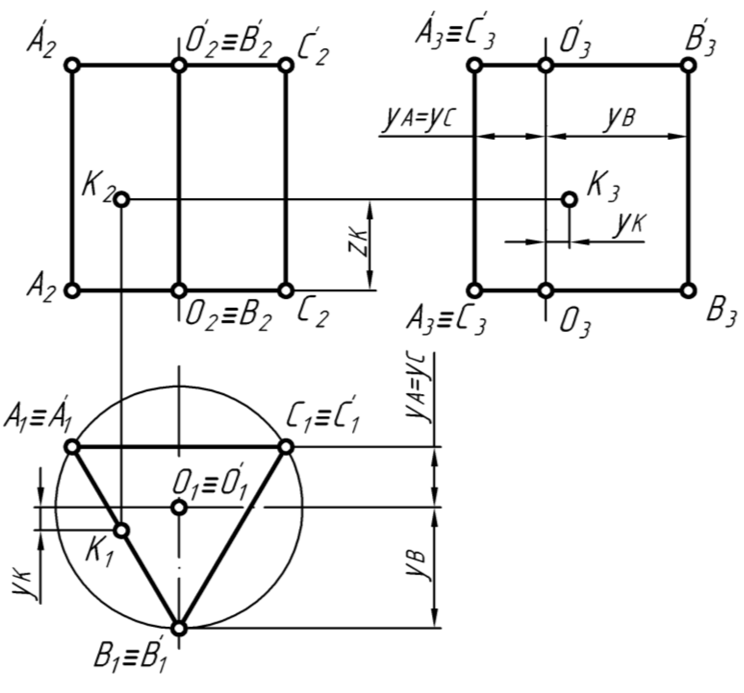


Рис. 6.8

Точка $\boldsymbol{K}$ належить бічній грані $\boldsymbol{ABA^1B^1}$, яка перпендикулярна до $\mathbf{П_1}$ і горизонтальна її проекція вироджується у пряму $\boldsymbol{A_1B_1}$. Отже, прямим проекціюванням $\boldsymbol{K_2}$ на $\boldsymbol{A_1B_1}$ отримують $\boldsymbol{K_1}$. Профільну проекцію точки $\boldsymbol{K}$ будують використовуючи правило побудови третьої проекції точки за двома відомими.

Аналогічно розв'язують задачі, якщо точки лежать на поверхнях конуса або циліндра.

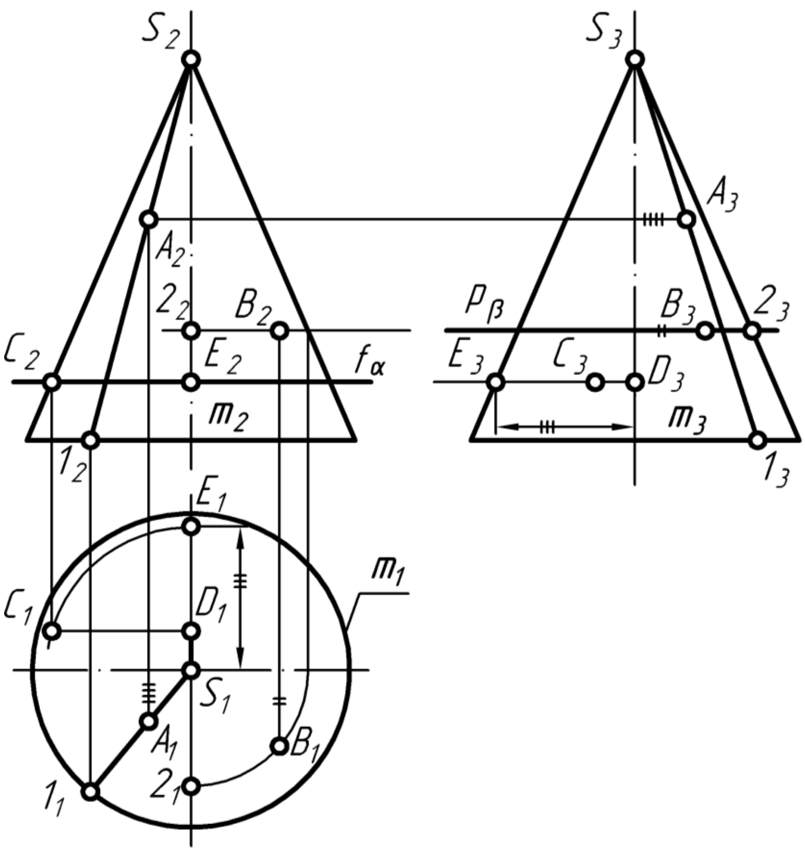


Рис. 6.9

Нехай на поверхні прямого кругового конуса, заданого напрямною лінією $\boldsymbol{m(m_1,\ m_2,\ m_3)}$ і вершиною $\boldsymbol{S(S_1,\ S_2,\ S_3)}$ розміщені точки $\boldsymbol{A,B,C}$ (рис. 6.9). Необхідно побудувати проекції точок, якщо відомі фронтальна проекція точки $\boldsymbol{A(A_2)}$, горизонтальна проекція точки $\boldsymbol{B(B_1)}$ і профільна проекція точки $\boldsymbol{C(C_3)}$.

Побудову виконують аналогічно розглянутим вище випадкам з урахуванням, що вказані точки лежать на кривих поверхнях. Отже для їх побудови використовують проекції положень твірних ліній.

Для побудови проекцій точки $\boldsymbol{A}$ через $\boldsymbol{S_2}$ і $\boldsymbol{A_2}$ проводять проекцію твірної до перетину з основою й отримують точку $\boldsymbol{1_2(S_2A_2 \cap m_2=1_2)}$. Прямим проекціюванням $\boldsymbol{1_2}$ на $\boldsymbol{m_1}$ отримують $\boldsymbol{1_1}$, сполучають $\boldsymbol{1_1}$ і $\boldsymbol{S_1}$, прямим проекціюванням $\boldsymbol{A_2}$ на $\boldsymbol{S_1 1_1}$ отримують $\boldsymbol{A_1}$, $\boldsymbol{A_3}$ будують використовуючи правило побудови третьої проекції точки за двома відомими.

Для побудови проекцій точок $\boldsymbol{B}$ і $\boldsymbol{C}$ доцільно використовувати січні площини, які проходять через вказані точки і паралельні до основи конуса. Такі січні площини перерізають круговий конус по колах, центри яких лежать на осі симетрії конуса. Шукані проекції точок отримують прямим проекціюванням на проекції даних кіл.

На кресленні циліндр задають проекціями напрямної лінії $\boldsymbol{m(m_1, m_2)}$ і крайніх положень твірної, паралельних між собою (рис. 6.10). Для побудови проекцій точки $\boldsymbol{A}$, якщо відома її фронтальна проекція $\boldsymbol{A_2}$, через $\boldsymbol{A_2}$ проводять фронтальну проекцію проміжного положення твірної $\boldsymbol{l}$ до перетину з основою й отримують точку $\boldsymbol{1_2(l_2 \cap m_2=1_2)}$. Прямим проекціюванням $\boldsymbol{1_2}$ на $\boldsymbol{m_1}$ отримують $\boldsymbol{1_1}$, через $\boldsymbol{1_1}$ проводять $\boldsymbol{l_1}$ – горизонтальну проекцію проміжного положення твірної **1**, прямим проекціюванням $\boldsymbol{A_2}$ на $\boldsymbol{l_1}$ отримують $\boldsymbol{A_1}$.

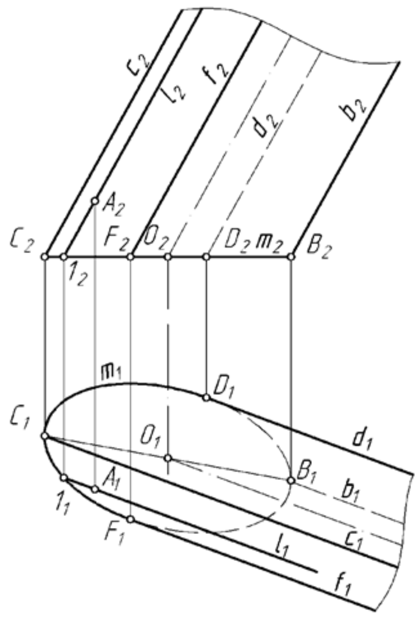


Рис. 6.10

Під час побудови проекцій точок, які розташовані на поверхні сфери, використовують особливість перерізу сфери січною площиною. Фігурою такого перерізу завжди є коло. Якщо січна площина паралельна до однієї з площин проекцій, то на дану площину проекцій коло проекціюється у натуральну величину, а проекція його центра збігається з проекцією центра сфери. На інші площини проекцій дане коло проекціюється у пряму лінію.

Нехай сфера задана центром $\boldsymbol{O(O_1, O_2)}$ і радіусом $\boldsymbol{R}$ (рис. 6.11). Необхідно побудувати фронтальну проекцію точки $\boldsymbol{A}$, якщо відома її горизонтальна проекція $\boldsymbol{A_1}$.

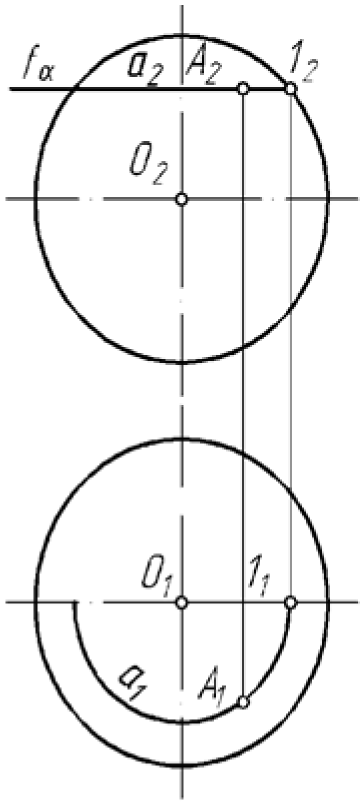


Рис. 6.11

Для побудови використовують горизонтальну січну площину $\boldsymbol{\alpha}$, яка перерізає сферу по колу $\boldsymbol{a}$ радіусом $\boldsymbol{O_1A_1}$. Щоб побудувати фронтальну проекцію кола $\boldsymbol{a}$ на $\boldsymbol{a_1}$ виділяють точку $\boldsymbol{1_1}$, фронтальна проекція якої $\boldsymbol{1_2}$ лежить на фронтальній проекції обрису сфери. Через $\boldsymbol{1_2}$ проводять фронтальний слід січної площини $\boldsymbol{f_\alpha}$, прямим проекціюванням $\boldsymbol{A_1}$ на $\boldsymbol{f_\alpha}$ отримують $\boldsymbol{A_2}$.

6.3. Переріз поверхонь проекціюючими площинами

В інженерній графіці часто виникає необхідність побудови геометричних форм окремих частин складних геометричних фігур і визначення їх натуральних величин. Для розв'язання таких задач використовують перерізи поверхонь проекціюючими площинами (косі перерізи). В результаті перерізу поверхні площиною утворюється плоска фігура, яку називають перерізом. Вказаний переріз одночасно належить поверхні й січній площині. Методика побудови лінії перерізу поверхні площиною така ж, як і методика побудови лінії перетину двох площин.

Тобто переріз можна будувати способом ребер, який передбачає багаторазове розв'язування задачі на перетин прямої з площиною, або способом граней, який передбачає багаторазове розв'язування задачі на побудову лінії перетину двох площин. Спосіб граней доцільно використовувати, коли деякі грані є проекціюючими площинами. В окремих випадках доцільно використовувати комбінацію способу ребер і способу граней.

Під час перерізу поверхні проекціюючою площиною одна з проекцій фігури перерізу вироджується у лінію і збігається з характерним слідом проекціюючої площини. Отже, задачу побудови проекцій фігури перерізу значно спрощують і зводять до визначення другої проекції фігури перерізу. Натуральну величину фігури перерізу будують з допомогою одного із методів перетворення проекцій.

Нехай задана чотиригранна пряма піраміда з основою $\boldsymbol{ABCD\ (A_1B_1C_1D_1,\ A_2B_2C_2D_2)}$ і вершиною $\boldsymbol{S(S_1,\ S_2)}$ перерізана фронтальною проекціюючою січною площиною $\boldsymbol{\alpha(f_\alpha)}$. Необхідно побудувати проекції та натуральну величину фігури перерізу (рис. 6.12).

Фронтальна проекція фігури перерізу збігається із фронтальним слідом січної площини $\boldsymbol{f_\alpha}$. Отже фронтальні проекції характерних точок фігури перерізу є точками перетину проекцій ребер з $\boldsymbol{f_\alpha(A_2S_2 \cap f_\alpha = 1_2,\ B_2S_2 \cap f_\alpha = 2_2,\ C_2S_2 \cap f_\alpha = 3_2,\ D_2S_2 \cap f_\alpha = 4_2)}$. Прямим проекціюванням фронтальних проекцій характерних точок на горизонтальні проекції відповідних ребер отримують $\boldsymbol{1_1 2_1 3_1 4_1}$ – горизонтальну проекцію фігури перерізу піраміди фронтально-проекціюючою площиною.

Натуральну величину фігури перерізу будують методом обертання навколо проекціюючої прямої, яка проходить через точку $\boldsymbol{1}$. В результаті обертання отримують $\boldsymbol{\breve{1}_1\breve{2}_1\breve{3}_1\breve{4}_1}$ – натуральну величину фігури перерізу.

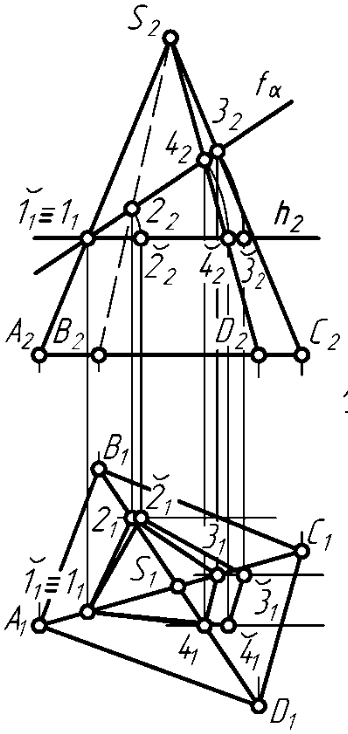


Рис. 6.12

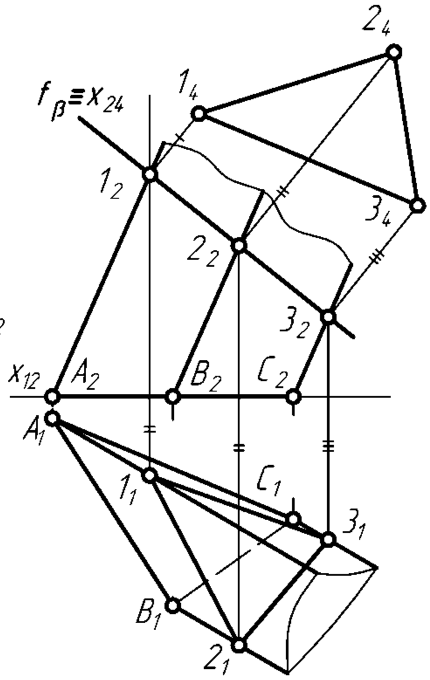


Рис. 6.13

Побудову проекцій фігури перерізу тригранної похилої призми фронтально-проекціюючою площиною $\boldsymbol{\beta(f_\beta)}$ (рис. 6.13) виконують аналогічно. Для побудови натуральної величини фігури перерізу використовують метод заміни площин проекцій. Під час такої заміни $\mathbf{\Pi_1}$ замінюють площиною $\mathbf{\Pi_4}$, яка перерізає площину $\mathbf{\Pi_2}$ по осі проекцій x_{24}, паралельній до f_β. Для забезпечення компактності розміщення зображень $f_\beta \equiv x_{24}$. Виконуючи відомі побудови, отримують $\boldsymbol{1_4 2_4 3_4}$ – натуральну величину фігури перерізу призми проекціюючою площиною.

Якщо січна площина перерізає криву поверхню, то фігуру перерізу обмежує крива лінія. Побудову проекції такої кривої виконують шляхом побудови проекцій точок, які належать одночасно поверхні і січній площині, або шляхом побудови проекцій точок перетину твірних поверхні з січною площиною. Побудову проекцій точок, які належать поверхні, виконують за розглянутою вище методикою і використовують для цього площини-посередники. Така побудова складна і трудомістка. Тому для побудови проекцій перерізів лінійчастих поверхонь використовують проекції твірних, які проходять через характерні точки кривих перерізу. Для визначення положення характерних точок кривих перерізу враховують, що форма кривої перерізу залежить від взаємного розміщення поверхні й січної площини.

В результаті перерізу кругового конуса проекціюючими січними площинами (рис. 6.14) отримують: еліпс – якщо площина $\boldsymbol{\alpha(f_\alpha)}$ перерізає всі твірні конуса й нахилена до його осі; коло – якщо площина $\boldsymbol{\beta(f_\beta)}$ перпендикулярна до осі конуса; точку – якщо площина $\boldsymbol{\gamma(f_\gamma)}$ проходить через вершину конуса і не перетинає його основу, двійну пряму – якщо площина $\boldsymbol{\delta(f_\delta)}$ дотична до бокової поверхні конуса; параболу – якщо площина $\boldsymbol{\varepsilon(f_\varepsilon)}$ паралельна до однієї твірної конуса; трикутник – якщо площина $\boldsymbol{\lambda(f_\lambda)}$ проходить через вершину конуса й перетинає його основу; гіперболу – якщо площина $\boldsymbol{\tau(f_\tau)}$ паралельна до будь якого можливого положення площини λ (паралельна до двох твірних конуса).

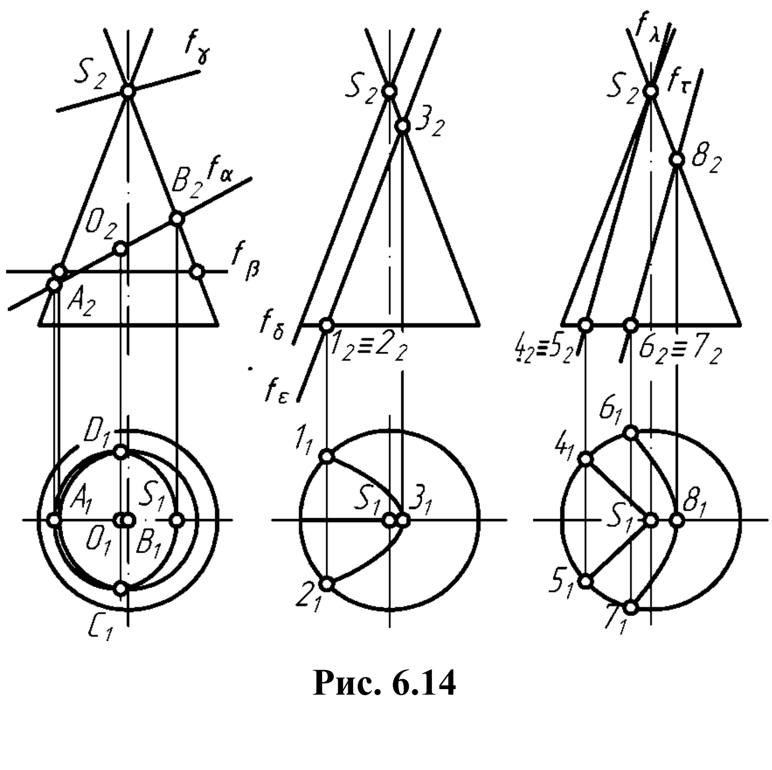


Рис. 6.14

Нехай похилий круговий конус заданий вершиною $\boldsymbol{S(S_1, S_2)}$ і напрямною лінією $\boldsymbol{m(m_1, m_2)}$ з центром $\boldsymbol{O(O_1, O_2)}$ і радіусом $\boldsymbol{R}$ (рис. 6.15). Необхідно побудувати проекції та натуральну величину фігури перерізу конуса площиною $\boldsymbol{\alpha(f_\alpha)}$.

В результаті аналізу взаємного розміщення поверхні конуса й січної площини визначають, що фігура перерізу – еліпс, оскільки січна площина перерізає всі твірні конуса і не паралельна до його основи. Для побудови проекцій еліпса достатньо побудувати проекції його великої і малої осей і використати один із методів побудови еліпса, наприклад, метод паралелограма.

Оскільки конус перерізаний фронтально-проекціюючою площиною, фронтальна проекція фігури перерізу вироджується у пряму лінію і збігається з фронтальним слідом f_α січної площини. Кінці великої осі еліпса є найвищою ***1*** і найвищою ***2*** точками перерізу і для побудови їх проекцій використовують положення твірної ***SA*** і ***SB*** ($S_2A_2 \cap f_\alpha = 1_2$, $S_2B_2 \cap f_\alpha = 2_2$), прямим проекціюванням 1_2 на S_1A_1 отримують 1_1, прямим проекціюванням 2_2 на S_1B_1 отримують 2_1.

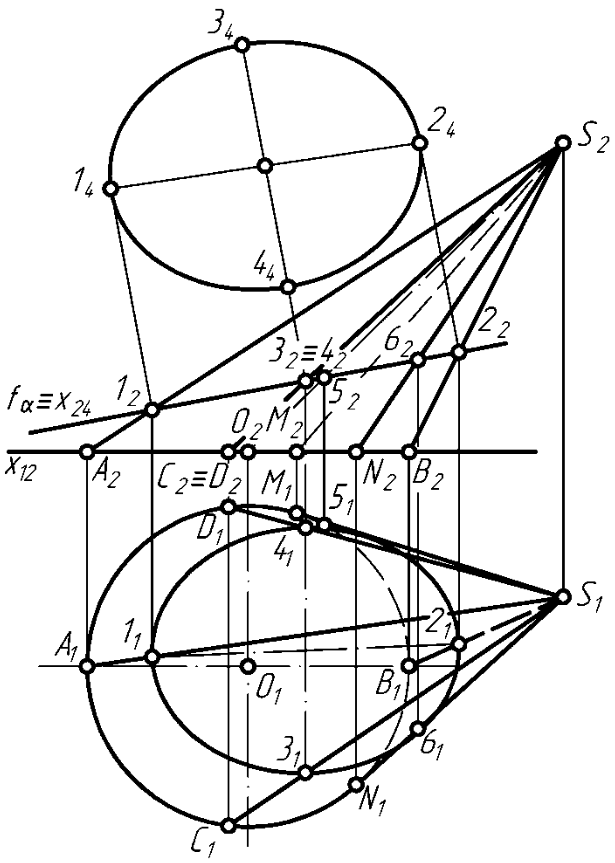


Рис. 6.15

Відомо, що велика і мала осі еліпса взаємно перпендикулярні і в точці перетину діляться навпіл. Отже фронтальна проекція малої осі еліпса вироджується у точку $3_2 \equiv 4_2$, яка ділить $1_2 2_2$ на дві дорівнюють частини. Через S_2 і $3_2 \equiv 4_2$ проводять фронтальну проекцію положень твірної $S_2C_2 \equiv S_2D_2$, прямим проекціюванням $C_2 \equiv D_2$ на m_1 отримують C_1 і D_1, сполучають C_1 і D_1 з S_1 і отримують горизонтальні проекції положень твірної конуса, які проходять через точки 3 і 4, прямим проекціюванням 3_2 на S_1C_1 отримують 3_1, прямим проекціюванням 4_2 на S_1D_1 отримують 4_1.

Для забезпечення правильності побудови проекцій фігури перерізу визначають проекції точок дотику фігури перерізу до крайніх положень твірної конуса на горизонтальній проекції (граничних точок видимості горизонтальної проекції фігури перерізу). Через вказані точки проходять $SM(S_1M_1)$ і $SN(S_1N_1)$, прямим проекціюванням M_1 і N_1 на m_2 отримують M_2 і N_2 сполучають M_2 і N_2 з S_2 і визначають 5_2 і 6_2 ($S_2M_2 \cap f_\alpha = 5_2$, $S_2N_2 \cap f_\alpha = 6_2$), прямим проекціюванням 5_2 на S_1M_1 отримують 5_1, прямим проекціюванням 6_2 на S_1N_1 отримують 6_1. Використовуючи метод паралелограма, будують горизонтальну проекцію фігури перерізу.

Для побудови натуральної величини фігури перерізу використовують метод заміни площин проекцій. Під час такої заміни Π_1 замінюють площиною Π_4, яка перерізає площину Π_2 по осі проекцій x_{24}, паралельній до f_α. Використовуючи відомі побудови, отримують нові проекції великої і малої осей еліпса, які дорівнюють натуральній їх величині. З допомогою методу прямокутника будують натуральну величину фігури перерізу.

В результаті перерізу кругового циліндра проекціюючими площинами (рис. 6.16) отримують: еліпс – якщо площина $\alpha(f_\alpha)$ перерізає всі твірні циліндра і не паралельна до основи; частину еліпса – якщо площина $\beta(f_\beta)$ перерізає твірну циліндра і його основу; дві вітки еліпса – якщо площина $\gamma(f_\gamma)$ перерізає основи циліндра і не паралельна до його твірних; коло – якщо площина $\delta(f_\delta)$ перерізає всі твірні циліндра і паралельна до його основи; двійну пряму – якщо площина $\varepsilon(f_\varepsilon)$ дотична до бокової поверхні циліндра; прямокутник (паралелограм) – якщо площина $\lambda(f_\lambda)$ перерізає основи прямого (похилого) циліндра і паралельна до його твірних.

Нехай прямий круговий циліндр висотою ***H*** заданий напрямною лінією ***m(m₁, m₂)*** з центром ***O(O₁, O₂)*** і радіусом ***R*** (рис. 6.17). Необхідно побудувати проекції та натуральну величину фігури перерізу циліндра площиною ***β(f_β)***.

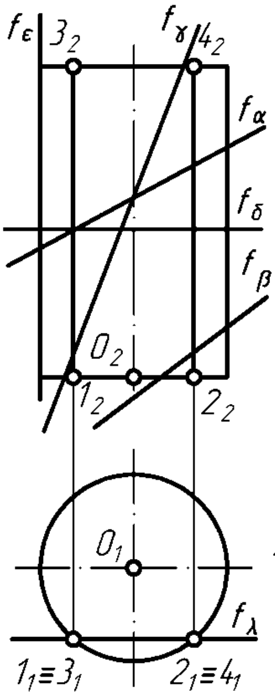


Рис. 6.16

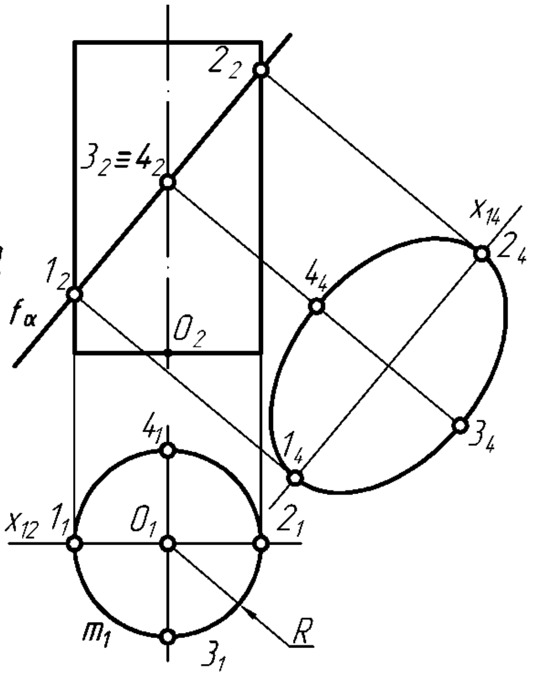


Рис. 6.17

У результаті аналізу взаємного розміщення поверхні циліндра і січної площини визначають, що фігура перерізу – еліпс, оскільки січна площина перерізає всі твірні циліндра і не паралельна до основи. Побудову виконують аналогічно розглянутому вище випадку. Під час виконання побудови доцільно звернути увагу на те, що горизонтальна проекція фігури перерізу накладається на горизонтальну проекцію прямого циліндра, якщо його основа паралельна до **П₁**, а мала вісь еліпса дорівнює діаметру циліндра.

6.4. Побудова проекцій точок перетину прямих ліній з поверхнями

Порядок побудови проекцій точок перетину прямих ліній з поверхнями аналогічний порядку розв’язування задач на побудову проекцій точок перетину прямих ліній з площинами. Тобто у загальному випадку необхідно:

1. Через пряму провести допоміжну січну площину.

2. Побудувати проекції фігури перерізу заданої поверхні з допоміжною січною площиною.

3. Визначити проекції точок перетину побудованої фігури перерізу із заданою прямою.

Допоміжна січна площина повинна перерізати задану поверхню по лінії, яку легко будувати. Як правило, в якості допоміжних січних площин використовують проекціюючі площини. Але в деяких випадках доцільніше використовувати площини загального положення, які перерізають задані поверхні по простих лініях.

Нехай задана тригранна пряма піраміда з основою $\boldsymbol{ABC(A_1B_1C_1, A_2B_2C_2)}$ і вершиною $\boldsymbol{S(S_1, S_2)}$, яку перетинає пряма $\boldsymbol{l(l_1, l_2)}$ (рис. 6.18). Необхідно побудувати проекції точок перетину прямої з поверхнею піраміди.

Відповідно до наведеного вище порядку розв'язування таких завдань проводять через $\boldsymbol{l}$ допоміжну січну фронтально-проекціюючу площину $\boldsymbol{\alpha(f_\alpha \equiv l_2)}$ і будують проекції фігури перерізу площини $\boldsymbol{\alpha}$ з заданою пірамідою $\boldsymbol{123(1_1 2_1 3_1, 1_2 2_2 3_3)}$. Пряма $\boldsymbol{l}$ і побудований трикутник перерізу лежать в одній площині $\boldsymbol{\alpha}$, а сторони трикутника належать поверхні піраміди. Отже точки $\boldsymbol{M\ (1_1 2_1 \cap l_1 = M_1)}$ і $\boldsymbol{N\ (2_1 3_1 \cap l_1 = N_1)}$ є шуканими точками перерізу прямої з поверхнею піраміди.

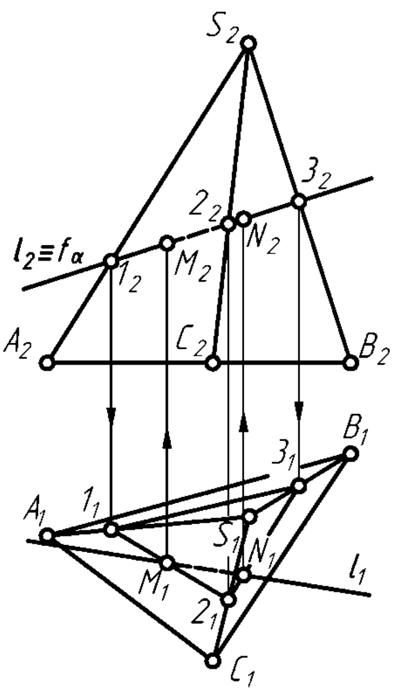


Рис. 6.18

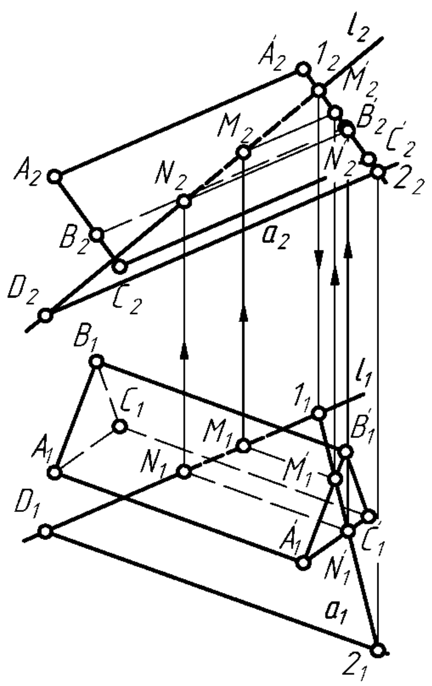


Рис. 6.19

Розглянемо гранну поверхню, основа і бокові грані якої займають загальне положення відносно площин проекцій.

Нехай задана тригранна призма нижньою основою $ABC(A_1B_1C_1, A_2B_2C_2)$ і верхньою основою $A^1B^1C^1(A^1{}_1B^1{}_1C^1{}_1, A^1{}_2B^1{}_2C^1{}_2)$, яку перетинає пряма $l(l_1, l_2)$ (рис. 6.19). Необхідно побудувати проекції точок перетину прямої з поверхнею призми.

Через пряму l проводять допоміжну січну площину загального положення $\alpha(l \cap a)$ паралельну до бічних ребер призми $(a||AA^1)$. Для її побудови на l вибирають довільну точку $D(D_1 \subset l_1, D_2 \subset l_2)$ через яку проводять пряму $a(a_1||A_1A^1{}_1, a_2||A_2A^1{}_2)$. Будують проекції лінії перетину верхньої основи призми з допоміжною січною площиною $(l_2 \cap A^1{}_2B^1{}_2=1_2, a_2 \cap A^1{}_2C^1{}_2=2_2)$. Отримана пряма 12 перетинає верхню основу призми в точках M^1 $(1_12_1 \cap A^1{}_1B^1{}_1=M^1{}_1)$ і N^1 $(1_12_1 \cap A^1{}_1C^1{}_1=N^1{}_1)$, прямим проекціюванням будують $M^1{}_2$ і $N^1{}_2$. Допоміжна січна площина α перерізає бокові грані призми по прямих лініях, які проходять через точки M^1 і N^1 і паралельні до бокових ребер призми. Отже через $M^1{}_2$ і $N^1{}_2$ проводять прямі, паралельні до $A_2A^1{}_2$ до перетину з l_2 й отримують фронтальні проекції точок перетину прямої з призмою M_2 і N_2, прямим проекціюванням M_2 і N_2 на l_1 отримують M_1 і N_1.

Під час побудови проекцій точок перетину прямої з поверхнею конуса враховують, що найпростішу фігуру перерізу утворює січна площина, яка проходить через вершину й основу заданого конуса. Отже, для побудови проекцій точок перетину прямої $l(l_1, l_2)$ з поверхнею кругового похилого конуса (рис. 6.20) використовують допоміжну січну площину загального положення $\beta(l \cap a)$, яка перерізає поверхню конуса по твірних. Тобто пряма а проходить через вершину конуса S $(S_1 \subset a_1, S_2 \subset a_2)$. Для її побудови на l вибирають довільну точку C $(C_1 \subset l_1, C_2 \subset l_2)$, через S і C проводять пряму a, будують h_β – горизонтальний слід січної площини і визначають A і B точки перетину h_β з основою конуса. Через побудовані проекції точок $A(A_1, A_2)$ і

B(B₁, B₂) будують проекції твірних конуса ***SA(S₁A₁, S₂A₂)*** і ***SB(S₁B₁, S₂B₂)*** по яких січна площина ***β*** перерізає поверхню конуса. Точки перетину вказаних твірних з прямою ***l*** є шуканими точками перетину ***M (SA∩l=M)*** і ***N (SB∩l=N)***.

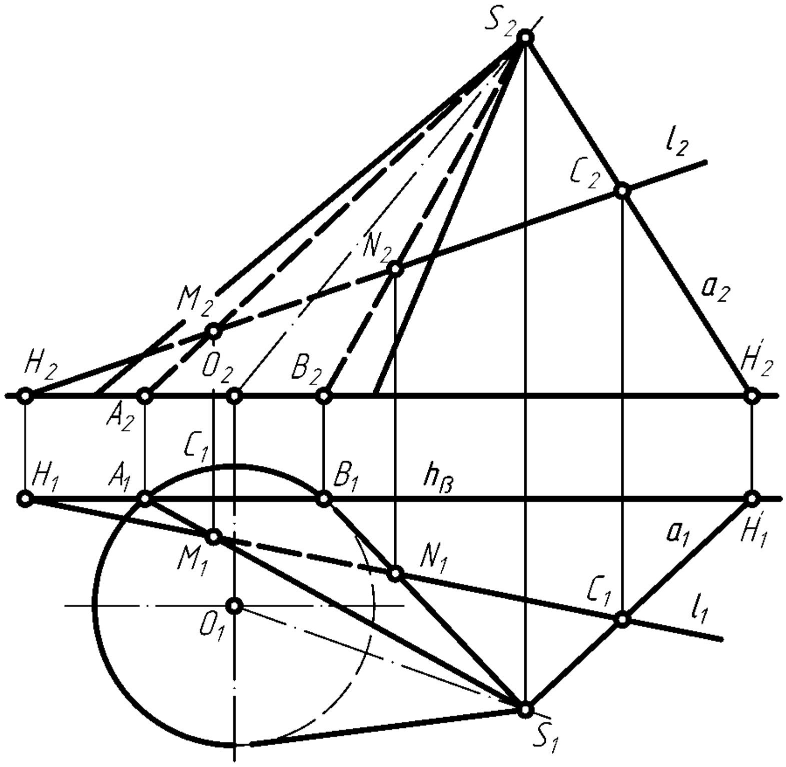


Рис. 6.20

Коли h_β дотикається до основи конуса, то пряма ***l*** є дотичною до поверхні конуса. Коли h_β не перетинає основи конуса, то пряма ***l*** не буде мати з поверхнею конуса жодної спільної точки.

Під час побудови проекцій точок перетину похилого кругового циліндра з прямою $l(l_1, l_2)$ (рис. 6.21) враховують, що циліндричну поверхню можна розглядати як конічну з невласною вершиною, а площина перетинає циліндричну поверхню уздовж двох прямих, якщо в цій площині знайдеться хоча б одна пряма, паралельна до твірної циліндра у будь якому її положенні. Тому для виконання необхідних побудов використовують допоміжну січну площину загального положення ***α(a||b)***, задану двома паралельними прямими, які перетинають ***l*** і паралельні до твірної циліндра.

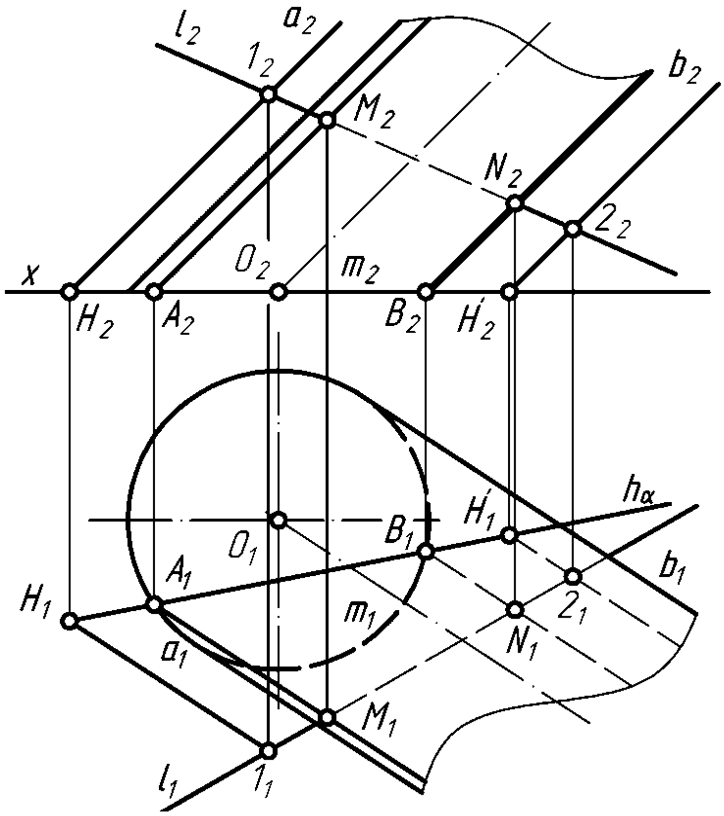


Рис. 6.21

Отже, на $\boldsymbol{l}$ вибирають довільно точки $\boldsymbol{1(1_1,\ 1_2)}$ і $\boldsymbol{2(2_1,\ 2_2)}$ через які проводять прямі $\boldsymbol{a(a \cap l=1)}$ і $\boldsymbol{b(b \cap l=2)}$, паралельні до твірних циліндра, будують $\boldsymbol{h_\alpha}$ – горизонтальний слід січної площини і визначають $\boldsymbol{A_1}$ і $\boldsymbol{B_1}$ – горизонтальні проекції точок перетину $\boldsymbol{h_\alpha}$ з горизонтальною проекцією основи циліндра, через які проводять горизонтальні проекції твірних циліндра по яких січна площина $\boldsymbol{\alpha}$ перерізає поверхню циліндра. На перетині вказаних твірних з $\boldsymbol{l_1}$ розміщені горизонтальні проекції $\boldsymbol{M_1}$ і $\boldsymbol{N_1}$ шуканих точок. Фронтальні їх проекції $\boldsymbol{M_2}$ і $\boldsymbol{N_2}$ отримують прямим проекціюванням $\boldsymbol{M_1}$ і $\boldsymbol{N_1}$ на $\boldsymbol{l_2}$.

6.5. Переріз піраміди площиною загального положення

Під час перерізу поверхні площиною загального положення фігура перерізу не проекціюється на жодну з площин проекцій в натуральну величину. Тому поставлене завдання вимагає додаткових побудов.

Нехай задана тригранна похила піраміда з основою $\boldsymbol{ABC(A_1B_1C_1,\ A_2B_2C_2)}$ і вершиною $\boldsymbol{S(S_1,\ S_2)}$ перерізана площиною загального положення $\boldsymbol{\alpha(m||n)}$.

Необхідно побудувати проекції фігури перерізу, натуральні величини елементів зрізаної піраміди і розгортку повної поверхні зрізаної піраміди (рис. 6.22).

Для побудови проекцій фігури перерізу використовують спосіб ребер. Тобто кожне ребро піраміди заключають у проекціюючу площину, яка перерізає січну площину по прямій лінії. Ребро ***SA*** заключають у фронтально-проекціюючу площину $\boldsymbol{\beta(f_\beta \equiv S_2A_2)}$ і будують проекції її лінії перетину з площиною $\boldsymbol{\alpha}$ ***45***$\boldsymbol{(4_15_1,\ 4_25_2)}$. Точка перетину $\boldsymbol{S_1A_1}$ з $\boldsymbol{4_15_1}$ є горизонтальною проекцією шуканої точки перетину ребра ***SA*** з площиною $\boldsymbol{\alpha}$ $\boldsymbol{(S_1A_1 \cap 4_15_1 = 1_1)}$. Прямим проекціюванням $\boldsymbol{1_1}$ на $\boldsymbol{S_2A_2}$ отримують $\boldsymbol{1_2}$. Аналогічно будують проекції точок перетину площини $\boldsymbol{\alpha}$ з ребрами ***SB*** і ***SC*** $\boldsymbol{(S_1B_1 \cap 6_17_1 = 2_1,}$ $\boldsymbol{S_1C_1 \cap 8_19_1 = 3_1)}$. З'єднують між собою однойменні проекції побудованих точок і отримують горизонтальну $\boldsymbol{1_12_13_1}$ й фронтальну $\boldsymbol{1_22_23_2}$ проекції фігури перерізу.

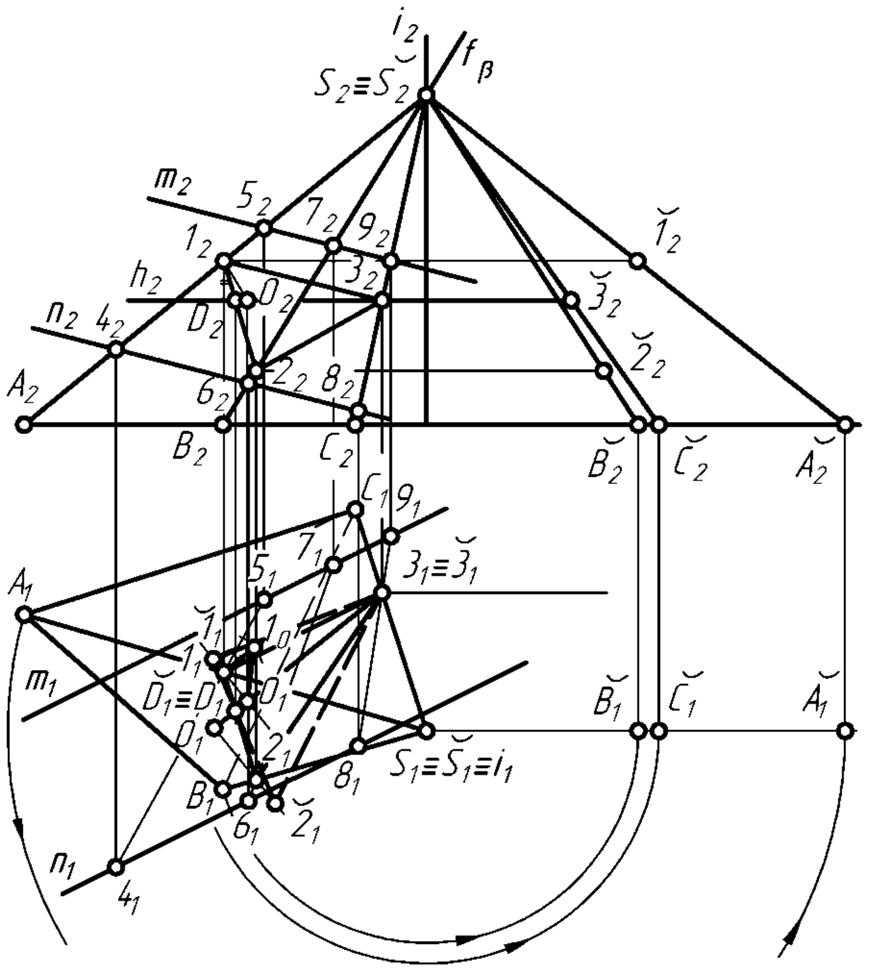


Рис. 6.22

Якщо у межах заданої поверхні не всі ребра перетинають січну площину, то їх продовжують до перетину з цією площиною й отримують фіктивні точки фігури перерізу. Під час побудови проекцій фігури перерізу її фіктивну частину відкидають.

Для побудови розгортки повної поверхні зрізаної піраміди необхідно знати натуральні величини всіх елементів зрізаної піраміди. Оскільки основа піраміди паралельна до Π_1 за побудовою, її горизонтальна проекція $A_1B_1C_1$ дорівнює натуральній величині.

Побудову натуральної величини фігури перерізу доцільно виконувати з допомогою методу обертання навколо лінії рівня. В нашому випадку обертання виконують навколо горизонталі h. Для цього через 3_2 проводять $h_2 || x$ $(h_2 \cap 1_2 2_2 = D_2)$, прямим проекціюванням D_2 на $1_1 2_1$ отримують D_1, сполучають 3_1 і D_1 і отримують h_1 – горизонтальну проекцію осі обертання. Точки 3 і D лежать на осі обертання, отже $3_1 \equiv \breve{3}_1$, $D_1 \equiv \breve{D}_1$. Через 1_1 і 2_1 проводять горизонтальні сліди площин обертання даних точок, перпендикулярні до h_1. Обертають точку 1. Для цього будують проекції центра обертання $O(O_1, O_2)$, визначають натуральну величину радіуса обертання $O_1 1_0$ і обертають точку 1 у положення $\breve{1}_1$. Аналогічно будують точку $\breve{2}_1$ і отримують $\breve{1}_1 \breve{2}_1 \breve{3}_1$ – натуральну величину фігури перерізу.

Натуральні величини бокових ребер зрізаної піраміди визначають обертанням навколо горизонтально-проекціюючої осі $i(i_1, i_2)$, яка проходить через вершину піраміди S. У процесі обертання бокові ребра повинні зайняти положення, паралельні до Π_2, тобто їхні горизонтальні проекції повинні стати паралельними до x. Отже, через S_1 проводять горизонтальну пряму, на якій у процесі обертання будуть лежати горизонтальні проекції бокових ребер.

Π_1 є площиною обертання для всіх точок основи піраміди, тому горизонтальна проекція центра обертання збігається з S_1. Радіус обертання для кожної точки основи співпадає з горизонтальною проекцією відповідного ребра, а тому й використовують їх як радіуси обертання. Таким чином обертають горизонтальні проекції бокових ребер піраміди навколо S_1 до суміщення з попередньо побудованою горизонтальною прямою й отримують $\breve{A}_1, \breve{B}_1, \breve{C}_1$. Прямим проекціюванням $\breve{A}_1, \breve{B}_1, \breve{C}_1$ на x_{12} отримують $\breve{A}_2, \breve{B}_2, \breve{C}_2$, сполучають отримані точки з S_2 й отримують натуральні величини бокових ребер піраміди $\breve{S}_2\breve{A}_2, \breve{S}_2\breve{B}_2, \breve{S}_2\breve{C}_2$. Через точки 1_2, 2_2, 3_2 проводять горизонтальні прямі до перетину з відповідними натуральними величинами бокових ребер і отримують $\breve{1}_2, \breve{2}_2, \breve{3}_2$. Отримані при цьому відрізки $\breve{1}_2\breve{A}_2, \breve{2}_2\breve{B}_2, \breve{3}_2\breve{C}_2$ дорівнюють натуральним величинам бокових ребер зрізаної піраміди.

Розгортку гранчастої поверхні будують, суміщуючи всі її грані з однією площиною шляхом послідовного їх обертання навколо ребер. Розгортку повної поверхні заданої зрізаної піраміди виконують з допомогою способу трикутників, в основі якого лежить властивість "жорсткості" трикутника, оскільки три відрізки визначають єдиний трикутник. Таким чином, якщо відомі натуральні величини всіх ребер зрізаної піраміди, можна з допомогою методу засічок побудувати всі елементи розгортки зрізаної піраміди.

З економічної точки зору розріз поверхні для побудови розгортки слід робити по найкоротшому ребру, а нижню і верхню основи прибудовувати до найдовших сторін.

Отже, на вільному місці аркуша (рис. 6.23) будують довільну точку S (вершину майбутньої розгортки), через S проводять пряму на якій відкладають дійсну величину найкоротшого ребра $\breve{S}_2\breve{C}_2$ й отримують точку C. Всі інші елементи розгортки будують методом засічок. Для побудови точки B розхилом циркуля рівним $\breve{S}_2\breve{B}_2$ із S, як із центра, описують дугу, і з точки C, як центра, описують дугу розхилом циркуля, рівним B_1C_1, точка перетину побудованих дуг є точка B, яку відповідними лініями з'єднують з C і S й отримують натуральну величину грані SCB. Аналогічно будують точки A і C й отримують натуральні величини граней SBA і SAC.

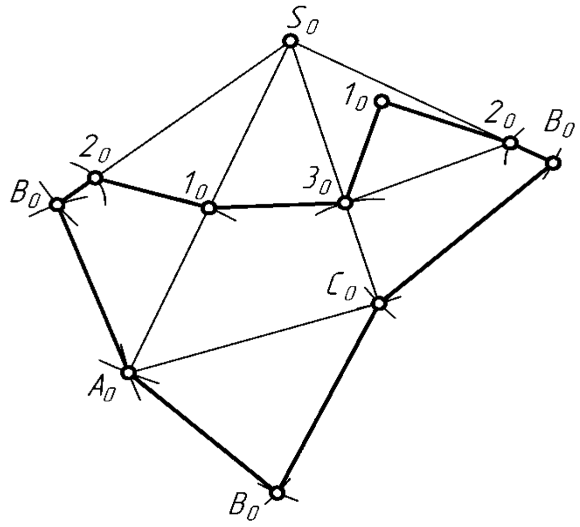


Рис. 6.23

Потім на кожному повному ребрі розгортки, починаючи з основи, відкладають відповідні дійсні величини ребер зрізаної піраміди й отримують розгортку бокової поверхні зрізаної піраміди ***CBAC3123***. До розгортки бокової поверхні зрізаної піраміди методом засічок прибудовують дійсну величину основи піраміди ***CBA*** та дійсну величину фігури перерізу ***321*** і отримують розгортку повної поверхні зрізаної піраміди.

Завдання 6.1. Побудувати проекції, натуральну величину фігури перерізу і розгортку повної поверхні чотиригранної похилої піраміди з основою $ABCD(A_1B_1C_1D_1,\ A_2B_2C_2D_2)$ і вершиною $S(S_1,\ S_2)$ перерізаної площиною загального положення, заданою слідами $\alpha(h_\alpha, f_\alpha)$ (рис. 6.24).

Розв'язування. Для побудови проекцій фігури перерізу використовують спосіб ребер. Побудову починають з ребра, найближчого до точки збігу слідів січної площини X_α. У нашому випадку ребро ***CS*** заключають у фронтально-проекціюючу площину $\beta(f_\beta \equiv S_2C_2,\ h_\beta \perp x_{12})$, будують проекції лінії перетину площин α і β $(h_\alpha \cap h_\beta = H_1,\ f_\alpha \cap f_\beta = F_2)$, прямим проекціюванням H_1 на x_{12} отримують H_2, прямим проекціюванням F_2 на x_{12} отримують F_1, сполучивши однойменні проекції точок ***F*** і ***H*** отримують H_1F_1 – горизонтальну проекцію лінії перетину площин α і β; H_2F_2 – фронтальну проекцію лінії перетину площин α і β. Точка перетину S_1C_1 з H_1F_1 є горизонтальною проекцією точки перетину ребра ***SC*** з січною площиною $\boldsymbol{\alpha}$ ($\boldsymbol{S_1C_1\cap H_1F_1=3_1}$). Прямим проекціюванням $\boldsymbol{3_1}$ на $\boldsymbol{S_2C_2}$ отримують $\boldsymbol{3_2}$. Проекції точок перетину інших ребер з січною площиною можна побудувати аналогічно.

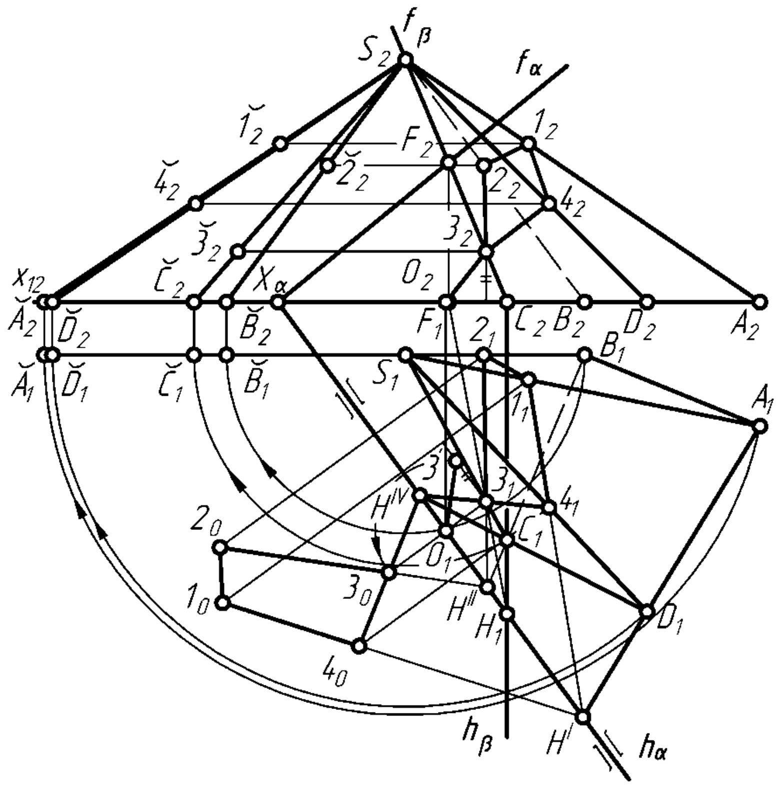


Рис. 6.24

Для спрощення побудови використовують спосіб споріднення (гомології). Щоб використати спосіб споріднення визначають центр споріднення $\boldsymbol{S_1}$, вісь споріднення $\boldsymbol{s_0\equiv h_\alpha}$ і відповідні пари точок, які належать одночасно тому чи іншому ребру й основі чи фігурі перерізу. На ***SC*** точка ***C*** належить основі піраміди і точки ***3*** належить фігурі перерізу, а на ребрі ***SD*** точка ***D*** належить основі піраміди і точка ***4*** належить фігурі перерізу. Точки $\boldsymbol{C_1}$, $\boldsymbol{D_1}$ і $\boldsymbol{3_1}$, $\boldsymbol{4_1}$ лежать на споріднених прямих, які перетинають вісь споріднення $\boldsymbol{h_\alpha}$ у спільній точці, яку називають полюсом споріднення $\boldsymbol{H^{IV}}$. Отже щоб побудувати $\boldsymbol{4_1}$ продовжують $\boldsymbol{C_1D_1}$ до перетину з $\boldsymbol{h_\alpha}$ й отримують $\boldsymbol{H^{IV}}$ ($\boldsymbol{C_1D_1\cap h_\alpha=H^{IV}}$), будують споріднену пряму $\boldsymbol{H^{IV}3_1}$ і продовжують до перетину з $\boldsymbol{S_1D_1}$, отримують $\boldsymbol{4_1}$ ($\boldsymbol{H^{IV}3_1\cap S_1D_1=4_1}$), прямим проекціюванням $\boldsymbol{4_1}$ на $\boldsymbol{S_2D_2}$ отримують $\boldsymbol{4_2}$. Аналогічно будують проекції точок $1(1_1, 1_2)$ і $2(2_1, 2_2)$ і отримують $1_1 2_1 3_1 4_1$ – горизонтальну проекцію фігури перерізу і $1_2 2_2 3_2 4_2$ – фронтальну проекцію фігури перерізу.

Для побудови натуральної величини фігури перерізу використовують метод обертання навколо прямої рівня, за вісь обертання приймають h_α, а побудову виконують аналогічно описаному вище випадку. Вершини фігури перерізу 1234 як об'єкти обертання обертають до суміщення з Π_1. Площинами обертання для кожного з об'єктів обертання є горизонтально-проекціюючі площини, перпендикулярні до осі обертання h_α. Отже, через 1_1, 2_1, 3_1, 4_1 проводять горизонтальні сліди площин обертання, перпендикулярні до h_α. Першою обертають точку 3. Для цього визначають горизонтальну проекцію центра обертання O_1 як точку перетину осі обертання h_α і горизонтального сліду площини обертання для точки 3, прямим проекціюванням O_1 на x_{12} отримують O_2 – фронтальну проекцію центра обертання, сполучають однойменні проекції точок 3 і O і отримують 3_1O_1 – горизонтальну проекцію радіусу обертання; 3_2O_2 – фронтальну проекцію радіуса обертання. Використовуючи метод прямокутного трикутника, знаходять дійсну величину радіуса обертання. Для цього через 3_1 проводять пряму, перпендикулярну до 3_1O_1, відкладають на ній перевищення точки 3_2 над x_{12} і отримують 3^1, з'єднують 3^1 з O_1 і отримують дійсну величину радіуса обертання 3^1O_1 для точки 3. Знайденим радіусом роблять засічку на горизонтальному сліді площини обертання, який проходить через 3_1, і отримують суміщену точку 3_0. Аналогічно можна побудувати інші суміщені точки.

Для спрощення побудови суміщених точок використовують запропонований раніше спосіб споріднення. Тоді проводять пряму $H^{IV}3_0$, споріднену прямій 4_1H^{IV}, до перетину з горизонтальним слідом площини обертання, який проходить через 4_1, і отримують суміщену точку 4_0. Положення точок 2_0 і 1_0 знаходять аналогічно і використовують для цього полюси споріднення H^{II} і H^{I}.

Дійсні величини бокових ребер зрізаної піраміди використовують з допомогою методу обертання навколо горизонтально-проекціюючої осі за методикою описаною вище. Тобто обертають горизонтальні проекції бокових ребер навколо S_1 до положення, паралельного до x_{12} і отримують $\breve{A}_1, \breve{B}_1, \breve{C}_1, \breve{D}_1$. Прямим проекціюванням, $\breve{A}_1, \breve{B}_1, \breve{C}_1, \breve{D}_1$ на x_{12} отримують, $\breve{A}_1, \breve{B}_1, \breve{C}_1, \breve{D}_1$ сполучають отримані точки з $S_2 \equiv \breve{S}_2$ і отримують натуральні величини бокових ребер піраміди $\breve{S}_2\breve{A}_2$, $\breve{S}_2\breve{B}_2$, $\breve{S}_2\breve{C}_2$, $\breve{S}_2\breve{D}_2$. Через точки ***12, 22, 32, 42*** проводять горизонтальні прямі до перетину з відповідними натуральними величинами бокових ребер і отримують $\breve{1}_2;\ \breve{2}_2;\ \breve{3}_2;\ \breve{4}_2$. Отримані відрізки $\breve{A}_2\breve{1}_2$, $\breve{B}_2\breve{2}_2$, $\breve{C}_2\breve{3}_2$, $\breve{D}_2\breve{4}_2$ дорівнюють натуральним величинам бокових ребер зрізаної піраміди.

Розгортку повної поверхні зрізаної піраміди будують, використовуючи метод засічок за описаною вище методикою (рис. 6.25).

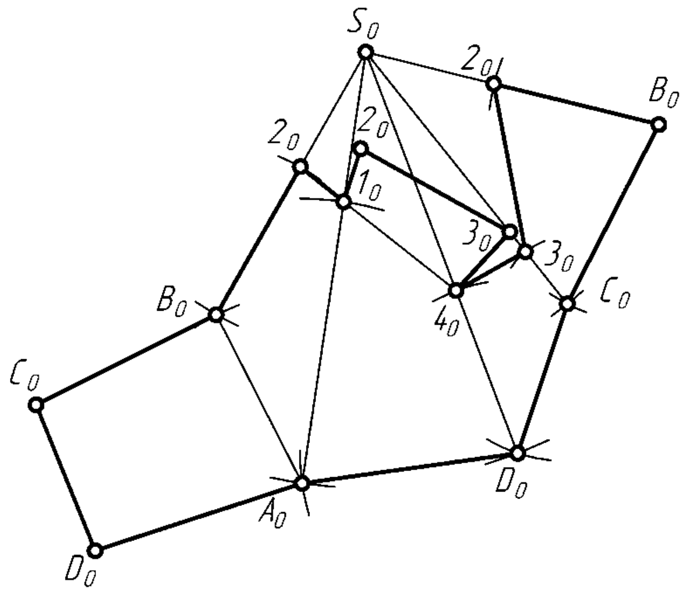


Рис. 6.25

6.6. Переріз призми площиною загального положення

Нехай задана тригранна похила призма з основою ***ABC***$(A_1B_1C_1, A_2B_2C_2)$ і боковими ребрами $a(a_1, a_2)$, $b(b_1, b_2)$, $c(c_1, c_2)$, перерізана площиною загального положення $\alpha(m \cap n)$. Необхідно побудувати проекції фігури перерізу, натуральні величини елементів зрізаної призми і розгортку повної поверхні зрізаної призми (рис. 6.26).

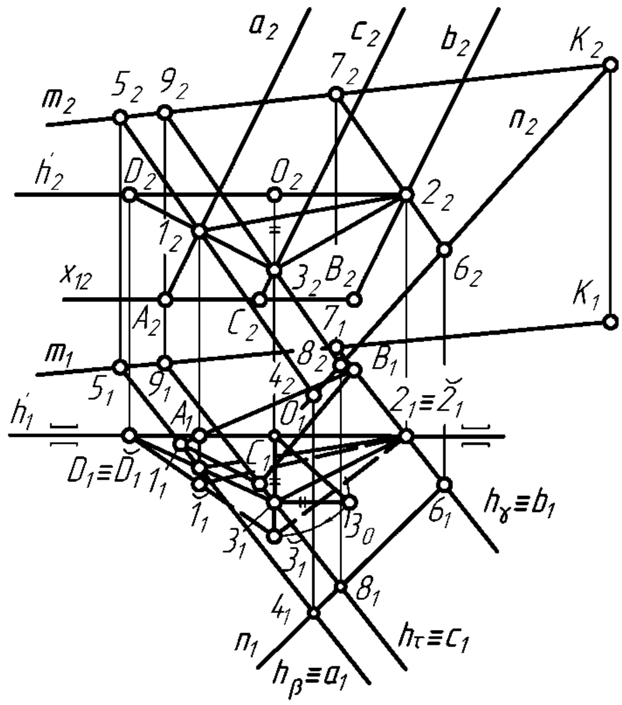


Рис. 6.26

Проекції фігури перерізу будують за методикою, описаною в 6.5. Бокові ребра призми заключають у горизонтально-проекціюючі площини $\boldsymbol{\beta(h_\beta\equiv a_1)}$, $\boldsymbol{\gamma(h_\gamma\equiv b_1)}$, $\boldsymbol{\tau(h_\tau\equiv c_1)}$, які перерізають січну площину $\boldsymbol{\alpha}$ по лініях $\boldsymbol{45\ (h_\beta\cap n_1=4_1,\ h_\beta\cap m_1=5_1)}$, $\boldsymbol{67\ (h_\gamma\cap n_1=6_1,\ h_\gamma\cap m_1=7_1)}$, $\boldsymbol{89\ (h_\tau\cap n_1=8_1,\ h_\tau\cap m_1=9_1)}$. Перетин фронтальних проекцій цих ліній з відповідними фронтальними проекціями бокових ребер призми визначають фронтальні проекції точок перетину бокових ребер призми з січною площиною $\boldsymbol{(4_25_2\cap a_2=1_2,\ 6_27_2\cap b_2=2_2,\ 8_29_2\cap c_2=3_2)}$. Горизонтальні проекції точок ***1***, ***2***, ***3*** визначають прямим проекціюванням. З'єднують між собою однойменні проекції побудованих точок і отримують горизонтальну $\boldsymbol{1_12_13_1}$ і фронтальну $\boldsymbol{1_22_23_2}$ проекції фігури перерізу.

Побудову натуральної величини фігури перерізу виконують з допомогою методу обертання навколо горизонталі $\boldsymbol{h^1}$. Для цього через $\boldsymbol{2_2}$ проводять $\boldsymbol{h^1{}_2||x}$ $\boldsymbol{(h^1{}_2\cap 1_23_2=D_2)}$, прямим проекціюванням $\boldsymbol{D_2}$ на $\boldsymbol{1_13_1}$ отримують $\boldsymbol{D_1}$, сполучають $\boldsymbol{2_1}$ і $\boldsymbol{D_1}$ і отримують $\boldsymbol{h^1{}_1}$ – горизонтальну проекцію осі обертання. Точки ***2*** і ***D*** лежать на осі обертання, отже $\boldsymbol{2_1\equiv\breve{2}_1}$, $\boldsymbol{D_1\equiv\breve{D}_1}$. Процес обертання виконують за описаною вище методикою і отримують $\breve{1}_1\breve{2}_1\breve{3}_1$ – натуральну величину фігури перерізу.

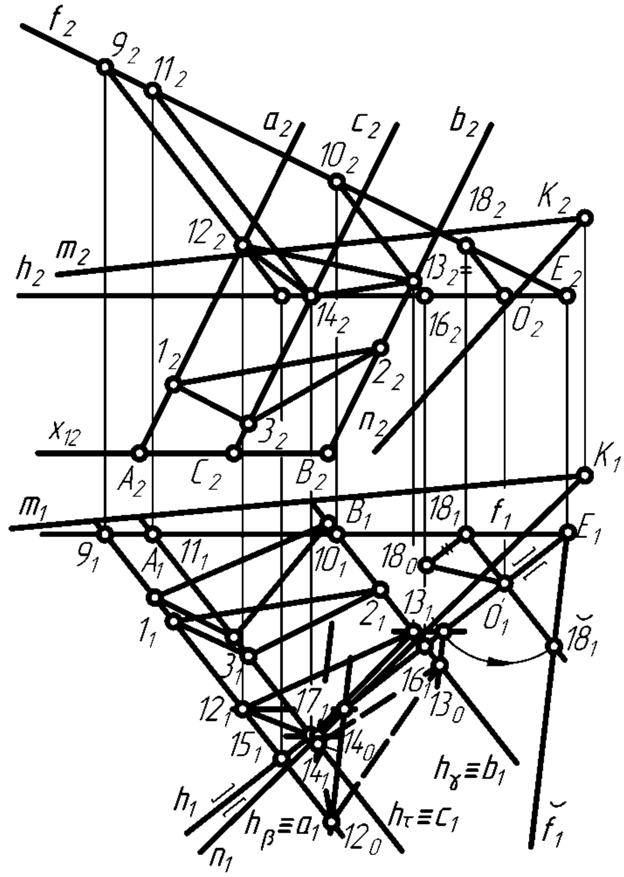


Рис. 6.27

Для побудови розгортки бокової поверхні зрізаної призми необхідно знати натуральні величини її граней. Побудову натуральних величин бокових граней зрізаної призми замінюють визначенням натуральних величин зрізаних бокових ребер і натуральної величини перерізу призми площиною, перпендикулярною до бокових ребер, який називають нормальним перерізом.

Для побудови нормального перерізу вибирають довільну точку $\boldsymbol{E(E_1, E_2)}$ (рис. 6.27), через яку проводять січну площину $\boldsymbol{\Delta\ (h\cap f)}$, перпендикулярну до бокових ребер призми $\boldsymbol{(h_1\perp a_1,\ f_1||x_{12},\ f_2\perp a_2,\ h_2||x_{12})}$. Побудову проекцій нормального перерізу виконують аналогічно описаній вище побудові проекцій перерізу $\boldsymbol{123}$ і використовують горизонтально проекціюючі площини $\boldsymbol{\beta,\ \gamma,\ \tau}$. У результаті отримують горизонтальну $\boldsymbol{12_1 13_1 14_1}$ і фронтальну $\boldsymbol{12_2 13_2 14_2}$ проекції нормального перерізу.

Для побудови натуральної величини фігури нормального перерізу використовують метод обертання навколо прямої рівня. За вісь обертання приймають горизонталь $\boldsymbol{h}$ січної площини $\boldsymbol{\Delta}$. Для спрощення процесу побудови й уникнення необхідності обертати всі вершини нормального перерізу виконують суміщення площини $\boldsymbol{\Delta}$ шляхом обертання фронталі в положення $\breve{f}_1$. Для цього обертають довільну точку $\boldsymbol{18}$ навколо $\boldsymbol{h}$ у суміщене положення $\breve{18}_1$, через $\boldsymbol{E_1}$ і $\breve{18}_1$ проводять пряму й отримують $\breve{f}_1$. З точки $\boldsymbol{12_1}$ проводять пряму паралельну до $\boldsymbol{f_1}$ до перетину в точці $\boldsymbol{M}$ з $\boldsymbol{h_1}$. З точки $\boldsymbol{M}$ проводять пряму паралельну $\breve{f}_1$ до перетину в точці $\boldsymbol{12_0}$ зі слідом площини обертання точки $\boldsymbol{12}$. Точки $\boldsymbol{13_0}$ і $\boldsymbol{14_0}$ будують аналогічно з побудовою $\boldsymbol{12_0}$.

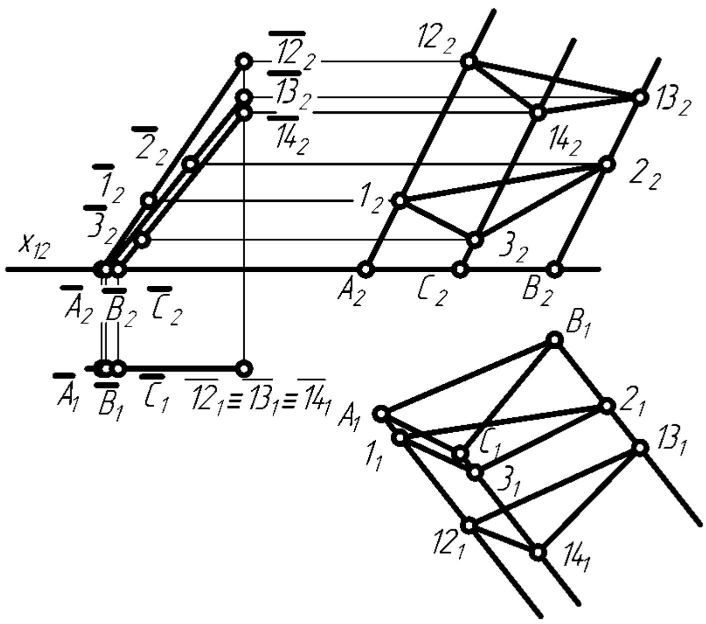


Рис. 6.28

Натуральну величину ребер призми від нормального перерізу до основи призми і ребер зрізаної призми визначають з допомогою методу плоско-паралельного переміщення. В результаті такого переміщення бокові ребра на $\boldsymbol{\Pi_2}$ повинні проекціюватися в натуральну величину. Тобто їхні горизонтальні проекції повинні зайняти положення паралельне до x_{12}. Отже, на вільному місці проводять горизонтальну пряму і вибирають на ній довільну точку, в якій суміщають $\overline{12}_1 \equiv \overline{13}_1 \equiv \overline{14}_1$ (рис. 6.28), методом засічок на даній прямі будують $\bar{A}_1(A_1 12_1 = \bar{A}_1\overline{12}_1)$, $\bar{B}_1(B_1 13_1 = \bar{B}_1\overline{13}_1)$, $\bar{C}_1(C_1 14_1 = \bar{B}_1\overline{14}_1)$. Прямим проекціюванням $\bar{A}_1$, $\bar{B}_1$, $\bar{C}_1$ на x_{12} отримують $\bar{A}_2$, $\bar{B}_2$, $\bar{C}_2$, через $\overline{12}_1 \equiv \overline{13}_1 \equiv \overline{14}_1$ проводять вертикальну лінію проекційного зв'язку, через 12_2, 13_2, 14_2 проводять горизонтальні прямі до перетину з побудованою вертикальною лінією проекційного зв'язку і отримують відповідно $\overline{12}_2 \equiv \overline{13}_2 \equiv \overline{14}_2$ сполучають $\bar{A}_2$ з $\overline{12}_2$, $\bar{B}_2$ з $\overline{13}_2$, $\bar{C}_2$ з $\overline{14}_2$ й отримують натуральні величини ребер призми від нормального перерізу до основи.

Для побудови натуральних величин ребер зрізаної призми через точки 1_2, 2_2, 3_2 проводять горизонтальні прямі до перетину з відповідними натуральними величинами ребер призми від нормального перерізу до основи й отримують $\bar{1}_2$, $\bar{2}_2$, $\bar{3}_2$. Отримані відрізки $\bar{A}_2\bar{1}_2$, $\bar{B}_2\bar{2}_2$, $\bar{C}_2\bar{3}_2$ дорівнюють натуральним величинам бокових ребер зрізаної призми.

Розгортку повної поверхні зрізаної призми виконують з допомогою способу нормального перерізу. Для цього на вільному місці креслення проводять горизонтальну пряму, на яку наносять периметр нормального перерізу, призми починаючи з точки, через яку проходить найкоротше ребро (рис. 6.29). Оскільки в нашому випадку найкоротшим є ребро ***C3*** на побудованій горизонтальній прямі довільно вибирають точку ***14*** і відкладають відрізки $1412 = 14_0 12_0$, $1213 = 12_0 13_0$, $1314 = 13_0 14_0$. Через ***14***, ***12***, ***13***, ***14*** проводять вертикальні прямі, на яких відкладають дійсні величини ребер призми від нормального перерізу до основи ($14C = \overline{14}_2\bar{C}_2$, $12A = \overline{12}_2\bar{A}_2$, $13B = \overline{13}_2\bar{B}_2$, $14C = \overline{14}_2\bar{C}_2$), дійсні величини ребер зрізаної призми ($C3 = \bar{C}_2\bar{3}_2$, $A1 = \bar{A}_2\bar{1}_2$, $B2 = \bar{B}_2\bar{2}_2$, $C3 = \bar{C}_2\bar{3}_2$) й отримують розгортку бокової поверхні зрізаної призми ***CABC3213***. Способом засічок прибудовують до розгортки бокової поверхні натуральні величини нижньої основи ***ABC*** і фігури перерізу ***123*** й отримують розгортку повної поверхні зрізаної призми.

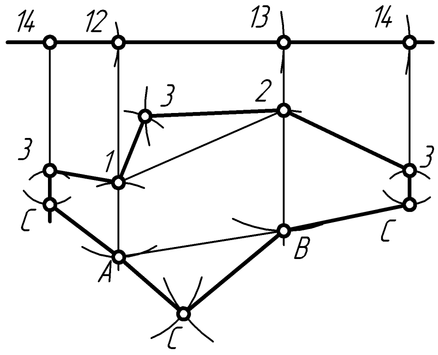


Рис. 6.29

Завдання 6.2. Побудувати проекції, натуральну величину фігури перерізу і розгортку повної поверхні чотиригранної похилої призми з основою $\boldsymbol{ABCD(A_1B_1C_1D_1, A_2B_2C_2D_2)}$ і боковими ребрами $\boldsymbol{a(a_1, a_2)}$, $\boldsymbol{b(b_1, b_2)}$, $\boldsymbol{c(c_1, c_2)}$, $\boldsymbol{d(d_1, d_2)}$ перерізаної площиною загального положення заданою слідами $\boldsymbol{\alpha(h_\alpha, f_\alpha)}$ (рис. 6.30).

Розв’язування. Проекції і натуральну величину фігури перерізу будують аналогічно описаному вище перерізу піраміди площиною, заданою слідами.

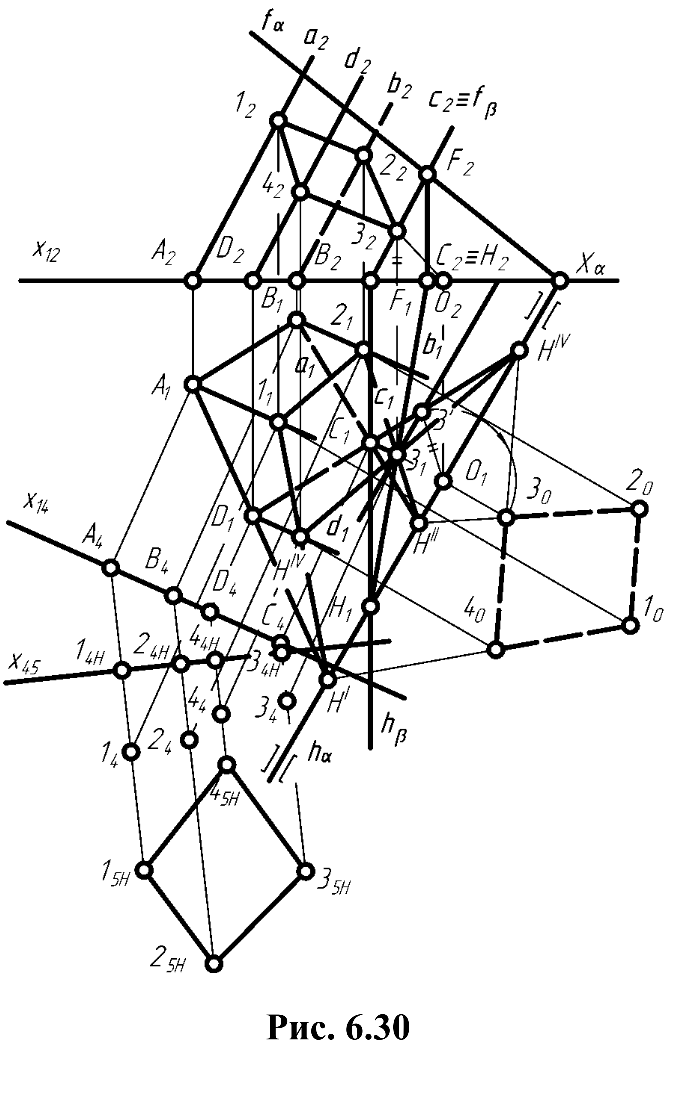


Рис. 6.30

Для побудови натуральної величини бокових ребер і натуральної величини нормального перерізу використовують метод заміни площин проекцій. При цьому фронтальну площину проекцій **$П_2$** замінюють площиною **$П_4$**, яка перпендикулярна до площини **$П_1$** і паралельна до бокових ребер призми. Внаслідок такої заміни проекції бокових ребер призми на нову площину проекцій **$П_4$** дорівнюють їх натуральній величині.

Практичну побудову натуральної величини бокових ребер призми виконують у наступній послідовності. На вільному місці креслярського паперу паралельно до горизонтальних проекцій бокових ребер призми на довільній відстані від них проводять вісь x_{14} нової системи площин проекцій **$П_1П_4$** і проекціюють на неї під прямим кутом точки основи призми, внаслідок чого отримують нову проекцію цієї основи $A_4B_4C_4D_4$. Через $1_1, 2_1, 3_1, 4_1$ проводять перпендикуляри до x_{14} і на їх продовженнях відкладають перевищення точок $1_2, 2_2, 3_2, 4_2$ над віссю x_{12}. У результаті отримують точки $1_4, 2_4, 3_4, 4_4$. З'єднують між собою однойменні проекції точок основи і фігури перерізу, які лежать на одних бокових ребрах і отримують відрізки, які дорівнюють натуральним величинам бокових ребер зрізаної призми.

Для визначення натуральної величини нормального перерізу бокові ребра призми переводять у положення проекціюючих. Тобто горизонтальну площину проекцій **$П_1$** замінюють площиною **$П_5$**, яка перпендикулярна до площини **$П_4$** і перерізає її по осі x_{45}, перпендикулярній до бокових ребер зрізаної призми. Отже на вільному місці креслярського паперу проводять $x_{45} \perp A_41_4$. Точки перетину осі x_{45} з проекціями бокових ребер призми на **$П_4$** є проекціями вершин нормального перерізу на **$П_4$** $(1_{4н}, 2_{4н}, 3_{4н}, 4_{4н})$. Через точки $1_{4н}, 2_{4н}, 3_{4н}, 4_{4н}$ проводять перпендикуляри до x_{45} і відкладають на них перевищення точок $1_1, 2_1, 3_1, 4_1$ над віссю x_{14}, з'єднують побудовані точки й отримують натуральну величину нормального перерізу $1_{5н}, 2_{5н}, 3_{5н}, 4_{5н}$.

Під час побудови розгортки повної поверхні зрізаної призми аналогічно описаному вище прикладу на вільному місці креслярського паперу проводять горизонтальну пряму, на яку наносять периметр нормального перерізу, починаючи з точки, через яку проходить найкоротше ребро (у нашому випадку точка $3_{5н}$) (рис. 6.31).

Через побудовані точки $3_н$, $4_н$, $1_н$, $2_н$, $3_н$ проводять вертикальні прямі, на яких вгору відкладають відрізки відповідних дійсних величин ребер, що розміщені вниз від осі x_{45}, наприклад $3_н3=3_{4н}3_4$, а вниз – відрізки, які розміщені вгору від осі x_{45}, наприклад $3_нC=3_{4н}C_4$. Таким чином будують дійсні величини бокових ребер зрізаної призми *(3C=3₄C₄, 4D=4₄D₄, 1A=1₄A₄, 2B=2₄B₄, 3C=3₄C₄)* й отримують розгортку бічної поверхні зрізаної призми ***CDABC32143***.

Для отримання розгортки повної поверхні зрізаної призми з допомогою методу засічок до бокової поверхні добудовують натуральні величини основи призми ***ABCD*** і фігури перерізу ***1234***. Добудову рекомендовано виконувати до найдовших сторін, але так щоб, під час розкроювання досягалася найбільша економія матеріалу.

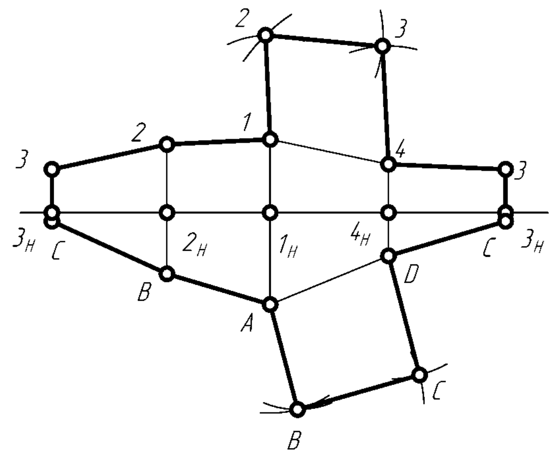


Рис. 6.31

6.7. Переріз конуса площиною загального положення

Як відзначено вище, в результаті перерізу поверхонь обертання площинами можуть утворюватися перерізи, обмежені кривими лініями. Для побудови проекцій таких кривих ліній необхідно побудувати проекції точок перетину ряду ліній, які належать поверхні з січною площиною, і отримані точки плавно з'єднати між собою з допомогою лекала. Отже, задачу зводять до побудови проекцій точки перетину прямої з площиною. При цьому, в першу чергу, визначають проекції характерних точок кривих ліній. Якщо знайдені характерні точки кривої на окремих ділянках не виявляють характеру кривої, будують проекції проміжних точок.

Нехай заданий прямий круговий конус, основа якого лежить у площині **П₁**, в основі конуса – коло радіусом ***R*** з центром у точці ***K(K₁, K₂)***, і вершина ***S(S₁, S₂)***, перерізаний січною площиною загального положення ***α(ABC)*** (рис. 6.32). Необхідно побудувати проекції і натуральну величину фігури перерізу і розгортку бокової поверхні зрізаного конуса.

Побудову починають з визначення назви кривої лінії, яка обмежує фігуру перерізу. Для цього січну площину перетворюють у проекціюючу, використовуючи метод заміни площин проекцій. У нашому випадку площину **П₂** замінюють площиною **П₄**, яка перерізає площину **П₁** по осі ***x₁₄***, перпендикулярній до горизонталі січної площини. Оскільки сторона ***AB(A₁B₁, A₂B₂)*** заданої січної площини одночасно є горизонталлю даної площини, на вільному місці креслярського паперу проводять ***x₁₄⊥A₁B₁*** і будують проекції конуса і січної площини у новій площині проекцій **П₄**. На новій проекції січна площина перерізає всі твірні конуса і нахилена до його основи. Отже фігура перерізу – еліпс.

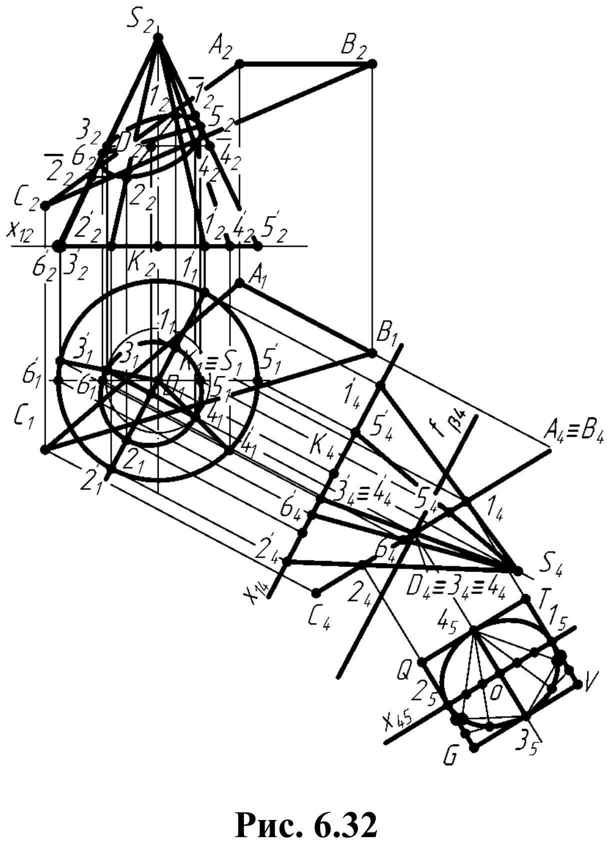


Рис. 6.32

Побудову проекцій еліпса починають з побудови проекцій великої і малої осей. На площину **П$_4$** велику вісь еліпса проекціюють у натуральну величину. Кінці великої осі еліпса є найнижчою і найвищою точками перерізу й утворені в результаті перетину крайніх твірних конуса з січною площиною ($1'_4S_4 \cap A_4C_4 = 1_4$, $2'_4S_4 \cap A_4C_4 = 2_4$). Зворотним проекціюванням будують горизонтальну 1_12_1 і фронтальну 1_22_2 проекції великої осі еліпса. Осі еліпса перпендикулярні і в точці перетину діляться навпіл. Отже, на площину **П$_4$** малу вісь еліпса проекціюють у точку $3_4 \equiv 4_4$, яка ділить 1_42_4 навпіл. Для подальшої побудови проводять проекції твірної $3'S$, на якій лежить точка 3 і твірної $4'S$, на якій лежить точка 4. Зворотним проекціюванням будують горизонтальну 3_14_1 і фронтальну 3_24_2 проекції малої осі еліпса.

Побудову проекцій у вихідній системі площин проекцій і натуральної величини малої осі еліпса можна виконувати іншим шляхом. Для цього через $3_4 \equiv 4_4$ проводять допоміжну січну площину $\beta(f_\beta)$, паралельну до основи конуса, яка перерізає конус по колу. Отримане від перерізу коло на площину **П$_2$** проекціюється у натуральну величину. Для визначення дійсної величини малої осі еліпса 3_14_1 з точки $3_4 \equiv 4_4$ проводять лінію проекційного зв'язку до перетину її з проведеним колом на площині **П$_1$**. Для побудови фронтальної проекції малої осі еліпса використовують точку D перетину допоміжної січної площини β з AC. У площині **П$_4$** $D_4 \equiv 3_4 \equiv 4_4$. У площині **П$_1$** D_1 лежить на перетині ліній проекційного зв'язку, що проведені через точку $D_4 \equiv 3_4 \equiv 4_4$ і 1_42_4. В площині **П$_2$** точку D_2 отримують прямим проекціюванням D_1 на A_2C_2. Фронтальний слід f_β будують проекціюванням з допомогою точки D. Фронтальні проекції точок 3 і 4 знаходять прямим проекціюванням 3_1 і 4_1 на f_β.

Для виконання побудови проекцій фігури перерізу необхідно побудувати проекції проміжних її точок, які лежать на твірних $5'S$ і $6'S$. Прямим проекціюванням будують $5'_1; 6'_1$, і $5'_4; 6'_4$, сполучають $5'_4$ з S_4 і $6'_4$ з S_4 і отримують точки 5_4 і 6_4 ($5'_4S_4 \cap A_4C_4 = 5_4$, $6'_4S_4 \cap A_4C_4 = 6_4$), зворотним проекціюванням отримують 5_1, 6_1 і 5_2, 6_2.

Горизонтальну і фронтальну проекції фігури перерізу будують, використовуючи метод спряжених діаметрів (побудова не показана).

Для побудови натуральної величини еліпса, що утворився у результаті перерізу кругового конуса площиною загального положення $\alpha(ABC)$, будують натуральні величини великої і малої осей еліпса. При цьому використовують метод заміни площин проекцій і замінюють площину Π_1 на площину Π_5, яка перерізає площину Π_4 по осі x_{45} паралельній до січної площини $\alpha(ABC)$. Отже на вільному місці креслярського паперу будують x_{45} $(x_{45}||A_4C_4)$ і через точки 1_4, 2_4, $3_4 \equiv 4_4$ проводять перпендикуляри (лінії проекційного зв'язку) до x_{45}. Точки 1_5 і 2_5 отримують на перетині відповідних перпендикулярів і осі x_{45}. Для побудови точок 3_5 і 4_5 на перпендикулярі, що проходить через $3_4 \equiv 4_4$, відкладають по обидві сторони від осі x_{45} відрізки, що дорівнюють половині величини різниці перевищень кінців малої осі еліпса 34 над площиною Π_1.

Натуральну величину еліпса будують, використовуючи метод спряжених діаметрів. Отримані проекції великої і малої осей еліпса є спряженими діаметрами, тому що кожна із них ділить навпіл хорди еліпса, що паралельні до іншої осі. Для побудови через точки 1_5 і 2_5 проводять прямі, паралельні до 3_54_5, через точки 3_5 і 4_5 проводять прямі, паралельні до 1_52_5. У результаті отримують прямокутник $GQTV$. Спряжений діаметр 1_52_5 і сторону прямокутника GQ ділять на довільне однакове число рівних частин, наприклад на 6. Із точок 3_5 і 4_5 проводять промені відповідно через точки ділення спряженого діаметра і точки ділення прямокутника. Пересічення променів, що проходять через однойменні точки поділу спряженого діаметра і сторони прямокутника, визначають точки еліпса, які сполучають між собою з допомогою лекала. Побудову симетричної частини еліпса виконують аналогічно.

Для побудови розгортки бічної поверхні зрізаного конуса визначають натуральні величини твірних, на яких розміщені характерні (***1***,***2***,***3***,***4***) і проміжні (***5***,***6***) точки. Для цього використовують метод обертання аналогічно визначенню натуральних величин ребер піраміди. У нашому випадку всі твірні конуса дорівнюють і їх натуральна величина дорівнює $S_2 5_2'$. Натуральну величину зрізаних твірних конуса визначають методом обертання навколо проекціюючої (горизонтальної) прямої, що проходить через вершину конуса, ставлячи їх у окреме (фронтальне) положення до суміщення з крайньою твірною. Тобто через точки $1_2, 2_2, 3_2, 4_2, 5_2, 6_2$, та інші проводять горизонтальні прямі до перетину з $S_2 5_2'$ й отримують $\overline{1}_2, \overline{2}_2, \overline{3}_2, \overline{4}_2, \overline{5}_2, \overline{6}_2$.

Розгорткою бокової поверхні прямого конуса є круговий сектор, тому для її побудови визначають кут при вершині сектора розгортки за формулою

$$\varphi=(d/l)\times 180^0,$$

де d – діаметр основи конуса, мм;

l – натуральна величина твірної конуса, мм.

На вільному місці аркуша креслярського паперу вибирають довільну точку S (рис. 6.33). З точки S, як центра, розхилом циркуля, що дорівнює довжині твірної конуса $l=S_2 5_2'$ описують дугу сектора з кутом, що відповідає знайденому центральному кутові розгортки φ.

Засічки хорд, що з’єднують сусідні характерні й допоміжні точки на основі конуса (на горизонтальній проекції основи), відзначають точки на розгорнутому полі основи конуса і з’єднують їх з вершиною S_0. При цьому побудову розгортки виконують у такому порядку, щоб зрізаний конус був розрізаний по найкоротшій твірній, тобто по твірній, на якій лежить найнижча точка фігури перерізу.

На відповідних твірних розгортки відкладають знайдені натуральні величини зрізаних твірних. Отримані точки розгортки за допомогою лекала з’єднують плавною кривою лінією й отримують розгортку бокової поверхні зрізаного конуса $23142\,2'3'1'4'2'$.

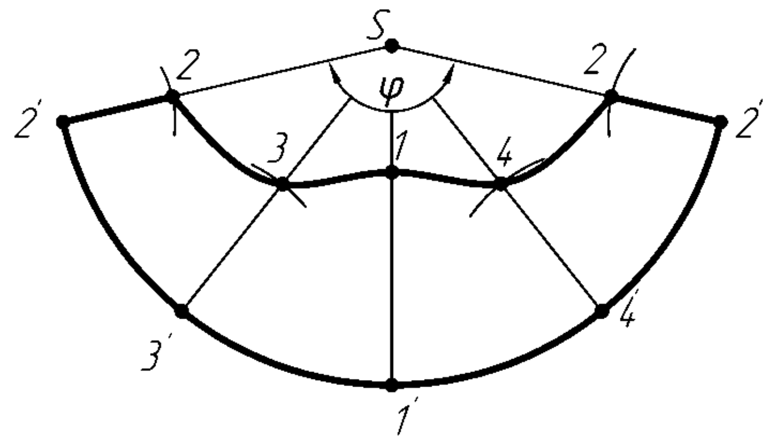


Рис. 6.33

6.8. Переріз циліндра площиною загального положення

В загальному випадку побудова проекцій лінії перерізу поверхні площиною є однаковою для многогранників і кривих поверхонь. Тому проекції фігури перерізу циліндра площиною і розгортку його поверхні будують аналогічно проекціям перерізу і розгортки призми. Отже, у нашому випадку доцільно розглянути спрощений приклад перерізу площиною загального положення поверхні прямого кругового циліндра. Нехай заданий прямий круговий циліндр висотою $\boldsymbol{h}$, основа якого лежить у площині $\mathbf{П_1}$, в основі циліндра – коло радіусом $\boldsymbol{R}$ з центром у точці $\boldsymbol{K(K_1,\ K_2)}$, перерізаний січною площиною загального положення $\boldsymbol{\alpha(ABC)}$ (рис. 6.34). Необхідно побудувати проекції і натуральну величину фігури перерізу й розгортку бокової поверхні зрізаного циліндра.

Аналіз взаємного розміщення поверхні циліндра й січної площини показує, що січна площина не паралельна і не перпендикулярна до твірних циліндра. Отже, фігура перерізу – еліпс, вища $\boldsymbol{M}$ і нища $\boldsymbol{N}$ точки якого лежать на лінії найбільшого нахилу до $\mathbf{П_1}$ січної площини. Для побудови лінії найбільшого нахилу до $\mathbf{П_1}$ січної площини $\boldsymbol{\alpha}$ через вісь циліндра проводять горизонтально-проекціюючу площину $\boldsymbol{\beta}$, перпендикулярну до горизонталі січної площини. У нашому випадку пряма

AB, що задає січну площину, одночасно є її горизонталлю ($A_2B_2 \| x$). Тому через $K_1 \equiv O_1$ проводять $h_\beta \perp A_1B_1$. Лінія найбільшого нахилу l лежить у горизонтально-проекціюючій площині β. Отже, $l_1 \equiv h_\beta$. Горизонтально-проекціююча площина β перетинає лінії, які задають січну площину α в точках F ($h_\beta \cap C_1B_1 = F_1$) і E ($h_\beta \cap A_1B_1 = E_1$). Прямим проекціюванням F_1 і E_1 на B_2C_2 і A_2B_2 отримують F_2 і E_2, через F_2 і E_2 будують l_2.

Горизонтальна проекція великої осі еліпса проходить через точки M_1 і N_1, що є вищою і нижчою точками фігури перерізу прямого циліндра, основа якого паралельна до Π_1, накладається на горизонтальну проекцію циліндра. Отже, M_1 і N_1 є точками перетину l_1 з горизонтальною проекцією основи циліндра. Прямим проекціюванням M_1 і N_1 на l_2 знаходять M_2 і N_2, прямим проекціюванням O_1 на l_2 знаходять O_2 – фронтальну проекцію центра еліпса, в якому перетинаються велика і мала осі еліпса.

Для побудови проекцій малої осі еліпса DZ через O_2 проводять горизонтальну площину $\sigma(f_\sigma)$, яка перерізає січну площину α по прямій h. При цьому h є однією з горизонталей площини α, отже $h_1 \| A_1B_1$ і $h_2 \| A_2B_2$. Таким чином через O_1 проводять пряму, паралельну до A_1B_1 й отримують h_1. Площина σ перерізає заданий циліндр по колу, горизонтальна проекція якого збігається з горизонтальною проекцією основи циліндра. Тому горизонтальні проекції кінцевих точок малої осі еліпса D_1Z_1 лежать на перетині h_1 з горизонтальною проекцією основи циліндра. Прямим проекціюванням D_1 і Z_1 на h_2 отримують D_2 і Z_2. Для виконання побудови проекцій фігури перерізу необхідно побудувати проекції проміжних її точок S і U, які лежать на крайніх твірних циліндрах. Для цього через O проводять фронтальну площину $\tau(h_\tau \| x_{12})$, яка перетинає січну площину α по фронталі $f(f_1 \equiv h_\tau)$ у точках $I_1(f_1 \cap C_1A_1 = I_1)$ і $Q_1(f_1 \cap C_1B_1 = Q_1)$, прямим проекціюванням I_1 і Q_1 на C_2A_2 і C_2B_2 отримують I_2 і Q_2, через I_2 і Q_2 проводять f_2, прямим проекціюванням S_1 і U_1 на f_2 отримують S_2 і U_2.

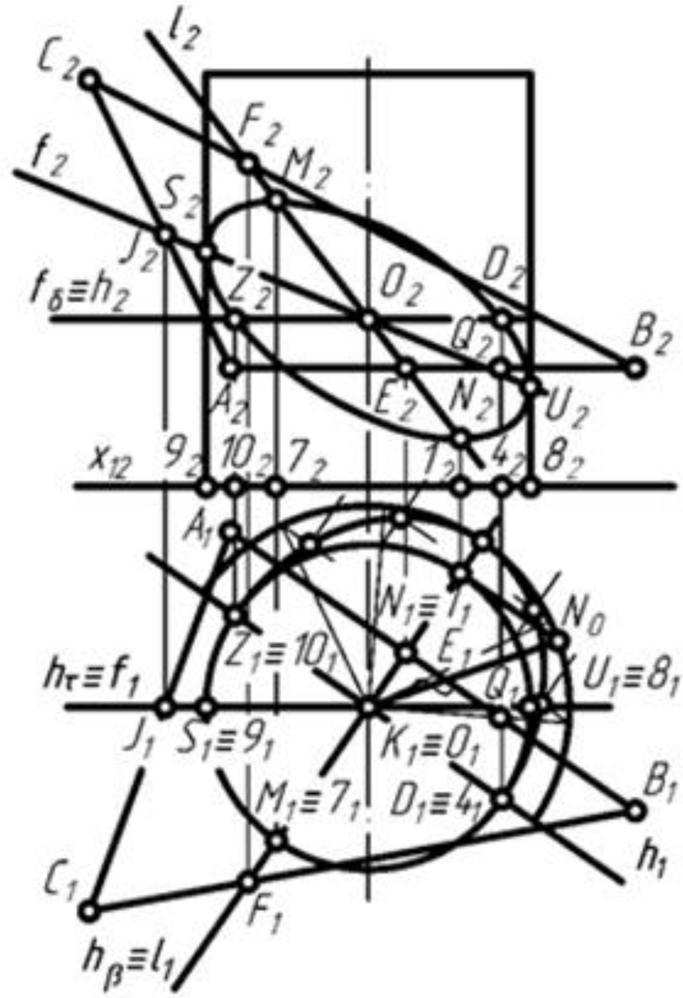


Рис. 6.34

Як було зазначено вище, горизонтальна проекція еліпса збігається з горизонтальною проекцією заданого циліндра. Фронтальну проекцію еліпса будують використовуючи описаний вище метод спряжених діаметрів (паралелограма).

Дійсну величину еліпса будують використовуючи метод двох концентричних кіл, діаметри яких дорівнюють великій і малій осям. Для використання даного методу необхідно знати натуральні величини великої ***MN*** і малої ***DZ*** осей еліпса. Оскільки положення малої осі ***DZ*** еліпса збігається з положенням однієї з горизонталей заданої січної площини, то натуральна величина малої осі еліпса дорівнюють D_1Z_1.

Для знаходження натуральної величини великої осі ***MN*** еліпса використовують метод її обертання навколо лінії рівня. У нашому випадку достатньо знайти натуральну величину півосі ***NO***. Тоді точку N_1 виділяють як об'єкт обертання, за вісь обертання приймають горизонталь ***h***, горизонтальна проекція площини обертання збігається з l_1, горизонтальна проекція центра обертання – O_1 і горизонтальна проекція радіуса обертання – N_1O_1. Натуральну величину радіуса обертання визначають з допомогою методу прямокутного трикутника. Виконавши обертання точки ***N*** навколо осі ***h*** знаходять натуральну величину половини великої осі еліпса, будують відповідні концентричні кола і з O_1 проводять пучок променів до перетину з даними колами. З точок перетину побудованих променів з великим колом проводять відрізки, паралельні до малої осі еліпса, а з точок перетину тих же променів з малим колом проводять відрізки, паралельні до великої осі еліпса. Перетин відрізків, проведених з одних і тих самих променів, дають точки еліпса. Для побудови натуральної величини даного еліпса отримані точки послідовно сполучають лекальною кривою.

Оскільки розглядають прямий круговий циліндр, основа якого лежить у площині Π_1, твірні зрізаної його поверхні проекціюються на Π_2 в натуральну величину.

Побудову розгортки бокової поверхні даного циліндра, виконують аналогічно побудові розгортки бокової поверхні призми. Для цього на вільному місці креслярського паперу проводять горизонтальну пряму (рис. 6.35), і відкладають на ній відрізок, що дорівнює довжині кола, яке лежить в основі циліндра $l=\pi d=2\pi R$. Натуральну величину (горизонтальну проекцію) основи циліндра ділять на дорівнюють частини (наприклад на 12), починаючи з найкоротшої твірної ***n***, що проходить через нижчу точку фігури перерізу ***N***. На таку ж кількість рівних частин ділять розгортку основи циліндра. Через кожну побудовану точку на розгорнутій основі проводять перпендикуляр, на якому відкладають натуральну величину відповідної твірної зрізаного циліндра, положення якої знаходять прямим проекціюванням на фронтальну проекцію циліндра. Для цього точки, отримані на горизонтальній проекції основи циліндра під час поділу її на дорівнюють частини, перепроекційовують на фронтальну проекцію основи даного циліндра і проводять через них проекції твірних до перетину з фронтальною проекцією фігури перерізу. Отримані на твірних розгортки точки з'єднують з допомогою лекала плавною кривою лінією й отримують розгортку бокової поверхні зрізаного циліндра.

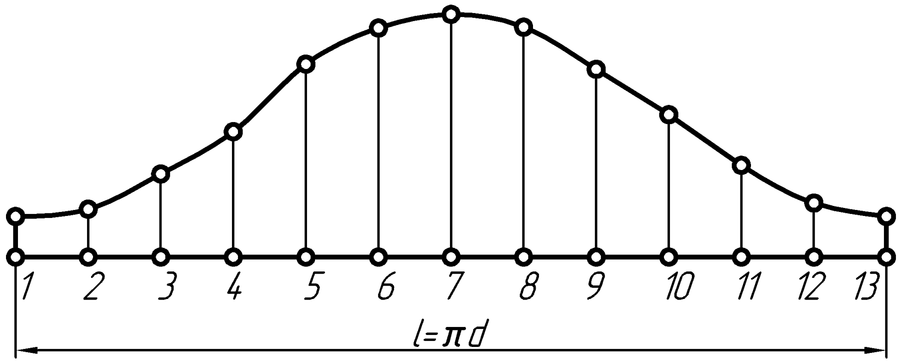


Рис. 6.35

Запитання для самоконтролю

1. Як представляють поверхню в інженерній графіці?
2. Як називають лінію яка утворює поверхню?
3. За рахунок яких образів визначають вид поверхні?
4. Які поверхні відносять до кривих?
5. Як утворюють гранні поверхні?
6. Які поверхні називають розгортуваними і які поверхні до них відносяться?
7. Який алгоритм побудови проекцій точок, які належать поверхням обертання?
8. Який алгоритм побудови проекцій точок, які належать гранним поверхням?
9. В чому полягає загальна методика побудови лінії перерізу поверхні площиною?
10. Який алгоритм побудови проекцій точок перетину прямих ліній з поверхнями?

11. Який алгоритм побудови проекцій фігури перерізу, натуральних величин елементів і розгортки повної поверхні піраміди зрізаної площиною загального положення?
12. Який алгоритм побудови проекцій фігури перерізу, натуральних величин елементів і розгортки повної поверхні призми зрізаної площиною загального положення?
13. Який алгоритм побудови проекцій фігури перерізу, натуральних величин елементів і розгортки повної поверхні конуса зрізаного площиною загального положення?
14. Який алгоритм побудови проекцій фігури перерізу, натуральних величин елементів і розгортки повної поверхні циліндра зрізаного площиною загального положення?

РОЗДІЛ 7. ПОБУДОВА ПРОЕКЦІЙ ЛІНІЙ ВЗАЄМНОГО ПЕРЕТИНУ ПОВЕРХОНЬ

7.1. Загальні відомості й основні принципи побудови ліній взаємного перетину поверхонь

Задачі на побудову ліній взаємного перетину поверхонь мають широке практичне застосування в техніці. Лінія взаємного перетину поверхонь – це геометричне місце точок, які одночасно належать двом поверхням, що перетинаються. В загальному випадку така лінія є просторовою кривою, яка може розпадатися на частини. В окремих випадках такі частини можуть бути плоскими кривими. При перетині двох алгебричних поверхонь лінія їх взаємного перетину має порядок, що дорівнює добутку порядку поверхонь, які перетинаються. Лінію взаємного перетину двох поверхонь обертання називають квадроїдом.

Для визначення характеру лінії взаємного перетину поверхонь проводять аналіз їхнього взаємного розташування. При цьому розрізняють шість випадків, які залежать від розташування зон, що не перетинаються:

1. Обидві зони, які не перетинаються, знаходяться на основі однієї поверхні. Тут має місце повне внутрішнє проникнення однієї поверхні в другу. В цьому випадку лінія взаємного перетину розпадається на дві замкнені лінії – лінію входу і лінію виходу.

2. Зони, які не перетинаються, знаходяться по одній на кожній основі поверхонь, що перетинаються. У цьому випадку існує одна замкнена лінія перерізу. Цей випадок називають врізуванням.

3. Існує лише одна зона, яка не перетинається. У цьому випадку поверхні мають внутрішнє стикання, а лінія перетину має лише одну подвійну точку.

4. Поверхні перетинаються, але зон, які не перетинаються, не існує. У цьому випадку в перетині поверхонь беруть участь усі твірні. Поверхні мають внутрішнє двобічне стикання. Лінія перетину має дві подвійні точки.

5. Зон, які не перетинаються, не існує. У цьому випадку має місце стикання поверхонь уздовж спільної лінії.

6. Поверхні не перетинаються і їх відношення має мимобіжний характер.

Для побудови проекцій лінії взаємного перетину поверхонь будують проекції окремих точок, які лежать на даній лінії. Загальним способом побудови даних точок є спосіб поверхонь-посередників. Спосіб полягає в тому, що поверхня-посередник перетинає задані поверхні по лініях, які, у свою чергу, перетинаються й отримані точки перетину одночасно належать заданим поверхням, тобто лежать на шуканій лінії взаємного перетину заданих поверхонь.

Щоб забезпечити простоту побудови поверхні, посередники повинні перетинати задані поверхні по лініях простої форми (прямих, ламаних з прямими ділянками, колах). Тому в якості поверхонь посередників використовують площини і сфери. В деяких випадках доцільно використовувати конічні та циліндричні поверхні. Вибір поверхні посередника залежить від виду поверхонь, розміщення їх відносно площин проекцій і між собою.

Для спрощення процесу побудови множину точок, з яких складається лінія взаємного перетину поверхонь, поділяють на характерні (опорні) й довільні (проміжні) точки.

Характерні точки займають особливе положення на лінії взаємного перетину поверхонь або їх виділяють розміщенням відносно площин проекцій. До характерних точок відносять:

- точки, проекції яких лежать на проекціях контурних ліній однієї з поверхонь, або точки, що відділяють видиму частину лінії від невидимої;

- крайні точки – праві й ліві, найнижчі й найвищі, найближчі й найбільше віддалені від площин проекцій.

Усі інші точки, які належать лінії взаємного перерізу двох поверхонь, називають проміжними або довільними.

Починати побудову проекцій лінії взаємного перетину двох поверхонь рекомендують з визначення проекцій усіх характерних точок. Якщо вони на окремих ділянках не виявляють характеру кривої, то крім них будують проекції проміжних точок, які підвищують точність побудови й допомагають з’ясувати характер лінії перетину.

Правильність побудови залежить від правильного з'єднання отриманих точок і визначення видимості окремих ланок лінії взаємного перетину поверхонь. Визначення послідовності з'єднання отриманих проекцій точок потребує добре розвиненого просторового уявлення. Тому для спрощення вирішення цього питання використовують метод безпосереднього обходу; метод побудови умовних розгорток; табличний метод; діаграмний метод; метод цифрових позначок.

Під час використання методу безпосереднього обходу порядок з'єднання проекцій точок визначають обходом їх на основі поверхні. Якщо при цьому процес доходить до зон, які не перетинаються, то обхід повертають у зворотному напрямку.

При визначенні видимості окремих ланок лінії перетину поверхонь виходять з таких міркувань:

1) для кривих поверхонь видимими є точки, отримані на перетині двох видимих твірних або видимих відрізків лінії перетину. Якщо хоча б один з цих елементів є невидимим, то і відповідна точка лінії взаємного перетину буде невидимою;

2) для гранних поверхонь видимими є точки, які лежать на видимих гранях або видимих ланках ліній взаємного перетину. Якщо хоча б одна грань невидима, то й відповідна точка лінії взаємного перетину буде невидимою;

3) видимість для кожної з проекцій заданих поверхонь визначають власним чином.

Як було зазначено вище, для побудови проекцій лінії взаємного перетину поверхонь в якості поверхонь посередників, як правило, використовують площини або сфери. У зв'язку з цим побудову проекцій взаємного перетину поверхонь виконують методом січних площин або методом січних сфер. У свою чергу, метод січних площин поділяють на метод січних площин особливого положення і метод січних площин загального положення, а метод січних сфер поділяють на метод концентричних січних сфер і метод ексцентричних січних сфер.

Метод січних площин особливого положення (метод конкуруючих ліній) використовують у випадках, коли одна з поверхонь перпендикулярна до однієї з площин проекцій, а інша займає довільне положення (використовують проекціюючі січні площини), або основи заданих поверхонь паралельні до однієї з площин проекцій, а їхні осі симетрії паралельні між собою й паралельні до іншої площини проекцій (використовують площини рівня).

Метод січних площин загального положення (метод додаткового проекціювання) використовують у випадках коли задані поверхні нахилені (займають загальне положення). Особливо доцільно використовувати даний метод, якщо основи поверхонь лежать у площині проекцій.

Метод концентричних січних сфер використовують у випадках, коли задані поверхні обертання мають спільну площину симетрії, їхні осі симетрії перетинаються і паралельні до однієї з площин проекції.

Метод ексцентричних січних сфер використовують у випадках, коли задані поверхні обертання мають спільну площину симетрії, але осі симетрії не перетинаються. При цьому центри січних сфер можуть знаходиться у різних точках осі симетрії однієї з заданих поверхонь.

7.2. Побудова проекцій лінії взаємного перетину двох поверхонь, одна з яких проекціююча

Найпростішим випадком взаємного перетину двох поверхонь є такий, коли одна з поверхонь займає проекціююче положення. Проекціюючими можуть бути призматичні або циліндричні поверхні, грані або твірні яких перпендикулярні до площини проекцій. Згідно з властивостями проекціюючих фігур одна проекція лінії взаємного перетину поверхонь збігається з виродженою проекцією проекціюючої поверхні. При цьому задачу зводять до побудови другої проекції лінії взаємного перетину поверхонь за принципом належності геометричній фігурі.

Нехай необхідно побудувати проекції лінії взаємного перетину двох кругових циліндрів, осі яких займають мимобіжне положення одна відносно другої. При цьому поверхня одного з циліндрів перпендикулярна до $\mathbf{\Pi_1}$ (рис. 7.1).

Оскільки поверхня одного із заданих циліндрів є горизонтально-проекціюючою, то горизонтальна проекція лінії взаємного перетину вироджується у дугу $\boldsymbol{A_1B_1}$, яка є частиною кола, в яке, у свою чергу, вироджується горизонтальна проекція даного циліндра. Для побудови фронтальної проекції лінії взаємного перетину заданих циліндрів використовують горизонтально-проекціюючі площини, які перетинають дані циліндри по твірних.

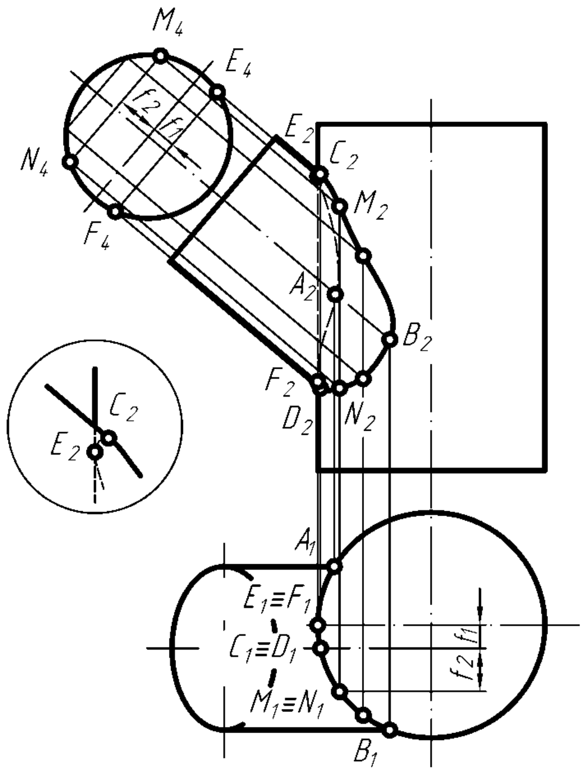


Рис. 7.1

Побудову починають із визначення положення характерних точок лінії взаємного перетину. Точки ***A*** і ***B*** є найближчою і найдальшою; точки ***C*** і ***D*** – найвищою і найнижчою, вони ж є точками видимості другого циліндра для $\mathbf{\Pi_2}$; точки ***E*** і ***F*** – найлівіші, вони ж є точками видимості першого циліндра для $\mathbf{\Pi_2}$.

Точки ***A*** і ***B*** є точками перетину горизонтальних проекцій обрисових твірних похилого циліндра з горизонтальною проекцією циліндра, перпендикулярного до $\mathbf{\Pi_1}$. Прямим проекціюванням ***A*** і ***B*** на фронтальну проекцію осі похилого циліндра знаходять $\boldsymbol{A_2}$ і $\boldsymbol{B_2}$. Точки $\boldsymbol{C_1 \equiv D_1}$ є точками перетину горизонтальної проекції осі симетрії похилого циліндра з горизонтальною проекцією циліндра, перпендикулярного до **$П_1$**. Прямим проекціюванням ***C_1*** і ***D_1*** на фронтальні проекції обрисових твірних похилого циліндра знаходять ***C_2*** і ***D_2***. Точки ***E*** і ***F*** лежать на обрисовій твірній циліндра, перпендикулярного до **$П_1$**, отже ***$E_1 \equiv F_1$*** розміщені на горизонтальній осі симетрії горизонтальної проекції основи циліндра, перпендикулярного до **$П_1$**. Для побудови ***E_2*** і ***F_2***, а також проекцій проміжних точок використовують додаткову площину проекцій **$П_4$**, на яку похилий циліндр проекціюється у коло. Порядок побудови ***E_2*** і ***F_2*** і проекції проміжних точок наведено на рисунку.

У виносному елементі показана лінія взаємного перетину з точками видимості ***C*** і ***E*** у збільшеному вигляді.

Завдання 7.1. Побудувати проекції лінії взаємного перетину тригранної піраміди з основою ***ABC ($A_1B_1C_1$, $A_2B_2C_2$)*** і вершиною ***S (S_1, S_2)*** і чотиригранної призми з основою ***DEGL ($D_1E_1G_1L_1$, $D_2E_2G_2L_2$)*** і висотою ***h*** (рис. 7.2).

Розв'язування. Аналіз взаємного розміщення заданих поверхонь дозволяє зробити висновок, що обидві зони неперетинності знаходяться на основі чотиригранної призми. Отже, має місце повне проникнення поверхні піраміди у поверхню призми. В нашому випадку лінія взаємного перетину розпадається на дві замкнені ламані лінії.

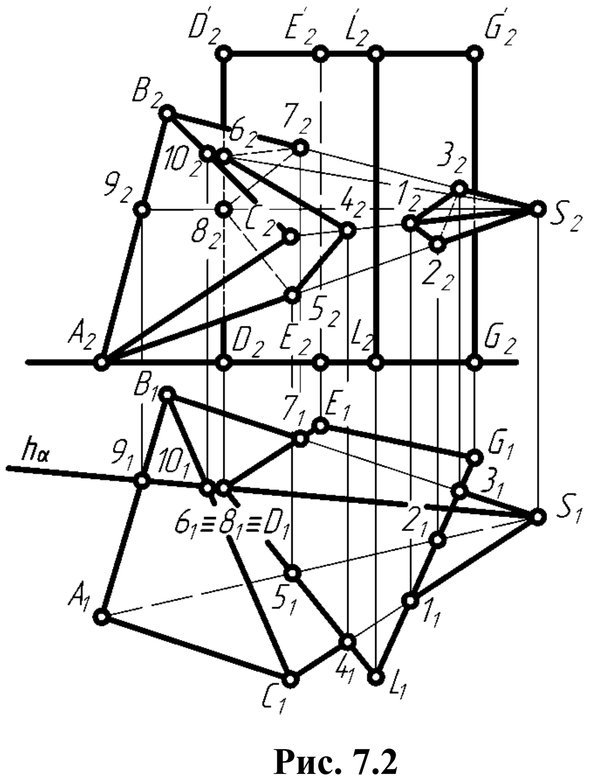


Рис. 7.2

Побудову проекцій ліній взаємного перетину заданих поверхонь виконують, використовуючи метод ребер. Тобто знаходять проекції точок перетину ребер піраміди з гранями призми і ребер призми з гранями піраміди. Побудова проекцій точок перетину ребер піраміди з гранями призми спрощена, оскільки бокова поверхня призми перпендикулярна до її основи (призма пряма) і займає горизонтально-проекціююче положення. Отже, горизонтальні проекції точок перетину ребер піраміди з гранями призми визначають без допоміжних побудов ($C_1S_1 \cap L_1G_1=1_1$, $C_1S_1 \cap L_1D_1=4_1$, $A_1S_1 \cap L_1G_1=2_1$, $A_1S_1 \cap L_1D_1=5_1$, $B_1S_1 \cap L_1G_1=3_1$, $B_1S_1 \cap D_1E_1=7_1$). Прямим проекціюванням 1_1 і 4_1 на C_2S_2 отримують 1_2 і 4_2, прямим проекціюванням 2_1 і 5_1 на A_2S_2 отримують 2_2 і 5_2, прямим проекціюванням 3_1 і 7_1 на B_2S_2 отримують 3_2 і 7_2.

Поверхню піраміди перетинає ребро призми, яке виходить з вершини D. Для побудови точок перетину, що лежать на даному ребрі, використовують горизонтально-проекціюючу січну площину $\alpha(h_\alpha)$, яка проходить через ребро призми і вершину піраміди. Січна площина α перетинає грані піраміди по лініях $S9$ і $S10$, а ребро D перетинає дані грані в точках 6 і 8, які належать шуканій лінії взаємного перетину поверхонь. Для побудови фронтальних проекцій точок 6 і 8 будують фронтальні проекції ліній перетину січної площини з гранями піраміди S_29_2 і S_210_2, прямим проекціюванням 6_1 на S_210_2 отримують 6_2, прямим проекціюванням 8_1 на S_29_2 отримують 8_2.

З’єднують між собою однойменні проекції точок, які лежать на одній грані відрізками прямих ліній і отримують проекції ліній взаємного перетину заданих піраміди і призми. Під час побудови проекцій ліній взаємного перетину поверхонь враховують, що видимими є тільки ті ділянки кривої, які належать видимим граням. Їх зображають суцільними основними лініями. Невидимі ділянки зображають штриховими лініями.

7.3. Побудова проекцій лінії взаємного перетину двох нахилених поверхонь

Якщо задані поверхні займають загальне положення відносно площин проекцій, то в якості січних площин-посередників для побудови проекцій ліній взаємного перетину використовують площини загального положення. При цьому січні площини-посередники повинні перетинати обидві поверхні по твірних або бокових гранях.

Якщо у взаємному перетині беруть участь конуси чи піраміди, то січні площини повинні проходити через пряму, яка сполучає вершини поверхонь, коли одна з поверхонь, що перетинаються – конус або піраміда, а друга – циліндр або призма, то січні площини-посередники повинні проходити через пряму, яка проходить через вершину конуса або піраміди і паралельна до твірних циліндра або бокових ребер призми. Якщо у взаємному перетині беруть участь циліндри або призми, то січні площини повинні бути паралельними до площини паралелізму, яку задають двома прямими, що перетинаються і відповідно паралельні до твірних циліндрів або бокових ребер призм.

Нехай необхідно побудувати проекції ліній взаємного перетину двох пірамід, основи яких паралельні до $\boldsymbol{\Pi_1}$ (рис. 7.3).

Аналіз взаємного розміщення заданих поверхонь дозволяє зробити висновок, що зони непересічності знаходяться по одній на кожній основі заданих пірамід. У цьому випадку існує одна замкнена лінія перерізу.

Кожна з січних площин проходить через одне з бокових ребер заданих пірамід і пряму, яка сполучає їхні вершини. Множину площин, які мають спільну пряму, називають пучком. Отже, для побудови проекцій пучка січних площин проводять пряму $\boldsymbol{SS^1(S_1S^1_1,\ S_2S^1_2)}$ і будують проекції її горизонтального сліду $\boldsymbol{H(H_1,\ H_2)}$. Для графічного визначення взаємного розміщення заданих пірамід будують горизонтальні сліди січних площин, які відповідно проходять через $\boldsymbol{H_1}$ і горизонтальні проекції вершин основ пірамід. Кожна січна площина проходить через ребро однієї піраміди і перетинає грань іншої піраміди по твірній. Сліди таких площин проходять через вершини основи однієї піраміди і перетинають основу іншої піраміди, а самі січні площини називають ефективними. Січні площини, які проходять через ребра $\boldsymbol{FS^1}$ і $\boldsymbol{AS}$, не відносять до ефективних, оскільки їхні горизонтальні сліди не перетинають основи іншої піраміди.

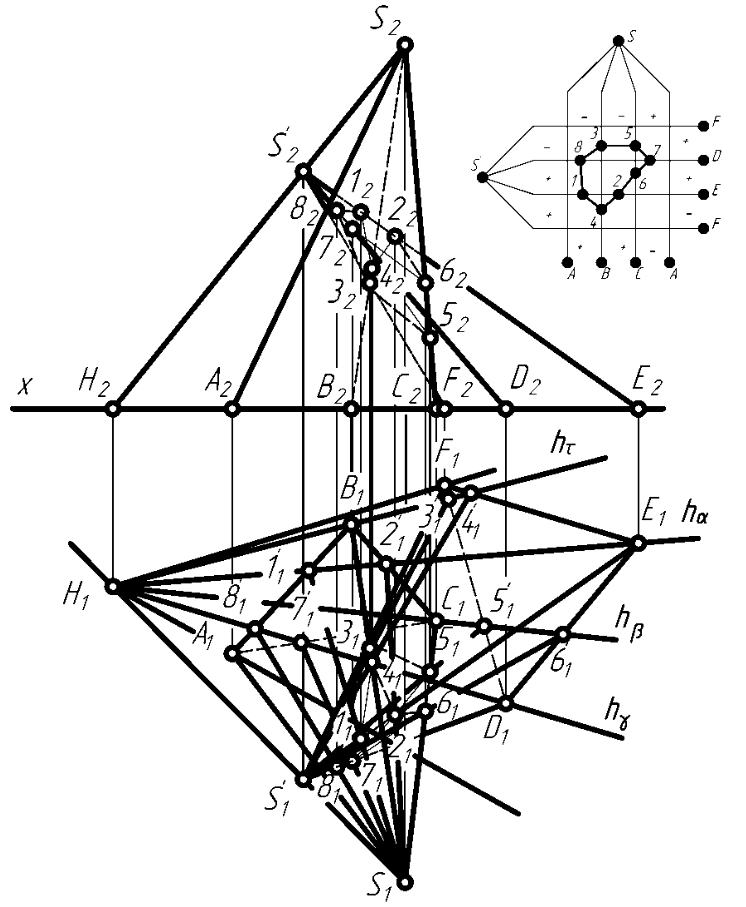


Рис. 7.3

Будують проекції точок перетину ребер $S'E$ з пірамідою $SABC$. Для цього розглядають січну площину α, яка проходить через SS' і $S'E$ і перерізає Π_1 по горизонтальному сліду h_α. h_α перерізає основу першої піраміди в точках $1'_1$ і $2'_1$ ($h_\alpha \cap A_1B_1 = 1'_1$, $h_\alpha \cap B_1C_1 = 2'_1$), а площина α перерізає грані $A_1S_1B_1$ і $B_1S_1C_1$ відповідно по твірних 1_1S_1 і 2_1S_1. Ребро $S'E$ перетинає грань $AS'B$ у точці $1(S'_1E_1 \cap 1'_1S_1 = 1_1)$, а грань BSC – у точці $2(S'_1E_1 \cap 2'_1S_1 = 2_1)$, прямим проекціюванням 1_1 і 2_1 на S'_2E_2 отримують 1_2 і 2_2.

Аналогічно будують проекції точок *3,4,5,6,7,8*. Перевірку точності побудови виконують, використовуючи твірні, отримані в результаті перерізу бокових ребер заданих пірамід січними площинами.

Внаслідок дослідження всіх ребер отримують вісім точок, які належать просторовій ламаній лінії перетину двох пірамід. Для правильного з'єднання отриманих точок ланками прямих та визначення видимості ланок шуканої ламаної лінії взаємного перетину пірамід необхідно пам'ятати, що:

1) лінія перетину двох замкнених многогранників є замкнена ламана;
2) можна послідовно з'єднати тільки ті точки, які лежать на одній грані;
3) якщо ланка лінії перетину належить хоча б одній невидимій грані, то вона буде невидимою;
4) на видимих гранях лежать видимі точки, на невидимих – невидимі;
5) з видимих точок виходять видимі ребра, з невидимих – невидимі;
6) чистини ребер (або твірних) одного із тіл, що знаходяться у межах другого тіла, на кресленні не показують.

Якщо задані многогранники мають велику кількість ребер і число отриманих точок – вершин лінії взаємного перетину поверхонь велике, то для визначення положення вершин, порядку їх з'єднання і визначення видимості ланок ламаної лінії будують схему розміщення точок. Така схема являє собою накладені схематичні розгортки бічних поверхонь тіл, що перетинаються, у нашому випадку – пірамід.

Прямі лінії схеми є ребра, а простір між ними – грані многогранників. Видимі й невидимі грані многогранників на відповідних площинах проекцій на схемі уявно позначають знаками плюс і мінус. У лівому нижньому і правому верхньому кутах схеми поставлені позначення площин проекцій $\mathbf{П_1}$ і $\mathbf{П_2}$ і навпроти кожної із них по вертикалі й горизонталі відмічені знаками плюс і мінус видимі й невидимі грані пірамід. Після побудови "схеми розгорток" наносять на неї отримані точки – вершини. Наприклад, точку ***1*** відмічають на ребрі $S'E$ і на грані ***SAB***, оскільки вона їм належить, точку ***2*** – на ребрі $S'E$ і на грані ***SBC***. Аналогічно позначають решту точок.

Після нанесення всіх точок на "схему розгортки" їх з'єднують так, щоб ланки з'єднання ***13***, ***35*** та інші не перетинали ребер, тобто з'єднують ті точки, які лежать в одній клітинці схеми. Коли виявиться, що якоїсь ланки неможна з'єднати, щоб вона не перетинала ребра, то це означає, що побудова виконана неправильно й необхідно виявити помилку шляхом ретельного перевіряння.

Оскільки лінія взаємного перетину є замкненою лінією, то, будуючи її ланки з точки ***1*** за рухом годинникової стрілки, обов'язково повертаються до точки ***1***. У даному випадку отримують одну замкнену лінію. У такому ж порядку, як з'єднані точки на схемі, з'єднують і їхні проекції на комплексному кресленні.

Видимість ланок лінії взаємного перетину на кресленні визначають так:

1) на горизонтальній проекції ланка ***13*** утворилася від перетину грані ***ASB*** (+) і грані ***ES'D*** (+). Обидві грані видимі (мають додатні знаки), отже ця ланка буде видимою. Ланка ***35*** утворена гранню ***ASB*** (+) і гранню ***DS'F*** (-), отже вона буде невидимою і її зображають штриховою лінією. Аналогічно визначають видимість інших ланок;

2) на фронтальній проекції ланки ***13*** і ***35*** відповідно утворені гранями ***ASB*** (-) і ***DS'E*** (+) та ***ASB*** (-) і ***DS'F*** (+), які мають різні знаки, а тому ці ланки зображають лініями невидимого контуру. Аналогічно визначають видимість решти ланок.

Визначення видимості ребер виконують за загальними правилами з урахуванням перелічених вище вказівок. У випадку взаємного перетину двох конусів усі побудови виконують аналогічно, тільки замість ребер розглядають характерні й допоміжні твірні обох конусів, а точки лінії взаємного перетину з'єднують між собою плавною кривою лінією.

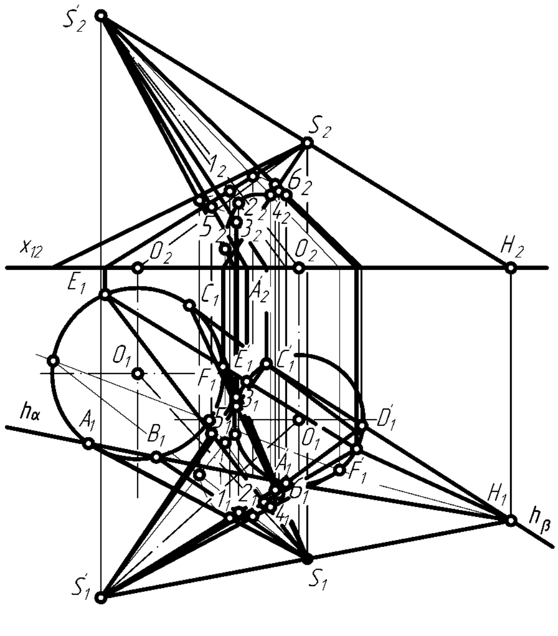


Рис. 7.4

Нехай задано два кругових похилих конуси, які перетинаються, а їхні основи розміщені у горизонтальній площині проекцій (рис. 7.4). Необхідно побудувати проекції ліній взаємного перетину заданих конусів.

Проводять лінію, спільну для всіх січних площин посередників, яка проходить через вершини заданих конусів SS^1 *($S_1S^1_1$, $S_2S^1_2$)* і будують проекції її горизонтального сліду ***H*** *(H_1, H_2)*. Через ***H*** проходять усі горизонтальні сліди січних площин посередників. Першими проводять сліди h_α і h_β, які дотикаються до горизонтальної проекції однієї основи і перетинають горизонтальну проекцію іншої. Наявність таких слідів вказує на те, що перетин поверхонь має вид повного проникнення, і тому лінія перетину цих поверхонь розпадається на дві.

Слід h_α показує, що січна площина α дотикається до лівого конуса по твірній A^1S^1 і перетинає правий конус по твірних AS і BS. Взаємний перетин цих твірних дозволяє отримати точки ***1*** $(A^1_1S^1_1 \cap A_1S_1 = 1_1)$ і ***2*** $(A^1_1S^1_1 \cap B_1S_1 = 2_1)$. Прямим проекціюванням будують фронтальні проекції твірних і точки 1_2 і 2_2.

Аналогічно площина β дотикається до правого конуса по твірній C1S1 і перетинає лівий конус по твірних CS і DS. Взаємний перетин цих твірних дозволяє отримати точки ***3*** $(C^1_1S^1_1 \cap C_1S_1 = 3_1)$ і ***4*** $(C^1_1S^1_1 \cap D_1S_1 = 4_1)$. Прямим проекціюванням будують фронтальні проекції твірних і точки 3_2 і 4_2.

Горизонтальні сліди допоміжних січних площин проводять у межах слідів h_α і h_β. Побудову проекцій необхідної кількості точок виконують аналогічно.

Під час викреслювання проекцій ліній взаємного перетину заданих конусів дотримуються послідовності з'єднання проекцій отриманих точок, виконуючи обхід на основі лівого і правого конусів. Наприклад, для нижньої лінії перетину з'єднують точки у такій послідовності ***1-5-3-6-1***, а для верхньої лінії – ***2-8-4-7-2***.

Як було сказано вище, у випадку взаємного перетину двох поверхонь, коли вершина однієї розміщена на полі креслення, а іншої – на безконечно великій відстані від основи, спільна пряма січних площин-посередників повинна проходити через вершину першої поверхні й бути паралельною до бокових ребер або твірних другої.

Наприклад, задано похилу тригранну піраміду і похилий круговий циліндр, які перетинаються. Основи заданих поверхонь лежать у $\mathbf{П_1}$ (рис. 7.5). Необхідно побудувати проекції лінії взаємного перетину заданих поверхонь.

Проекції спільної для всіх січних площин лінії проводять через вершину піраміди S (S_1, S_2) паралельно до твірних конуса і будують проекції її горизонтального сліду H (H_1, H_2). Через горизонтальні проекції вершин основи піраміди і H_1 проводять сліди січних площин. Усі побудовані сліди перетинають горизонтальну проекцію основи циліндра. Отже перетин поверхонь має вигляд повного проникнення. Тобто лінія взаємного перетину цих поверхонь розпадається на дві.

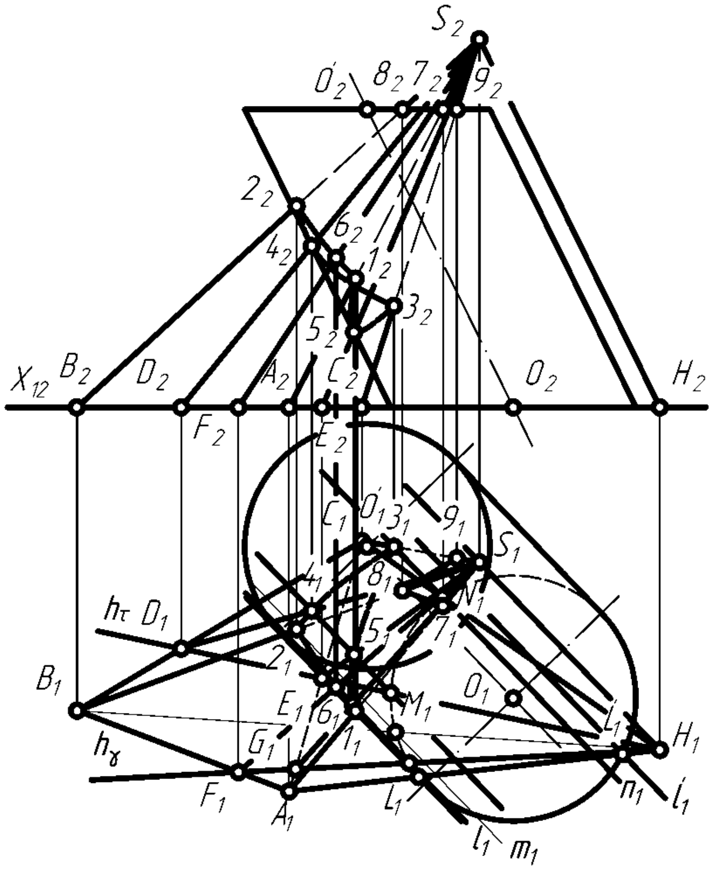


Рис. 7.5

Горизонтальні сліди січних площин перетинають горизонтальні проекції основ заданих поверхонь у точках, через які проходять горизонтальні проекції ліній перетину січних площин даних поверхонь. Побудову починають з характерних точок лінії взаємного перетину поверхонь. У нашому випадку такі точки лежать на бокових ребрах піраміди. Отже h_α проходить через H_1 і A_1 і перетинає горизонтальну проекцію основи циліндра в точках L_1 і L_1'. Таким чином, січна площина α перетинає поверхню піраміди по ребрі AS і поверхню циліндра по твірних l і l', а в точці їх перетину лежить шукана точка 1 $(A_1S_1 \cap l_1 = 1_1)$. Прямим проекціюванням 1_1 на A_2S_2 отримують 1_2. Аналогічно будують проекції точок, які лежать на ребрах BS $(B_1S_1 \cap m_1 = 2_1)$ і CS $(C_1S_1 \cap n_1 = 3_1)$.

Побудову проекцій проміжних точок виконують, використовуючи січні площини, що перерізають грані піраміди по твірних. Наприклад, площина τ перерізає грань BSC по твірній DS $(h_\tau \cap A_1C_1 = E_1)$, точки перетину яких з відповідними твірними циліндра будують аналогічно побудові точки 1.

Порядок з'єднання отриманих однойменних проекцій точок аналогічний описаному вище випадку. У нашому випадку ділянки ламаної кривої лінії є дугами еліпсів, оскільки утворені в результаті перерізу поверхні циліндра площинами, нахиленими до його основи і твірних.

Піраміда пронизує циліндр, виходячи з нього через верхню основу, на якій утворюється трикутний отвір. Проекції лінії перетину піраміди з верхньою основою циліндра будують прямим проекціюванням, враховуючи, що основа циліндра паралельна до Π_1.

Якщо у поверхонь, які перетинаються, вершини невласні (циліндр, призма), то пряма, яка їх з'єднує, також невласна. Тому всі допоміжні січні площини-посередники, які проходять через цю пряму, повинні бути паралельними між собою і паралельними до площини паралелізму, яку задають двома прямими, які перетинаються і відповідно паралельні до твірних заданих поверхонь.

Нехай задано два кругові похилі циліндри, які перерізаються, а їхні основи лежать у Π_1 (рис. 7.6). Необхідно побудувати проекції лінії взаємного перерізу заданих поверхонь.

На вільному місці креслярського паперу вибирають довільну точку ***K*** **(**K_1**,** K_2**)**, через яку поводять пряму ***a*** **(**a_1**,** a_2**)**, паралельну до твірних правого циліндра і пряму ***b*** **(**b_1**,** b_2**)**, паралельну до твірних лівого циліндра, будують горизонтальний слід прямої ***a*** ***H*** **(**H_1**,** H_2**)** і прямої ***b*** H^1 **(**$H^1{}_1$**,** $H^1{}_2$**)** і проводять горизонтальний слід площини паралелізму h_α.

Оскільки січні площини паралельні до площини паралелізму, їхні горизонтальні сліди теж паралельні. Тобто для визначення характеру перетину поверхонь і множини ефективних січних площин проводять горизонтальні сліди, паралельні до h_α і дотичні до горизонтальних проекцій основ заданих циліндрів. З побудови бачимо, що задані циліндри врізуються один в другий, тобто усі точки лінії перетину повинні замикатися в одну криву, а сліди множини ефективних січних площин розміщені між h_β і h_ε.

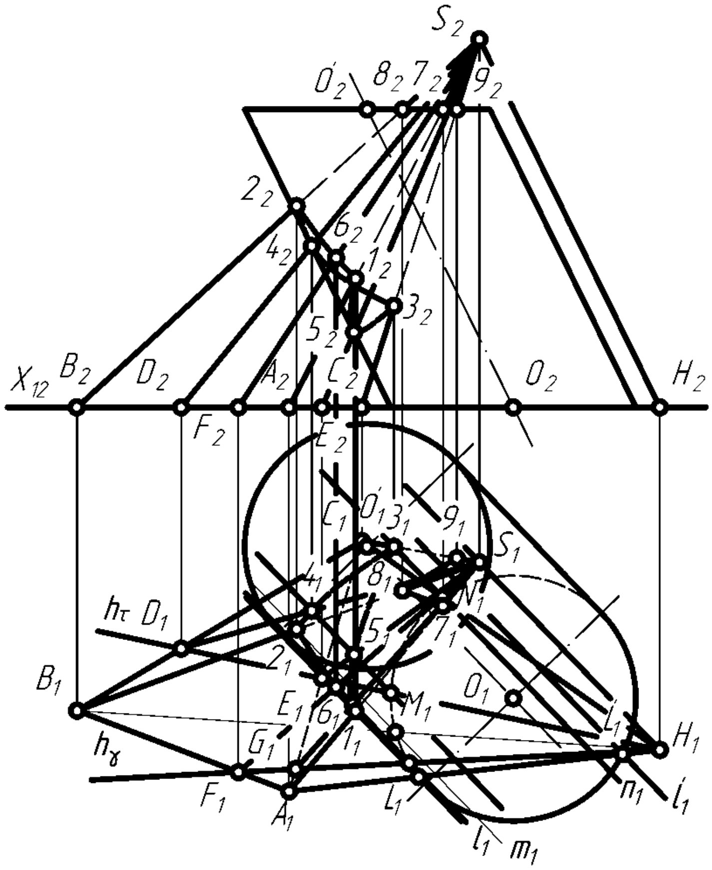


Рис. 7.6

На нижніх основах обох циліндрів визначають точки, з яких виходять твірні, на яких відповідно лежать характерні й допоміжні точки лінії взаємного перетину поверхонь. Характерні точки лежать на обрисових твірних, які виходять з точок ***A***, ***B***, ***C***, ***D***, ***E***, ***F***, ***G***, ***M***, і на твірних, через які проходять обмежуючі площини $\boldsymbol{\beta}$ і $\boldsymbol{\Sigma}$ і виходять з точок ***H***, ***L***, ***J***, ***N***, ***K***, ***S***. Кількість проміжних точок, а відповідно і твірних, на яких вони лежать, визначають, виходячи з умов побудови.

Побудову проекцій лінії взаємного перетину заданих циліндрів виконують аналогічно описаним вище випадкам. Тобто через відмічені твірні проводять січні площини і будують проекції точок перетину твірних лівого циліндра з поверхнею правого, і навпаки, твірних правого циліндра з поверхнею лівого. Наприклад, слід обмежуючої площини $\boldsymbol{\beta}$ (h_β) дотикається до основи правого циліндра в точці ***H*** і перетинає основу лівого циліндра в точках ***L*** і ***J***. Відповідно січна площина $\boldsymbol{\beta}$ дотикається до поверхні правого циліндра по твірній, що виходить з точки ***H*** (h_1, h_2), а поверхню лівого циліндра перетинає по твірних, які виходять з точок ***L*** (l_1, l_2) і ***J*** (j_1, j_2). Точку ***1*** знаходять в результаті перетину твірної правого циліндра ***h*** з твірною лівого циліндра ***l*** $(h_1 \cap l_1 = 1_1)$, точку ***2*** знаходять у результаті перетину твірної правого циліндра ***h*** з твірною лівого циліндра ***l*** $(h_1 \cap j_1 = 2_1)$. Проекції інших точок, які лежать на лінії взаємного перетину заданих циліндрів, будують аналогічно.

Для визначення порядку з'єднання отриманих точок будують схему розміщення точок (рис. 7.7), за якою з'єднують однойменні проекції отриманих точок плавною кривою лінією та визначають видимість її окремих ділянок.

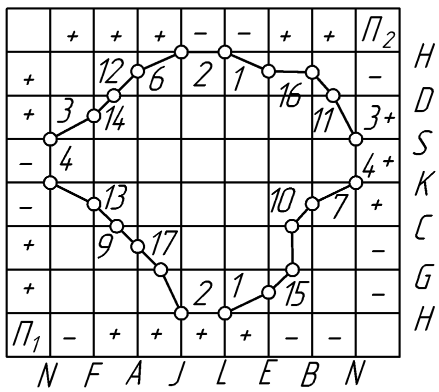


Рис. 7.7

7.4. Побудова проекцій ліній взаємного перетину поверхонь методом паралельних січних площин

Метод паралельних січних площин використовують у випадках, коли осі симетрії заданих поверхонь паралельні між собою і паралельні до однієї з площин проекцій. Якщо друга умова не виконується, то необхідно використати метод заміни площин проекцій, вибрати додаткову площину проекцій, паралельну до даних осей симетрії.

Наприклад, задано прямий круговий конус і півсферу, основи яких паралельні до $\mathbf{П_1}$, а вісь конуса перпендикулярна до $\mathbf{П_1}$ (рис. 7.8). Необхідно побудувати проекції лінії перетину заданих поверхонь.

Аналіз характеру взаємного розміщення поверхонь показує, що у нашому випадку має місце врізування конуса у півсферу, тобто існує одна лінія взаємного перетину заданих поверхонь. Для виконання побудови в якості січних поверхонь-посередників використовують площини рівня, паралельні до $\mathbf{П_1}$. Такі площини перетинають задані поверхні по колах, проекції спільних точок яких визначають проекції лінії взаємного перетину конуса і півсфери.

Першими визначають положення найвищої і найнижчої точок. Проекції найнижчих точок ***1*** і ***2*** визначають як проекції перетину основ заданих поверхонь.

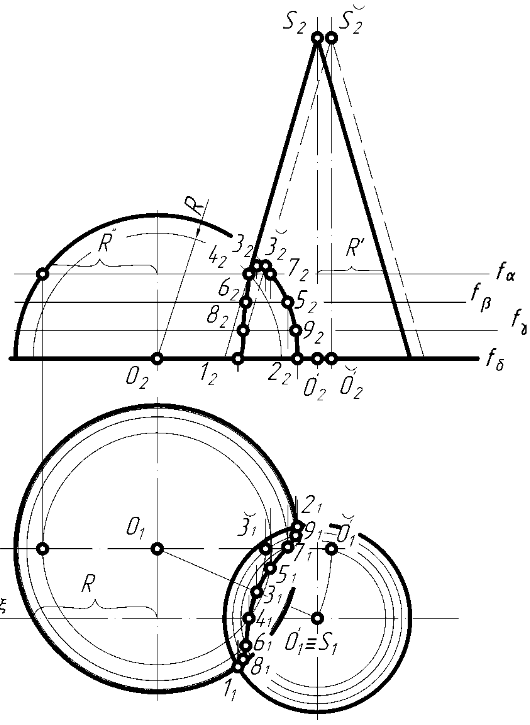


Рис. 7.8

Для визначення проекції найвищої точки кривої взаємного перетину конуса і півсфери виконують наступну побудову. Оскільки шукана найвища точка лежить у площині симетрії обох поверхонь, що проходить через осі заданих поверхонь, виконують обертання цієї площини разом із січенням поверхонь навколо вертикальної осі півсфери до фронтального положення. Для цього сполучають O_1 і O^1_1 лінією й повертають $O_1O^1_1$ навколо O_1 у положення $\breve{O}_1$, прямим проекціюванням будують $\breve{O}_2$ і викреслюють контури переміщеного конуса. На перетині контура твірної переміщеного конуса з фронтальною проекцією обрису півсфери знаходять $\breve{3}_2$. Прямим проекціюванням на $O_1\breve{O}_1$, знаходять $\breve{3}_1$. Обертаючи точку $\breve{3}_1$ до суміщення з $O_1O^1_1$ знаходять 3_1, прямим проекціюванням визначають 3_2. Якщо, згідно з умовою задачі, $O_1O^1_1$ займає горизонтальне положення, то обертання виконувати не потрібно.

Проекції проміжних точок отримують, виконавши наступну побудову. На певній відстані від площини, яка проходить через основи заданих поверхонь, проводять допоміжну січну площину a, перпендикулярну до вертикальних осей симетрії. Площина α (f_α) перетинає конус по колу R^1, а півсферу по колу R^{11}. Горизонтальні проекції цих кіл перетинаються у точках 4_1 і 5_1. Фронтальні проекції точок отримують прямим проекціюванням на f_α.

Аналогічно будують проекції необхідної кількості точок для побудови лінії перетину заданих поверхонь.

Для визначення меж видимості побудованих проекцій лінії взаємного перетину поверхонь використовують фронтальну січну площину ξ, горизонтальний слід h_ξ якої співпадає з горизонтальною віссю симетрії конуса. Така січна площина перетинає півсферу по півколу радіусом R. Побудувавши фронтальну проекцію даного півкола, отримують фронтальну проекцію шуканої точки 4_2 у місці перетину півкола з контурною твірною конуса, прямим проекціюванням 4_2 на h_ξ отримують 4_1.

Побудовані проекції точок сполучають плавною кривою лінією з допомогою лекала.

Завдання 7.2. Побудувати проекції лінії взаємного перетину тригранної призми з прямим круговим конусом (рис. 7.9).

Розв'язування. З побудови бачимо, що призма проникає крізь конус, тобто необхідно будувати дві лінії взаємного перетину. Першими визначають положення найвищих і найнижчих точок ліній взаємного перетину. Дані точки лежать на ребрах бокової поверхні призми і тому їхні проекції визначають без додаткових побудов. На ребрі AA^1 лежать точки 1 і 2, горизонтальні проекції яких знаходять як точки перетину $A_1A^1_1$ з горизонтальною проекцією основи конуса, прямим проекціюванням 1_1 і 2_1 на $A_2A^1_2$ отримують 1_2 і 2_2. Аналогічно будують проекції точок 3 $(3_1, 3_2)$ і 4 $(4_1, 4_2)$, які лежать на ребрі BB^1.

Для визначення проекцій найвищих точок 5 і 6, які лежать на ребрі CC^1, через $C_2C^1_2$ проводять січну площину α, паралельну до Π_1 $(f_\alpha \equiv C_2C^1_2)$, яка перетинає поверхню конуса по колу радіусом R, будують горизонтальну проекцію даного кола і в точках його перетину з CC^1 визначають горизонтальні проекції найвищих точок 5_1 і 6_1, прямим проекціюванням 5_1 і 6_1 на $C_2C^1_2$ отримують 5_2 і 6_2.

Множина ефективних січних площин, з допомогою яких будують проміжні точки лінії взаємного перерізу, розміщена між площиною α і основою конуса. Самі ж проекції проміжних точок будують аналогічно побудові проекцій точок 5 і 6. Наприклад, проводять фронтальний слід горизонтальної січної площини β (f_β), яка перетинає поверхню призми по прямих DD^1 і KK^1 $(f_\beta \equiv D_2D^1_2 \equiv K_2K^1_2)$, а поверхню конуса – по колу радіусом R^1.

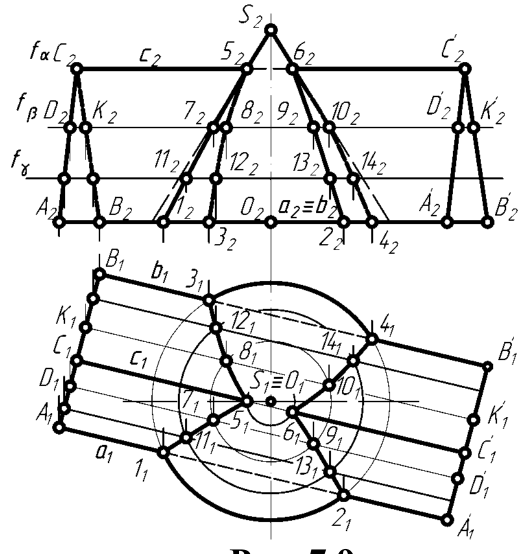


Рис. 7.9

Будують $D_1D^1_1$, $K_1K^1_1$ і горизонтальну проекцію кола R^1_1, визначають 7_1, 8_1, 9_1, 10_1, прямим проекціюванням 7_1, 8_1, 9_1, 10_1 на $D_2D^1_2$, $K_2K^1_2$ отримують 7_2, 8_2, 9_2, 10_2. Побудову проекцій точок ***11*** (11_1, 11_2); ***12*** (12_1,12_2); ***13*** (13_1,13_2); ***14*** (14_1, 14_2) виконують аналогічно, провівши фронтальний слід горизонтальної площини $\gamma(f_\gamma)$. Під час побудови необхідно знайти проекції точок взаємного перетину поверхонь, які лежать на крайніх твірних конуса.

Порядок сполучення отриманих однойменних проекцій точок визначають відповідно до приведених вище правил. Під час побудови враховують, що лінії взаємного перетину є ламаними кривими з ділянками еліпсів і зламами у точках, які лежать на ребрах призми.

7.5. Побудова проекцій ліній взаємного перетину поверхонь методом концентричних сфер

Сферу в якості січної поверхні посередника використовують завдяки її властивості перетинати поверхню обертання по колу, якщо центр сфери лежить на осі симетрії поверхні обертання. Якщо осі симетрії поверхонь обертання перетинаються і в точці їх перетину розміщена сфера, то дана сфера перетинає обидві поверхні обертання по колах. При цьому, якщо осі симетрії тіл обертання паралельні до однієї з площин проекцій, то проекції кіл перетину на цій площині проекцій вироджуються у пряму лінію.

Отже, метод концентричних сфер використовують, коли задані поверхні обертання розміщені так, що їхні осі симетрії перетинаються й паралельні до однієї з площин проекцій. Якщо ж осі симетрії займають загальне положення відносно вибраних площин проекцій, то для використання методу концентричних сфер необхідно, використовуючи перетворення проекцій, домогтися необхідного розміщення осей.

Наприклад, необхідно побудувати проекції ліній взаємного перетину кругового конуса й циліндра, осі яких перетинаються і паралельні до Π_2 (рис. 7.10).

Аналіз характеру взаємного розміщення поверхонь показує, що у нашому випадку має місце проникнення циліндра у конус, отже необхідно будувати дві замкнені криві лінії.

За центр січних концентричних сфер приймають точку перетину осей конуса і циліндра $\boldsymbol{O}$ $(\boldsymbol{O_1}, \boldsymbol{O_2})$. До характерних точок шуканих ліній взаємного перетину поверхонь відносять найвищі точки ***1*** і ***2***, найнижчі точки ***3*** і ***4*** та точки перегину ***5*** і ***6***.

Фронтальні проекції точок ***1***, ***2***, ***3***, ***4*** знаходять як фронтальні проекції точок перетину обрисових твірних заданих поверхонь. Їх горизонтальні проекції будують прямим проекціюванням на горизонтальній проекції осі симетрії циліндра.

Для побудови проекцій точок ***5*** і ***6*** визначають радіус мінімальної ефективної сфери. Для цього через $\boldsymbol{O_2}$ проводять перпендикуляри до обрисових твірних заданих поверхонь. Більший із побудованих перпендикулярів і дорівнюватиме $\boldsymbol{R}_{\min}$ ефективної найменшої сфери. Така сфера буде дотикатися до однієї з поверхонь по колу діаметром ***AB***, а з другою поверхнею буде перетинатися по колах діаметрами ***CD*** і ***EF***.

У нашому випадку мінімальна ефективна сфера дотикається до поверхні циліндра й перетинає поверхню конуса. Кола діаметрами ***CD*** і ***EF*** перетинаються з колом діаметром ***AB*** і утворюють точки ***5*** і ***6***. Порядок побудови фронтальних проекцій даних точок зображено на рис. 7.10. Проводять фронтальну проекцію найменшої ефективної сфери, яка дотикається до поверхні циліндра по колу, фронтальною проекцією якого є відрізок $\boldsymbol{A_2B_2}$ і перетинає поверхню конуса по колах, фронтальними проекціями яких є відрізки $\boldsymbol{C_2D_2}$ і $\boldsymbol{E_2F_2}$. При перетині $\boldsymbol{A_2B_2}$ і $\boldsymbol{C_2D_2}$ отримують $\boldsymbol{5_2}$ $(\boldsymbol{A_2B_2 \cap C_2D_2 = 5_2})$, при перетині $\boldsymbol{A_2B_2}$ і $\boldsymbol{E_2F_2}$ отримують $\boldsymbol{6_2}$ $(\boldsymbol{A_2B_2 \cap E_2F_2 = 6_2})$.

Для подальшої побудови визначають $\boldsymbol{R_{max}}$ – радіус найбільшої ефективної сфери як відстань від центра сфер $\boldsymbol{O_2}$ до найвіддаленішої точки перетину обрисових твірних. Відповідно до умови нашої задачі $\boldsymbol{R_{max} = O_2 3_2}$. Найменша і найбільша ефективні сфери є граничними при виборі проміжних сфер.

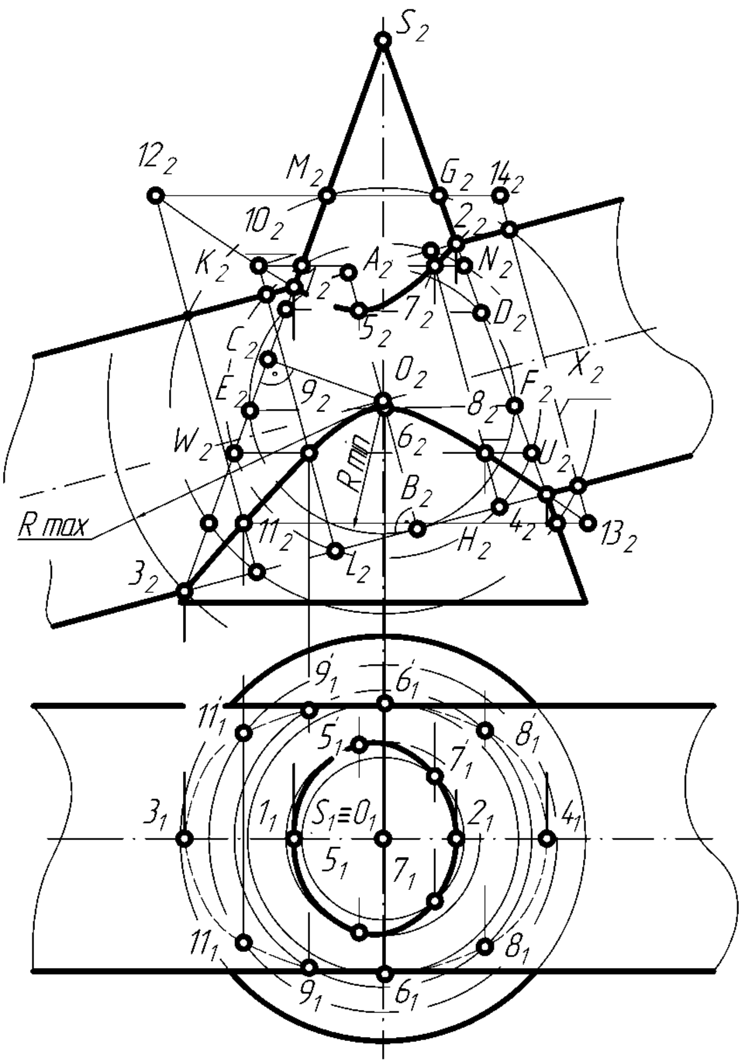


Рис. 7.10

Для побудови положень проміжних точок проводять довільну сферу з центром в точці ***O*** і радіусом $R_{\min}<r<R_{max}$. Така сфера перетинає поверхню циліндра по колах діаметрами ***KL*** і ***GH***, а поверхню конуса – по колах діаметрами ***MN*** і ***WU***. Точки перетину цих кіл і є шуканими точками ***7, 8, 9, 10***. Аналогічно будують проекції необхідної кількості проміжних точок.

Для побудови горизонтальних проекцій характерних і проміжних точок ліній взаємного перетину поверхонь використовують закономірності побудови проекцій точок, які лежать на відповідних поверхнях. Наприклад, для побудови горизонтальної проекції точки ***5*** використовують властивості точки, яка лежить на поверхні конуса. Тобто через 5_2 проводять січну площину паралельну до Π_1, яка перетинає конус по колу діаметром ***CD***, будують горизонтальну проекцію даного кола і прямим проекціюванням отримують $\boldsymbol{5_1}$ і $\boldsymbol{5^1{}_1}$. Аналогічно отримують горизонтальні проекції всіх необхідних точок.

З’єднують побудовані однойменні проекції характерних і проміжних точок плавними кривими лініями й отримують шукані проекції ліній взаємного перетину заданих циліндра і конуса.

Завдання 7.3. Побудувати проекції лінії взаємного перетину кругового циліндра і напівсфери, осі симетрії яких перетинаються в точці ***O*** і паралельні до $\mathbf{П_2}$ (рис. 7.11).

Розв’язування. Аналіз характеру взаємного розміщення поверхонь показує, що у нашому випадку має місце проникнення циліндра у напівсферу.

Для побудови проекцій лінії взаємного перетину заданих поверхонь використовують метод концентричних сфер. До характерних точок лінії взаємного перетину поверхонь відносять найвищу точку ***2***, найнижчу точку ***1*** і точки перетину ***3*** і ***4***.

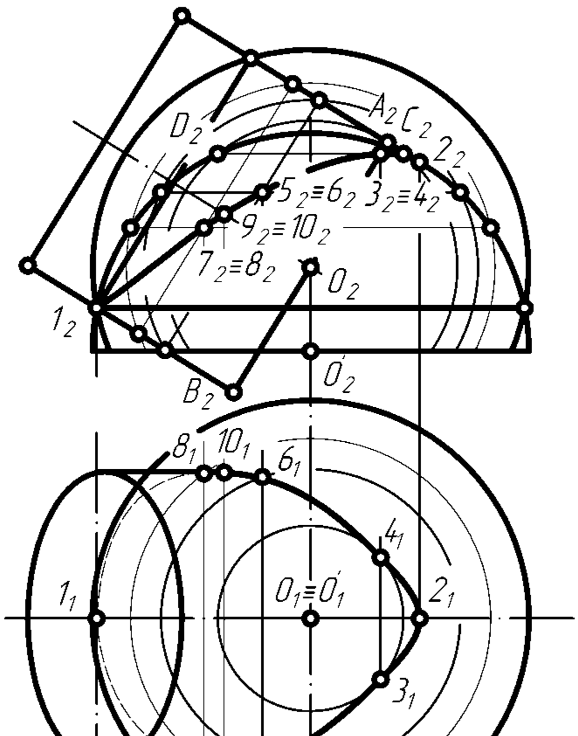


Рис. 7.11

Фронтальні проекції точок ***1*** і ***2*** знаходять, як фронтальні проекції точок перетину обрисових твірних заданих поверхонь. Їх горизонтальні проекції будують прямим проекціюванням на горизонтальній проекції осі симетрії циліндра.

Для побудови проекцій точок ***3*** і ***4*** визначають радіус мінімальної ефективної сфери. Для цього через $\boldsymbol{O_2}$ проводять перпендикуляр до обрисової твірної циліндра і визначають найкоротшу відстань від $\boldsymbol{O_2}$ до обрисової твірної напівсфери. Більша із визначених величин і дорівнюватиме $\boldsymbol{R}_{\min}$ ефективної найменшої сфери. У нашому випадку така сфера буде дотикатися до поверхні циліндра по колу діаметром $\boldsymbol{AB}$ і перетинати поверхню півсфери по колу діаметром $\boldsymbol{CD}$. На фронтальній проекції $\boldsymbol{5_2 \equiv 6_2}$ $\boldsymbol{(A_2B_2 \cap C_2D_2 = 5_2 \equiv 6_2)}$.

Для подальшої побудови $\boldsymbol{R_{max}}$ визначають аналогічно описаному вище випадку і побудову проекцій проміжних точок виконують аналогічно. Побудовані однойменні проекції точок з’єднують плавними кривими лініями.

7.6. Побудова проекцій ліній взаємного перетину поверхонь методом ексцентричних сфер

Метод побудови лінії взаємного перетину двох тіл обертання з допомогою січних ексцентричних сфер полягає у використанні сфер, які мають різні центри. Такий спосіб використовують у випадках, коли задані поверхні мають спільну площину симетрії, але осі симетрії не перетинаються. При цьому центри січних сфер можуть знаходитися у різних точках осі симетрії однієї з заданих поверхонь обертання.

Нехай необхідно побудувати проекції лінії взаємного перетину прямого кругового циліндра і торової поверхні (рис. 7.12).

З побудови видно, що має місце врізання торової поверхні у поверхню конуса, тобто існує одна замкнена лінія взаємного перетину заданих поверхонь.

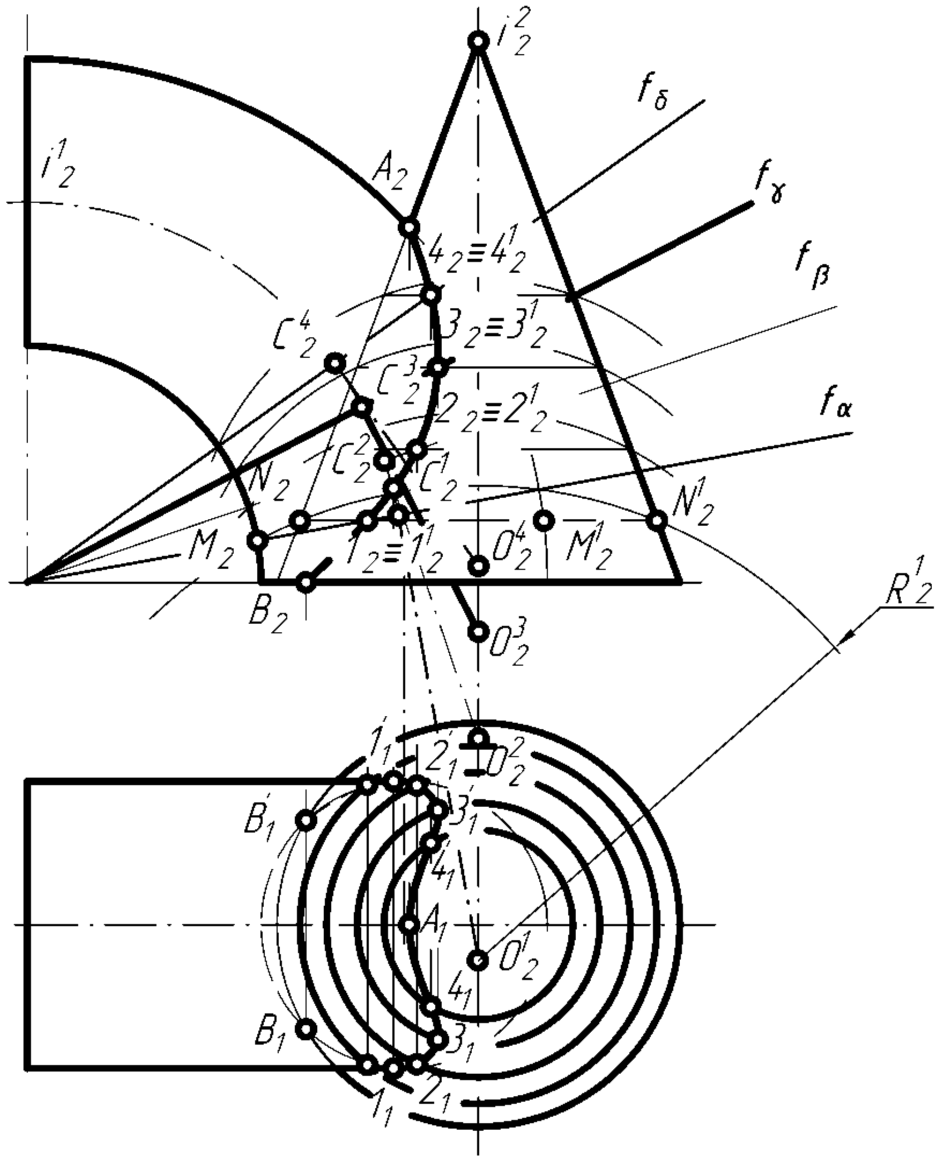


Рис. 7.12

Поверхню тора характеризують множина кіл (паралелей), які розміщені у площинах, перпендикулярних до осі $\boldsymbol{i^1}$, та множина кіл (меридіанів), розміщених у площинах α, β, γ, τ, які проходять через вісь $\boldsymbol{i^1}$. Центри сфер, які перетинають поверхню тора по цих колах, знаходяться на перпендикулярах, проведених до площин даних кіл через їхні центри $\boldsymbol{C^i}$. Тому, якщо вибрати центри січних ексцентричних сфер у точках $\boldsymbol{O^i}$ перетину вказаних перпендикулярів із віссю другої заданої поверхні обертання (у нашому випадку вісь $\boldsymbol{i^2}$ конічної поверхні), то сфери відповідних радіусів будуть перетинати задані поверхні обертання по колах. Точки перетину кіл обох заданих поверхонь обертання, що належать одній і тій же сфері, будуть точками шуканої лінії перетину заданих поверхонь обертання.

Побудову проекцій лінії взаємного перетину двох поверхонь обертання методом ексцентричних сфер виконують у наступній послідовності. Фронтальну проекцію найвищої точки $\boldsymbol{A}$ знаходять на фронтальній проекції перетину контуру поверхні тора контуром конічної поверхні. Прямим проекціюванням знаходять $\boldsymbol{A_1}$. Горизонтальні проекції найнижчих точок $\boldsymbol{B}$ і $\boldsymbol{B^1}$ знаходять на горизонтальній проекції перетину контуру поверхні тора з контуром основи конічної поверхні. Фронтальні проекції вказаних точок отримують прямим проекціюванням $\boldsymbol{B}$ і $\boldsymbol{B^1}$ на фронтальну проекцію основи конічної поверхні.

Для побудови проекцій проміжних точок лінії взаємного перетину тора і конуса через $\boldsymbol{i^1_2}$ проводять проекції слідів січних площин $\boldsymbol{f_\alpha, f_\beta, f_\gamma, f_\tau}$ і знаходять фронтальні проекції центрів кіл $\boldsymbol{C^1_2, C^2_2, C^3_2, C^4_2}$, по яких відповідні сфери перетинають поверхню тора. Через отримані точки проводять перпендикуляри до фронтальних слідів січних площин $\boldsymbol{\alpha, \beta, \gamma, \tau}$ і, знайшовши точки перетину вказаних перпендикулярів з $\boldsymbol{i^2_2}$, приймають їх за проекції центрів січних сфер $\boldsymbol{O^1_2, O^2_2, O^3_2, O^4_2}$. Сфера, фронтальна проекція центра якої розміщена в точці $\boldsymbol{O^1_2}$, радіусом $\boldsymbol{R_2}$, перетинає поверхню тора по колу, фронтальна проекція якого вироджена у відрізок $\boldsymbol{M_2M^1_2}$, а поверхню конуса – по колу, фронтальна проекція якого вироджена у відрізок $\boldsymbol{N_2N^1_2}$. Точки перетину вказаних проекцій відрізків і є фронтальними проекціями шуканих точок $\boldsymbol{1}$ і $\boldsymbol{1^1}$, що належать лінії взаємного перетину заданих поверхонь обертання.

Аналогічно знаходять фронтальні проекції необхідної кількості проміжних точок, сполучають отримані проекції точок лекальною кривою й отримують фронтальну проекцію лінії взаємного перетину конуса і торової поверхні.

Горизонтальну проекцію лінії взаємного перетину заданих поверхонь будують аналогічно розглянутим вище випадкам.

Запитання для самоконтролю

1. Які випадки розташування зон, що не перетинаються, виділяють під час аналізу їхнього взаємного розташування для визначення характеру лінії взаємного перерізу поверхонь?
2. В чому полягає загальна методика побудови лінії взаємного перетину поверхонь?
3. Який вигляд має лінія перетину гранних поверхонь і яка послідовність її побудови?
4. Який вигляд має лінія перетину гранної поверхні з криволінійною і яка послідовність її побудови?
5. Який вигляд має лінія перетину криволінійних поверхонь і яка послідовність її побудови?
6. Які поверхні посередники використовують для побудови проекцій ліній перетину поверхонь і які умови їх використання?
7. Який алгоритм побудови проекцій ліній взаємного перетину двох поверхонь одна з яких проекціююча?
8. Який алгоритм побудови проекцій ліній взаємного перетину двох нахилених поверхонь?
9. Який алгоритм побудови проекцій ліній взаємного перетину поверхонь методом паралельних січних площин?
10. Який алгоритм побудови проекцій ліній взаємного перетину поверхонь методом концентричних сфер?
11. Який алгоритм побудови проекцій ліній взаємного перетину поверхонь методом ексцентричних сфер?

РОЗДІЛ 8. ПОБУДОВА ПРОЕКЦІЙ ГВИНТОВИХ ЛІНІЙ ТА ПОВЕРХОНЬ

8.1. Загальні відомості й визначення

Як сказано вище (пункт 6.1), гвинтові поверхні відносять до нелінійчатих (циклічних) поверхонь. У свою чергу, гвинтові поверхні ділять на поверхні з прямолінійною і криволінійною твірною. До поверхонь з прямолінійною твірною відносять циліндричні й конічні гвинтові поверхні. Для утворення гвинтових поверхонь використовують гвинтові лінії. Гвинтові лінії відносять до класу кривих Бертрана, у яких кривизна $1:r^1$ і кручення $1:r^2$ пов'язані лінійним співвідношенням $a:r^1+b:r^2+c=0$. Гвинтові лінії визначають як просторові криві, у яких відношення радіуса кривизни до радіуса кручення величина постійна, тобто $r^1:r^2=const$.

Гвинтові лінії утворюють у результаті складного руху точки, що складається із обертового руху V навколо осі обертання, і поступального руху, який, у свою чергу, складається із двох рухів: поступального переміщення T уздовж осі обертання і поступального переміщення N в напрямку, перпендикулярному до цієї осі. Характер гвинтової лінії залежить від кута її нахилу до твірних поверхні, на якій вона утворена. Якщо цей кут дорівнює 90^0, то гвинтова лінія перетворюється у коло, а коли він дорівнює нулю, то гвинтова лінія перетворюється у пряму лінію. Частину гвинтової лінії, розміщену між двома послідовними точками її зустрічі з будь якою твірною, називають витком гвинтової лінії, а довжину відповідного відрізка твірної – кроком гвинтової лінії. Крок гвинтової лінії h визначають за формулою $h=\pi\, d\, tg\,\Psi^0$, де Ψ^0 – кут підйому гвинтової лінії. Якщо Ψ^0 постійний на всій довжині гвинтової лінії, її називають гвинтовою лінією з постійним кроком, якщо Ψ^0 змінюється – гвинтову лінію називають зі змінним кроком. У нашому випадку розглядають гвинтові лінії й поверхні з постійним кроком.

8.2. Циліндрична гвинтова лінія

Циліндрична гвинтова лінія – це просторова крива, нанесена на поверхні циліндра обертання. Її можна трактувати як траєкторію точки, рух якої складається з двох рухів: поступального по твірній і обертового цієї твірної навколо осі циліндра.

Побудова проекцій точок, що належать гвинтовій лінії, ґрунтується на відомій побудові синусоїди. Для цього будують проекції прямого кругового циліндра діаметром основи ***d*** і висотою ***h***, основа якого паралельна до $\mathbf{П_1}$ (рис. 8.1).

У такому випадку горизонтальна проекція гвинтової лінії накладається на горизонтальну проекцію циліндра. Фронтальну проекцію гвинтової лінії будують, виходячи із таких міркувань. Точка, яка рухається вздовж гвинтової лінії з положення $\boldsymbol{1_2}$ у положення $\boldsymbol{2_2}$, одночасно обертається навколо осі симетрії з положення $\boldsymbol{1_1}$ у положення $\boldsymbol{2_1}$. Отже, для побудови фронтальної проекції гвинтової лінії на фронтальній проекції циліндра відкладають крок гвинтової лінії ***h***, ділять його і горизонтальну проекцію гвинтової лінії на однакове число рівних частин (наприклад 12). У пересіченні відповідних горизонтальних і вертикальних прямих, які проведені через однойменні точки поділу, отримують фронтальні проекції точок гвинтової лінії і сполучають їх плавною кривою лінією.

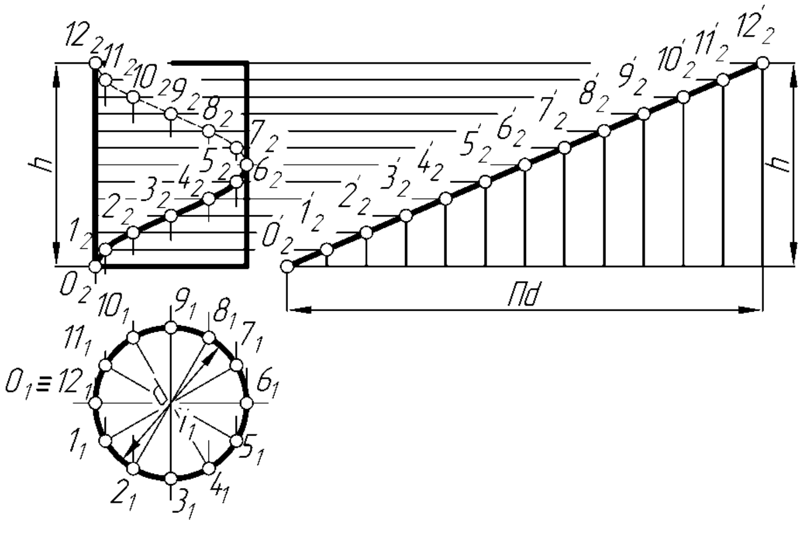


Рис. 8.1

Якщо видима частина гвинтової лінії піднімається праворуч угору, то гвинтову лінію називають правою, а якщо навпаки – лівою. На рисунку наведено циліндричну гвинтову лінію з правим ходом і вертикально розміщеною віссю. Вона характеризується підйомом видимої частини витка праворуч, а невидимої – ліворуч.

Розгортку циліндричної гвинтової лінії починають з побудови на вільному місці креслення горизонтальної лінії довжиною πd і вертикальної висотою h, які перетинаються. Оскільки горизонтальна проекція і її крок поділені на однакове число рівних частин, побудовані лінії ділять на таке ж число рівних частин (у нашому випадку 12). Розгортка циліндричної гвинтової лінії у межах її кроку є геометричним місцем точок, для кожної з яких ордината пропорційна абсцисі, тобто $y=kx$, що є рівнянням прямої лінії.

Через отримані точки поділу проводять вертикальні й горизонтальні лінії. В пересіченні відповідних ліній, які проведені через однойменні точки поділу, отримують точки, які лежать на розгортці. Сама ж лінія розгортки є гіпотенузою прямокутного трикутника з катетами πd і h, і кутом нахилу α, який визначають за формулою $tg\ \alpha = h/\pi d$.

Циліндрична гвинтова лінія володіє властивістю зсуву. Тобто будь який відрізок такої кривої лінії можна зсунути вздовж самої кривої.

8.3. Конічна гвинтова лінія

Конічна гвинтова лінія – це просторова крива, нанесена на поверхні конуса обертання. Вона являє собою траєкторію точки, яка рівномірно рухається по твірні, яка, в свою чергу, рівномірно обертається навколо осі конуса. Побудову конічної гвинтової лінії виконують аналогічно побудові циліндричної гвинтової лінії.

Для цього будують проекції прямого кругового конуса діаметром основи d і висотою h, основа якого паралельна до Π_1 (рис. 8.2).

В такому випадку горизонтальна проекція конічної гвинтової лінії являє собою спіраль Архімеда, фронтальна – синусоїду з амплітудою, що зменшується від основи до вершини.

Для зображення двох витків гвинтової лінії висоту конуса ділять на дві дорівнюють частини (кроки). Горизонтальну проекцію конуса і кожен з кроків гвинтової лінії ділять на однакове число рівних частин (у нашому випадку 12). Через точки поділу кола основи проводять горизонтальні проекції відмічених твірних, а через точки поділу осі проводять сліди горизонтальних площин ***(f_α, f_β, …)***, які перерізають конус по колах. Горизонтальні проекції цих кіл з відповідними горизонтальними проекціями твірних конуса визначають горизонтальні проекції точок, які належать шуканій гвинтові лінії. Фронтальні проекції цих точок лежать на фронтальних проекціях відповідних кіл. З'єднавши побудовані проекції точок плавними кривими лініями отримують горизонтальну і фронтальну проекції конічної гвинтової лінії.

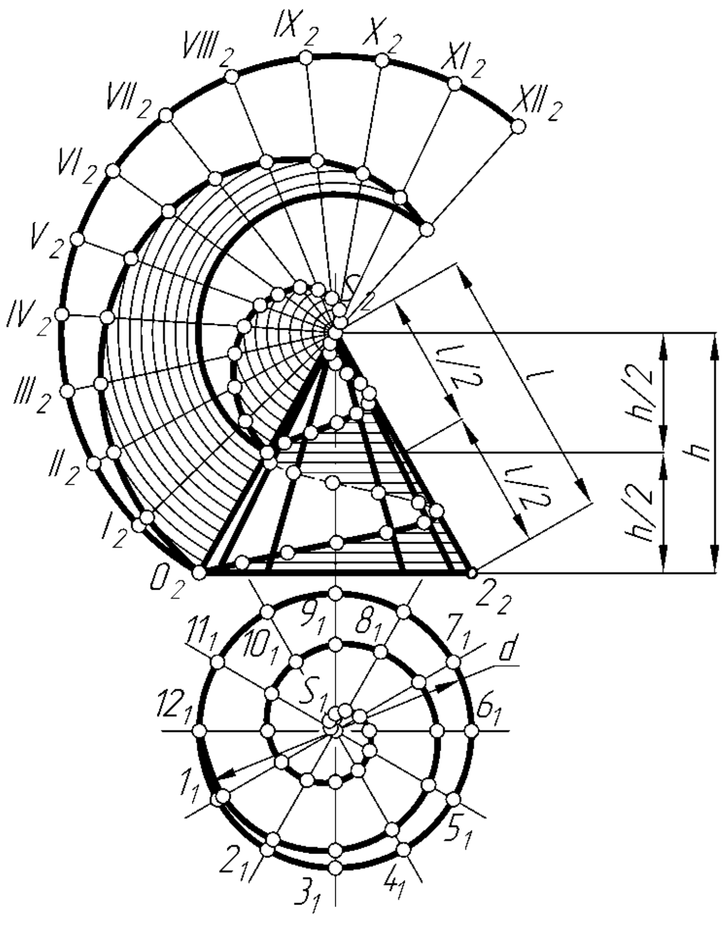


Рис. 8.2

Під час побудови розгортки конічної гвинтової лінії враховують, що розгортка бокової поверхні конуса має форму сектора, радіус якого дорівнює твірній l конуса, довжина дуги його дорівнює довжині кола основи, а кут φ^0 сектора визначають за формулою

$$\varphi^0=2\pi R/l=360\ R/l.$$

Побудову розгортки конічної гвинтової лінії починають з викреслювання на вільному місці креслярського паперу розгортки бокової поверхні конуса. Кут φ^0 і твірну l побудованого сектора ділять на таке ж число рівних частин, як горизонтальну проекцію основи і висоту конуса. Через отримані точки поділу кута сектора φ^0 і вершину розгортки S_0 проводять промені до перетину з основою розгортки, через точки поділу твірної l проводять концентричні дуги з центром у вершині розгортки S_0. В пересіченні відповідних променів і дуг, які проведені через однойменні точки поділу, отримують точки, які лежать на розгортці. З'єднують побудовані точки плавними кривими лініями й отримують розгортку двох витків конічної гвинтової лінії.

8.4. Прямий гелікоїд

Як зазначалось вище, гвинтові поверхні утворюють довільні твірні, які рухаються по напрямних гвинтових лініях. Якщо твірна гвинтової поверхні є прямою лінією, то таку поверхню називають лінійною гвинтовою поверхнею або гелікоїдом. Якщо твірна гелікоїда перетинає вісь поверхні, гелікоїд називають закритим, якщо не перетинає – відкритим. Якщо твірна гелікоїда перпендикулярна до його осі, то такий гелікоїд називають прямим.

Побудову проекцій прямого гелікоїда починають з викреслювання проекцій напрямної гвинтової лінії (рис. 8.3). Оскільки твірна лінія прямого гелікоїда завжди перпендикулярна до осі поверхні $i\ (i_1,\ i_2)$, а остання перпендикулярна до Π_1, то вказана твірна в усіх її положеннях паралельна до Π_1.Тому для побудови проекцій довільної точки $K\ (K_1,\ K_2)$, яка належить поверхні прямого гелікоїда, достатньо побудувати проекції відповідної твірної, яка проходить через цю точку.

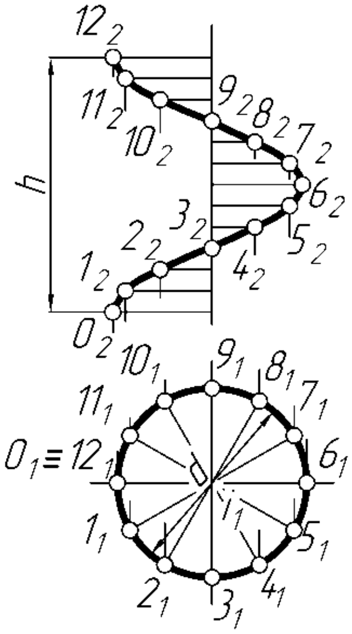


Рис. 8.3

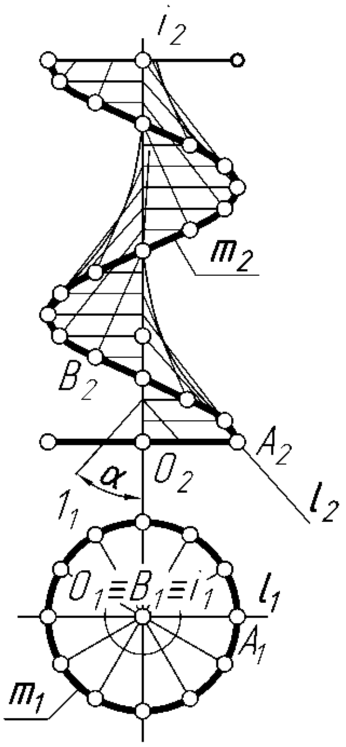


Рис. 8.4

Поверхню прямих гелікоїдів використовують для утворення прямокутної різі в транспортуючих шнекових механізмах, гвинтових сходах, гвинтових муфтах зчеплення, виїздах у багатоповерхові гаражі (пандуси).

8.5. Косий гелікоїд

Косий гелікоїд (рис. 8.4) відрізняється від прямого тим, що його твірна $\boldsymbol{l}$ $(\boldsymbol{l_1}, \boldsymbol{l_2})$ перетинає вісь $\boldsymbol{i}$ $(\boldsymbol{i_1}, \boldsymbol{i_2})$ під постійним кутом $\boldsymbol{\varphi}$, який не дорівнює $\boldsymbol{90^0}$. Тобто твірна $\boldsymbol{l}$ під час руху ковзає по двох напрямних, одна з яких являється циліндричною гвинтовою лінією $\boldsymbol{m}$ $(\boldsymbol{m_1}, \boldsymbol{m_2})$, а друга – її віссю $\boldsymbol{i}$. При цьому у всіх своїх положеннях твірна $\boldsymbol{l}$ паралельна до твірних направляючого конуса, кут між твірними якого і віссю, паралельною до осі гелікоїда дорівнює $\boldsymbol{\varphi}$.

Оскільки твірна $\boldsymbol{l}$ гелікоїда перетинає напрямну $\boldsymbol{m}$ у точці $\boldsymbol{A}$ $(\boldsymbol{A_1}, \boldsymbol{A_2})$, $(\boldsymbol{l \cap m = A})$, а вісь $\boldsymbol{i}$ в точці $\boldsymbol{B}$ $(\boldsymbol{B_1}, \boldsymbol{B_2})$, $(\boldsymbol{l \cap i = B})$, то її горизонтальні проекції в усіх положеннях мають виходити із виродженої проекції осі $\boldsymbol{i_1}$. Фронтальні проекції твірної $\boldsymbol{l}$ будують з допомогою напрямного конуса. Отже, горизонтальним обрисом поверхні є горизонтальна проекція гвинтової лінії, фронтальним обрисом поверхні є фронтальна проекція гвинтової лінії і криві, які огинають ряд положень твірної лінії.

Під час побудови проекцій косого гелікоїда будують проекції гвинтової лінії, ділять її горизонтальну проекцію і крок $\boldsymbol{h}$ на однакове число рівних частин (у нашому випадку 12), на фронтальній проекції гвинтової лінії будують напрямний конус, кут нахилу твірних якого до осі гвинтової лінії задає нахил твірної гелікоїда $\boldsymbol{\alpha}$ і проекціюють його на горизонтальну проекцію. Через відповідні точки на осі гвинтової лінії проводять фронтальні проектції твірної гелікоїда паралельно до відповідних твірних напрямного конуса до перетину з гвинтовою лінією і будують обвідну лінію усіх положень твірної гелікоїда.

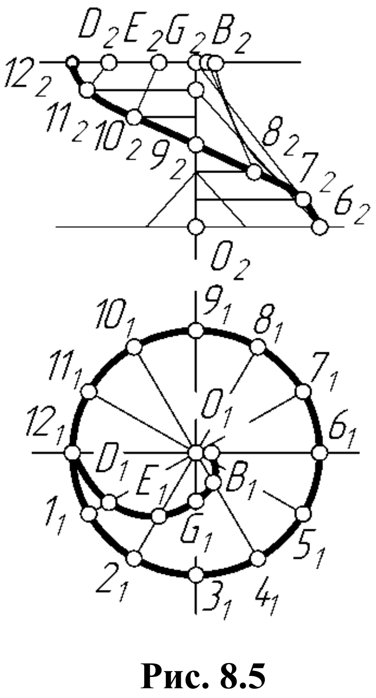


Рис. 8.5

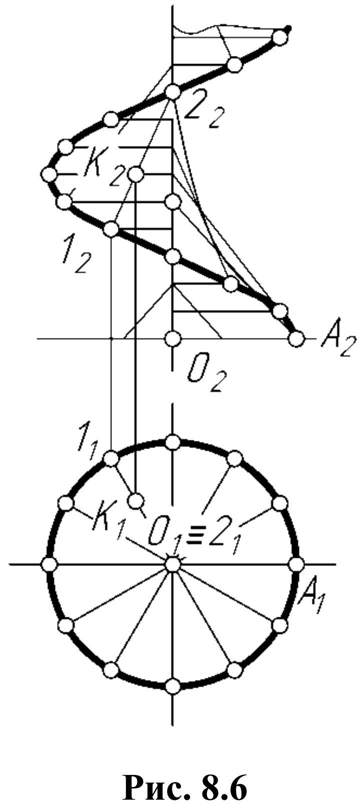


Рис. 8.6

Перерізи поверхні косого гелікоїда площинами, перпендикулярними до його осі, дають спіралі Архімеда (рис. 8.5).

Побудову проекцій точок, які лежать на поверхні косого гелікоїда виконують залежно від того, яка проекція точки відома. Якщо задана горизонтальна проекція точки $\boldsymbol{K}$ ($\boldsymbol{K_1}$) (рис. 8.6), через $\boldsymbol{K_1}$ проводять горизонтальну проекцію твірної поверхні $\boldsymbol{O_1 1_1}$ і напрямного конуса $\boldsymbol{O_1 2_1}$, прямим проекціюванням знаходять точку $\boldsymbol{1_2}$, через яку проводять фронтальну проекцію твірної паралельно твірній напрямного конуса, яка проходить через точку ***2 (2₁, 2₂)*** і прямим проекціюванням на неї $\boldsymbol{K_1}$ визначають $\boldsymbol{K_2}$.

Запитання для самоконтролю

1. На які складові розкладається рух точки під час утворення гвинтової лінії?
2. Що називають витком гвинтової лінії?
3. В яку фігуру перетворюється гвинтова лінія при куті її нахилу до твірних 90^0?
4. Який алгоритм побудови проекцій і розгортки циліндричної гвинтової лінії?
5. Який алгоритм побудови проекцій і розгортки конічної гвинтової лінії?
6. Чим відрізняється прямий гелікоїд від косого гелікоїда?
7. Як утворюється прямий гелікоїд?
8. Як утворюється косий гелікоїд?

Перелік посилань

1. Михайленко В. Є. та ін. Інженерна та комп'ютерна графіка: підручник для студ. вищ. закладів освіти. К.: Каравела, 2003. 344 с.
2. Михайленко В. Є. Нарисна геометрія: підручник. К.: Вища шк., 1993. 271 с.
3. Кириченко А. Ф. Теоретичні основи інженерної графіки: підручник. Х.: Торнадо, 2002. 496 с.
4. Гордон В. О. Курс начертательной геометрии: учеб. пособие; 26-е изд., стер. М.: Высш. шк., 2004. 272 с.
5. Посвянский А. Д. Краткий курс начертательной геометрии: учеб. для студентов втузов; 2-е изд., перераб. М.: Высшая школа, 1965. 240 с.
6. Лагерь А. И. Инженерная графика. Красноярск: Изд. ун-та, 1987. 215 с.
7. Хмеленко О. С. Нарисна геометрія. Теорія та приклади рішення задач: підруч. К.: Кондор, 2008. 440 с.
8. Волошкевич П. П., Бойко О. О., Панкевич Б. В., Мартин Є. В., Беспалов А. Л. Нарисна геометрія, інженерна та ком’ютерна графіка: навчально-методичний посібник для студентів немеханічних спеціальностей всіх форм навчання. Львів: вид-во НУ «Львівська політехніка», 2007. 240 с.
9. Шевченко О. С., Шевченко С. Т. Нарисна геометрія: методичні вказівки до виконання графічних робіт та задач. Частина І. Тернопіль: Збруч, 1979. 152 с.
10. Шевченко О. С., Шевченко С. Т. Нарисна геометрія. методичні вказівки до виконання графічних робіт та задач. Частина ІІ. Тернопіль: Збруч, 1979. 266 с.
11. Даниленко В. Я. Основні поняття і задачі нарисної геометрії: тексти лекцій. Х.: 1992. 90 с.
12. Ковбашин В. І., Маркович М. Й., Рассказов Ю. С. Нарисна геометрія: конспект лекцій частина перша. Тернопіль: ТДТУ, 2005. 95 с.
13. Ковбашин В. І., Пік А. І., Рассказов Ю. С. Нарисна геометрія: конспект лекцій частина друга. Тернопіль: ТДТУ, 2009. 83 с.

14. Ковбашин В. І., Пік А. І., Рассказов Ю. С. Основні позиційні задачі: методичні вказівки та завдання до виконання графічних робіт з курсу нарисної геометрії. Тернопіль: ТДТУ, 2007. 39 с.
15. Данильченко С. М., Ковбашин В. І., Пік А. І., Рассказов Ю. С. Метричні задачі: методичні вказівки та завдання до виконання графічних робіт з курсу «Нарисної геометрії». Тернопіль: ТДТУ, 2007. 27 с.
16. Пік А. І., Милик М. П., Балабан С. М., Ковбашин В. І., Рассказов Ю. С., Данильченко С. М., Маркович М. Й. Перетин гранних поверхонь площинами загального положення: методичні вказівки та завдання до виконання графічних робіт з курсу «Інженерна графіка». Тернопіль: ТНТУ, 2010. 18 с.
17. Милик М. П., Пік А. І., Балабан С. М., Ковбашин В. І., Рассказов Ю. С. Перетин тіл обертання площиною: методичні вказівки та завдання до виконання графічних робіт з курсу «Інженерна графіка». Тернопіль: ТДТУ, 1997. 18 с.
18. Балабан С. М., Маркович М. Й., Данильченко С. М., Чиж В. М. Побудова ліній перетину поверхонь: методичні вказівки та завдання до виконання графічних робіт студентами денної форми навчання. Тернопіль: ТДТУ, 2007. 28 с.
19. Ковбашин В. І., Пік А. І., Рассказов Ю. С. Основи геометричного креслення: методичний посібник та завдання для самостійної роботи й виконання графічних робіт з курсу «Інженерна графіка». Тернопіль: ТДТУ, 2008. 80 с.

Для нотаток

Для нотаток

Для нотаток

С.М. Балабан

ІНЖЕНЕРНА ГРАФІКА ТА CAD СИСТЕМИ

Частина 1

ОСНОВИ НАРИСНОЇ ГЕОМЕТРІЇ

НАВЧАЛЬНИЙ ПОСІБНИК ДЛЯ СТУДЕНТІВ ТЕХНІЧНИХ СПЕЦІАЛЬНОСТЕЙ УСІХ ФОРМ НАВЧАННЯ

Формат 60х90/16. Обл. вид. арк. 6,13. Тираж 20 пр. Зам. № 3578

Видавництво Тернопільського національного
технічного університету імені Івана Пулюя.
46001, м. Тернопіль, вул. Руська, 56.
Свідоцтво суб’єкта видавничої справи ДК № 4226 від 08.12.11.