УДК 539.3

Р. Кушнір[1], д.ф.-м.н., проф., академік НАН України, Г. Сулим[1], д.ф.-м.н., проф., Й. Піскозуб[2,3], д.ф.-м.н., доц.
[1]Інститут прикладних проблем механіки і математики ім.Я.С.Підстригача НАН України
[2]Краківська Політехніка, Краків, Польща;
[3]Українська академія друкарства, Україна

ДЕФОРМУВАННЯ ТА МІЦНІСТЬ КОМПОЗИТНИХ СТРУКТУР З ТОНКИМИ СТРІЧКОВИМИ ВКЛЮЧЕННЯМИ

R. Kushnir[1], Dr, Prof., Member of NAS of Ukraine, H. Sulym[1], Dr, Prof., Y. Piskozub[2,3], Dr., Assoc. Prof.
[1]Pidstryhach IAPMM of NAS of Ukraine, Ukraine;
[2]Cracow University of Technology, Poland;
[3]Ukrainian Academy of Printing, Ukraine

DEFORMATION AND STRENGTH PARAMETERS OF A COMPOSITE STRUCTURE WITH A THIN RIBBON-LIKE INCLUSIONS

Abstract. Within the framework of the concept of deformable solid mechanics, an analytical numerical method to the problem of determining the mechanical fields in the composite structures with thin interphase ribbon-like deformable multilayered physically nonlinear inhomogeneities under combined force and dislocation loading has been proposed.

Тонкі неоднорідності різноманітної фізичної природи у вигляді дефектів практично завжди порушують однорідну будову матеріалів і тіл (тріщини, включення), а разом із тим виконують позитивну роль конструкційних (підкріплення, накладки) чи функціональних (різного типу давачі) елементів, арматури композитів, наповнювачів при застосуванні ін'єкційних технологій для «заліковування» тріщин та щілин тощо. Визначення напружено-деформованого стану та інших параметрів таких структур, підданих впливу різноманітних чинників є складною та важливою проблемою. Задачі такого типу у разі нелінійності фізико-механічних властивостей таких неоднорідностей, неідеального контакту між складовими за невизначеність області їх контакту у разі можливості її порушення вивчені цілком недостатньо. Поміж праць на цю тематику варто згадати дослідження напружено-деформованого стану скінченних тіл та з урахуванням термічних і електромагнітних ефектів із використанням гранично-елементного методу функцій стрибка, чи фрикційного контакту, створення та застосування конститутивних співвідношень моделі включення з функційно-ґрадієнтного матеріалу, деформування аркуша паперу чи ґумової мембрани.

Метою даного напряму досліджень є розвиток нещодавно запропонованого структурно-модульного методу функцій стрибка та побудова математичних моделей тонких включень-прошарків, в т.ч. багатошарових, матеріал яких має істотно нелінійні деформаційні властивості, за різного навантаження тіла, в тому числі багатокрокового чи циклічного.

Досліджено напружено-деформований стан перерізу безмежного ізотропного масиву, що складається з двох півпросторів з пружними сталими G_1, G_2, площиною xOy, перпендикулярною до напряму z його поздовжнього зсуву. Перпендикулярні до цієї осі плоскі перерізи півпросторів утворюють дві півплощини S_k $(k=1,2)$, а межі поділу між ними відповідає вісь абсцис $L \sim x$ (рис.1). На ній вздовж відрізка $L' = [-a; a]$ розташоване тонке включення завтовшки $2h \ll a$, механічні властивості якого у різних напрямках можуть різнитися (ортотропія, функційна ґрадієнтність) і характеризуватися конститутивним рівнянням доволі загального нелінійного вигляду

$$\frac{\partial w^{in}}{\partial s} = \varpi_s\left(\sigma_{xz}^{in}, \sigma_{yz}^{in}, x, y\right),\ s = \{x, y\}, \tag{1}$$

де монотонна функція $\varpi_s\left(\sigma_{xz}^{in}, \sigma_{yz}^{in}, x, y\right)$ обирається із загальнотеоретичних міркувань чи вимог щодо деформаційних властивостей проектованого функційно-градієнтного матеріалу або є якоюсь апроксимаційною залежністю емпіричних даних.

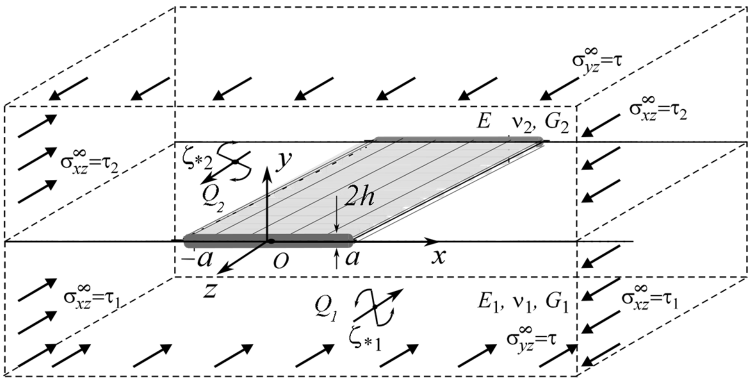

Рис.1. Геометрична та силова структура задачі

Величина й напрямок дії зовнішніх силових чинників (рівномірно розподілених на нескінченності напружень $\sigma_{yz}^{\infty} = \sum_p \tau_{(p)}(t)$, $\sigma_{xzk}^{\infty} = \sum_p \tau_{k(p)}(t)$, зосереджених сил інтенсивності $Q_k(t) = \sum_p Q_{k(p)}(t)$, гвинтових дислокацій із складовою вектора Бюргерса $b_k(t) = \sum_p b_{k(p)}(t)$ в точках $\varsigma_{*k} \in S_k$ $(k = 1,2)$.) уздовж осі z, що здійснюють поздовжній зсув масиву, змінюються квазістатично за довільним законом у вигляді монотонно змінюваних у часових проміжках $\left[t_{(p-1)}; t_{(p)}\right]$ покрокових послідовностей. Тут (p) — номер кроку навантажування. Напруження на нескінченності повинні в довільний момент часу задовольняти умові $\tau_{2(p)}(t)G_1 = \tau_{1(p)}(t)G_2$, що забезпечує прямолінійність межі розділу матеріалів на нескінченності.

Наявність тонкого включення в масиві на межі поділу матеріалів моделюються стрибками компонент векторів напружень і переміщень на L':

$$\begin{gathered}\left[\sigma_{yz}\right]_{h(p)} \cong \sigma_{yz}^{-} - \sigma_{yz}^{+} = f_{3(p)}(x,t),\\ \left[\frac{\partial w}{\partial x}\right]_{h(p)} \cong \frac{\partial w^{-}}{\partial x} - \frac{\partial w^{+}}{\partial x} = \left[\frac{\sigma_{xz}}{G}\right]_{h(p)} \equiv \frac{\sigma_{xz}^{-}}{G_1} - \frac{\sigma_{xz}^{+}}{G_2} = f_{6(p)}(x,t),\ x \in L';\end{gathered} \tag{2}$$

$$f_{3(p)}(x,t) = f_{6(p)}(x,t) = 0, \text{ якщо } x \notin L', \tag{3}$$

де t − деякий момент часу, як формальний монотонно зростаючий параметр, пов'язаний із змінюваністю навантаження. Тут і далі позначено: $[\varphi]_h = \varphi(x,-h) - \varphi(x,+h)$, $\langle\varphi\rangle_h = \varphi(x,-h) + \varphi(x,+h)$; індекси "+" та "–" відповідають граничним значенням функцій на верхньому і нижньому краях лінії L.

Контакт між півпросторами уздовж лінії $L'' = L \setminus L'$ та між масивом і берегами включення вздовж L' можна вважати як ідеальним

$$w^{in}(x,\pm h) = w_k(x,\pm h),\ \sigma_{yz}^{in}(x,\pm h) = \sigma_{yzk}(x,\pm h)\ \left(x \in L'\right), \tag{4}$$

так і ковзним

$$\sigma_{yz}^{in}(x,\pm h)=\sigma_{yz2}(x,\pm h)=-\operatorname{sgn}\left(w^{in}(x,\pm h)-w(x,\pm h)\right)\tau_{yz}^{\max}(x),\ \left(x\in L''',\ L'''\subset L'\right). \qquad (5)$$

Тут $\tau_{yz}^{\max}(x)=-\alpha\sigma_{yy}(x)\ \left(\sigma_{yy}<0\right)$, α - коефіцієнт тертя, причому в цьому випадку зона проковзування є апріорі невідомою.

Математичну модель тонкого включення подамо у вигляді так званих умов взаємодії, які еквівалентні умовам неідеального контакту між прилеглими до включення поверхнями матриці. В основі застосованої методики моделювання впливу тонкого об’єкту лежить схема інтегрування по його об’єму рівнянь опису фізико-механічного стану матеріалу включення, з наступним урахуванням малості його товщини та заданих конститутивних залежностей.

Для тонкого фізично нелінійного включення отримані рівняння математичної моделі виду

$$-\frac{[w]_h}{h}=\left\langle\varpi_s\left(\sigma_{xz},\sigma_{yz}\right)\right\rangle,\ \left\langle\varpi_x^{-1}\left(\frac{\sigma_{xz}}{G_k},\frac{\sigma_{yz}}{G_k}\right)\right\rangle_h-2\sigma_{xz}^{in}(-a)-\frac{1}{h}\int_{-a}^{x}\left[\sigma_{yz}\right]_h(\xi)d\xi=0. \qquad (6)$$

Спрощення функції $\varpi_s\left(\sigma_{xz}^{in},\sigma_{yz}^{in}\right)$ можливе у разі нехтування у ній взаємним впливом напружень: $\varpi_s\left(\sigma_{xz}^{in},\sigma_{yz}^{in}\right)\sim\varpi_s\left(\sigma_{sz}^{in}\right)$ (модель нелінійних пружинок типу основи Вінклера). Тоді співвідношення (1) можна записати у простішому вигляді $\partial w^{in}/\partial s=\varpi_s(\sigma_{sz}^{in})\ \{s=x,y\}$ або

$$\sigma_{sz}^{in}=G_s^{in}(\sigma_{xs}^{in})\frac{\partial w^{in}}{\partial s},\ \{s=x,y\} \qquad (7)$$

із заданими певним чином змінюваними модулями зсуву $G_s^{in}(\sigma_{xs}^{in})$. Це може бути класичний закон лінійної пружності Гука; моделі пластичного деформування Баха-Шюле, Соколовського, Ільюшина; модель деформування, задана функцією, що апроксимує емпіричні дані конкретного матеріалу; модель лінійного пружно-пластичного деформування зі зміцненням [15-17], модель деформування у формі Рамберга – Осгуда тощо.

Для тонкого функційно градієнтного включення отримані рівняння математичної моделі дещо відрізняються завдяки залежності $\varpi_s\left(\sigma_{xz}^{in},\sigma_{yz}^{in},x,y\right)\approx\varpi_s\left(x,y\right)$ і, відповідно, трансверсальної чи поздовжньої залежності модулів зсуву $G_x^{in}(x,y)$, $G_y^{in}(x,y)$.

У всіх випадках рівняння математичної моделі такого тонкого включення можна подати у вигляді

$$\begin{cases} G_x^{in}(\bullet)\left\langle\frac{\partial w^{in}}{\partial x}\right\rangle_h(x)-2\sigma_{xz}^{in}(-a)-\frac{1}{h}\int_{-a}^{x}\left[\sigma_{yz}^{in}\right]_h(\xi)d\xi=0,\\ G_y^{in}(\bullet)\left[w^{in}\right]_h(x)+h\left\langle\sigma_{yz}^{in}\right\rangle_h(x)=0, \end{cases} \qquad (8)$$

який при застосуванні граничних умов контакту (4), (5) породжує систему сингулярних інтегральних рівнянь зі змінними коефіцієнтами, які у загальному випадку вдається розв’язати аналітико-числовими методи та обчислити напружено-деформований стан у довільній точці такої складної структури.

Поєднання запропонованого підходу із здобутками наукової школи професора Петра Яснія створює широкі перспективи для опрацювання ефективних методів оптимізації інженерних конструкцій з метою підвищення їхньої міцності та ресурсу експлуатації.