

УДК 539.3

Р. Кушнір¹, д.ф.-м.н., проф., Я. Пастернак², д.ф.-м.н., проф., Г. Сулим¹, д.ф.-м.н., проф.

¹Інститут прикладних проблем механіки і математики ім. Я.С. Підстригача НАН України

²Волинський національний університет імені Лесі Українки, Україна

ВИЗНАЧЕННЯ НАПРУЖЕНО-ДЕФОРМОВАНОГО СТАНУ ТІЛ ІЗ ОБОЛОНКОВИМИ НЕОДНОРІДНОСТЯМИ НА ОСНОВІ ПОЄДНАННЯ СІТКОВИХ ТА БЕЗСІТКОВИХ МЕТОДІВ

R.M. Kushnir¹, DSc, Prof.; Ia.M. Pasternak², DSc, Prof.; H.T. Sulym¹, DSc, Prof.

¹Pidstryhach Institute for Applied Problems of Mechanics and Mathematics of NAS of Ukraine

²LesyaUkrainkaVolyn National University, Ukraine

STRESS-STRAIN STATE DETERMINATION IN SOLIDS CONTAINING SHELL- LIKE INHOMOGENEITIES BASED ON COMBINATION OF MESH REDUCTION AND MESHFREE METHODS

Abstract. This study considers numerical methods for analysis of stress/strain state of anisotropic solids containing 3D shell-like deformable inhomogeneities. Based on the coupling principle for continua of different dimension the problem is reduced to the analysis of a 3D solid containing the surface of field discontinuity and the shell with coupled boundary conditions set on the surface of the shell and field discontinuity surface. The problem for a solid with a field discontinuity surface is solved using the boundary element approach, and the problem for a shell is considered using the Petrov – Galerkin meshfree approach with moving least square approximation. Substantiation and validation of the proposed approach is presented.

На даний час поряд із механікою руйнування тіл із тріщинами активно розвивається теорія міцності тіл із тонкостінними неоднорідностями, у якій щілини є лише одним із часткових випадків властивостей матеріалу включення [1]. Поряд із аналітичними підходами аналізу задач для середовищ із тонкими дефектами розробляються також і числові методи. Зокрема, у двовимірних та просторових задачах термопружності анізотропних тіл ефективним виявився граничноелементний метод функцій стрибка (див. напр., [2]). Останній полягає у наступному.

Як і в базовому методі функцій стрибка задачу для тіла, що містить тонкі включення розмірності на одиницю меншої від розмірності базової структури, можна умовно розбити на три частково пов'язані підзадачі: (а) *зовнішню* для середовища із умовно заданими (наперед невідомими) на поверхнях функціях впливу (стрибків чи розривів фізико-механічних полів); (б) *проміжну* у вигляді умов контактної взаємодії середовища із неоднорідністю та (в) *внутрішню*. Остання полягає у побудові більш чи менш адекватної математичної моделі неоднорідності, у якій виявляється зв'язок між поверхневими (на поверхні неоднорідності) функціями впливу та поведінкою (деформуванням, теплопровідністю тощо) серединної поверхні тонкого (оболонкового) включення та його поперечних перерізів. Проміжна задача пов'язує між собою згадані поверхневі функції впливу внутрішньої та функції впливу зовнішньої задач за допомогою умов контактної взаємодії, результатом чого є конкретна система інтегральних рівнянь (чи нерівностей) задачі з урахуванням характеру контакту між

включенням і середовищем – ідеального чи неідеального. У разі ідеального контакту відповідні функції впливу зовнішньої та внутрішньої задач будуть збігатися.

Граничноелементний метод функцій стрибка при побудові базової системи сингулярних інтегродиференціальних рівнянь щодо шуканих функцій стрибка використовує викладені вище принципи, а при розв'язуванні згаданої системи застосовує числову схему методу граничних елементів, особливостями якої є використання спеціальних функцій форми для врахування кореневої особливості на фронтальній лінії неоднорідності, спеціальних квадратурних формул інтерполяційного типу для обчислення сингулярних та гіперсингулярних інтегралів, а також нелінійних відображень для згладження підінтегральних виразів поблизу фронту включення. Така схема була апробована на задачах для недеформівних електропровідних та магнітопроникних включень у термомагнітоелектропружних анізотропних середовищах [2], а також при моделюванні впливу деформівних оболонкових неоднорідностей [3].

Одним із недоліків підходу [3] є використання однакових функцій форми для граничноелементного моделювання зовнішньої та скінченноелементного опису внутрішньої задач. Річ у тім, що метод [2] використовує розривні граничні елементи, жоден із вузлів яких не розміщений на реальній фізичній межі елементів. Це зумовлює додаткові проблеми «зшивання» відповідних їх скінченних елементів, що моделюють включення, між собою. Більше того, екстраполяція шуканих функцій на межі елементів вносить деякі неточності в обчислювальну схему.

Для усунення цих недоліків у цьому дослідженні для моделювання оболонкової неоднорідності запропоновано використовувати безсітковий підхід на основі застосування методу рухомих найменших квадратів (moving least squares, MLS) для апроксимації шуканих функцій за вузловими значеннями та схеми Петрова – Гальоркіна для розв'язування визначальної системи рівнянь деформування оболонки [4]. При цьому вузли для MLS-апроксимації вибираються тими ж, що й вузли розривних граничних елементів. Такий підхід усуває необхідність «зшивання» елементів оболонки, адже шукана функція апроксимується за усіма вузловими значеннями, причому домінування окремих забезпечується належним вибором вагових функцій для MLS.

Розроблено низку математичних моделей оболонкових неоднорідностей, починаючи із найпростішої мембранної із подальшим ускладненням з урахуванням ефектів згину за різними гіпотезами тощо. Здійснений аналіз тестових задач засвідчив високі швидкість та точність запропонованого підходу. Це істотно розширює сферу можливого застосування опрацьованих науковою школою проф. П.В. Яснія методів оцінки міцності та довготривалості конструкційних елементів і композитів.

Література.

1. Сулим Г.Т. Основи математичної теорії термопружної рівноваги деформівних твердих тіл з тонкими включеннями. Львів: Дослідно-видавничий центр НТШ, 2007. 716 с.
2. Pasternak Ia., Sulym H., Ilchuk N. Boundary element analysis of 3D shell-like rigid electrically conducting inclusions in anisotropic thermomagnetoelastoelectroelastic solids // *Z Angew Math Mech.* 2019. e201800319. <https://doi.org/10.1002/zamm.201800319>
3. Сулим Г., Пастернак Я., Михалюк Ю. Математичне моделювання впливу просторових оболонкових включень у термомагнітоелектропружних тілах // Міжнар. наук. конф. «Сучасні проблеми термомеханіки – 2021» 15 – 17 вересня 2021 р., Львів, Україна. Режим доступу: <http://iapmm.lviv.ua/cpt2021/materials/C01.21.pdf>
4. Atluri S. N., Zhu T. A new Meshless Local Petrov-Galerkin (MLPG) approach in computational mechanics // *Computational Mechanics.* 1998. 22. P. 117–127.