

**MINISTRY of SCIENCE and EDUCATION of UKRAINE**  
**Ternopil Ivan Puluj National Technical University**  
**Ivan Franko National University of Lviv**  
**Ya.S. Pidstryhach Institute for Applied Problems**  
**of Mechanics and Mathematics of the NAS of Ukraine**  
**E.O. Paton Electric Welding Institute of the NAS of Ukraine**  
**V.M. Glushkov Institute of Cybernetics of the NAS of Ukraine**  
**Kyiv National Economic University named after Vadym Hetman**  
**Lutsk National Technical University**  
**Rzeszow University of Technology (Poland)**  
**Bratislava University of Technology (Slovakia)**  
**Kosice University of Technology (Slovakia)**  
**Worcester Polytechnic Institute (USA)**  
**The University of Texas at Austin (USA)**  
**The University of Tartu (Estonia)**  
**Bialystok University of Technology (Poland)**

# **MATHEMATICAL METHODS AND MODELS OF TECHNICAL AND ECONOMIC SYSTEMS**

## **INTERNATIONAL SCIENTIFIC-TECHNICAL CONFERENCE**

*dedicated to the memory of Prof. Shabliij Oleh Mykolayovych  
and the 60<sup>th</sup> anniversary of the Theoretical Mechanics Department.*

22–23 November 2022

TERNOPIIL - 2022

UKRAINE

**УДК 631:621**

**MATHEMATICAL METHODS AND MODELS OF TECHNICAL AND ECONOMIC SYSTEMS INTERNATIONAL SCIENTIFIC-TECHNICAL CONFERENCE** dedicated to the memory of Prof. Shabliij Oleh Mykolayovych and the 60th anniversary of the Theoretical Mechanics Department, (Ternopil, 22–23 november 2022.) / Ministry of Science and Education of Ukraine, Ternopil I. Puluj National Technical University [and others]. – Ternopil: PE Palianytsia V. A., 2022. – 166 p.

**ISBN 978-617-7875-44-3**

**PROGRAMME COMMITTEE**

Stepan DYACHUK – Chairman  
(Ukraine)  
Vasyl KRYVEN – Vice Chairman  
(Ukraine)  
Roman KUSHNIR (Ukraine)  
Anatolii CHYKRII (Ukraine)  
Oleksandr ANDREIKIV (Ukraine)  
Pavlo MARUSHCHAK (Ukraine)  
Bohdan BUDZAN (Ukraine)  
Heorhii SULYM (Poland)  
Vadym VITLINSKYI (Ukraine)  
Mykhailo PETRYK (Ukraine)  
Yaaan LELLEP (Estonia)  
Frantisek DUCHON (Slovakia)  
Cheslav PULKA (Ukraine)  
Viktor SHAPOVALOV (Ukraine)  
Yaroslav KOMPAN (Ukraine)  
Volodymyr PROKHORENKO (Ukraine)  
Michal KELEMEN (Slovakia)  
Jing XIAO (USA)  
Roman MYKHAILYSHYN (USA)  
Feliks STAKHOVYCH (Poland)

**ORGANIZING COMMITTEE**

Mykhailo Mykhailyshyn (Chairman)  
Nadiya Hashchyn (Scientific Secretary)  
Volodymyr Havrylyuk  
Halyna Semenyshyn  
Bohdan Khomitskyi  
Lyuba Tsymbalyuk  
Serhii Fedak  
Oleksii Duda

**Address of the organizer:**

TNTU, Ternopil city, Ruska Str., 56, 46001,  
tel. +38(097)-973-28-68  
E-mail: gashchyn.nadia@gmail.com  
Editing, design, layout: Gashchyn N.B.

**SECTIONS OF THE CONFERENCE REPRESENTED IN THE PROCEEDINGS**

1. Perspective models and methods of mechanics of solids.
2. Problems of complicated shell-type structures forming.
3. Thermomechanics of welded joints.
4. Applied use of mechanics in energy-saving problems.
5. Economic- mathematical methods and models.

**Міністерство освіти і науки України**  
**Тернопільський національний технічний університет**  
**імені Івана Пулюя**  
**Львівський національний університет імені Івана Франка;**  
**Інститут прикладних проблем механіки і математики**  
**ім. Я.С. Підстригача НАН України**  
**Інститут електрозварювання ім.Є.О. Патона НАН України**  
**Інститут кібернетики імені В.М. Глушкова НАН України**  
**Київський національний економічний університет**  
**імені Вадима Гетьмана**  
**Луцький національний технічний університет**  
**Жешувський технологічний університет (Польща)**  
**Технологічний Університет в Братиславі (Словаччина)**  
**Технологічний університет в Кошице (Словаччина)**  
**Вустерський Політехнічний Інститут**  
**(Сполучені Штати Америки)**  
**Техаський Університет в Остіні**  
**(Сполучені Штати Америки)**  
**Університет Тарту (Естонія)**  
**Політехніка Білостоцька (Польща)**

## **МАТЕМАТИЧНІ МЕТОДИ ТА МОДЕЛІ ТЕХНІЧНИХ І ЕКОНОМІЧНИХ СИСТЕМ**

**МІЖНАРОДНА  
НАУКОВО-ТЕХНІЧНА КОНФЕРЕНЦІЯ**  
*присвячена пам'яті професора Шаблія Олега Миколайовича  
та 60-ти річчю кафедри теоретичної механіки.*

22–23 листопада 2022 р.

ТЕРНОПІЛЬ - 2022

УКРАЇНА

**УДК 631:621**

Математичні методи та моделі технічних і економічних систем міжнародна науково-технічна конференція присвячена пам'яті професора Шаблія Олега Миколайовича та 60-ти річчю кафедри теоретичної механіки. (Тернопіль, 22–23 листопада 2022.) / М-во освіти і науки України, Терн. націон. техн. ун-т ім. І. Пулюя [та ін]. – Тернопіль: ФОП Паляниця В. А., 2022. – 166 с.

**ISBN 978-617-7875-44-3**

#### **ПРОГРАМНИЙ КОМІТЕТ**

Степан ДЯЧУК - голова (Україна)  
Василь КРИВЕНЬ – заст. голови (Україна)  
Роман КУШНІР (Україна)  
Анатолій ЧИКРІЙ (Україна)  
Олександр АНДРЕЙКІВ (Україна)  
Павло МАРУЦАК (Україна)  
Богдан БУДЗАН (Україна)  
Георгій СУЛИМ (Польща)  
Вадим ВІТЛІНСЬКИЙ (Україна)  
Михайло ПЕТРИК (Україна)  
Яаан ЛЕЛЛЕП (Естонія)  
Франтішек ДУХОН (Словаччина)  
Чеслав ПУЛЬКА (Україна)  
Віктор ШАПОВАЛОВ (Україна)  
Ярослав КОМΠΑН (Україна)  
Володимир ПРОХОРОЕНКО (Україна)  
Міхал КЕЛЕМЕН (Словаччина)  
Джин ШЯО (Сполучені Штати Америки)  
Роман МИХАЙЛИШИН (Сполучені Штати Америки)  
Фелікс Стахович (Польща)

#### **ОРГАНІЗАЦІЙНИЙ КОМІТЕТ**

Михайло Михайлишин (голова)  
Надія Гащин (науковий секретар)  
Володимир Гаврилюк  
Галина Семенишин  
Богдан Хоміцький  
Люба Цимбалюк  
Сергій Федак  
Олексій Дуда

#### **Адреса оргкомітету:**

ТНТУ ім. І. Пулюя, м. Тернопіль, вул. Руська, 56, 46001,  
тел. +38(097) 973-28-68

E-mail: gashchyn.nadia@gmail.com

Редагування, оформлення, верстка: Гащин Н.Б.

#### **СЕКЦІЇ КОНФЕРЕНЦІЇ, ЯКІ ПРЕДСТВЛЕНІ В ЗБІРНИКУ**

1. Перспективні моделі і методи механіки деформівного твердого тіла.
2. Задачі формоутворення болонкових конструкцій складної форми.
3. Термомеханіка зварних з'єднань.
4. Прикладні застосування механіки в задачах енергозбереження.
5. Економіко-математичні методи і моделі.

**ЗА ЗМІСТ ТА ДОТРИМАННЯ НОРМ АКАДЕМІЧНОЇ ДОБРОЧЕСНОСТІ  
ВІДПОВІДАЛЬНІСТЬ НЕСЕ АВТОР.**

© Тернопільський національний  
технічний університет 2022

**ВІД ФІЛІАЛУ ЛЬВІВСЬКОГО ПОЛІТЕХНІЧНОГО ІНСТИТУТУ ДО  
ТЕРНОПІЛЬСЬКОГО НАЦІОНАЛЬНОГО ТЕХНІЧНОГО УНІВЕРСИТЕТУ  
ІМЕНІ ІВАНА ПУЛЮЯ**

Олег Миколайович Шаблій пройшов довгий трудовий шлях як умілий і далекоглядний керівник. У 1985 р. він став директором Тернопільського філіалу Львівського політехнічного інституту. Філіал за його керівництва інтенсивно розвинув матеріальну базу і кадровий склад, що заклало основу перетворення його у 1991 році в Тернопільський приладобудівний інститут, ректором якого було обрано професора Олега Шаблія .

У 1995 році, за ініціативи ректора, інституту було присвоєно ім'я славетного українського фізика, електротехніка, літератора, громадського й політичного діяча, великого патріота України, уродженця Тернопілля – Івана Пулюя.

Згодом ректор ВНЗ Олег Шаблій окреслив безальтернативне завдання – не просто розробити нову концепцію майбутнього розвою інституту, а й трансформувати його в університет, створити модель зразкового закладу й тим самим інтегруватися в еліту європейських вищих освітянських закладів.

Основою підготовки кваліфікованих фахівців було прийнято модель багатоступеневої освіти – від учнівської молоді до науковця вищої кваліфікації. Для цього разом із ВО "Ватра" було утворено технічний ліцей для довузівської підготовки талановитої молоді, залучено до складу університету структурні підрозділи – коледжі у Тернополі, Гусятині і Зборові.

У 1996 році на базі приладобудівного інституту було створено Тернопільський державний технічний університет імені Івана Пулюя – навчальний заклад IV рівня акредитації. Конференцією працівників університету першим ректором університету одногосно було обрано професора Олега Миколайовича Шаблія.

Наступним великим досягненням стало те, що у 1999 році університет набув членства в Європейській Асоціації Університетів, а через шість років – у 2005 році приєднався до Болонської Хартії Університетів – Magna Charta Universitatum.

За роки керівництва О.М. Шаблія університет став науковим та культурним осередком західного регіону держави, де навчають студентів усіх кваліфікаційних рівнів, готують інженерну еліту, менеджерів для потреб соціально важливих галузей регіону, кандидатів і докторів наук. Учорашній інститут практично втратив вузьку прикладну спрямованість і поступово набув статусу багатопрофільного вищого навчального закладу, зайняв передові позиції серед вищих навчальних закладів України. Тут завжди в центрі уваги – навчальний процес, організація науково–дослідної роботи, інтеграція науки і виробництва, вільна реалізація соціально–економічних прав працівників і студентів.

В університеті була створена потужна матеріальна база: 11 навчальних корпусів з більш ніж 100 тис. м<sup>2</sup> площ, понад 900 робочих комп'ютерних місць, об'єднаних в локальну мережу з можливістю виходу в Internet, 85 спеціалізованих навчально–наукових лабораторій, 33 комп'ютерних класи, науково–технічна бібліотека з електронною читальною залом. Гордістю ТДТУ та окрасою міста став найбільший в області освітньо–мистецький та навчальний спортивно–оздоровчий комплекс "Політехнік", до складу якого входять актові зали на 650 місць, конференц зал, студентське кафе, універсальні спортивні зали, тренажерні зали та 25–ти метровий сучасний плавальний басейн.

З 2007 року О.М.Шаблій – проректор з питань зв'язків з виробництвом Тернопільського національного технічного університету імені Івана Пулюя, керівник

Центру трансферу технологій, голова спеціалізованої вченої ради із захисту докторських дисертацій.

За роки ректорства Олегом Миколайовичем було здійснено велику роботу з удосконалення навчального процесу, патріотичного виховання та фізичного зміцнення молоді, що стало підґрунтям для успішного впровадження триєдиної моделі – **навчити, виховати, оздоровити**. Розроблена з ініціативи Олега Шаблія модель освіти в нашому університеті функціонує і зараз.

Життєвим кредо Олега Миколайовича була незаперечна віра в успіх. Усе його життя – це невтомна щоденна сумлінна праця задля розвитку університету, міста і країни. Надання нашому університету 11 грудня 2009 року статусу Національного, безперечно, стало результатом натхненної праці Академіка, першого ректора університету – Олега Миколайовича Шаблія.

### **Напрямки наукової роботи кафедри**

На час заснування кафедри (1964-1974 р.р.) її ядро становили випускники Львівської наукової школи механіків, які в подальшому стали відомими вченими. Серед них:

- Б.Л.Пелех – професор, на час захисту докторської дисертації став наймолодшим доктором фізико-математичних наук України.
- Я.М.Кізіма – доктор фіз.-мат. наук, професор, наукові дослідження якого стосувалися теоретичної і прикладної механіки, теорії пружності і термопружності.
- П.О.Безштанківський – кандидат технічних наук, доцент, ініціатор та керівник перших наукових досліджень з госпдогвірної тематики,
- О.М.Шаблій – професор, перший доктор фізико-математичних наук на Тернопільщині, перший ректор університету.

Професором О.М. Шаблієм була створена наукова школа за напрямком «Гранична рівновага тонкостінних елементів конструкцій». Представники цієї наукової школи тісно співпрацювали з науковими школами України та близького зарубіжжя.

Вихідцями і послідовниками школи є:

- Купрійчук П.Ф., кандидат фіз.-мат. наук, доцент
- Михайлишин М.С., кандидат фіз.-мат. наук, професор кафедри
- Коба К.О., кандидат фіз.-мат. наук, доцент
- Мединський Я.Р., кандидат фіз.-мат. наук, доцент
- Данчак П.І., кандидат фіз.-мат. наук, доцент
- Зарецький В.І., кандидат фіз.-мат. наук, доцент
- Дячук С.Ф., кандидат технічних наук, доцент
- Гащин Н.Б., кандидат технічних наук, доцент
- Цимбалюк Л.І., кандидат фіз.-мат. наук, доцент
- Пулька Ч.В., доктор технічних наук, професор

Сьогодні кафедра підтримує тісний зв'язок із:

- Львівським центром математичного моделювання
- Національним технічним університетом КПІ
- Інститутом електрозварювання ім. Є.О. Патона
- Інститутом механіки ім. С.П.Тимошенко НАН України
- Львівським національним університетом ім. І.Франка
- Національним університетом «Львівська політехніка»
- Інститутом прикладних проблем механіки і математики ім. Я.С. Підстригача
- Фізико-механічним інститутом імені Г.В.Карпенка

## СПОГАД ПРО ЛЮДИНУ, КОТРА ЗАЛИШИЛА ТЕПЛІЙ СЛІД У МОЇЙ ПАМ'ЯТІ

У народі кажуть, що людина живе на світі доти, доки про неї пам'ятають. Багаторічна співпраця на освітянській ниві вищої школи з Олегом Миколайовичем Шаблієм – талановитим вченим і громадським діячем, людиною високого інтелекту й порядності, академіком Академії інженерних наук України – залишила в моїй творчій та менеджерській діяльності яскравий слід та добру пам'ять. Ми познайомилися в 1991 році, коли тоді ще професор Олег Шаблій очолював Тернопільську філію Львівської політехніки. Невтомний, працелюбний професор мислив про майбутнє свого вузу й докладав чимало зусиль для реорганізації філії Львівської політехніки в Тернопільський приладобудівний інститут.

Маючи добрі робочі стосунки з президентом Національної академії наук України, академіком Борисом Євгеновичем Патонам, як науковий співробітник очолюваного ним Інституту електрозварювання імені Є.О.Патона, на звернення Олега Шаблія попросив академіка Патона підтримати від імені Академії наук України створення цього самостійного вищого навчального закладу, а також сприяти розвитку діяльності новоствореної кафедри зварювального виробництва за умови захисту двох дисертацій (кандидатської і докторської) професором Чеславом Пулькою. Ці зусилля дали плідні результати й заклали добрий ґрунт для нашої з Олегом Миколайовичем подальшої взаємодіючої співпраці.

З того часу наші творчі й людські стосунки розвивалися й зміцнювалися. Ми з Олегом Шаблієм та професором Чеславом Пулькою виконали кілька спільних досліджень, результати яких захищені авторськими свідоцтвами, маємо спільні публікації. Результати окремих, разом проведених досліджень, були використані мною в кандидатській дисертації.

Олег Миколайович чимало зробив для розбудови навчального закладу. У 1995 році він ініціював присвоєння інституту імені видатного українського фізика Івана Пулюя – уродженця Тернопільщини. Ректор запросив мене взяти участь в урочистій академії з цієї нагоди та у відкритті в фойє інституту погруддя Івана Пулюя. Маючи таке запрошення, я зустрівся із тодішнім міністром освіти і науки України академіком НАН України Михайлом Згуровським, теж уродженця Тернопільщини, та розповів про цю значну для Тернополя подію. Ідея була підтримана міністром, і ми разом з ним (на моєму службовому авто) прибули до рідного нам міста та взяли участь у цій значній для обласного центру події, обидва виступили з вітальними промовами.

Під час візиту міністра до інституту були обговорені важливі питання подальшого розвитку новоствореного вишу, розширення його матеріально-технічної бази, зміцнення наукового та викладацького складу, а також підготовки до ліцензування інституту на здобуття четвертого (найвищого) рівня державної акредитації.

Для реалізації цих важливих завдань Олег Миколайович провів велику організаційну роботу, зокрема започаткував розробку Стратегії, яка в перспективі передбачала перетворення цього навчального закладу в Тернопільський державний технічний університет імені Івана Пулюя.

1996 року на прохання ректора інституту Олега Шаблія ми з кількома моїми колегами – київськими вченими Валерієм Миколайовичем Городецьким і Вадимом Івановичем Снежком – прибули до Тернополя і разом з тодішніми проректорами інституту Петром Володимировичем Яснієм, Ігорем Володимировичем Луцівим, а також нинішнім проректором університету Степаном Федоровичем Дячуком впродовж кількох днів розробляли довгострокову стратегію розвитку вишу. Пізніше ця стратегія була

презентована Олегом Миколайовичем Шаблієм на вченій раді і затверджена для виконання.

У 1997 році вищий навчальний заклад отримав статус державного технічного університету, а академік Олег Миколайович Шаблій був обраний першим його ректором. В 2007 році очолив цей університет професор Петро Володимирович Ясній, який у 2009 році отримав статус національного.

Впродовж наступних років на пропозицію Олега Миколайовича я регулярно виступав в ТНТУ імені Івана Пулюя з лекціями, проводив майстер-класи зі студентами, робив презентації кількох своїх книг на засіданнях вченої ради з широкою участю викладачів і студентів вишу. Така робота продовжується й нині в часи ковіду та жорсткої війни з ненависним ворогом

Добру традицію нашої співпраці з університетом продовжив наступник Олега Миколайовича Шаблія професор Петро Володимирович Ясній, а останнім часом і нинішні керівники університету, які успішно в складних умовах жорсткої війни та пандемії ковіду продовжують освітню діяльність на фундаменті, закладеному Олегом Миколайовичем та його учнями й соратниками.

Для мене є великою честю бути в числі тих людей, які й сьогодні допомагають Тернопільському національному технічному університету імені Івана Пулюя, могутній фундамент для плідної діяльності якого створив академік Олег Миколайович Шаблій, готувати нову генерацію фахівців, конче потрібних для відбудови й розвитку нашої країни.

Ім'я ж першого ректора Олега Миколайовича Шаблія назавжди залишиться в історії одного з кращих вузів Тернопільщини та України. Своєю діяльністю він залишив теплий слід не тільки на сторінках вишу, а й в серцях людей, які його знали.

**VIVAT IVAN PULIUJ'S AKADEMIA! VIVAT PROFESSORE!  
СЛАВА УКРАЇНІ!**

**Богдан Будзан,**  
академік Української академії наук, заслужений працівник освіти України



**ЗОРЯ ОЛЕГА ШАБЛІЯ**

За січневим вікном крапотить дощ. Краплини збігаються у струмки, а ті в потоки – холодні, тривожні... Зимові хмари затінили небо й в полудень виглядає, ніби от-от почне вечоріти. Телефонний дзвінок розколов тишу... Те, що всі передчували, але відтягували у думках сталося – помер наш колишній ректор. До останнього січневого дня проніс хреста своїх болів і випробувань.

Доля кожного з нас бере витoki з джерел отчого краю, струменить від батьківської світлиці, розливається материнською любов'ю. Так і у нього: 18 червня 1935 року над літнім Черниховим прозвучав голос новонародженого сельчанина, у зігрітій сонцем криничній воді скупала мати сина і поплив найперший його кораблик (різьбленою колискою) у незвіданих потоках життя. Були тут і водокрути й загати, були грізні хвили та манливі палаци й руїни на берегах, були щирі люди, а були «людиська». Однак плив корабель вперед, несучи на собі величну місію – зберегти і примножити сяйво української душі. А нині... пливе тіло Олега Миколайовича у дарованому йому часом новому човні, у якому помістився найбільший його скарб – любов, а душа його витає понад нами та перепитує, пересвідчується, переконується у праведності його земних діянь.

Хата, де народився Олег, виокремлюється особливим виглядом у Чернихові. Тут малим шукав свою дорогу майбутності, яку заслонили дими воєнних лихоліть. Коли малому виповнилося 7 років чорною тінню впала на домівку звістка про смерть батька Миколи. Мати Катерина взяла на себе виховання сина.

Олег впевнено долав пороги освіти у Чернихові і в Обаринцях. Куди йти далі? Древній і величний Львів вітає у стінах університету 17-літнього студента-механіка. А далі: у 23 роки аспірант, у 26 років викладач, у 29 років кандидат наук і завідувач кафедри, у 31 рік доцент, у 39 років доктор наук, у 41 рік професор, у 50 років директор Тернопільського філіалу Львівської політехніки, у 56 років – академік і ректор Тернопільського Приладобудівного інституту а у 61 рік – ректор Тернопільського державного технічного університету. Долати цю нелегку стежу впродовж цих літ допомагала йому дружина – Ніна Юхимівна.

Багато людей при розмові про Олега Шаблія співчутливо казали: «Немає дітей...», на що він з усмішкою відповідав: «Навіть не знаю, чи в кого ще є стільки синів і дочок?» Для нього університет став долею та родиною. Усі, від професора до студента чи прибиральниці, були його дітьми за яких переживав, яким допомагав, з якими творив майбутнє вищої школи Тернопілля.

За його ініціативою урочисто було пошановано 150-ліття від дня народження вченого світової слави Івана Пулюя, ім'я якого повернулося із забуття, організовано приїзд внука славетного вченого Петера Пулюя, відкрито пам'ятник та присвоєно нашому навчальному закладові ім'я видатного вченого і патріота. Бог вибрав для Олега Шаблія той самий день, коли відійшов у вічність геніальний вчений Іван Пулюй – 31 січня, а тіло нашого покійного ректора буде віддано чернихівській землі (поруч з матір'ю) 2 лютого, у день народження Івана Пулюя. Олегові Шаблію це стане день народження для неба.

З особливим щемом пригадував Олег Миколайович зустріч у Львові із Святійшим отцем Папою римським Іваном Павлом Другим, відвідання у 2000 році Ватикану, щорічні Прощі до Маріїнського духовного центру в Зарваниці. За життя він вірив у Божу допомогу при здійсненні неможливого для інших та досягав цього. «Бути в Тернополі першому університетові» – сказав і ... втілив, усіх нас зробивши союзниками і співтворцями отого дива, готував нову команду для продовження його справ надалі.

Однією із завітних ідей було створення комплексного центру, де б студенти змогли одночасно навчатися, оздоровлюватися й виховуватися, як молода генерація української технічної інтелігенції. І завдяки його наполегливості та невтомній праці, у районі Оболоня, серед колишніх боліт і мочариськ постав (як у казці) красень-палац. Постав, з Божої ласки, працею рук і сердець сотень людей, як родзинка університету, як самобутність міста, як гордість краю. Гадаю, справедливо буде, коли цей культурно-спортивний комплекс в майбутньому носитиме ім'я його засновника та будівничого.

За час ректорства Олега Шаблія здійснено відкриття в Добриводах першого в Україні сільського технічного ліцею, встановлено у селі пам'ятник видатному вченому Олексі Смакулі. Як повпред України, пан Олег відкриває Європі невідомі сторінки наукового та освітнього життя молоді держави. І ось настає день, коли в Європейську Асоціацію університетів дійсним членом входить ТДТУ – єдиний вищий навчальний заклад західного регіону України. Це стало міжнародним підтвердженням авторитету ректора Олега Шаблія та цілого університету. Але «шефу» (як в нас любили називати ректора) вже не терпиться впроваджувати надбане у роботу мережі підрозділів, а саме: технічних коледжів Тернополя, Зборова, Гусятина. Однак, і це лише одна з нових стайцій і етапів сходження: діяльність наукових шкіл, конференцій та вчених рад, розробка концептуальних програм розвитку університету, створення власної символіки, герба, гімну і хоругви.

Коли ж у 1989 році постало перед кожним питання про вибір подальшої долі України, Олег Шаблій в університеті організує і очолює перший в нашому краї «Комітет захисту демократії», який плідно діяв у нашому місті, Києві та на сході держави. Головним же для пана Олега була самовіддана праця задля розбудови технічного університету, як наукового центра Тернополя. В 2003 році Олегу Шаблію присвоєно звання «Почесний громадянин Тернополя».

Двадцять п'ять років я пліч-о-пліч працював у ректораті над втіленням його ідей та задумів. Він іноді й мені виглядав наївним романтиком, а потім ми всі переконувалися у його практичному раціоналізмові. Якщо вдуматися у питання, коли найбільш проявився талант Олега Миколайовича Шаблія, то це будуть роки керівництва нашим навчальним закладом. Наукова діяльність стала фундаментом його організаторської надбудови. Ми якось з ректором підраховали, скільком студентам була дана путівка в життя за час його праці і виявилось – більше 10-ти тисячам інженерів. Це, по-суті населення поважного районного центру. А після цієї розмови Олег Шаблій звернувся: «Коли я помру (до всіх прийде той день) – розкажи людям трошки про мене». Я виконав ваше прохання, дорогий мій земляче і наставнику.

Сьогодні Тернопілля полонили хмари стривоження, про яке з певною засторогою ще у роки життя звідував наш ректор. Звідував з гірким передчуттям, але при цьому мовив: «Завше над хмарами сяє Сонце». В його промені влилася енергетика серця та благородної душі нашого Вчителя. У небі поволеньки спалахують зорі. Так сталося, що саме у цей час п'ять планет Сонячної системи вибудуються над обрієм у ряд. Спільно постануть проявом небесної сили та відкриють місце ще для однієї зірки, яка височітиме віднині понад нашою землею – зорі Олега Шаблія.

**Олег Герман**  
професор кафедри українознавства і філософії ТНТУ

**НЕЗАБУТНЄ  
ПРО ОЛЕГА МИКОЛАЙОВИЧА ШАБЛІЯ**

Наприкінці 80-х, останніх років СРСР, мені запропонували обговорити з керівництвом Львівського політеху та його філіалу у Тернополі перспективи очолити одну з 2-х зварювальних кафедр. Співбесіда у Львові звелась попри мої очікування не до професійних питань, а до моєї безпартійності. Зрозуміло, що наступного дня аналогічна розмова в Тернопільському філіалі мого оптимізму не викликала. Але тут сталося неочікуване. На порозі свого кабінету мене зустрів Олег Миколайович Шаблій словами: "Вітаю Вас, з приїздом пане професоре!" Все моє доросле життя, як і велось в советах, до мене звертались товариш. А тут, вперше в моєму житті - ПАН. І далі - професійна розмова, навіть без натяків на мою безпартійну ваду, доброзичлива підтримка моїх ініціатив та ще й пропозиція чудового житла. І попри неможливість в подальшому з особистих причин мого переїзду в Тернопіль, я потижно, на протязі багатьох років, читав Тернопільським студентам курс лекцій, тісно співпрацював з Олегом Миколайовичем, як в Тернополі, так і під час його відвідин Інституту Патона. Все це дає мені підстави згадувати його, як чудову людину, видатного науковця, непересічного керівника і, що особливо запам'яталось, справжнього Патріота України.

Створення суверенного Політехнічного інституту, а пізніше Університету, - це безумовно заслуга Олега Миколайовича. Це його дітище. І якби, знову ж таки, з ініціативи Олега Миколайовича інституту не було надано ім'я знаного у світі галицького вченого Пулюя, по справедливості це мав би бути Університет ім. Олега Миколайовича Шаблія - першого ректора, справжнього патріота, Українця з великої літери.

**Професор Я.Ю. Компан**  
Інститут електрозварювання ім.Є.О.Патона НАН України

**ПАМ'ЯТІ АКАДЕМІКА ОЛЕГА ШАБЛІЯ**

Згадувати людей, яких доля і Божа ласка дарувала для зустрічі на нашому життєвому шляху – це не просто потреба, але і обов'язок тих, хто береже пам'ять про них у тривалому часі перебігу подій і років. Сьогодні, згадуючи Олега Шаблія, поряд з оголошенням всіх титулів і нагород, в першу чергу говоримо, що він був **ЛЮДИНОЮ** з великої літери, добрим і чутливим товаришем, надійним і вимогливим колегою по роботі, вмілим керівником і організатором, щирим співрозмовником і порадником, людиною глибокої віри, відкритості та мудрості. І, звичайно, це був вроджений науковець, який все своє життя досліджував, впроваджував, реалізовував не одну наукову думку та ідею.

Ще зі студентських років навчання у Львівському університеті міцна дружба поєднала Олега Шаблія і мого батька Ярослава Кізіму. В 1962 році групу молодих науковців, серед яких були Шаблій О.М., Кізіма Я.М., Пелех Б.Л., направили в місто Тернопіль для організації роботи філії Львівської політехніки. Спільна наукова праця, організаційна робота по створенню кафедр теоретичної механіки та вищої математики, впорядкування побуту та відпочинку своїх молодих сімей та колег, які приїхали в Тернопіль для налагодження роботи закладу, стали передумовою створення міцного колективу працівників і науковців Тернопільської філії Львівської політехніки, формування молоді інтелігенції міста та перспектив його успішного розвитку. Після раптової смерті мого батька у 1977 році Олег Миколайович впродовж всіх років мого професійного становлення був надійним опікуном і наставником.

Олег Миколайович Шаблій — знакова людина для Тернопільського національного технічного університету імені Івана Пулюя. Він заклав той міцний фундамент, на якому університет стійко зберігає свою структуру та успішно розвивається впродовж років .

В студентській молоді завжди бачив майбутнє України, всі свої сили віддавав на розвиток науково-технічної бази, що дозволила сформувати і виховати покоління українців, яке здатне вибороти і збудувати успішну і незалежну Україну.

Олег Шаблій був непересічною людиною і талановитим науковцем та керівником. Його життєве кредо звучало так: *«Жити — значить працювати. Праця і є життям людини»*.

Допоки живе пам'ять про людину в серцях людей, які мали честь поруч жити, працювати, спілкуватись, мріяти – доти живуть і справи людини, про яку пам'ятають.

Світла і вічна пам'ять Олегу Миколайовичу Шаблію!

**Децик О.Я.,**

інженер-програміст кафедри теоретичної механіки 1985-1990 р.р.  
викладач кафедри інформатики та математичного моделювання 1999-2018 р.р.  
керівник відділу у справах молоді та зв'язків із громадськістю 2012-2018 р.р.

УДК 929

С.Ф.Дячук, к. т. н, доц.

Тернопільський національний технічний університет імені Івана Пулюя, Україна.

**ОЛЕГ ШАБЛІЙ – ЗАСНОВНИК УНІВЕРСИТЕТУ ПУЛЮЯ**

S.F.Dyachuk, Ph.D, Assoc. Prof.

**OLEG SHABLIY is the FOUNDER of PULUYA UNIVERSITY**

**Abstract.** The biography of Oleh Mykolayovych Shabliy, who was born in Ternopil region, Doctor of physical and mathematical sciences, Professor, Ukrainian scientist in the field of mechanics of deformable solids, mathematical modeling, theory of heating sources construction, theory of information technologies construction, manager of education, teacher and public figure is researched. From 1991 to 2007 he was the rector of Ternopil Ivan Puluj National Technical University. In 1991 Oleh Shabliy became an active member of the Academy of Engineering Sciences of Ukraine.

Коли починаєш згадувати Олега Миколайовича Шаблія, то розумієш, що розповідати про нього – це розповідати історію Тернопільського національного технічного університету імені Івана Пулюя. Університет – це його творіння, результат його титанічної праці як керівника, результат усього його життя.



Вважаю великим везінням, що доля у далекому 1984 році звела мене, студента Тернопільського філіалу Львівської політехніки, з завідувачем кафедри теоретичної механіки і математичного моделювання, професором О.М. Шаблієм. З першої зустрічі Олег Миколайович став для мене взірцем педагога, наставником, пізніше – мудрим керівником і однодумцем.

Народився О.М. Шаблій 18 червня 1935 року на Тернопіллі в селі Чернихів, тоді Великоглибочицького району в селянській сім'ї. З семирічного віку Олега виховувала самостійно мама Катерина, бо батько Микола Стахович загинув у Другій світовій війні.

Про свою освіту Олег Шаблій так написав у автобіографії при зарахуванні на посаду асистента кафедри теоретичної механіки Тернопільського філіалу Львівської політехніки: «В 1944 році поступив в 1-ий клас Чернихівської семирічної школи, яку закінчив у 1950р. В цьому ж році я поступив в 8-й клас Обаринецької середньої школи. В 1953 році я закінчив десятий клас і поступив вчитися в Львівський державний університет на механіко-математичний факультет. Закінчивши у 1958 році університет, поступив вчитися в аспірантуру при Львівському університеті, яку закінчую в листопаді 1961 року».

З 17 жовтня 1961 року життя Олега Миколайовича Шаблія переплелось з долею Тернопільської політехніки. Про сходження шаблями кар'єрної драбини написав Олег Герман так: «у 23 роки аспірант, у 26 років викладач, у 29 років кандидат наук і завідувач кафедри, в 31 рік доцент, у 39 років доктор наук, у 41 рік професор, у 50 років директор Тернопільського філіалу Львівської політехніки, в 56 років – академік і ректор Тернопільського приладобудівного інституту, а в 61 рік – ректор Тернопільського державного технічного університету.» [1].

О.М. Шаблій у 1963 році захистив кандидатську дисертацію, а у 1974 році – дисертацію на здобуття наукового ступеня доктора наук на тему «Деякі питання несучої здатності та непружного деформування по асиметрії оболонки та пластинок» за спеціальністю 01.02.04 Механіка деформівного твердого тіла. Олег Миколайович став першим у Тернополі доктором фізико-математичних наук.

О. М. Шаблій щедро ділився своїми знаннями з молоддю й велику увагу приділяв підготовці наукових кадрів. Під його керівництвом підготовлено 3 доктори і 12 кандидатів технічних та фізико-математичних наук. Автор понад 250 друкованих праць, у тому числі 2-х монографій, 25-ти патентів України на винаходи, 20 свідоцтв авторських прав на новітні технології. Основні напрями його наукових досліджень – це проблеми прикладної механіки, динаміки і стійкості машин, теорії дій пластин, опору металів, теорії будівництва, механіки твердого тіла, механіки полімерів, машинобудування, теплової напруги в елементах конструкцій; теорії й проектування напівпровідників і радіоелектронних приладів і систем, аналізу прогнозування динамічних особливостей в'язко-пружних плит, пропозиції з технології наплавлення й конструкції ножів збиральних машин, підвищення працездатності деталей сільськогосподарських машин тощо.

Талант керівника і далекоглядність Шаблія О.М. почав проявлятися з перших кроків на посаді завідувача кафедри теоретичної механіки. За його керівництва у 70 роках минулого століття на кафедрі теоретичної механіки створено лабораторію електронно-обчислювальних машин. Електронно-обчислювальні машини, перші розрахунки на них і використання обчислювальних машин у навчальному процесі – в цьому першою в Тернопільській області була кафедра теоретичної механіки (нині – інформатики і математичного моделювання) під керівництвом Олега Миколайовича.

У жовтні 1985 року Шаблій О.М. призначений директором Тернопільського філіалу Львівського політехнічного інституту. З перших днів керівництва Олегом Миколайовичем було задано курс на розбудову філіалу й створення в регіоні провідного технічного закладу вищої освіти. У філіалі започаткована підготовка за потрібними для регіону спеціальностями: технологія та обладнання зварювального виробництва, автоматизація технологічних процесів та виробництв, приладобудування, біотехнічні та медичні апарати й системи.

У 1989 році розпочато будівництво навчально-лабораторного корпусу (корпус № 1 ТНТУ ім. Івана Пулюя). Корпус був прийнятий в експлуатацію в 1991 році.

Завдяки наполегливості О.М. Шаблія та праці усього колективу філіалу 27 лютого 1991 року на базі Тернопільського філіалу Львівського політехнічного інституту створено Тернопільський приладобудівний інститут – другий після Севастопольського приладобудівного інституту вищий навчальний заклад такого профілю в Україні. Олег Миколайович був обраний першим ректором самостійного інституту.

Одним із головних завдань поряд з якісною організацією навчального процесу і збільшенням контингенту студентів ректор Олег Шаблій ставив розвиток матеріально-технічної бази. У 1992 році розпочато будівництво найбільшого в області спортивно-оздоровчого та навчально-мистецького центру «Політехнік», який був прийнятий в експлуатацію у 2003 році. Для налагодження зв'язків з виробництвом придбано корпуси на підприємствах – «Ватрі», комбайновому заводі, «Сатурні». Сьогодні усі ці приміщення – це навчальні корпуси університету. Головним завданням Олег Миколайович на посаді ректора у першу каденцію ставив збільшення контингенту студентів і розвиток матеріально-технічної бази. Завжди буду пам'ятати його слова: «Я набудую і накупую корпусів, а ви після мене будете упорядковувати й ремонтувати».

«Навчити, виховати, оздоровити» – ось модель і лозунг, яким керувався О.М. Шаблій при організації роботи зі студентською молоддю. За безпосередньої участі

ректора в університеті запроваджувалися програми посиленої фундаментальної підготовки, цифрової освіти, вивчення основ економіки і права студентами усіх спеціальностей, досконале вивчення іноземних мов та гуманізації й гуманітаризація навчального та виховного процесів. Чого варті тільки ідеї Шаблія О.М. про розвиток комерційного навчання. Набір студентів на платне навчання став одним із підґрунть стійкості університету в непрості 90-і.

З ініціативи Олега Миколайовича науковцями університету разом з нинішнім Почесним доктором університету докт. фіз.-мат. наук, професором Шендеровським В.А. з Києва проведена велика робота щодо повернення забутих імен наших земляків, видатних вчених зі світовим іменем – Івана Пулюя та Олександра Смакули. З квітня 1995 року Тернопільський приладобудівний інститут носить ім'я видатного українського вченого та громадського діяча Івана Пулюя.

Велику увагу Шаблій О.М. приділяв роботі з майбутніми абітурієнтами. Навчально-науковий комплекс «Світло» з технічним ліцеєм у структурі, перший сільський технічний ліцей імені Олександра Смакули у селі Добриводи. Апогеєм розвитку довузівської підготовки стало запровадження ступеневої освіти і вперше в Україні залучення до складу університету на правах відокремлених структурних підрозділів технічних коледжів. Цій ідеї на початках мало вірили працівники МОН України. Але вона була реалізована й сьогодні всі ЗВО України послуговуються й реалізують ступеневу освіту.

З ініціативи Шаблія О.М. в інституті започатковано нові напрями підготовки фахівців – комп'ютерного, електротехнічного, харчового та економічного профілів.

Усі роки Олега Миколайовича не полишала думка про створення в Тернополі технічного університету. Враховуючи здобутки колективу в освітній і науковій діяльності, Кабінетом Міністрів України 30 грудня 1996 року на базі Тернопільського приладобудівного інституту імені Івана Пулюя створено Тернопільський державний технічний університет імені Івана Пулюя. Ректором університету стає Олег Миколайович Шаблій.

Праця Олега Миколайовича винагороджена орденами «Знак пошани» (1986) та «За заслуги» III ступеня (2009), золотою медаллю Американського біографічного інституту США (2008). Відзначений нагородою «Свята Софія» (2005), «Петро Могила» МОН України (2007), дипломами всеукраїнської програми «Золотий фонд нації» (2013 р.), всеукраїнської програми «Національні лідери України» (2013 р.), всеукраїнської програми «Паливно-енергетичний комплекс України» (2013 р.) 1998 року в номінації «Наука» Кембриджським міжнародним бібліографічним центром визнаний людиною року. З 1996 року Шаблій О.М. – заслужений працівник науки і техніки України, з 2003 – Почесний громадянин Тернополя.

Завершуючи, хочу навести слова Олега Германа: «Двадцять п'ять років я пліч-о-пліч працював у ректораті над втіленням його ідей та задумів. Він іноді й мені видавався наївним романтиком, а потім ми всі переконувалися в його практичному раціоналізмові. Якщо вдуматися у питання, коли найбільш проявився талант Олега Миколайовича Шаблія, то це будуть роки керівництва нашим навчальним закладом» [1]. Двома руками голосую за ці слова. Я з Шаблієм О.М. також 25 років і дякую за це долі.

#### Література

1. Герман О.М. Зоря Олега Шаблія // Вільне життя: газета. 2016. – № 9(15745). – С.5.
2. Ясній П.В. Формула успіху професора Шаблія // Сільський господар: газета. 2020. – №24(159). – С.7.

УДК 539.3

Р.М. Кушнір<sup>1</sup>, докт. фіз.-мат. наук, проф.; Г.Т. Сулим<sup>1</sup>, докт. фіз.-мат. наук, проф.,  
Я.М. Пастернак<sup>2</sup>, докт. фіз.-мат. наук, проф.<sup>1</sup> Інститут прикладних проблем механіки і математики ім. Я.С. Підстригача НАН України<sup>2</sup> Волинський національний університет імені Лесі Українки, Україна

**МЕТОД ГРАНИЧНИХ ЕЛЕМЕНТІВ ДЛЯ АНАЛІЗУ  
ТЕРМОМАГНІТОЕЛЕКТРОПРУЖНИХ ТІЛ ІЗ НИТКОВИМИ  
НЕОДНОРІДНОСТЯМИ**

R.M. Kushnir, DSc, Prof., H.T. Sulym, DSc, Prof., Ya.M. Pasternak, DSc, Prof.

**BOUNDARY ELEMENT METHOD FOR ANALYSIS OF  
THERMOMAGNETOELECTROELASTIC SOLIDS WITH THREAD-LIKE  
INHOMOGENEITIES**

**Abstract.** This study presents a solid approach in the numerical analysis of thermomagnetoelastic solids containing thin thread-like inhomogeneities. The peculiarities of the application of integral equation approach to the analysis of thread-like inhomogeneities are discussed. The solid boundary element technique is developed, which can be applied to the analysis of 3D ill-posed boundary-value problems with boundary conditions set on spatial curves. The models of thermomagnetoelastic thread-like inhomogeneities are developed. Several numerical examples are studied.

На даний час зросла практична зацікавленість до створення нових математичних моделей та методів їхнього аналізу у механіці та термомагнітоелектромеханіці структурно-неоднорідних тіл, особливо спрямованих на проектування композитних та інтелектуальних матеріалів, в тім і волокнистих [1]. За математичного (особливо числового чи аналітично-числового) моделювання останнього типу структурно неоднорідних (композитних) матеріалів, зазвичай, виникає необхідність враховувати істотну відмінність розмірів волокон наповнення у різних напрямках [1]. Зокрема, для ниткових неоднорідностей з'ясовано [2], що у разі знесення умов контакту між середовищем та неоднорідністю на деяку просторову криву (яка суміщається з осьюовою лінією  $L$  включення) вдається на 2 порядки зменшити розмірність задачі і отримати одновимірні (все ж уздовж просторової кривої) інтегральні рівняння термопружності [2]. Проте результуюча крайова задача є погано обумовленою і для забезпечення збіжності процесу обчислень вона потребує певної регуляризації [2]. Завдяки останній вдалося отримати аналітично-числові розв'язки задач термопружності для середовища із прямолінійним теплопровідним деформівним нитковим включенням скінченної довжини. Проте для практики важливо також мати загальні числові підходи, що дали би можливість розв'язувати загальніші задачі термомагнітоелектропружності тіл, що містять як поодинокі, так і групові ниткові неоднорідностей, форма яких не обов'язково є прямолінійною. Для цього у даному дослідженні створено підхід на основі концепції методу граничних елементів.

Розглянемо рівняння теплопровідності тіла із нитковою неоднорідністю [3]

$$\int_L \Theta(\mathbf{x}, \mathbf{x}_0) [\gamma(\mathbf{x}) - \gamma(\mathbf{x}_0)] dL(\mathbf{x}) + \gamma(\mathbf{x}_0) \left[ \int_{L \setminus L_e} \Theta(\mathbf{x}, \mathbf{x}_0) dL(\mathbf{x}) + B(\mathbf{x}_0) \right] = \theta^{\text{incl}}(\mathbf{x}_0, \gamma(\mathbf{x}_0)) - \theta^\infty(\mathbf{x}_0), \quad (1)$$



де  $\Theta(\mathbf{x}, \mathbf{x}_0)$  – фундаментальний розв’язок задачі теплопровідності для безмежного однорідного середовища [4];  $\gamma(\mathbf{x})$  – шукана функція впливу неоднорідності;  $B(\mathbf{x}_0) = \int_{L_\varepsilon} \Theta(\mathbf{x}, \mathbf{x}_0) dL(\mathbf{x})$ ;  $\theta^{\text{incl}}(\mathbf{x}_0, \gamma(\mathbf{x}_0))$  – функційна залежність, яку можна вважати моделлю ниткової неоднорідності;  $L_\varepsilon$  – контур малого радіусу  $\varepsilon$ , що огинає точку колокації  $\mathbf{x}_0$ .

Введемо у розгляд кусково-гладку функцію

$$\omega(\mathbf{x}, \mathbf{x}_0) = \begin{cases} 1, & |\mathbf{x} - \mathbf{x}_0| \geq \varepsilon, \\ \frac{|\mathbf{x} - \mathbf{x}_0|}{\varepsilon}, & |\mathbf{x} - \mathbf{x}_0| < \varepsilon. \end{cases} \quad (2)$$

Для неї легко довести, що

$$\int_L \Theta(\mathbf{x}, \mathbf{x}_0) \omega(\mathbf{x}, \mathbf{x}_0) dL(\mathbf{x}) = \int_{L \setminus L_\varepsilon} \Theta(\mathbf{x}, \mathbf{x}_0) dL(\mathbf{x}) + C(\mathbf{x}_0), \quad (3)$$

де  $C(\mathbf{x}_0) = \frac{1}{\varepsilon} \int_{\varepsilon - \varepsilon}^{\varepsilon} |\mathbf{x} - \mathbf{x}_0| \Theta(\mathbf{x}, \mathbf{x}_0) dL$  – регулярний інтеграл, що залежить лише від орієнтації кривої  $L$  у точці  $\mathbf{x}_0$  (а для ізотропних тіл узагалі є сталою величиною). З урахуванням (3) рівняння (1) набуде такого регуляризованого вигляду, придатного для безпосереднього впровадження у обчислювальну схему методу граничних елементів:

$$\begin{aligned} \gamma(\mathbf{x}_0) \left[ \int_L \Theta(\mathbf{x}, \mathbf{x}_0) \omega(\mathbf{x}, \mathbf{x}_0) dL(\mathbf{x}) - C(\mathbf{x}_0) + B(\mathbf{x}_0) \right] + \\ + \int_L \Theta(\mathbf{x}, \mathbf{x}_0) [\gamma(\mathbf{x}) - \gamma(\mathbf{x}_0)] dL(\mathbf{x}) = \theta^{\text{incl}}(\mathbf{x}_0, \gamma(\mathbf{x}_0)) - \theta^\infty(\mathbf{x}_0). \end{aligned} \quad (4)$$

У такий самий спосіб вдається модифікувати також інтегральні рівняння термомагнітоелектропружності [3, 4]

$$\begin{aligned} \int_L U_{IJ}(\mathbf{x}, \mathbf{x}_0) (\tilde{p}_J(\mathbf{x}) - \tilde{p}_J(\mathbf{x}_0)) dL(\mathbf{x}) + \left[ \int_{L \setminus L_\varepsilon} U_{IJ}(\mathbf{x}, \mathbf{x}_0) dL(\mathbf{x}) + A_{IJ}(\mathbf{x}_0) \right] \tilde{p}_J(\mathbf{x}_0) + \\ + \int_L V_I(\mathbf{x}, \mathbf{x}_0) \gamma(\mathbf{x}) dL(\mathbf{x}) = \tilde{u}_I^{\text{incl}}(\mathbf{x}_0, \gamma(\mathbf{x}), \tilde{p}_J(\mathbf{x})) - \tilde{u}_I^\infty(\mathbf{x}_0). \end{aligned} \quad (5)$$

Тут  $U_{IJ}(\mathbf{x}, \mathbf{x}_0)$  – фундаментальний розв’язок магнітоелектропружності;  $V_I(\mathbf{x}, \mathbf{x}_0)$  – функція Гріна термомагнітоелектропружності;  $A_{IJ}(\mathbf{x}_0) = \int_{L_\varepsilon} U_{IJ}(\mathbf{x}, \mathbf{x}_0) dL(\mathbf{x})$ ;

$\tilde{u}_I^{\text{incl}}(\mathbf{x}_0, \gamma(\mathbf{x}), \tilde{p}_J(\mathbf{x}))$  – математична модель ниткової неоднорідності;  $\tilde{p}_J(\mathbf{x})$  – шукана функція розподілу зусиль, електричного зміщення та магнітної індукції на поверхні, що контактує із нитковою неоднорідністю. Позначені великими літерами індекси змінюються від 1 до 5, таким чином відповідні компоненти змінних включають механічні, електричні та магнітні складові.

Використавши (2), отримаємо очевидну тотожність

$$\int_L U_{IJ}(\mathbf{x}, \mathbf{x}_0) \omega(\mathbf{x}, \mathbf{x}_0) dL(\mathbf{x}) = \int_{L \setminus L_\varepsilon} U_{IJ}(\mathbf{x}, \mathbf{x}_0) dL(\mathbf{x}) + E_{IJ}(\mathbf{x}_0), \quad (6)$$

де  $E_{IJ}(\mathbf{x}_0) = \frac{1}{\varepsilon} \int_{\varepsilon - \varepsilon}^{\varepsilon} |\mathbf{x} - \mathbf{x}_0| U_{ij}(\mathbf{x}, \mathbf{x}_0) dL$  – регулярний інтеграл, що залежить лише від орієнтації кривої  $L$  у точці  $\mathbf{x}_0$ .

Підставивши (6) у (5) отримаємо

$$\begin{aligned} & \int_L U_{IJ}(\mathbf{x}, \mathbf{x}_0) (\tilde{p}_J(\mathbf{x}) - \tilde{p}_J(\mathbf{x}_0)) dL(\mathbf{x}) + \\ & + \left[ \int_L U_{IJ}(\mathbf{x}, \mathbf{x}_0) \omega(\mathbf{x}, \mathbf{x}_0) dL(\mathbf{x}) - E_{IJ}(\mathbf{x}_0) + A_{IJ}(\mathbf{x}_0) \right] p_J(\mathbf{x}_0) = \\ & = \tilde{u}_I^{\text{incl}}(\mathbf{x}_0) - \int_L V_I(\mathbf{x}, \mathbf{x}_0) \gamma(\mathbf{x}) dL(\mathbf{x}) - u_I^\infty(\mathbf{x}_0), \end{aligned} \quad (7)$$

де усі інтеграли є регулярними та збіжними при числовому визначенні.

Ввівши у (4) та (7) такі позначення для множників позаінтегральних членів:

$$X_\theta(\mathbf{x}_0) = \left[ \int_L \Theta(\mathbf{x}, \mathbf{x}_0) \omega(\mathbf{x}, \mathbf{x}_0) dL(\mathbf{x}) - C(\mathbf{x}_0) + B(\mathbf{x}_0) \right], \quad (8)$$

$$X_{IJ}(\mathbf{x}_0) = \left[ \int_L U_{IJ}(\mathbf{x}, \mathbf{x}_0) \omega(\mathbf{x}, \mathbf{x}_0) dL(\mathbf{x}) - E_{IJ}(\mathbf{x}_0) + A_{IJ}(\mathbf{x}_0) \right], \quad (9)$$

інтегральні рівняння (4) та (7) набудуть вигляду

$$\int_L \Theta(\mathbf{x}, \mathbf{x}_0) [\gamma(\mathbf{x}) - \gamma(\mathbf{x}_0)] dL(\mathbf{x}) + X_\theta \gamma(\mathbf{x}_0) = \theta^{\text{incl}}(\mathbf{x}_0, \gamma(\mathbf{x}_0)) - \theta^\infty(\mathbf{x}_0), \quad (10)$$

$$\begin{aligned} & \int_L U_{IJ}(\mathbf{x}, \mathbf{x}_0) (\tilde{p}_J(\mathbf{x}) - \tilde{p}_J(\mathbf{x}_0)) dL(\mathbf{x}) + X_{IJ} p_J(\mathbf{x}_0) = \\ & = \tilde{u}_I^{\text{incl}}(\mathbf{x}_0) - \int_L V_I(\mathbf{x}, \mathbf{x}_0) \gamma(\mathbf{x}) dL(\mathbf{x}) - u_I^\infty(\mathbf{x}_0). \end{aligned} \quad (11)$$

Для розв'язування системи інтегральних рівнянь (10), (11) використано схему методу граничних елементів. При цьому криву  $L$  розбивали на розривні квадратичні елементи. Крайові функції інтерполювалися на кожному елементі за допомогою поліномів Лагранжа. Завдяки використаній у (10) та (11) регуляризації, діагональні елементи матриць результуючих систем рівнянь обчислюються через позадіагональні елементи та регулярні функції (8) та (9) і не потребують якихось інших схем обчислення особливих інтегралів.

Запропоновано також математичні моделі чутливих до впливу різних фізичних полів ниткових включень. Розв'язано низку задач, що засвідчили високу швидкість запропонованого методу і точність отриманих числових результатів.

### Література

1. Rinaldi R.G., Blacklock M., Bale H., Begley M.R., Cox B.N. Generating virtual textile composite specimens using statistical data from micro-computed tomography: 3D tow representations // *J Mechanics Physics Solids*. – 2012. – 60. – P. 1561–1581.
2. Сулим Г.Т., Пастернак Я.М., Третьак Т.В. Моделювання деформівних термопружних ниткових включень в ізотропному середовищі // *Мат. методи та фіз.-мех. поля*. – 2021. – 64, № 1. – С. 73–86.
3. Pasternak Ia.M., Sulym H., Holii O. Thermoelasticity and effective properties of solids containing flexible and deformable thread-like inhomogeneities // *International Journal of Engineering Science*. – 2022. – 178. – 103729.
4. Pasternak Ia., Pasternak R., Pasternak V., Sulym H. Boundary element analysis of 3D cracks in anisotropic thermomagnetoelastic solids // *Engineering Analysis with Boundary Elements*. – 2017. – 74. – P. 70–78.

УДК 531.374; 539.213; 539.3

М.Михайлишин, к. ф.-м. н., доц.; Г.Семенишин.

Тернопільський національний технічний університет імені Івана Пулюя, Україна

**УЗАГАЛЬНЕННЯ ФІЗИЧНИХ СПІВВІДНОШЕНЬ ДЕФОРМАЦІЙНОЇ ТЕОРІЇ ТЕРМОПЛАСТИЧНОСТІ НА ВИПАДОК ВРАХУВАННЯ РОЗВАНТАЖЕННЯ.**

М. Mykhailyshyn, PhD, Assoc. Prof.; G. Semenyshyn.

**GENERALIZATION OF STRESS-STRAIN RELATIONS OF DEFORMATION THEORY OF THERMAL PLASTICITY IN CASE OF UNLOADING TAKEN INTO ACCOUNT.**

В багатьох технологічних процесах елементи конструкцій піддаються значним силовим і температурним навантаженням, в результаті яких виникають незворотні пластичні деформації в деяких областях конструкції. Після повного зняття навантаження в таких конструкціях виникають залишкові напруження і деформації, які можуть мати значний вплив на експлуатаційні властивості таких конструкцій. Тому проблема кількісної оцінки полів залишкових напружень і деформацій, які виникають в деяких процесах термообробки, при зварюванні, відновлюванні експлуатаційних властивостей шляхом наплавлення, дуже актуальна..

Для моделювання процесів пружнопластичного деформування пропонуємо використовувати теорію малих термопружнопластичних деформацій, узагальнену на випадок врахування розвантаження [1].

Фізичні співвідношення малих пружнопластичних деформацій можуть бути записані у вигляді [1]

$$\tilde{s}_{ij} = \frac{2G(T)}{\tilde{\psi}} \tilde{e}_{ij}, \quad (1)$$

$$\tilde{\psi} = 3G(T) \frac{\tilde{\varepsilon}_i}{\tilde{\sigma}_i}, \quad (2)$$

де

$$\tilde{s}_{ij} = \frac{G(T)}{G(T_1)} s_{ij}^{(1)} - s_{ij}, \quad \tilde{e}_{ij} = e_{ij}^{(1)} - e_{ij}, \quad (3)$$

причому  $s_{ij} = \sigma_{ij} - \delta_{ij}\sigma_0$ ,  $e_{ij} = \varepsilon_{ij} - \delta_{ij}\varepsilon_0$  – компоненти девіаторів напружень і деформацій. Середні напруження і деформація  $\sigma_0 = \frac{1}{3}\sigma_{ii}$ ,  $\varepsilon_0 = \frac{1}{3}\varepsilon_{ii}$  зв'язані залежністю  $\varepsilon_0 = \sigma_0/K + \varepsilon^T$ , в якій  $K = \frac{2G(1+\nu)}{(1-2\nu)}$  – модуль всестороннього об'ємного стиску,  $G = E/2(1+\nu)$  – модуль зсуву,  $\varepsilon^T = \alpha_t T^* = \alpha_t(T - T_0)$  – середня температурна деформація,  $\alpha_t$  – коефіцієнт лінійного температурного розширення матеріалу.  $s_{ij}^{(1)}$ ,  $e_{ij}^{(1)}$  – компоненти девіаторів напружень і деформацій, які були досягнуті в даній точці середовища в момент початку розвантаження. Останні величини рівні нулю, якщо в даній точці ще не спостерігалось розвантаження.  $T_1$  – значення температури, яке було зафіксоване в даній точці в момент початку розвантаження. Величини  $\tilde{\sigma}_i$  і  $\tilde{\varepsilon}_i$  – інтенсивності напружень  $\tilde{s}_{ij}$  і  $\tilde{e}_{ij}$ , які обчислюються за формулами

$$\tilde{\sigma}_i = \sqrt{\frac{3}{2} \tilde{s}_{ij} \tilde{s}_{ij}}, \quad (4)$$

$$\tilde{\varepsilon}_i = \sqrt{\frac{2}{3} \tilde{e}_{ij} \tilde{e}_{ij}}. \quad (5)$$

Очевидно, що якщо в даній точці ще розвантаження не спостерігалось, то величини  $\tilde{\sigma}_i$  і  $\tilde{\varepsilon}_i$  перетворюються в звичайні інтенсивності напружень  $\sigma_i$  і  $\varepsilon_i$ .

У формулі (1)  $\tilde{\psi}$  – параметр пластичності, який визначається за формулою (2), причому вважається, що існує однозначна залежність між інтенсивностями  $\tilde{\varepsilon}_i$  і  $\tilde{\sigma}_i$ , яка не залежить від виду напруженого стану і може бути знайдена на основі експериментальних даних для найпростіших однорідних напружених станів.

На етапі початкового деформування з ненапруженого і недеформованого стану в точках, в яких здійснюється активне навантаження, інтенсивність повної деформації дорівнює сумі інтенсивностей пружної і пластичної складових деформацій

$$\varepsilon_i = \varepsilon_i^p + \varepsilon_i^e.$$

Фізичні співвідношення (1) на цьому етапі мають вигляд

$$s_{ij} = \frac{2G(T)}{\psi} e_{ij}, \quad (6)$$

$$\psi = 3G(T) \frac{\varepsilon_i}{\sigma_i}. \quad (7)$$

Залежність між інтенсивностями напружень і деформацій на цьому етапі для більшості конструктивних матеріалів можна записати у вигляді

$$\sigma_i = \Phi'(\varepsilon_i, T) = \begin{cases} \sigma_s(T) \cdot \frac{\varepsilon_i}{\varepsilon_{is}}, & \varepsilon_i \leq \varepsilon_{is} = \frac{\sigma_s(T)}{3G(T)}, \\ \sigma_s(T) \cdot \left(\frac{\varepsilon_i}{\varepsilon_{is}}\right)^\gamma, & \varepsilon_i > \varepsilon_{is}, \end{cases} \quad (8)$$

де  $\sigma_s(T)$  – границя текучості матеріалу, яка залежить від температури. Аналогічну залежність  $\tilde{\sigma}_i = \Phi(\tilde{\varepsilon}_i, T)$  можна отримати на основі принципу Мазінга [2], якщо його узагальнити на неізотермічні процеси деформування. В результаті такого узагальнення знайдемо [3]

$$\tilde{\sigma}_i = \begin{cases} 2\sigma_s(T) \frac{\tilde{\varepsilon}_i}{\tilde{\varepsilon}_{is}}, & \tilde{\varepsilon}_i \leq \tilde{\varepsilon}_{is} = 2\varepsilon_{is}, \\ 2\sigma_s(T) \left(\frac{\tilde{\varepsilon}_i}{\tilde{\varepsilon}_{is}}\right)^\gamma, & \tilde{\varepsilon}_i > \tilde{\varepsilon}_{is}. \end{cases} \quad (9)$$

Фізичні співвідношення (2) можна подати розв'язаними відносно компонент тензора деформацій

$$\varepsilon_{ij} = -\frac{\tilde{\psi}}{2G} \left[ \frac{G}{G_1} \sigma_{ij}^{(1)} - \sigma_{ij} - \frac{(1+\nu)\tilde{\psi} - (1-2\nu)}{(1+\nu)\tilde{\psi}} \delta_{ij} \left( \frac{G}{G_m} \sigma_0^{(1)} - \sigma_0 \right) \right] - \delta_{ij} (\varepsilon^{T(1)} - \varepsilon^T) + \varepsilon_{ij}^{(1)}, \quad (10)$$

або відносно компонент тензора напружень

$$\sigma_{ij} = \frac{G}{G_1} \sigma_{ij}^{(1)} - \frac{2G}{\tilde{\psi}} \left[ \varepsilon_{ij}^{(1)} - \varepsilon_{ij} + \frac{\tilde{\psi}(1+\nu)}{1-2\nu} \delta_{ij} \left[ (\varepsilon_0^{(1)} - \varepsilon_0) - (\varepsilon^{T(1)} - \varepsilon^T) \right] - \delta_{ij} (\varepsilon_0^{(1)} - \varepsilon_0) \right]. \quad (11)$$

Пластичні деформації при цьому визначаються за формулами

$$\varepsilon_{ij}^p = \varepsilon_{ij}^{p(1)} - \frac{(\tilde{\psi}-1)}{\tilde{\psi}} \left[ \varepsilon_{ij}^{(1)} - \varepsilon_{ij} + \delta_{ij} (\varepsilon_0^{(1)} - \varepsilon_0) \right]. \quad (12)$$

Введемо такі ж позначення для звичайних компонент тензорів напружень і деформацій, які введені раніше для девіаторних компонент

$$\begin{aligned} \tilde{\sigma}_{ij} &= \frac{G}{G_1} \sigma_{ij}^{(1)} - \sigma_{ij}, \quad \tilde{\varepsilon}_{ij} = \varepsilon_{ij}^{(1)} - \varepsilon_{ij}, \\ \tilde{\sigma}_0 &= \frac{G}{G_1} \sigma_0^{(1)} - \sigma_0, \quad \tilde{\varepsilon}_0 = \varepsilon_0^{(1)} - \varepsilon_0, \quad \tilde{\varepsilon}^T = \varepsilon^{T(1)} - \varepsilon^T. \end{aligned} \quad (13)$$

Тоді залежність (10) запишеться так

$$\tilde{\varepsilon}_{ij} = \frac{\tilde{\psi}}{2G} \left( \tilde{\sigma}_{ij} - \frac{(1+\nu)\tilde{\psi} - (1-2\nu)}{(1+\nu)\tilde{\psi}} \delta_{ij} \tilde{\sigma}_0 \right) + \delta_{ij} \tilde{\varepsilon}^T. \quad (14)$$

Ввівши також позначення  $\tilde{\varepsilon}_{ij}^{p(k)} = \varepsilon_{ij}^{p(1)} - \varepsilon_{ij}^p$ , формула (10) перепишеться так

$$\tilde{\varepsilon}_{ij}^p = \frac{\psi - 1}{\psi} \tilde{\varepsilon}_{ij}. \quad (15)$$

Можна також показати, що

$$\tilde{\varepsilon}_{ij}^e = \frac{1}{2G} \tilde{\sigma}_{ij}, \quad (16)$$

де  $\tilde{\varepsilon}_{ij}^e = e_{ij}^{e(1)} - e_{ij}^e$ .

Для лінеаризації приведених фізичних залежностей використовується метод додаткових деформацій (МДД). Продемонструємо цей метод для випадку, коли здійснюється розвантаження з розвитком пластичних деформацій.

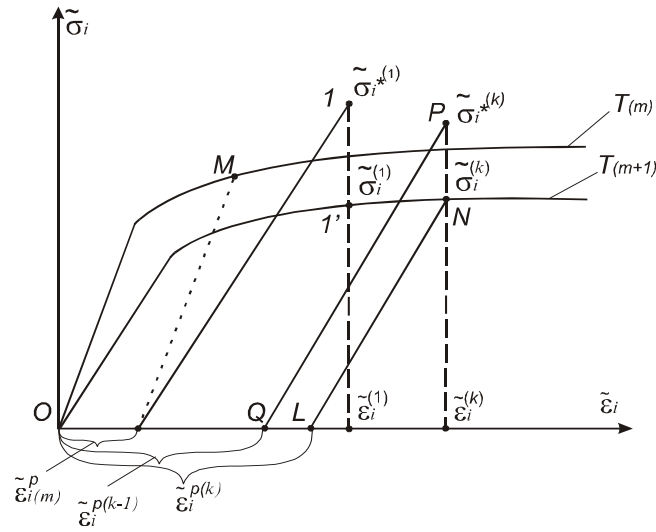


Рис.1. Ілюстрація застосування методу додаткових деформацій для етапу розвантаження з розвитком пластичних деформацій

Припустимо, що на початку деякого  $k$ -го кроку ми маємо  $\tilde{\epsilon}_{ij}^{p(k-1)}$  і цим деформаціям відповідає т.  $Q$  на рис.1. Зауважимо, що для наглядності ми сумістили початки осей координат  $\tilde{\epsilon}_i, \tilde{\sigma}_i$  для двох різних температур.

Процес послідовних наближень згідно методу додаткових деформацій здійснюємо за формулами

$$\tilde{e}_{ij}^{(k)} = \tilde{e}_{ij*}^{e(k)} + \tilde{e}_{ij}^{p(k-1)} = \frac{1}{2G} \tilde{s}_{ij}^{*(k)} + \tilde{\epsilon}_{ij}^{p(k-1)} \quad (17)$$

Розв'язавши задачу при фізичних співвідношеннях (17), ми знайдемо розв'язок  $\tilde{e}_{ij}^{(k)}, \tilde{\sigma}_{ij}^{*(k)}$ , якому відповідає точка  $P$  на рис.1. За відомими значеннями компонент  $\tilde{e}_{ij}^{(k)}$  обчислюємо інтенсивність повних деформацій  $\tilde{\epsilon}_i^{(k)}$ . Використовуючи рівняння поверхні  $\tilde{\sigma}_i = \tilde{\Phi}(\tilde{\epsilon}_i, T)$  для заданого значення температури  $T$  для даного етапу і значення  $\tilde{\epsilon}_i^{(k)}$ , знаходимо інтенсивність напружень  $\tilde{\sigma}_i^{(k)}$  (точка  $N$  на рисунку). Це дає можливість знайти за формулою  $\tilde{\psi}^{(k)} = 3G \frac{\tilde{\epsilon}_i^{(k)}}{\tilde{\sigma}_i^{(k)}}$  значення параметра пластичності  $\tilde{\psi}^{(k)}$  для даного

наближення і за формулами  $\tilde{e}_{ij}^{p(k)} = \frac{\tilde{\psi}^{(k)} - 1}{\tilde{\psi}^{(k)}} \tilde{e}_{ij}^{(k)}$  підрахувати компоненти пластичної надлишкової деформації цього ж  $k$ -го наближення, які можна використовувати в формулах методу додаткових деформацій (17) в наступному наближенні.

Формули методу додаткових деформацій в даному випадку можна також записати так

$$\tilde{\epsilon}_{ij}^{(k)} = \frac{1}{2G} \left( \tilde{\sigma}_{ij}^{*(k)} - \frac{3\nu}{1+\nu} \delta_{ij} \tilde{\sigma}_0^{*(k)} \right) + \delta_{ij} \tilde{\epsilon}^T + \tilde{\epsilon}_{ij}^{p(k-1)}, \quad (18)$$

$$\tilde{\epsilon}_{ij}^{p(k)} = \frac{\tilde{\psi}^{(k)} - 1}{\tilde{\psi}^{(k)}} \left( \tilde{\epsilon}_{ij}^{(k)} - \delta_{ij} \tilde{\epsilon}_0^{(k)} \right), \quad (19)$$

$$\tilde{\psi}^{(k)} = 3G \frac{\tilde{\epsilon}_i^{(k)}}{\tilde{\sigma}_i^{(k)}}. \quad (20)$$

Весь процес навантаження (нагріву, охолодження) розбивається на окремі етапи. Задаючи значення компонент пластичності деформації для нульового наближення в (18)

рівними цим компонентам, які були досягнуті для попереднього етапу навантаження (при деформуванні з початкового недеформованого стану вони приймаються нульовими) розв'язується пружна задача з додатковими деформаціями. За знайденими повними деформаціями в  $k$ -му наближенні обчислюються інтенсивності  $\tilde{\varepsilon}_i^{(k)}$  і  $\tilde{\sigma}_i^{(k)}$ . Далі за формулою (20) для кожної точки конструкції обчислюється  $k$ -те наближення параметра пластичності  $\tilde{\psi}^{(k)}$  і за формулою (20) компоненти пластичності деформації, які використовуються далі в формулах (18) в наступному наближенні для знаходження компонент  $\tilde{\varepsilon}_{ij}^{(k+1)}$ . Ітераційний процес продовжується до його повної збіжності, після цього здійснюється перехід до наступного етапу навантаження.

Слід зауважити, що початково на кожній ітерації в кожній точці конструкції припускається таке деформування, яке здійснювалося в ній на попередньому етапі навантаження, тобто початкове пружне чи пластичне деформування, пружне розвантаження чи розвантаження з розвитком повторних пластичних деформацій. Після збіжності процесу ітерацій здійснюється перевірка в кожній точці конструкції, чи дійсно мало місце таке деформування. Якщо в деяких точках характер деформування не відповідав прийнятому на основі інформації з попереднього етапу навантаження, то етап повністю перераховується з попередньою заміною в таких точках характеру деформування на протилежний.

За даною методикою розв'язано ряд практичних задач, зокрема таких як зварювання тонкостінних елементів конструкцій, наплавлення з метою зміцнення чи відновлювання експлуатаційних властивостей.

Так, наприклад, розв'язана задача моделювання процесу зварювання двох циліндричних оболонок круговим швом при умові, що зварювання здійснюється одночасно по всій довжині шва. Отримані результати повністю узгоджуються з аналогічними результатами, знайденими в роботі [4] з використанням набагато складнішої теорії пластичної течії. Результати моделювання дали можливість знайти поля залишкових напружень, деформацій і переміщень, дослідити кінетику напружено-деформованого стану в процесі зварювання, дослідити діаграму деформування в різних точках конструкції. Для прикладу приведемо розподіл залишкових напружень, пружних деформацій, а також залишковий прогин оболонки.

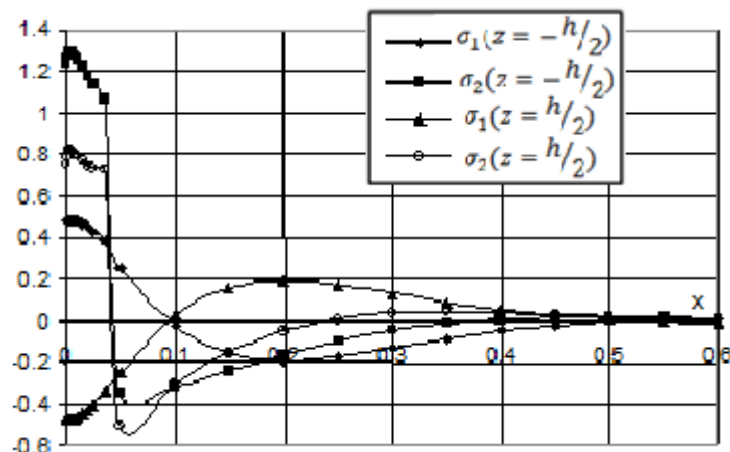


Рис. 2 Розподіл залишкових зварювальних напружень в циліндричній оболонці.

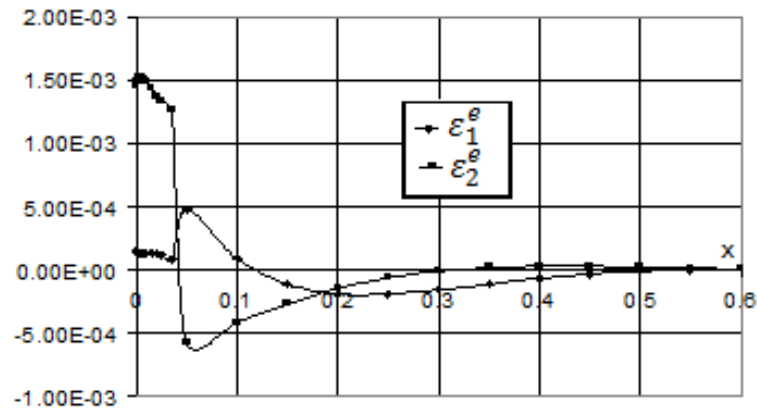


Рис. 3 Розподіл пружних залишкових деформацій.

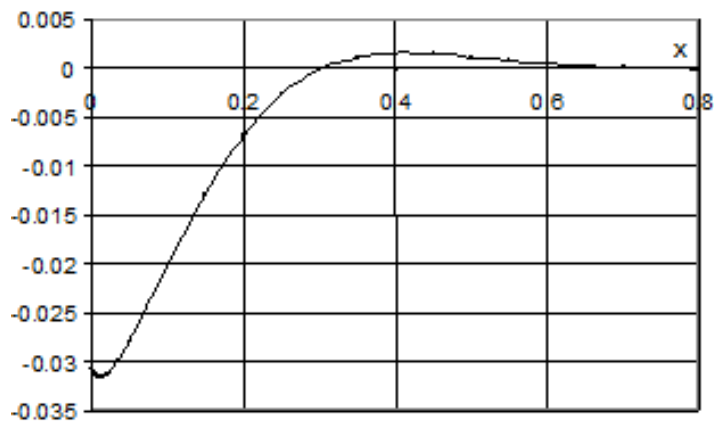


Рис. 4 Залишковий прогин.

### Література

1. Михайлишин М. Узагальнення принципу Мазінга на випадок неізотермічних процесів навантаження. Вісник Тернопільського державного технічного університету. – Тернопіль.: № 2, 2006 –С. 12-20.
2. Москвитин В.В. Пластичность при переменных нагружениях. Изд-во МГУ, М.,1965.-263с.
3. Шевченко Ю.Н. Термопластичность при переменных нагружениях. – К.:Наукова думка, 1970.-287 с.
4. Махненко В.И. Расчетные методы исследования кинетики сварочных напряжений и деформаций.-К.: Наук.думка,1976.-320 с.



**Секція 1**  
**ПЕРСПЕКТИВНІ МОДЕЛІ І МЕТОДИ МЕХАНІКИ ДЕФОРМІВНОГО**  
**ТВЕРДОГО ТІЛА**

UDC 519.87

**M. Petryk, Dr. Prof., D. Mychalyk, Ph.D., Assoc. Prof. I. Boyko, Ph.D., Assoc. Prof. O. Petryk, L. Romanovska, V. Stefanyshyn**  
Ternopil Ivan Pulyu National Technical University, Ukraine

**MODELLING AND ANALYSIS OF FILTRATION IN THE MEDIA OF**  
**MULTIDIMENSIONAL NANOPOROUS PARTICLES**

**Abstract.** Mathematical models of two-level transport "filtration-consolidation" in the system "interparticle space - nanoporous particles" are considered, which take into account, along with the flow of liquid in the skeleton, the internal flow of liquid from particles.

We consider the nanoporous particles [1, 2] containing liquid as a porous layer subjected to unidimensional pressing (Fig. 1). The liquid flowing occurs inside the particles, outside the nanoporous particles and between these two spaces. The nanoporous particles are separated by the porous network. The layer of particles is considered as a double-porosity media. Fig. 1 illustrates two levels of the considered elementary volume: level 1(a) for the system of macropores in *interparticle spaces* and level 2 (b and c)) for the system of nanopores in *intraparticle spaces*, which includes two subspaces of particles of different sizes: *intraparticle spaces* 1 – subspace of nanoporous particles with a radius of at least  $R_1$  and *intraparticle spaces* 2 – a subspace of nanoporous particles with a radius of at least  $R_2$  ( $R_1 > R_2$ ).

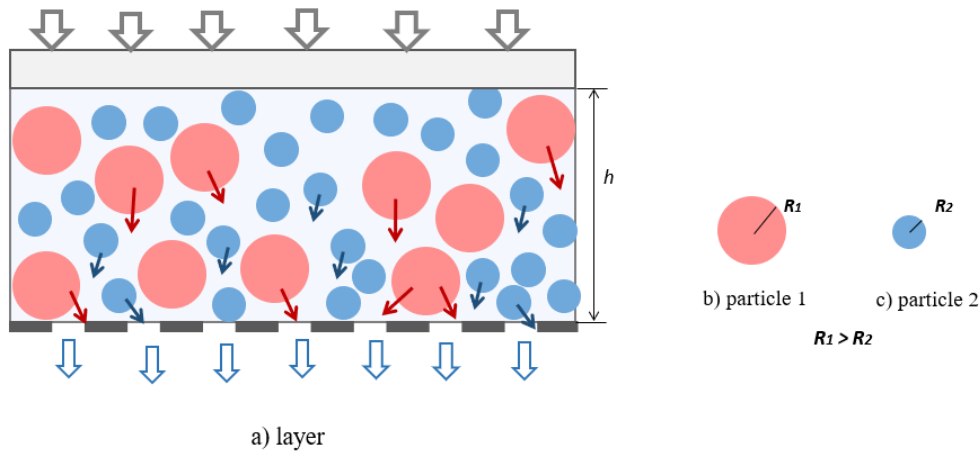


Fig. 1. Schematization of mass transfer in a two-level system of pores

The mathematical model of the considered transfer, taking into account the specified physical factors, can be described in the form of the following system of boundary value problems for partial differential equations:

**Problem A:** to find a limited solution of the consolidation equation for a layer of nanoporous particles media in the domain  $D_1 = \{(t, z) : t > 0, 0 < z < h\}$ :

$$\frac{\partial P_1(t, z)}{\partial t} = b_1 \frac{\partial^2 P_1}{\partial z^2} - \beta_1 \frac{\varepsilon}{R_1} \frac{\partial}{\partial t} \int_0^{R_1} P_2(t, x, z) dx - \beta_2 \frac{1-\varepsilon}{R_2} \frac{\partial}{\partial t} \int_0^{R_2} P_3(t, x, z) dx \quad (1)$$

with the initial condition:

$$P_1(t, z)|_{t=0} = P_E, \quad (2)$$

the boundary conditions (for variable  $z$ )

$$P_1(t, z)|_{z=0} = 0; \quad \frac{\partial P_1}{\partial z}|_{z=h} = 0 \quad (\text{impermeability condition}); \quad (3)$$

**Problems B<sub>1,2</sub>:** to find the limited solutions of the consolidation equations for the nanoporous partiles (radius  $R_i$ ) in the domains:

$$\frac{\partial P_i}{\partial t} = b_i \frac{\partial^2 P_i}{\partial x_i^2}, \quad i=1, 2 \quad (4)$$

with the initial conditions:

$$P_i|_{t=0} = P_E(z), \quad i = 1, 2 \quad (5)$$

the boundary conditions (for radial variable  $x$ ):

$$\frac{\partial P_i}{\partial x}|_{x=0} = 0; \quad P_i(t, x, z)|_{x=R_i} = P_1(t, z). \quad (6)$$

**Nomenclature:**

$P_1$  - liquid pressure in interparticle space,  $P_2, P_3$  - liquid pressure in intraparticle space1 and intraparticle space2 (interior of spherical particles 1 and 2) in accordance,  $b_1$  - is a consolidation coefficient in interparticle space,  $b_2, b_3$  - consolidation coefficients in intraparticle space1 and intraparticle space2,  $\beta_1, \beta_2$  - is the elasticity factor of the particles 1 and 2 in accordance,  $h$  - is layer thickness,  $R_1, R_2$  - radius of particles 1 and 2.

**The analytical solution of the model:** pressure profiles in *interparticle spaces* and *intraparticle spaces1* and *intraparticle spaces2*. The analytical solution of the problem is found using the operational Heaviside's method, Laplace integral and Fourier integral transformations. Applying the finite integral Fourier transform (cos) [3, 4]: we obtain the solutions of the problems B<sub>1</sub>, B<sub>2</sub>:

$$P_2(t, x, z) = P_E(z) \frac{2}{R_1} \sum_{m_1=0}^{\infty} \frac{(-1)^{m_1}}{\eta_{m_1}} e^{-b_2 \eta_{m_1}^2 t} \cos \eta_{m_1} x + \frac{2}{R_1} \sum_{m_1=0}^{\infty} (-1)^{m_1} b_2 \eta_{m_1} \int_0^t e^{-b_2 \eta_{m_1}^2 (t-\tau)} P_1(\tau, z) dz \cos \eta_{m_1} x$$

$$P_3(t, x, z) = P_E(z) \frac{2}{R_2} \sum_{m_2=0}^{\infty} \frac{(-1)^{m_2}}{\eta_{m_2}} e^{-b_3 \eta_{m_2}^2 t} \cos \eta_{m_2} x + \frac{2}{R_2} \sum_{m_2=0}^{\infty} (-1)^{m_2} b_3 \eta_{m_2} \int_0^t e^{-b_3 \eta_{m_2}^2 (t-\tau)} P_1(\tau, z) dz \cos \eta_{m_2} x \quad (7)$$

Substituting the expressions (7) into the consolidation equation (1), after a series of transformations and successive application to the problem (1)-(3) of the integral Laplace transform [3] and the finite integral Fourier transform [4, 5], we obtain

$$P_n^*(s) = \left( b_1 \lambda^n + s + \beta_1 \varepsilon \frac{\sqrt{b_2}}{R_1} \sqrt{s} \cdot th \left( \sqrt{\frac{s}{b_2}} R_1 \right) + \beta_2 (1 - \varepsilon) \frac{\sqrt{b_3}}{R_2} \sqrt{s} \cdot th \left( \sqrt{\frac{s}{b_3}} R_2 \right) \right)^{-1} \cdot \left( 2 + \frac{\beta_1 \varepsilon}{R_1} \sqrt{\frac{b_2}{s}} th \left( \sqrt{\frac{s}{b_2}} R_1 \right) + \frac{\beta_2 (1 - \varepsilon)}{R_2} \sqrt{\frac{b_3}{s}} th \left( \sqrt{\frac{s}{b_3}} R_2 \right) \right) P_E \frac{1}{\lambda_n} \quad (8)$$

Applying the integral operator of the inverse integral Laplace transformation to expression (8) and using the Heaviside theorem on the root expansion of the denominator of Laplace-images expressions of and performing the inverse Fourier integral transition on the

variables  $z$ , we finally obtain an analytical expression for pressure distributions in the *interparticle space* [3, 5]:

$$P_1(t, z) = P_E \frac{2}{h} \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{j=1}^{\infty} \frac{e^{-v_{jn}^2 t}}{\Phi(v_{jn})} \left[ 1 - \beta_1 \varepsilon \frac{2}{R_1^2} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1 - e^{-b_2 \left( \eta_k^2 - \frac{v_{jn}^2}{b_2} \right) t}}{\left( \eta_k^2 - \frac{v_{jn}^2}{b_2} \right)} - \beta_2 (1 - \varepsilon) \frac{2}{R_2^2} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1 - e^{-b_3 \left( \mu_k^2 - \frac{v_{jn}^2}{b_3} \right) t}}{\left( \mu_k^2 - \frac{v_{jn}^2}{b_3} \right)} \right] \frac{\sin \lambda_n z}{\lambda_n}, \quad (9)$$

where  $v_{jn}$ ,  $j = \overline{1, \infty}$ ;  $n = \overline{0, \infty}$  – the roots of transcendental equation (10).

$$v^2 - b_1 \lambda_n^2 - \beta_1 \varepsilon v \frac{\sqrt{b_2}}{R_1} \operatorname{tg} \left( \frac{v R_1}{\sqrt{b_2}} \right) - \beta_2 (1 - \varepsilon) v \frac{\sqrt{b_3}}{R_2} \operatorname{tg} \left( \frac{v R_2}{\sqrt{b_3}} \right) = 0, \quad (10)$$

here

$$\Phi(v_{jn}) = 1 + \beta_1 \varepsilon \frac{\sqrt{b_2}}{2R_1} \left( \frac{1}{v_{jn}} \operatorname{tg} \left( v_{jn} \frac{R_1}{\sqrt{b_2}} \right) + \frac{R_1}{\sqrt{b_2}} \frac{1}{\cos^2 \left( v_{jn} \frac{R_1}{\sqrt{b_2}} \right)} \right) + \beta_2 (1 - \varepsilon) \frac{\sqrt{b_3}}{2R_2} \left( \frac{1}{v_{jn}} \operatorname{tg} \left( v_{jn} \frac{R_2}{\sqrt{b_3}} \right) + \frac{R_2}{\sqrt{b_3}} \frac{1}{\cos^2 \left( v_{jn} \frac{R_2}{\sqrt{b_3}} \right)} \right),$$

$$\eta_k = \frac{(2k+1)\pi}{2R_1}, \quad k = \overline{0, \infty} \text{ – are the roots of equation } \operatorname{ch} \left( \sqrt{\frac{s}{b_2}} R_1 \right) = 0, \quad (s = i\eta, \quad i\text{- imaginary unit}),$$

$$\mu_k = \frac{(2k+1)\pi}{2R_2}, \quad k = \overline{0, \infty} \text{ – are the roots of equation } \operatorname{ch} \left( \sqrt{\frac{s}{b_3}} R_2 \right) = 0, \quad (s = i\mu)$$

$$\lambda_n = \frac{2n+1}{2h} \pi \text{ – are the spectral numbers of integral Fourier transformation (Sin-Fourier).}$$

Substituting into formulas (7) the analytical expression of pressure distributions in the *interparticle space*  $P_1(t, z)$ , calculated according to (9), we obtain the final expressions for determining the time-space distributions of pressures  $P_2(t, x, z)$  and  $P_3(t, x, z)$  in the spaces of nanoporous particles: *intraparticle space2* and *intraparticle space3* in accordance.

#### References :

1. Barenblatt, G.I., Entov, V.M., Ryzhik, V., Theory of fluid flows through natural rocks. Dordrecht: Kluwer. 1990.
2. Petryk M., Vorobiev E. Numerical and Analytical Modelling of Solid-Liquid Expression from Soft Plant Materials. AIChE J. Wiley USA. Vol. **59**, Issue **12**, 4762–4771. (2013)
3. Doetsch G. Handbuch der Laplace-Transformation: Band I: Theorie der Laplace-Transformation. Springer Basel AG. 2013
4. Lenyuk M.P., Petryk M.R. Integral Fourier, Bessel transforms with spectral parameters in problems of mathematical modeling of mass transfer in heterogeneous media. Kyiv: Наукова думка, 2000. – 372с
5. Petryk M., Gancarczyk T., Khimich O. Methods of Mathematical Modeling and Identification of Complex Processes and Systems on the basis of High-performance Calculations (neuro- and nanoporous feedback cyber systems, models with sparse structure data, parallel computations). Scientific Publishing University of Bielsko-Biala. Bielsko-Biala, Poland), 2021, 194 p.

UDC 519.688 : 616-71

Roman Tkachuk, Dr., Prof., Pavlo Tymkiv, Ph.D.,

Ternopil Ivan Puluj National Technical University, Ukraine

## PROBLEMS OF MODELING LOW-INTENSITY ELECTRORETINAL SIGNAL FOR ASSESSING THE RISKS OF NEUROTOXICATION

**Abstract.** Assessing the risks of neurotoxicity of the human body caused by the negative influence of free radicals of nanostructures, using electroretinography with low intensity of light irritation, is one of the most promising modern electrophysiological methods. However, there are challenges in modeling such a test low-intensity retinal response, caused by unknown or hidden effects of toxins on the human organism, making it difficult for an expert system to assess such risks.

The development, creation and use of new materials leads to increased risks of environmental pollution and human organism, which requires timely diagnosis and treatment [1]. Among the diseases, a special place is occupied by neurotoxicity caused by chemical factors. Industrial chemicals that affect the nervous system include: metallic mercury, manganese, arsenic compounds, tetraethyl lead, etc. Neurotoxicity is a toxic encephalopathy, in which neurological disorders are dominated by a progressive insufficiency of peripheral hemodynamics.

Syndrome of toxic-hypoxic encephalopathy is considered as a functional failure of the central nervous system, as a result of the combination of metabolic, hemodynamic, morphological changes in the brain tissues with chemical lesion.

It develops under the influence of neurotoxins – chemical compounds that are in the body in an amount that is capable of breaking the functions of vital organs and creating a danger to life. Intoxication, or poisoning, leads to a pathological condition caused by a violation of chemical homeostasis due to the interaction of the toxin with the organism.

Substances that may cause intoxication are divided into:

- 1) industrial poisonous substances;
- 2) poisonous chemicals (pesticides);
- 3) medicines;
- 4) household chemicals;
- 5) biological, plant and animal poisons;
- 6) fighting poisonous substances, etc. [2].

Among the diseases, a special place is occupied by neurotoxicity caused by chemical factors. In addition, toxicants can selectively affect any system of the body or organs. Since, under the influence of these toxins, the brain is primarily affected [3], the spread of acute and chronic neurotoxicosis is a major problem as clinical toxicology, occupational medicine, neurology, and medicine as a whole.

Objective and subjective methods of research are used to study the state of retina as an indicator of the influence of toxins on the human body. To subjective include psychophysical tests: the Purkinje test, laser interference, Medoc's sticks, recognition of two points, etc. However, subjective tests do not provide enough information to diagnose a patient's condition. Among the objective methods of research complementary to psychophysical tests, distinguish between ultrasound and electrophysiology.

The basic methods of ultrasound diagnostics of the eye include: one-dimensional echography (A-method), two-dimensional echography (acoustic scanning, B-method), ultrasound three-dimensional echography, energy dopplerography and ultrasound duplex

scanning. However, even with low energy of ultrasound radiation, there is an additional invasiveness and a negative effect on the patient.

Therefore, for the reliable diagnosis and localization of the causes of the disease, electrophysiological methods based on the analysis of bioelectric signals from the studied parts of the visual system are the most promising ones.

Among the electrophysiological methods of the study are the following methods for assessing the functional state of the visual analyzer: the determination of electrical sensitivity of the optic nerve, electrooculography (EOG), electroencephalography (together with the registration of visual stimulated brain cortical potentials) and electroretinography. The founder of the clinical electrophysiology of the organs of vision is the Swedish ophthalmologist G. Karpe, who used contact lenses for research in 1945. His work was based on the development of Riggs. A large amount of work in the direction of fixing electroretinography and study of electroretinosignal, which is a graphical representation of the electrical reaction of the set of cellular elements of the retina of the eye to external light irritation, was carried out by the Swedish physiologist R. Granit.

In particular, it was found that mercury intoxication shows a decrease in the thickness of the retina in the area of the fovea, which indicates the development of dystrophic changes in it [4]. As a result of the research, inhibition of retinal bioelectric activity was detected in the form of increasing the threshold of electrical sensitivity, lengthening the latent recovery time, and reducing the morphological parameters (Fig. 1).

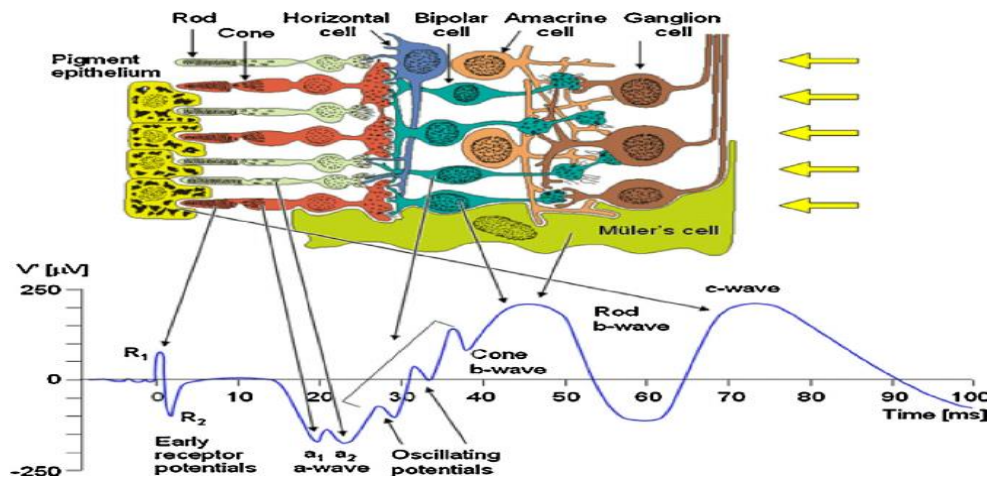


Fig. 1. Retina structure and sources of potential of ERS [5]

From studies of the group of applied physics doc. Shamshinova A.M. etc., found that the b-wave of electroretinogram (ERG) is the most sensitive to toxins and the value of the parameters of the ERS, depends on the intensity of the light stimulus [6].

Therefore, when the intensity of light irritation decreases, there is a greater chance of accurately registering the b-wave. To determine the intensity range of light irritation, the following criteria for the registration of ERG is a prerequisite:

- I. threshold value of the logarithm of intensity of irritation, which improves the results of ERG registration;
- II. determining the maximum value of the amplitude of the b-wave.

Accordingly, the level of irritation of the visual system (retina) increases in proportion to the logarithm of the intensity of light. In this case, the accuracy and resolution of the registered electroretinosignal increases (Weber-Fechner's law) [7]. Such studies did not have a prospect for selecting a standard electrolyte signal when conducting research with high energy of light irritation (in the range from 3 to 30  $cd \cdot s \cdot m^{-2}$ ) [8].

High energy of light irritation allows to detect significant violations of the functioning of the visual analyzer, but it has a number of significant disadvantages:

- 1) the eye rejuvenates considerably;
- 2) the need for multiple ERS registrations (for the application of coherent filtration);
- 3) as a result, the length of the procedure increases significantly;
- 4) there is no possibility of displaying small morphological changes in the ERS, which is important for modern medicine [9] and [10].

Therefore, to reduce the negative effects of standard electroretinography, the decrease in the intensity of light irritation is used. Possibility of electroretinography with a significantly reduced energy of light irritation due to the peculiarity of the structure of the eye.

The maximum light sensitivity at a wavelength of 505-510 nm (blue-green light), for the reaction to light it takes from 43 to 48 quanta of light, but since the light flux passes through the optical environment of the eye, for the emergence of a low intensity electroretinosignal it is necessary that much more quanta be reached on the retina - up to 50-150 quanta of light. In view of this, in medical practice, the use of electroretinography with ultra-low energy of light irritation has been substantiated. The main advantages of quantum electroretinography are:

- a) early diagnosis of changes in the functional state of the human body (in particular, in neurotoxication);
- b) low energy of light irritation (from  $10^{-3}$  to  $10^{-4}$ ) leads to decrease of invasiveness;
- c) shortening the duration of the procedure, due to a significant reduction in eye rejuvenation time.

However, this will require the study of light stimulation (photostimulants) to reduce the intensity or exposure of light irritation, and the experimental reception of low-intensity ERS. The standards of ISCEV indicate the intensity of light stimuli for electroretinography studies. However, these standards are based on the use of gas-discharge xenon lamps (Grass PS-22, lamp PST-2100), while units of light stimulation measurement are adapted to the technical features of gas-discharge xenon lamps.

The first two methods have a significant disadvantage, due to the fact that the reduction of electrical parameters can only be to a certain limit. Further, the reduction of their light flux is impossible due to the internal structure and peculiarities of the physics of the transition of electrons through the p-n-junction. Therefore, it is promising to use PWM- modulation of the power supply of the LED.

**Summary table of parameters of the LED photo stimulator on the basis of the PWM modulator of power LED 3528**

Switch position on PWM modulator	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
$E(\text{lux})$	859	1847	4904	9044	14044	27276	24522	29808	35573	40732	41847
$t_i(\text{ms})$	–	2,83	5,03	6,93	–	10,6	–	–	–	–	16,60
$D, \%$	1	10	20	30	40	50	60	70	80	90	97
$H(\text{lux} \cdot \text{s})$	–	0,522	4,933	18,80 2	–	144,5 6	–	–	–	–	673,8 2

In order to obtain an ERS with a reduced intensity of light irritation in a wide range of values, the ophthalmology system *DCSO-01* has been improved, with 250 samples with a quantization period  $Tq = 2.336 \text{ ms}$  (sampling rate  $f_s = 428 \text{ Hz}$ ) and a predetermined number of registrations.

ERS is selected from the eye of a rabbit in a wide range of stimulus energies. As a source of irritation, a white LED (smd 3528) was used, the energy ( $E$ ) of the radiation (stimulus) of which was given by three components: pulse cleft ( $D$ ), magnitude and duration of direct current.

Such a method of forming the energy of the stimulus allows to provide a wide range of values  $mcd \cdot s$  (Fig.2.a – c).

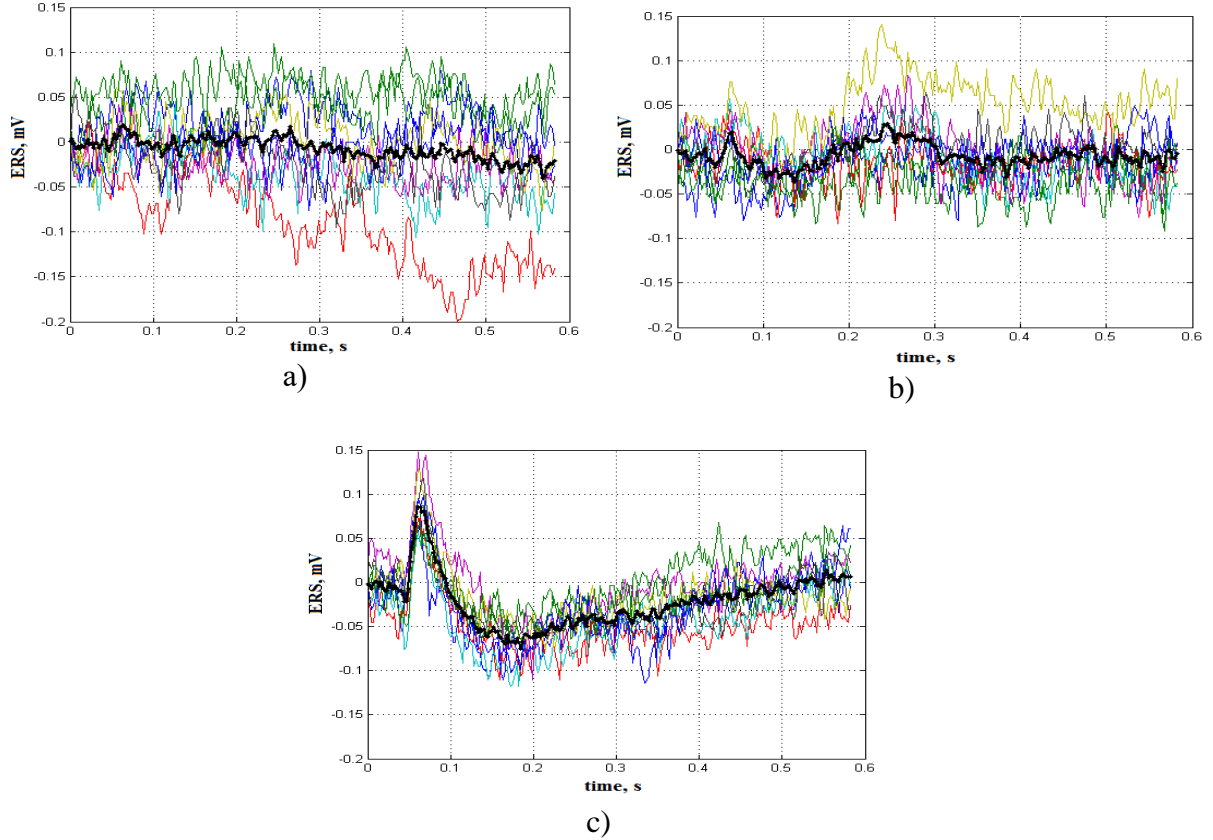


Fig.2 ERS at different levels of intensity of light irritation:  
 a)  $I_{st} = 0.1 \text{ mcd} \cdot s$ ; b)  $I_{st} = 1.9 \text{ mcd} \cdot s$ ; c)  $I_{st} = 10.5 \text{ mcd} \cdot s$ .

In order to reduce the noise of the ERS, the ERS ensemble was registered from 16 implementations with fixed energy of the stimulus followed by its averaging:

$$x_c(nT_q) = \frac{1}{16} \sum_{i=1}^{16} x_i(nT_q),$$

where  $x_i(nT_q)$  — implementation of ERS,  $x_c(nT_q)$  — averaged ERS for the given stimulus energy,  $nT_q$  — discrete time,  $i$  — implementation number.

The results are shown in Fig. 2, where the bold curve is depicted  $x_c(nT_q)$ , but thin —  $x_i(nT_q)$ .

During the experiment, more than 5000 ERS implementations were registered at different intensities of the light stimulus, but the resulting ERS when reducing the intensity of light irritation requires further elaboration and further research.

**Conclusion.** The analysis showed that in conditions of increasing the negative influence on the human body, the accuracy and resolution of standard electroretinography is not sufficient

to detect the risks of neurotoxicity (detection of neurotoxicity, evaluation of their type, quantitative and qualitative characteristics, etc.).

Therefore, in order to diagnose the state of the visual analyzer, the most promising is the use of electroretinography with a reduced intensity of light irritation. The following results are obtained:

1) The functioning of the visual analyzer and the manifestation of sensations from the effects of stimuli (light stimulus) is explained by the Weber-Fechner empirical psychophysical law, therefore, to increase the accuracy and resolution (to detect the risk of neurotoxicity) reduce the energy of light irritation.

2) A pilot model for reducing the intensity of the light stimulus based on the PWM modulation of the LED power supply was created. This allowed to reduce the level of light irritation to  $0.522 \text{ lux} \cdot \text{s}$ , compared to the standard stimulation of electroretinography (Grass PS-33) –  $59 \text{ lux} \cdot \text{s}$ .

3) Experimentally, an ERS with a reduced intensity of light irritation has been obtained in a wide range of values  $\text{mcd} \cdot \text{s}$ , and the need for further elaboration of ERS for assessing the risk of neurotoxicity has been established.

### References:

1. Matyushko M.G. Nevrologichni aspekty margancevoyi nejrotoksychnosti / M.G. Matyushko, O.A. Myalovyczka, V.S. Trejtyak ta in. // Mizhnarodnyj nevrologichnyj zhurnal. - Doneczk, 2010, N3.-S.178-181.
2. Tarasov A.V. Osnovy toksykologyy: Uchebnoe posobyе / A.V. Tarasov, T.V. Smyrnova. – M.: Marshrut, 2006. – 160 s.
3. Payenok A.V. Stan perekysnogo okyslennya lipidiv u xvoryx z encefalopatiyamy riznogo genezu /A.V. Payenok // Bukovynskyj medychnyj visnyk. – 2007. – T. 11, #4. – S. 41-43
4. Environmental Health Criteria 223. Neurotoxicity Risk Assessment For Human Health: Principles And Approaches – <http://www.inchem.org/documents/ehc/ehc/ehc223.htm>
5. Gardner W. Introduction to random processes with application to signals and system. New Yourk: Macmillan publ. comp., 1986. 430 p.
6. Shamshynova A.M. Funkcyonalnye metody issledovanyya v oftalmologyy / A.M.Shamshynova, V.V. Volnov. – Moskva: Medycyna. – 1998. – 414s.
7. Tymkiv P.O. Zastosuvannya zakonu Vebera-Fexnera u kvantovij elektoretynografii / P.O. Tymkiv, Yu.Z. Leshhyshyn, V.P. Zabytivskyj, L.B. Demchuk // Visnyk KrNU imeni Myxajla Ostrogradskogo: Informacijni systemy i texnologiyi. Matematyчне modelyuvannya. – Kremenчuk. – 2015. – # 5(94). – S. 79-85.
8. ISCEV Standard for full-field clinical electroretinography. Springer-Verlag, 2008. p. 9.
9. Finkelstein D., Gouras P., Hoff M. Human electroretinogram near the absolute threshold of vision. Investigative Ophthalmology, April 1968. P. 214-218.
10. Tkachuk R., Yavorsky V. ERG system for neurotoxicity risk assessment. Materialy XX Mizhnarodnoyi konferenciyi TCSET2010 «Suchasni problemy radioelektroniky, telekomunikacij, kompyuternoyi inzheneriyi (23-27 lyutogo 2010. smt. Slavs`ke) m. L`viv, 2010. S.131.



УДК 628.979

Андрійчук В.А., д.т.н, проф., Котик М.І., Костик Л.М., к.т.н, доц., Наконечний М.С., к.т.н, Осадца Я.М., к.т.н, Філюк Я.О., к.т.н.

Тернопільський національний технічний університет імені Івана Пулюя, Україна

### МАТЕМАТИЧНА МОДЕЛЬ РУХОМОГО ОПРОМІНЮВАЛЬНОГО ПРИБОРУ.

Andriychuk V., Dr., Prof, Kotyk M., Kostyk L., Ph.D, Assoc. Prof, Nakonechnyi M., Ph.D, Osadtsa Y., Ph.D, Filyuk Y., Ph.D

### MATHEMATICAL MODEL OF A MOVING IRRADIATING DEVICE.

**Abstract.** In this paper, a search for theoretical foundations and applied aspects for the further development of such a scientific direction as optical electrotechnologies of variable irradiation of plants was carried out. To solve this problem, consider an irradiation device consisting of a lamp reflector and a lamp with circularly symmetrical light distribution, which simultaneously performs circular and oscillating movements in the horizontal and vertical planes.

З літературних джерел відомо, що процеси фотосинтезу протікають у двох фазах – світловій і темновій [1]. У зв'язку з цим була висунута гіпотеза про можливість застосування переривчастого освітлення, синхронізованого з тривалістю фаз фотосинтезу [2]. Метою даної роботи є пошук теоретичних основ та прикладних аспектів для подальшого розвитку такого наукового напрямку, як оптичні електротехнології змінного опромінення рослин. Для практичного вирішення даної проблеми розглянемо опромінювальний пристрій (ОП), опромінювач якого складається з відбивача світильника РСР-04В та лампи ДНаТ-400 з круглосиметричним світловим розподілом, який виконує одночасно колові та коливні рухи у горизонтальній та вертикальній площинах, відповідно.

До складу рухомого опромінювального пристрою входять: опорно-поворотний пристрій з дискретним електроприводом, опромінювач, система керування. На рис. 1 приведена модель опромінювального пристрою, який забезпечує задану траєкторію руху потоку випромінювання.

При моделюванні опорно-поворотного пристрою (ОПП) виходили з того, що його ланки з усіма закріпленими на них елементами є твердими тілами, а пристрій в цілому утворює механічну систему, для якої справедливі основні закони механіки твердого тіла.

Кінематичний ланцюг поворотного пристрою складається з трьох ланок, що певним чином з'єднані між собою. Нульова ланка є нерухомою основою ОПП, відносно якої здійснюється відлік переміщення і орієнтація ОУ в просторі. Дві сусідні ланки утворюють між собою кінематичні пари п'ятого класу обертового типу з одним ступенем вільності. Їх відносний рух визначається одним параметром – кутом повороту однієї ланки відносно іншої. Число ступенів вільності ОПП в цілому визначається числом незалежних переміщень, в яких можуть брати участь його ланки. Тому даний поворотний пристрій має два ступені вільності, що забезпечує переміщення ОП в екваторіальній та меридіональній площинах.

Кінематичні співвідношення, що визначають положення, швидкість і прискорення ланок ОПП без врахування дії сил керування і їх моментів, можна отримати розглядаючи рух кожної ланки як рух окремого твердого тіла з врахуванням зв'язків між ланками

В якості узагальнених координат ОПП, як незалежних змінних, що повністю визначають просторову орієнтацію опромінювача використано кути відносних поворотів ланок  $q_1, q_2$ . Це зумовлено тим, що вони співпадають з кутами повороту опромінювача у відповідних площинах і знаходяться в певному масштабі з кутами повороту валів двигунів системи керування.

Спеціальний вибір систем координат ланок ОПП дозволив за допомогою мінімальної кількості параметрів описати перехід від однієї системи до іншої (при довільному виборі систем координат число параметрів дорівнює шість). Побудову систем координат ОПП ОП виконаємо в наступній послідовності.

1. Нумеруємо всі ланки поворотного пристрою (0, 1, 2).
2. Систему координат  $0_0X_0Y_0Z_0$  прив'язуємо до нерухокої основи ОПП (ланка 0). Початок її розташовуємо на осі кінематичної пари, яку складають ланки (0,1). Вісь  $0_0Z_0$  направляємо по осі цієї кінематичної пари, а вісь  $0_0X_0$  - довільно. Вісь  $0_0Y_0$  доповнює осі  $0_0X_0$  і  $0_0Z_0$  до правої трійки векторів.
3. Систему координат  $0_1X_1Y_1Z_1$  прив'язуємо до ланки 1. Вісь  $0_1Z_1$  направляємо по осі кінематичної пари (1, 2). Початок координат  $O_1$  розміщуємо в точці перетину осей  $O_0Z_0$  і  $O_1Z_1$ . Вісь  $O_1X_1$  спрямовуємо по спільному перпендикуляру до осей  $O_0Z_0$  і  $O_1Z_1$ , а вісь  $O_1Y_1$  доповнюватиме систему осей до правої трійки векторів.
4. Систему координат  $O_2X_2Y_2Z_2$  прив'язуємо до ланки 2. Вісь  $O_2Z_2$  спрямовуємо по напрямку оптичної осі опромінювача. Початок координат  $O_2$  прив'язуємо до джерела випромінювання. Вісь  $O_2X_2$  направляємо по спільному перпендикуляру до осей  $O_1Z_1$  і  $O_2Z_2$ . Вісь  $O_2Y_2$  доповнює осі  $O_2X_2$  і  $O_2Z_2$  до правої трійки векторів.
5. Точка М, в яку направляється вісь пучка променів ОП, лежить на осі  $O_2Z_2$  і її положення в системі координат  $O_2X_2Y_2Z_2$  задається вектором  $r_2^M(0,0,Z_2^M)$ .

Взаємне розташування систем координат двох сусідніх ланок залежить, в загальному випадку, від деяких шести параметрів, один з яких є узагальненою координатою ( $q_1$  чи  $q_2$ ), а інші – конструктивними сталими.

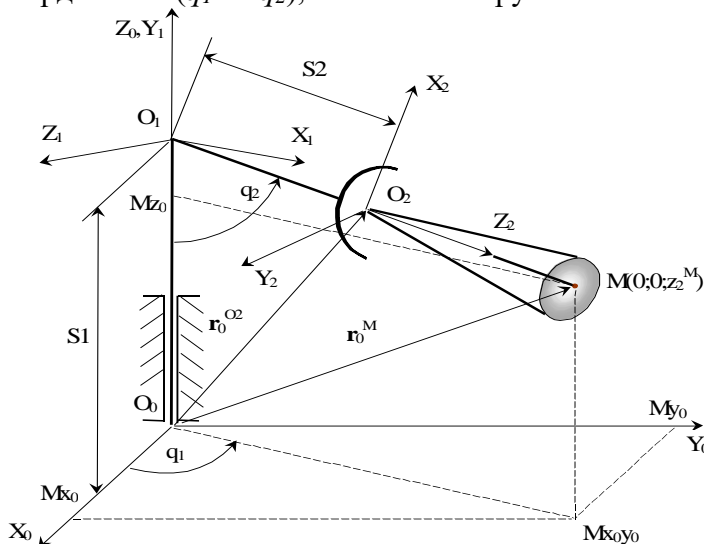


Рис 1. Математична модель рухомого опромінювального пристрою.

Для визначення положення, швидкості і прискорення опромінювача необхідно знати поточні значення узагальнених координат  $q_1, q_2$ , які вимірюються достатньо просто за допомогою відповідних датчиків. Ці величини необхідно знати для всіх ланок поворотного пристрою. Відносне положення ланок в парах визначає їх положення в просторі. Пов'язавши з вибраною ланкою  $i$ -ту систему координат  $O_iX_iY_iZ_i$ , можна звести визначення взаємного

положення ланок до задачі перетворення однієї системи в іншу. Таке перетворення можна виконати за формулою:

$$r_0^M = \alpha r_2^M + r_0^{O_2}$$

де  $r_0^M, r_2^M$  – радіус-вектори т. М в системах координат  $O_0X_0Y_0Z_0$  та  $O_2X_2Y_2Z_2$ , відповідно;

$\alpha$  – матриця направляючих косинусів системи координат  $O_2X_2Y_2Z_2$  відносно системи  $O_0X_0Y_0Z_0$ ;

$r_0^{O_2}$  – радіус-вектор точки  $O_2$  в системі  $O_0X_0Y_0Z_0$ .

Розрахунок  $q(t)$  проводився за складеною програмою по наступній схемі:

- задавались параметри опромінювальної площадки у вигляді прямокутника розмірами  $lx \times ly$ ;
- задавалась траєкторія руху точки М (в даному випадку вона задана у вигляді спіралі, яка розкручується до певної межі):

$$- \begin{cases} x_0^M = (\alpha \omega t + x_0) \cdot \cos \omega t; \\ y_0^M = (\alpha \omega t + y_0) \cdot \cos \omega t; \\ z_0^M = 0; \\ t \in [0; t_1]. \end{cases}$$

- знаходили часові залежності узагальнених координат  $q_1(t)$ ,  $q_2(t)$ ;
- визначали кутові швидкості і прискорення опромінювача.

Для параметрів:  $S_1=3$  м;  $S_2=0$  м;  $x_0=y_0=0$  м;  $t_1=100$  с;  $f=0.1$  Гц;  $a=1/2\pi$  м.;  $lx=20$  м.;  $ly=20$  м, результати розрахунків узагальнених координат, кутових швидкостей і прискорень опромінювача подані на рис. 2.

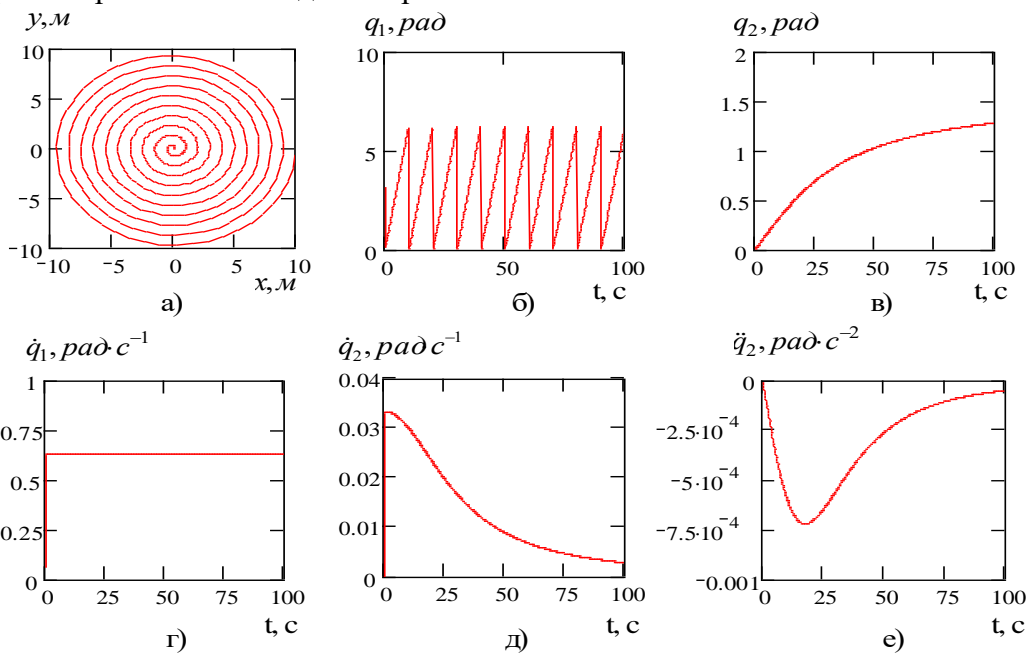


Рис.2. Траєкторія руху точки М (а) та часові залежності узагальнених координат (б, в), узагальнених швидкостей і прискорень (г, д, е) рухомої ОУ.

### Література

1. Степанчук Г.В., Ключка Е.П., Пономарева Н.Е. Оптические электротехнологии переменного облучения растений в культивационных сооружениях: монография. – зерноград: ФГБОУ ВПО АЧГАА, 2013. – 208 с.
2. Андрійчук В.А. Одночасне використання різноспектральних ламп в опромінюючих пристроях для світлокультури рослин // Вісник Тернопільського державного технічного університету ім.І.Пулнюка. - 2001. - Т.6, №3. - С.103-108.

УДК 534.1

Ю.Б. Гладь, к.т.н., доцент

Тернопільський національний технічний університет імені Івана Пулюя, Україна

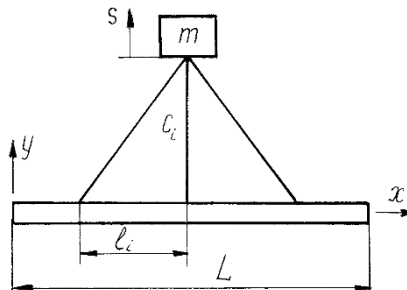
## ОРТОГОНАЛЬНІСТЬ ВЛАСНИХ ФОРМ КОЛИВАНЬ ДЛЯ ПРУЖНОЇ СИСТЕМИ "БАЛКА - КАНАТИ - ЗОСЕРЕДЖЕНА МАСА"

Yu. Hlado, Ph.D, Assoc. Prof

## ORTHOOGONALITY OF NATURAL VIBRATION FORM FOR ELASTIC SYSTEM "BEAM - LINKS - CONCENTRATED MASS"

**Abstract.** An oscillating system consisting of a concentrated mass and an elastic weighted beam connected by a system of weightless elastic ropes is considered. A specific type of orthogonality of eigenforms with a displacement caused by a concentrated mass has been found. The obtained result makes it possible to decompose the initial conditions and loads acting on the system into a series.

Знаходження ортогональних функцій при розв'язку задач динаміки систем з розподіленими параметрами дозволяє розкласти зовнішні збудження та початкові умови в нескінченний ряд по шуканих ортогональних функціях. Розглянемо випадок коливальної системи, що складається із зосередженої маси, що імітує механізм підйому, та пружної вагової балки (вантажу), зв'язаних за допомогою системи невагомих пружних канатів, як зображено на малюнку.



Відомо [1, 2], що поперечні коливання балки, яка складається із кількох ділянок, на кожній із них можуть бути записані, згідно методу Фур'є, у вигляді нескінченного ряду

$$y_i(x_i, t) = \sum_{k=1}^{\infty} T_k(t) Y_{ik}(x_i) \quad (1)$$

Тоді рівняння для визначення власних форм  $Y_{ik}$  на кожній  $i$ -й ділянці балки матиме вигляд

$$\frac{d^4 Y_{ik}}{dx_i^4} - \frac{\lambda_k^4}{L^4} Y_{ik} = 0. \quad (2)$$

де  $\lambda_k$  - власне число  $k$ -ї форми коливань.

Граничні умови та умови спряження ділянок передбачають вільні кінці (3) - відсутність згинного моменту та перерізуючої сили, а також рівності прогинів, кутів повороту та згинних моментів на границях ділянок (4), на відміну від цього перерізуюча сила має стрибок при переході з ділянки на ділянку на величину зусилля в пружному канаті (5):

$$Y_{1,k}''(0) = 0; Y_{1,k}'''(0) = 0; Y_{n+1,k}''(l_{n+1}) = 0; Y_{n+1,k}'''(l_{n+1}) = 0; \quad (3)$$

$$Y_{i,k}(l_i) = Y_{i+1,k}(0); Y_{i,k}'(l_i) = Y_{i+1,k}'(0); Y_{i,k}''(l_i) = Y_{i+1,k}''(0); \quad (4)$$

$$Y_{i,k}'''(l_i) - \frac{C_i}{EJ} [Y_i(l_i) - S_k] = Y_{i+1,k}'''(0). \quad (5)$$

де  $E$  та  $J$  - відповідно, модуль пружності та момент інерції перерізу балки,  
 $S_k$  - коефіцієнт розкладу коливань приєднаної маси  $m$  у нескінчений ряд  
 $S = \sum_{k=1}^{\infty} S_k T_k$

Власні коливання маси  $m$  на кожній із власних частот записуються у вигляді наступного рівняння [3]

$$mS_k \omega_k^2 + \sum_{i=1}^n C_i [Y_{i,k}(l_i) - S_k] = 0;$$

де  $\omega_k^2 = \frac{\lambda_k^4 EJ}{\rho L^4}$  - цей вираз пов'язує власні числа і частоти коливань [3].

Звідси коефіцієнти розкладу визначаються

$$S_k = \frac{\sum_{i=1}^n C_i Y_i(l_i)}{\sum_{i=1}^n C_i - m \omega_k^2}.$$

Дослідження ортогональності власних форм виявило, що власні форми не є ортогональними, тобто

$$\int_0^L Y_k Y_j dx \neq 0,$$

Розклад у ряд Фур'є за звичайним методом неможливий внаслідок неортогональності власних форм коливань балки. Знайдено специфічний тип ортогональності - ортогональність власних форм із зміщенням, що спричиняється зосередженою масою, виду:

$$\int_0^L Y_k (Y_j - S_j) dx = 0,$$

Як показало дослідження ортогональними між собою виявились дві системи функцій  $Y_k$  та  $(Y_j - S_j)$ , тобто кожен елемент однієї системи функцій ортогональний з довільним елементом іншої.

У цьому випадку розклад довільної функції  $f(x)$  в ряд за власними функціями  $Y_k$  може бути записаний:

$$f(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\int_0^L f(x)(Y_k - S_k) dx}{\int_0^L Y_k (Y_k - S_k) dx} Y_k. \quad (6)$$

Згідно виразу (6) можливо розкласти у вигляді нескінченного ряду за власними числами початкові умови та зовнішні навантаження, що діють на систему. Отриманий результат застосовується для визначення зусиль та переміщень в пружних системах вказаного типу.

### Література

1. Бабаков И.М. Теория колебаний. М.: Наука, 1968. 560 с.
2. Тимошенко С.П. Колебания в инженерном деле. М: Наука, 1967. 444 с.
3. Гладь Ю.Б. Колебания упругосвязанных балки и сосредоточенной массы. Київ: Проблемы прочности, 1984, №5, С. 64-66.

УДК 621.01, УДК 517.94

М. І. Ігнатишин<sup>1</sup>, к. т. н., доц., Я. М. Пелех<sup>2</sup>, к. ф.-м. н., доц.,М. С. Михайлишин<sup>3</sup>, к. ф.-м. н, доц.<sup>1</sup> Мукачівський державний університет, Україна<sup>2</sup> Національний університет "Львівська політехніка", Україна<sup>3</sup> Тернопільський національний технічний університет імені Івана Пулюя, Україна

## ДОСЛІДЖЕННЯ ТА АНІМАЦІЯ НЕЛІНІЙНОГО ПРУЖНОГО ГАСНИКА КОЛИВАНЬ

М. І. Ihnatyshyn, Ph.D., Assoc. Prof., Ya. M. Pelekh, Ph.D., Assoc. Prof.

M. S. Mykhailyshyn, Ph.D., Assoc. Prof.

## STUDY AND ANIMATION OF NONLINEAR ELASTIC DAMPER OF OSCILLATIONS

**Abstract.** A mathematical model and animation of the dynamic system of the passive spring damper of oscillations was built. The effect of the spring dynamic absorber was calculated using the proposed method with two-sided estimation of the local error. These calculation formulas make it possible to obtain an approximation to the exact solution from above and below, as well as to calculate the value of the main term of the local error.

Побудовано математичну модель та анімацію динамічної системи пасивного пружинного гасника коливань. Розраховано дію пружинного динамічного поглинача із застосуванням запропонованого методу з двосторонньою оцінкою локальної похибки.

Математичне моделювання гасників коливань є актуальною задачею [1-3]. Розглядається ресора важільного типу (Рис.1).

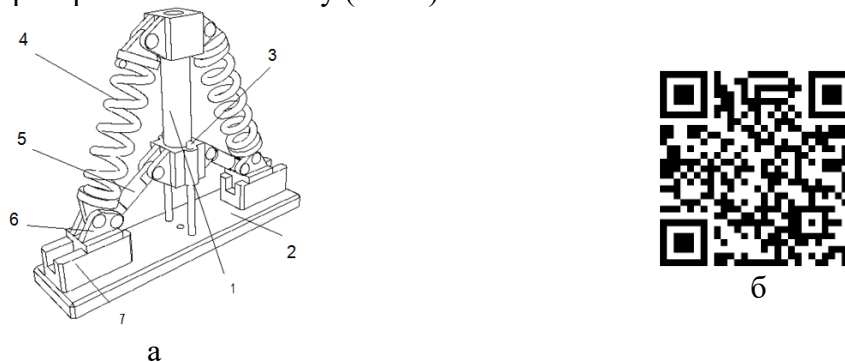


Рис.1. Ресора важільного типу (а – конструкція, б – за QR-кодом анімація математичної моделі ресори в Mathcad) .

Ресора містить рухому (1) і нерухому (2) платформи, які переміщуються одна відносно іншої вздовж напрямних (3), між якими для утворення пружного зв'язку встановлено циліндричні пружини (4) стискання. Керування пружними характеристиками здійснюється завдяки механічній системі управління у вигляді шарнірноважільного механізму. Вона складається з важеля (5), який одним кінцем контактує з рухомою платформою (1), а іншим з повзуном (6), на якому у свою чергу закріплений один з кінців пружини стискання (4), інший кінець якої контактує з рухомою платформою (1). Сам повзун переміщується вздовж напрямної, закріпленої на нерухомій платформі (2) і обумовлює реалізацію необхідного знакозмінного переміщення одного з кінців пружини для зміни кута нахилу її осі відносно головної осі пристрою. Верхня частина рухомої платформи може бути опорою для маси  $m$ . При побудові фізико-

математичної моделі ресори вважаємо, що маса  $m$  значно більша важільно-пружинної конструкції ресори і на масу  $m$  діє періодична збуджуюча сила. Диференціальне рівняння, що описує рух ресори важільного типу є нелінійним і має вигляд:

$$\ddot{y} + \omega_n^2(y) \cdot a + 2 \cdot r \cdot v = f(t) \quad (1)$$

де  $\ddot{y} = a$  – прискорення вертикального руху; початкові умови  $y = 0, v = 0$ .

Перетворимо рівняння руху другого порядку в систему двох рівнянь першого порядку

$$\begin{cases} \dot{y} = v \\ \dot{v} = -\omega_n^2(y) \cdot a - 2 \cdot r \cdot v + f(t) \end{cases} \quad (2)$$

де  $f(t) = \frac{A}{m} \cdot \sin(\omega t)$ ;  $\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}$ ;  $\omega = 2\pi\nu$ ;  $r = \frac{\beta}{2m}$ .

Значення локальної власної частоти коливань важільної ресори має вигляд:

$$\omega_n(y) = \omega_0 \cdot \sqrt{n \cdot \left( 1 - \frac{l}{\sqrt{a^2 + c^2 + 2ad + 2ay}} \right)} \quad (3)$$

**Метод третього порядку точності.** Розглянемо задачу (2) в більш загальній постановці, а саме як систему нелінійних диференціальних рівнянь першого порядку:

$$\bar{y}'(x) = \bar{f}(x, \bar{y}), \quad \bar{y}(x_0) = y_0, \quad x \in [x_0, x_0 + L], \quad (4)$$

де  $[x_0, x_0 + L] \subset R, \quad y(x) \in R^S,$

$\bar{f}: [x_0, x_0 + L] \times R^S \rightarrow R,$

Для зменшення громіздкості записів, представимо наближені розв'язки задачі (4) у скалярному випадку, оскільки на системи рівнянь вони переносяться покомпонентно. Використовуючи теорію побудови однокрокових методів, наближений розв'язок задачі (4) шукаємо у вигляді ланцюгового дробу [4]:

$$y_{n+1}^{[k,l]} = y_n / D_n^{[k,l]}, \quad (5)$$

де

$$D_n^{[k,l]} = \sum_{i=0}^{k-1} d_{i,0} + \frac{d_{k,0}}{1} + \frac{d_{k,1}}{1} + \dots + \frac{d_{k,l-1}}{1+d_{k,l}}. \quad (6)$$

Вирази для  $d_{k,l}$  у випадку  $k+l = 3$  ( $k = \overline{1,3}; l = \overline{0,2}$ ) мають вигляд:

$$\begin{aligned} d_{0,0} = 1, \quad d_{i,0} = -\sum_{m=1}^i d_{i-m,0} \sigma_m / y_n, \quad i = \overline{1,2,3}; \quad d_{2,1} = -d_{3,0} / d_{2,0}, \quad d_{1,2} = d_{2,1} - d_{1,1}, \\ \sigma_m = h \cdot \sum_{i=1}^3 a_{mi} k_i, \quad k_i = f(x_n + \alpha_i h, y_n + h \sum_{j=1}^{i-1} \beta_{ij} k_j), \quad \alpha_i = \sum_{j=1}^{i-1} \beta_{ij}. \end{aligned} \quad (7)$$

Тут  $h$  – крок інтегрування,  $a_{ij}$  ( $i, j = \overline{1,3}$ ),  $\alpha_2, \alpha_3, \beta_{21}, \beta_{31}, \beta_{32}$  – параметри. Наведемо одну з множин значень параметрів, при яких  $y(x_{n+1}) - y_{n+1}^{[k,l]} = O(h^4)$ :

$$\begin{aligned} \alpha_2 = 2/3, \quad \beta_{32} = 2/3, \quad \alpha_3 = 0, \quad \beta_{31} = -\beta_{32}, \quad a_{11} = 1, \quad a_{12} = a_{13} = 0, \\ a_{21} = -3/4, \quad a_{22} = 3/4, \quad a_{23} = 0, \quad a_{31} = -1/(4\beta_{32}), \quad a_{32} = 0, \quad a_{33} = 1/(4\beta_{32}), \end{aligned} \quad (8)$$

де  $\beta_{32} \neq 0$  – параметр.

**Метод з двосторонньою оцінкою локальної похибки.** Значення параметрів, які дають двосторонню оцінку локальної похибки, такі:

$$a_{11} = 1, \quad a_{21} = -\frac{3}{4}(1 + \omega^{[\pm]}), \quad a_{22} = \frac{3}{4}(1 + \omega^{[\pm]}), \quad a_{31} = \frac{3}{4}\omega^{[\pm]} - a_{33}, \quad a_{32} = -\frac{3}{4}\omega^{[\pm]}, \quad (9)$$

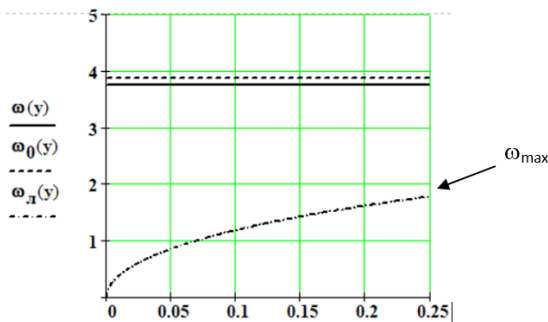
$$\alpha_2 = \frac{2}{3}, \alpha_3 = 0, \beta_{21} = \frac{2}{3}, \beta_{31} = -\frac{1}{4a_{33}}, \beta_{32} = \frac{1}{4a_{33}}, a_{33} - \text{параметр } (a_{33} \neq 0).$$

Локальна похибка цих формул при  $(k = 3, l = 0)$  має вигляд:

$$R^{[3,0]} = \omega^{[\pm]} h^3 \cdot f \cdot Df / (y_n - hf) + O(h^4) = \omega^{[\pm]} h^2 \cdot k_1 \cdot \sum_{i=1}^3 a_{3i} k_i / y_{n-1} + O(h^4).$$

Зауважимо, що запропоновані формули третього порядку точності і відповідні їм двосторонні розрахункові формули другого порядку точності містять в собі одні і ті ж значення параметрів  $\alpha_2, \alpha_3, \beta_{21}, \beta_{31}, \beta_{32}$ . Це означає, що використовуючи лише три звертання до правої частини диференціального рівняння (4) маємо і метод третього порядку точності і два двосторонні наближення другого порядку до точного розв'язку, а також явну оцінку головного члена локальної похибки.

**Результати розрахунків.** З Рис.2 видно, що локальна власна частота коливань  $\omega_n(y)$  має граничне значення  $\omega_{n\max} = 1,813 \text{ c}^{-1}$  при максимальній амплітуді  $y_{\max} = 0,261 \text{ м}$  і менша від  $\omega(y) = 3,77 \text{ c}^{-1}$  – частоти зовнішньої сили та  $\omega_0(y) = 3,873 \text{ c}^{-1}$  – власної частоти коливань пружної системи без важелів.



**Рис. 2.** Залежність локальної власної частоти коливань  $\omega_n(x)$  від миттєвого значення амплітуди рухомої платформи.

Максимальна амплітуда коливань не перевищує 0,25 м, рис.2., резонанс неможливий оскільки  $\omega_n(y) < \omega(y)$  – частота зовнішньої збурюючої сили.

Подальше дослідження передбачає розгляд різних варіантів гасіння коливань з застосуванням двосторонніх методів, наприклад, при ударах, вібраціях з різним характером та законом сил опору зовнішнього середовища.

### Література

1. Сидоренко І.І., Ткачов А.В., Ткачов О.А. Визначення вільних коливань маси пасивного динамічного гасника з додатковою механічною структурою // Вісник ХНАДУ, 2016, вип.74. - С. 94-99.
2. Парашук Д. Л., Зіркевич В. М., Грубель М. Г. Моделювання динаміки гасника коливань із керованою частотою // Науковий вісник НЛТУ України, 2021, т. 31, № 1. - С.105-108.
3. Сидоренко І.І., Гутиря С.С., Аتماжов С.В. Нелінійний динамічний вібропогашувач з механічним зворотним зв'язком // Труды Одесского политехнического университета, 2010, вып. 1(33)–2(34). - С. 28-31.
4. Пелех Я.М., Кунинець А.В., Берегова Г.І., Магеровська Т.В. Методи розв'язування початкової задачі з двосторонньою оцінкою локальної похибки. Фізико-математичне моделювання та інформаційні технології. - 2021, Вип.33. – С. 88-92.



УДК 621.9

В.В. Крупа, к. т. н., В.Р. Кобельник, к. т. н., доц., Н.М. Тимошенко, к. ф.-м. н., доц.,  
І.Р. Петречко

Тернопільський національний технічний університет імені Івана Пулюя, Україна

МАТЕМАТИЧНА МОДЕЛЬ ВПЛИВУ СТОХАСТИЧНОСТІ ПОДАЧІ НА  
ВЕЛИЧИНУ СИЛИ РІЗАННЯ В ІМОВІРНІСНОМУ АСПЕКТІV.V.Krupa, Ph.D, V.R. Kobelnyk, Ph.D, Assoc. Prof., N.M. Tymoshenko Ph.D, Assoc.  
Prof., I.R. PetrechkoTHE MATHEMATICAL MODEL OF THE FEED STOCHASTICITY  
INFLUENCE ON THE CUTTING FORCE SIZE IN THE PROBABILITY ASPECT

**Abstract.** The prevalence of the use of probabilistic statistical methods in the study of cutting processes is shown. A mathematical model of the influence of feed stochasticity on the tangential cutting force has been developed. For specific conditions, it was established that the stochasticity of the feed increases the tangential component of the cutting force to 18.7%, which is significant and must be taken into account at the stage of designing technological processes.

Математичні моделі на основі імовірнісно-статистичних методів дуже поширені при дослідженні процесів різання. Їх найчастіше застосовують при вирішенні задач оптимізації [1-2], а також при дослідженні характеристик процесу різання [3-6]. Наприклад в роботі [1] вирішена задача багатокритеріальної оптимізації процесу точіння з використанням імовірнісно-статистичного підходу, [2] здійснено оптимізацію процесу точіння із загартованої сталі AISI 52100 за допомогою стохастичного програмування, а в роботі [3] враховано стохастичність різноманітних критеріїв на процес оптимізації. Значна кількість робіт присвячена аналізу стохастичності сил різання, що мають місце при зрізанні шару металу при точінні [4] та фрезеруванні [5-6].

Запропонована модель полягає у встановленні закону розподілу величини  $P_z$ , як випадкової величини в залежності від стохастичності подачі. Для цього скористались відомою емпіричною формулою  $P_z = C_p \cdot t^x \cdot s^y \cdot V^n \cdot k_p$  [7] для визначення тангенціальної сили різання в залежності від елементів режиму різання, прийнявши всі інші елементи режиму постійними, крім подачі.

Якщо відомі диференціальні функції  $f(s_i)$  випадкових величин  $S_i$ , то відповідні диференціальні функції  $g(p_z) = g(y)$  випадкових величин  $P_{z_i} = \phi(S_i)$  знаходяться із рівності [8]

$$g(p_z) = f[\psi(p_z)] \cdot \psi'(p_z), \quad (1)$$

де  $\psi(P_{z_i})$  – відповідні обернені функції до функцій  $P_{z_i} = \phi(s_i)$ ; ( $i = \overline{1, n}$ ).

Залежність  $P_z = C_p \cdot t^x \cdot s^y \cdot V^n \cdot k_p$  при  $t = \text{const}$  та  $V = \text{const}$  перетвориться в формулу

$$P_z = C \cdot s^y, \quad (2)$$

де  $C = C_p \cdot t^x \cdot V^n \cdot k_p$ ,  $y$  – постійні величини;  $s$  – випадкова величина з законом розподілу Гауса

Обернена функція  $\psi(P_{z_i}) = \psi(z)$  з урахуванням того, що величина  $P_{z_i}$  завжди додатня та її похідна  $\psi'(P_{z_i}) = \psi'(z)$  мають вигляд відповідно

$$\psi(z) = \sqrt[y]{z/C} \quad (3)$$

$$\psi'(z) = \frac{1}{c \cdot y} \sqrt[y]{\left(\frac{z}{c}\right)^{1-y}} \quad (4)$$

Використавши залежність (7) отримали диференціальну функцію розподілу випадкової величини  $P_z$

$$g(P_z) = \frac{1}{\sigma_s \cdot \sqrt{2 \cdot \pi}} \cdot \frac{1}{C \cdot y} \sqrt{\left(\frac{z}{C}\right)^{1-y}} \cdot e^{-\frac{(\sqrt{z/C-\bar{s}})^2}{2 \cdot \sigma_s^2}} \quad (5)$$

З урахуванням центральної граничної теореми теорії ймовірностей за формулюванням Ляпунова та використавши критерій Колмогорова встановили можливість заміни отриманих функції (5) щільністю ймовірностей нормального закону з параметрами  $M[P_z] = \bar{P}_z$  та  $D[P_z]$ . Для використання критерію Колмогорова визначали  $\lambda$  – максимальне значення модуля різниці між розрахунковою функцією розподілу  $G * (P_z)$  і відповідною теоретичною функцією  $G(P_z)$  та ймовірність  $P(\lambda)$  [8]:

$$\lambda = \max |G * (P_z) - G(P_z)| \cdot \sqrt{n} \text{ і } P(\lambda) = 1 - \sum_{k=-\infty}^{\infty} (-1)^k e^{-2k^2 \lambda^2}.$$

Враховавши, що  $P(\lambda) \geq 0.05$ , отриману розрахункову функцію (5) замінили щільністю ймовірностей усіченого (ліворуч) нормального закону у вигляді

$$h(P_z) = \frac{1}{D(P_z) \cdot \sqrt{2\pi}} \cdot e^{-\frac{(P_z - \bar{P}_z)^2}{2 \cdot D(P_z)}}, \quad (6)$$

Результати проведених розрахунків для реальних значень розсіювання подач [9] встановлено, що відношення  $P_z \bar{P}_z$  становить 1,05-1,093, тобто максимальна тангенціальна сила різання перевищує середню до 9.3%, а відносна похибка розсіювання значення тангенціальної сили різання від середньої становить 9,9-18,7%, що є суттєвим і повинне враховуватись при проектуванні верстатно-інструментальних систем.

#### Література

1. Bohdanova, L.M., Vasilyeva, L.V., Guzenko, D.E. et al. A Software System to Solve the Multi-Criteria Optimization Problem with Stochastic Constraints. *Cybern Syst Anal* 54, 1013–1018 (2018). <https://doi.org/10.1007/s10559-018-0104-2>
2. Alexandre F. Torres, Franco B. Rocha, Fabrício A. Almeida, José H. F. Gomes, Anderson P. Paiva, Pedro Paulo Balestrassi, "Multivariate Stochastic Optimization Approach Applied in a Flux-Cored Arc Welding Process", *Access IEEE*, vol. 8, pp. 61267-61276, 2020.
3. Torres, A.F., de Almeida, F.A., de Paiva, A.P. et al. Impact of stochastic industrial variables on the cost optimization of AISI 52100 hardened-steel turning process. *Int J Adv Manuf Technol* 104, 4331–4340 (2019). <https://doi.org/10.1007/s00170-019-04273-1>
4. Fodor, G., Sykora, H.T. & Bachrathy, D. Stochastic modeling of the cutting force in turning processes. *Int J Adv Manuf Technol* 111, 213–226 (2020). <https://doi.org/10.1007/s00170-020-05877-8>
5. Xuewei Zhang, Tianbiao Yu, Ji Zhao. An analytical approach on stochastic model for cutting force prediction in milling ceramic matrix composites. *International Journal of Mechanical Sciences*, 168, 105314 (2020) <https://doi.org/10.1016/j.ijmecsci.2019.105314>
6. Xuewei Zhang, Tianbiao Yu, Pengfei Xu, Ji Zhao. In-process stochastic tool wear identification and its application to the improved cutting force modeling of micro milling. *Mechanical Systems and Signal Processing*, 164, 108233 (2022) <https://doi.org/10.1016/j.ymsp.2021.108233>
7. Справочник технолога-машиностроителя: в 2 т. / под. ред. А.Г. Косиловой, Р.К. Мещерякова. – М.: Машиностроение, 1985.– Т2. –1985. – 496с.
8. Вентцель Е. С. Теория вероятности. — М.: Наука, 1969. — 576 с
9. Вплив випадковості подачі на висоту мікронерівностей поверхні при її точінні або розточуванні / [П. Кривий, Н. Тимошенко, М. Шарик, В. Крупа] // Львів: Машинознавство, 2013. – №9-10 (195-196). – С. 76-83

УДК 621.941.2-229.323

І.В. Луців, д. т. н., проф.; В.Н. Волошин, к. т. н., доц., І.Г. Лось

Тернопільський національний технічний університет імені Івана Пулюя, Україна

## РОЗРАХУНОК НАПРУЖЕНО-ДЕФОРМОВАНОГО СТАНУ ЗАТИСКНОГО КУЛАЧКА З АДАПТИВНИМИ ВЛАСТИВОСТЯМИ

I.V. Lutsiv, Dr., Prof.; V.N. Voloshyn, Ph.D., Prof. Asist., I.G. Los

### CALCULATION OF THE STRESS-STRAIN STATE OF A CLAMPING JAW WITH ADAPTIVE PROPERTIES

**Abstract.** Mathematical description of the jaw clamping section deformation is obtained. This model is to be used to determine the correction values to ensure accurate centering of thin-walled work-pieces with cylindrical base surfaces. The displacements and equivalent stresses were determined as a result of the study by the finite element method of a clamping jaw with an elastic compensation link.

Найчастіше для базування і закріплення тонкостінних заготовок при токарних операціях використовуються кулачкові патрони, [1]. При затиску таких заготовок часто виникає проблема недостатньої точності центрування. Тому доцільними є розробка та дослідження затискних кулачків із пружними компенсаційними ланками, які володіють властивостями адаптації до поверхонь затиску тонкостінних деталей та забезпечують точність їх центрування.

Одним із принципових підходів створення затискних кулачків із адаптивними властивостями, який пропонується використати, є навмисне введення в їх конструкцію зон деформації [2]. Така концепція дозволяє синтезувати затискні кулачки із пружними компенсаційними ланками та забезпечити прилягання їх контактуючої поверхні до поверхні затиску тонкостінної заготовки.

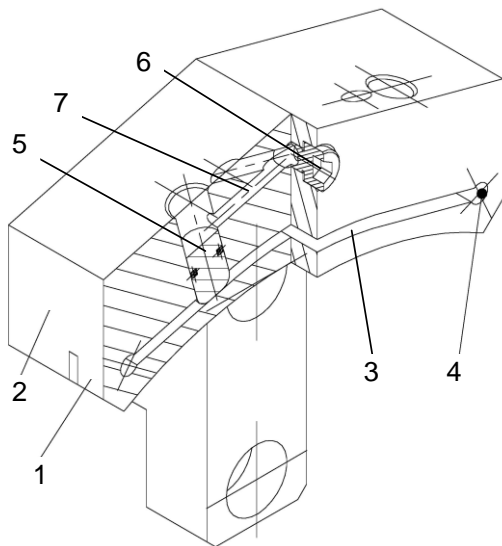


Рисунок 1 - Затискний кулачок з пружними компенсаційними ланками для затиску тонкостінних деталей з циліндричними базовими поверхнями

З використанням цього підходу створена конструкція відповідного затискного кулачка (рис.1), який містить гідравлічне середовище. Його особливістю є забезпечення рівномірного розподілу тиску по поверхні затиску завдяки пружному з'єднанню затискної секції 1 із його базовою секцією 2. Порожнина 3 виконана майже по всій ширині затискного кулачка і є тангенціальною по відношенню до його радіального переміщення. Затискна секція 1 приєднана до базової секції 2 за допомогою твердотільних шарнірів 4, що надає їй пружні властивості в радіальному напрямку та сприяє рівномірному розподілу тиску на заготовку. Приведення в дію затискної секції 1 здійснюється плунжерами 5 під тиском рідини, який створюється за допомогою гвинта 6 по гідравлічних каналах 7.

Для кількісної оцінки напружено-деформованого стану затискної секції та впливу неї конструктивних та силових параметрів було обрано метод скінченно-елементного аналізу з використанням CAD/CAE-системи. Розрахункова модель розроблена з використанням 3D моделювання на основі створення сітки скінчених елементів, яка складається із досить точних шестигранних і тетраедричних елементів. Для підвищення точності моделювання для твердотільних шарнірів була розроблена сітка скінчених елементів меншого розміру.

Були знайдені початкові умови. Матеріалом затискного кулачка обрана конструкційна легована сталь з міцністю на розрив у 980 МПа та межею текучості 785 МПа. Для базової секції затискного кулачка обрано кінематичну граничну умову типу «фіксація». Силове навантаження змінювали від 100Н до 1000Н. Моделювання здійснено у статичній постановці. Модель вважається лінійно-пружною.

Відповідно до результатів моделювання розраховані еквівалентні напруження  $\sigma_e$  у затискному кулачку із пружною компенсаційною ланкою. Аналіз розподілу еквівалентних напружень  $\sigma_e$  (рис. 2,а) показує, що найбільші їх значення будуть у зонах твердотільних шарнірів. Ці максимальні напруження, отримані в результаті моделювання при різних значеннях навантажень  $P$  на плунжер, показані на рис. 2,б.

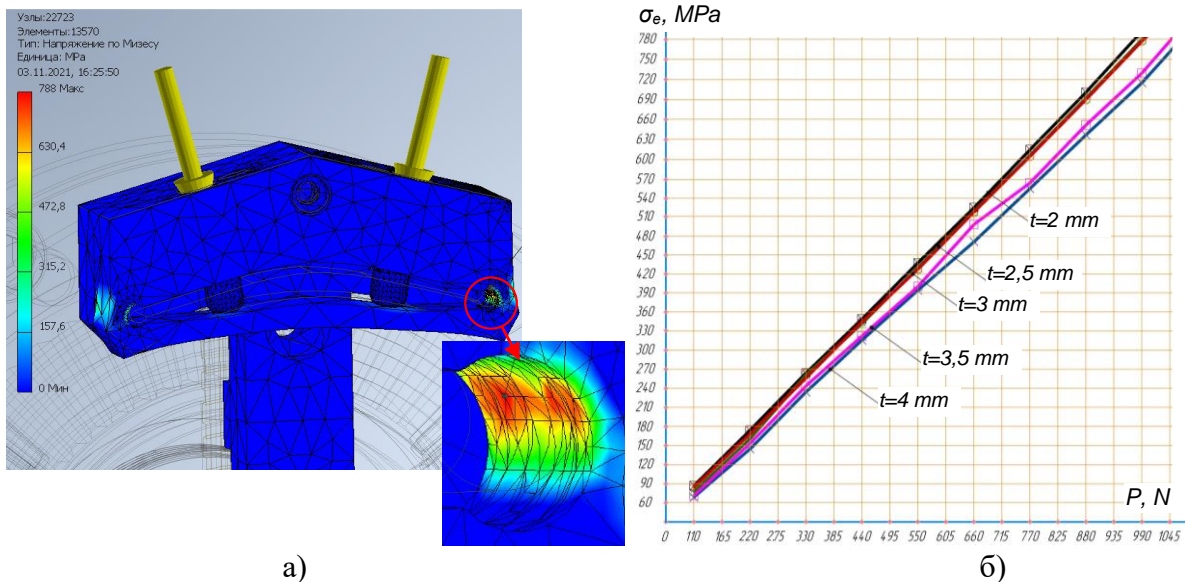


Рисунок 2 – Характер розподілу еквівалентних напружень  $\sigma_e$  по об'єму кулачка (а) і максимальні напруження (б) в залежності від сили  $P$  і товщини стінки  $t$

Дослідження також було проведене стосовно деформацій секції затискного кулачка. Отримані максимальні переміщення центральної частини затискного кулачка знаходяться в межах 0,023...0,0235 мм. Ці значення дозволяють забезпечити центрування тонкостінних заготовок вздовж циліндричних базових поверхонь завдяки пружним компенсаційним ланкам затискних кулачків.

### Література

1. Кузнецов Ю.Н., Волошин В.Н., Неделчева П.М., Эль-Дахаби Ф.В. Зажимные механизмы для высокопроизводительной и высокоточной обработки резанием: Монография. Габрово: Университетское издательство «Васил Априлов», 2010. 724 с.
2. Lutsiv I., Voloshyn V., Bytsa R. Adaptation of lathe chucks clamping elements to the clamping surface. Machines, Technologies, Materials. International journal. 2015. Issue 12. P. 64-67.

УДК 621.791.052

М. Підгурський, д. т. н., проф.; М. Сташків, к. т. н., доц.; І. Підгурський, к. т. н.  
Тернопільський національний технічний університет імені Івана Пулюя

### МОДЕЛЮВАННЯ РОСТУ ТРІЩИНИ У ПЕРЕТИНІ ДВОТАВРОВОЇ БАЛКИ

М. Pidgurskyi, Dr., Prof.; М. Сташків, Ph.D, Assoc. Prof; І. Pidgurskyi, Ph.D

### MODELING OF CRACK GROWTH IN THE CROSS- SECTION OF I-BEAM

Важливою областю розрахунків на міцність є прогнозування довговічності елементів машин із втомними тріщинами, що розвиваються, з позиції механіки руйнування. Ці методи знаходять практичне застосування в машинобудуванні стосовно елементів конструкцій, які сприймають змінні в часі навантаження і стадія роботи яких після утворення тріщини є суттєвою для визначення ресурсу машини.

У рамках лінійної механіки руйнування матеріалів дослідження напружено-деформівного стану елементів рамних конструкцій при наявності в них тріщиноподібних дефектів зводиться до визначення коефіцієнта інтенсивності напружень (КІН). Подібні задачі з врахуванням реального навантаження та геометрії конструкцій достатньо складні в математичному плані, тому безпосереднє застосування аналітичних методів в інженерних задачах досить обмежене. Для інженерних задач доцільною є побудова відносно простих, нехай і менш точних залежностей для визначення КІН, в яких менша точність розрахунку окупиться малою трудомісткістю.

Основним видом навантаження елементів рамних конструкцій є згинальні напруження. В зв'язку з цим розглянемо основні положення розрахунку КІН для тріщин, що розвиваються у двотаврі при дії згинального моменту  $M$ .

Розглянемо двотавровий профіль і виділимо характерні стадії розвитку тріщини:

- наскрізна тріщина розповсюджується з краю однієї із полиць вздовж неї (рис. 1, а);
- тріщина розповсюджується одночасно у полиці та стінці двотавра (рис. 1, б);
- тріщина займає повністю одну із полиць і розвивається у стінці двотавра (рис. 1, в).

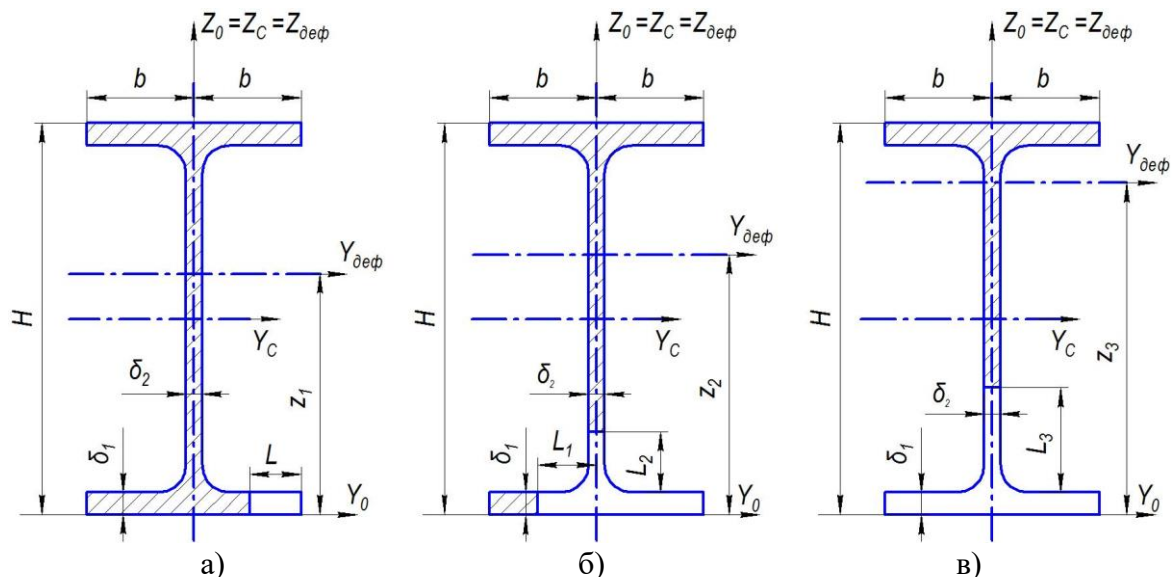


Рис. 1. Характерні стадії росту тріщини у двотаврі

При згині елемента з тріщиною в поперечному перетині виникають номінальні напруження, які визначатимуться зміною моменту інерції та координат центру мас нетто-перетину двотавра. Результати розрахунків показують, що суттєвий вплив має

вертикальна координата  $Z$ , тоді як координата  $Y$  центру мас змінюється незначно (0,1 б) і суттєвого впливу на номінальні напруження не має.

Для першої стадії розвитку тріщини номінальні напруження визначаються залежностями:

$$\sigma_1 = \frac{M\left(z_1 - \frac{\delta_1}{2}\right)}{I_{Y1}}, \quad (1)$$

$$z_1 = \frac{b\delta_1 \frac{\delta_1}{2} + (b-L)\delta_1 \frac{\delta_1}{2} + (H-2\delta_1)\delta_2 \frac{H}{2} + 2b\delta_1\left(H - \frac{\delta_1}{2}\right)}{b\delta_1 + (b-L)\delta_1 + (H-2\delta_1)\delta_2 + 2b\delta_1}, \quad (2)$$

$$I_{Y1} = \frac{\delta_2(H-2\delta_1)^3}{12} + \delta_2(H-2\delta_1)\left(z_1 - \frac{H}{2}\right)^2 + \frac{2b\delta_1^3}{12} + 2b\delta_1\left(H - z_1 - \frac{\delta_1}{2}\right)^2 + \frac{b\delta_1^3}{12} + b\delta_1\left(z_1 - \frac{\delta_1}{2}\right)^2 + \frac{(b-L)\delta_1^3}{12} + (b-L)\delta_1\left(z_1 - \frac{\delta_1}{2}\right)^2, \quad (3)$$

де  $z_1$  - відстань від нижнього краю профілю (вісь  $Y_0$ ) до центру мас нетто-перетину (біжуча вісь  $Y_{def}$ ), м;

$I_{Y1}$  - момент інерції нетто-перетину швелерного профілю відносно осі  $Y_{def}$ , що проходить через біжучий центр його мас, м<sup>4</sup>.

У другій стадії тріщина одночасно розвивається у двох взаємно перпендикулярних напрямках: вздовж полиці під дією напружень розтягу та в стінці під дією згинальних напружень (рис. 1, б). Тоді за аналогією до першої стадії розвитку тріщини запишемо:

$$\sigma_{21} = \frac{M\left(z_2 - \frac{\delta_1}{2}\right)}{I_{X2}}, \quad \sigma_{22} = \frac{M(z_2 - \delta_1 - L_2)}{I_{X2}}, \quad (4)$$

$$z_2 = \frac{(b-L_1)\delta_1 \frac{\delta_1}{2} + (H-2\delta_1-L_2)\delta_2\left(\frac{H+L_2}{2}\right) + 2b\delta_1\left(H - \frac{\delta_1}{2}\right)}{(b-L_1)\delta_1 + (H-2\delta_1-L_2)\delta_2 + 2b\delta_1}, \quad (5)$$

$$I_{Y2} = \frac{\delta_2(H-2\delta_1-L_2)^3}{12} + \delta_2(H-2\delta_1-L_2)\left(z_2 - \left(\frac{H-L_2-2\delta_1}{2} + L_2 + \delta_1\right)\right)^2 + \frac{2b\delta_1^3}{12} + 2b\delta_1\left(H - z_2 - \frac{\delta_1}{2}\right)^2 + \frac{(b-L_1)\delta_1^3}{12} + (b-L_1)\delta_1\left(z_2 - \frac{\delta_1}{2}\right)^2, \quad (6)$$

де  $\sigma_{21}$  та  $\sigma_{22}$  - номінальні напруження у полиці та стінці двотавра, відповідно, МПа.

Аналогічно для третьої стадії розвитку тріщини (рис. 1, в) запишемо:

$$\sigma_3 = \frac{M(z_3 - \delta_1 - L_3)}{I_{Y3}}, \quad (7)$$

$$z_3 = \frac{(H-2\delta_1-L_3)\delta_2\left(\frac{H+L_3}{2}\right) + 2b\delta_1\left(H - \frac{\delta_1}{2}\right)}{(H-2\delta_1-L_3)\delta_2 + 2b\delta_1}, \quad (8)$$

$$I_{Y3} = \frac{\delta_2(H-2\delta_1-L_3)^3}{12} + \delta_2(H-2\delta_1-L_3)\left(z_3 - \frac{H-L_3}{2}\right)^2 + \frac{2b\delta_1^3}{12} + 2b\delta_1\left(H - \frac{\delta_1}{2} - z_3\right)^2. \quad (9)$$

Решта позначень – на рис. 1.

КІН для тріщини в поперечному перетині двотавра можна записати:

$$K_{I(i,j)} = M \frac{H}{2} \frac{1}{I_Y} \sqrt{\pi \cdot L_i} F_{i,j}, \quad (10)$$

де  $L$  – визначається із відношення площі тріщини до повної площі перетину двотавра  $\varepsilon$ :

$$\varepsilon_{i,j} = \frac{\sum L_i \cdot \delta_j}{4b\delta_1 + (H - 2\delta_1)\delta_2}, \quad (11)$$

де  $i = 1, 2, 3$  – індекс довжини тріщини на певній стадії її розвитку;

$j = 1, 2$  – індекс товщини елемента;

$M \frac{H}{2} \frac{1}{I_Y} = \sigma$  - нормальні напруження у бездефектному перетині двотавра, МПа;

$I_Y$  - момент інерції поперечного перетину бездефектного двотавра, м<sup>4</sup>:

$$I_Y = \frac{\delta_2(H - 2\delta_1)^3}{12} + \frac{2b\delta_1^3}{12} + 2 \left( \frac{2b\delta_1^3}{12} + 2b\delta_1 \left( \frac{H - \delta_1}{2} \right)^2 \right). \quad (12)$$

$F_{i,j}$  - поправкові функції розвитку тріщини у полиці та стінці двотавра відповідно.

Вирази функцій  $F_{11}$ ,  $F_{21}$ ,  $F_{22}$  та  $F_{32}$  не наводяться через їх громіздкість. Графічно ці функції для двотавра №12 представлено на рис. 2.

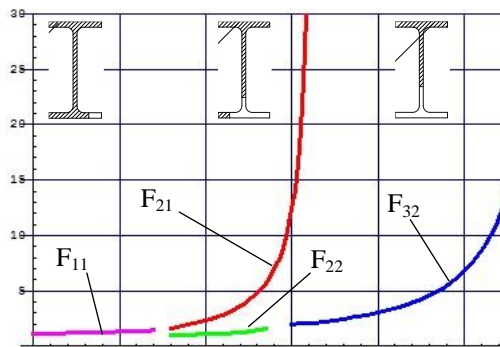


Рис. 2. Графічне зображення поправкових функцій для двотавра №12 з тріщиною

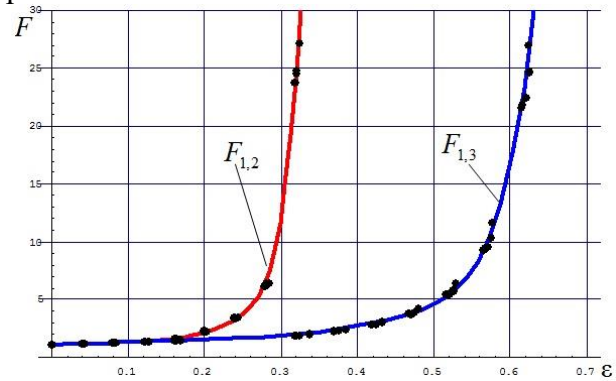


Рис. 3. Узагальнюючі поправкові функції для ряду двотаврів від №12 до №24

Для ряду стандартного двотаврового прокату від №12 до №24 масив значень поправкових функцій апроксимується узагальненими функціями:

- узагальнена функція  $F_{1,2}^{(\sigma)}$  для сумарної тріщини (перша та друга стадія):

$$F_{1,2} = 1.118 + 1.464\varepsilon - 26.993\varepsilon^2 + 508.769\varepsilon^3 + 6037.150\varepsilon^4 - 197422532\varepsilon^5 + 1688532956\varepsilon^6 - 5981591385\varepsilon^7 + 7735093965\varepsilon^8; \quad (13)$$

- узагальнена функція  $F_{1,3}^{(\sigma)}$  для сумарної тріщини (перша та третя стадія):

$$F_{1,3} = 1.125 + 0.919\varepsilon - 3.148\varepsilon^2 + 117.736\varepsilon^3 + 594.737\varepsilon^4 - 11636332\varepsilon^5 + 50187.549\varepsilon^6 - 87874.519\varepsilon^7 + 55781.902\varepsilon^8. \quad (14)$$

Графічно масиви точок для ряду двотаврів від №12 до № 24 та узагальнюючі функції представлено на рис. 3.

Отримані результати з визначення КІН для тріщин, що розвиваються в складних за конфігурацією перетинах, дозволяють більш обґрунтовано підійти до визначення ресурсу та підвищення надійності роботи конструкцій з тонкостінних елементів відкритого профілю.

УДК 519.2:621.391

М.В. Приймак, д. т. н., проф.; Б.Б.Млинко, к. т. н., доц.

Тернопільський національний технічний університет ім. Івана Пулюя, Україна

**ПЕРІОДИЧНІ ЛАНЦЮГИ МАРКОВА ТА ЇХ ВИКОРИСТАННЯ  
В ЗАДАЧАХ ЕЛЕКТРОЕНЕРГЕТИКИ**

M.V. Pryimak, Dr., Prof., B.B.Mlynko, Ph.D., Assoc. Prof.

**PERIODIC MARKOV CHAINS AND THEIR APPLICATION IN THE PROBLEMS  
OF ELECTRIC POWER INDUSTRY**

**Abstract.** It is pointed out that in order to describe and study processes (signals, phenomena), which are of random nature, it is advisable to distinguish particular types of processes, to specify their models and on this basis to develop methods and algorithms for their analysis. One of such models is Markov chain. We consider a new class of chains - periodic Markov chains, methods of their processing and application in electric power industry for forecasting power consumption loads.

**1. Вступ.** При вивченні явищ природи, процесів техніки, економіки, дослідженні різноманітних сигналів, доводиться їх опис проводити за допомогою випадкових процесів  $\xi(t), t \in I$ , чи послідовностей  $\xi_n, n = 1, 2, \dots, N$ . Загальний метод математичного опису випадкових процесів полягає в наступному/ Для будь-якого додатного числа  $n$  і довільних моментів часу  $t_1, t_2, \dots, t_n$  вважаються відомими функції розподілів

$$F(t_1, \dots, t_n; x_1, \dots, x_n) = P(\xi(t_1) < x_1, \dots, \xi(t_n) < x_n).$$

Пропонований метод опису випадкових процесів універсальний і дозволяє у принципі з'ясувати всі особливості поведінки процесу у часі. Проте цей спосіб дуже громіздкий. Тому для отримання певних результатів доцільно використовувати інший підхід: виділяти частинні типи випадкових процесів, що приймаються як моделі реальних явищ, і для них розробляти як аналітичний апарат їх дослідження так і відповідні методи статистичного аналізу. У зв'язку з різними реальними процесами виділено кілька класів випадкових процесів.

Серед різних класів випадкових процесів особливого значення набули **ланцюги Маркова і марковські процеси**. Ці моделі дозволяють враховувати характерну для багатьох стохастичних систем (сигналів) так звану **ланцюгову залежність**, яку прийнято називати **марківською властивістю**. Розкриваючи суть марковості на описовому рівні, іноді говорять, що коли відомий «теперішній» стан системи, то ніяка додаткова інформація про поведінку системи **в минулому** не впливає на ймовірнісні характеристики, які керують (описують) поведінкою системи в майбутньому. Більш коротко властивість марковості характеризують ще так: «майбутнє» системи не залежить від «минулого», якщо відоме «теперішнє».

**2. Поняття ланцюга Маркова.** Для означення ланцюга Маркова скористаємося такою схемою [1]. Нехай деяка система  $S$  в процесі її функціонування змінює свій стан (положення). Будемо вважати, що зміна стану відбувається в цілочисельні моменти часу  $n = 0, 1, 2, \dots$ , а можливі стани  $x_i$  системи  $S$  утворюють множину  $X$ , яка є не більше, ніж зліченною. Для спрощення можливі стани  $x_i$  ототожнимо із послідовністю натуральних чисел:  $x = 1, 2, 3, \dots$ . Серед реальних систем важливий клас утворюють системи, в яких переходи із стану в стан здійснюються випадково. При цьому



ймовірність переходу системи із одного фіксованого стану в інший в даний момент часу не залежить від того, як вела себе система в попередні моменти. Такі системи називають марковськими.

Щоб навести означення ланцюга Маркова, спочатку розглянемо послідовність випадкових величин  $\xi_n, n = 0, 1, 2, \dots$ , які описують стани функціонуючої стохастичної системи в моменти часу  $n = 0, 1, 2, \dots$ , і приймають значення із «дискретного» фазового простору, який співпадає з множиною натуральних чисел  $X = 0, 1, 2, \dots$ , тобто  $\xi_n$  – цілочисельні величини.

**Визначення 1.** Послідовність  $\xi_n, n = 0, 1, 2, \dots$  називається **ланцюгом Маркова**, якщо для всіх  $n \geq 1$  умовна ймовірність

$$P(\xi_n = j | \xi_0 = k, \dots, \xi_{n-2} = l, \xi_{n-1} = i) = P(\xi_n = j | \xi_{n-1} = i) = p_{i,j}(n). \quad (1)$$

Числа  $i, j, k, l$  належать фазовому просторові  $X$ , тобто є невід’ємними і цілими.

Перехідні ймовірності  $p_{ij}(n)$  в сукупності утворюють матрицю переходів

$$\Pi(n) = \|p_{ij}(n)\|, i, j \in X, n = 0, 1, \dots$$

Аналізуючи (1), видно, що для повного задання ланцюгів Маркова достатньо знати лише двомірний розподіл. Це властивість значно спрощує вирішення ряду задач теоретичного і прикладного характеру.

Із ланцюгів Маркова виділено важливий клас – однорідні ланцюги.

**Визначення 2.** Ланцюг  $\xi_n, n = 0, 1, \dots$ , називається **однорідним**, якщо перехідні ймовірності  $p_{ij}(n)$  не залежать від  $n$ , тобто  $p_{ij}(n) = p_{ij}$ . Звідси видно, що однорідний ланцюг визначається лише однією матрицею переходів  $\Pi = \|p_{ij}\|$ .

### 3. Періодичні ланцюга Маркова.

Однорідні ланцюги Маркова є вдалою моделлю для систем, що функціонують в стаціонарному режимі. Проте результати досліджень багатьох стохастичних систем показують, що крім марковості принциповою особливістю їх функціонування є **стохастична періодичність**. Яскравим прикладом такої поведінки є графіки споживання електроенергії, які ще називають графіками енергонавантажень. Для прикладу на рисунку 1 показано графік енергоспоживання навантаження для Київенерго для п’яти робочих днів грудня одного із минулих років.

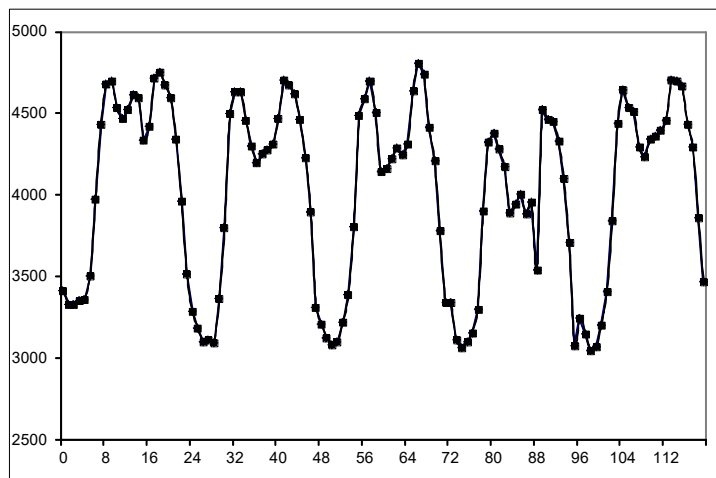


Рисунок 1. Графік навантаження Київенерго за п’ять робочих днів грудня одного із минулих років

Важливою задачею дослідження енергонавантажень є розрахунок їх прогнозних значень. Для вирішення цієї задачі може бути використаний новий клас ланцюгів – періодичні ланцюги Маркова, вперше введені та розглянуті в роботах [2-4].

**Визначення 3.** Ланцюг Маркова  $\xi_n, n = 0, 1, \dots$ , називається **періодичним**, якщо періодичними є його ймовірності переходів, тобто існує ціле  $L > 1$ , що

$$p_{ij}(n) = p_{ij}(n + L), i, j \in X,$$

де  $i, j$  – стани,  $i, j \in X$ .

Очевидно, що для періодичного ланцюга Маркова його матриці переходів  $\Pi(n) = [p_{ij}(n)]$  теж змінюються періодично з цим же періодом  $L$ :

$$\Pi(n) = \Pi(n + L), n = 0, 1, \dots$$

Із означення також випливає, що періодичний ланцюг визначається першими  $L$  матрицями переходів

$$\Pi(0), \dots, \Pi(k), \dots, \Pi(L-1).$$

Важливо, що для періодичних ланцюгів Маркова мають місце певні властивості однорідності. Доведена теорема, суть якої полягає в наступному. Вкладена по відношенню до періодичного ланцюга послідовність, елементи якої взяті через період  $L$ , є однорідним ланцюгом Маркова. На цій основі розроблені аналітичні та статистичні методи дослідження періодичних ланцюгів Маркова [4-6], що дозволяють вирішувати певні задачі як аналітичного характеру так і прикладного спрямування:

- Знаходження оцінок матриць переходів періодичних ланцюгів Маркова.
- Імітаційне моделювання періодичного ланцюга Маркова.
- Розрахунок прогнозних значень періодичних ланцюгів Маркова та використання методів прогнозу в електроенергетиці для прогнозу графіків електроспоживання, оптимізації функціонування енергосистем.

### Література

1. Гнеденко Б.В. Курс теории вероятностей. - М.: Наука, 1969. - 400 с.
2. Приймак М.В. Основи теорії моделювання, аналізу і прогнозу в автоматизованих системах управління ритмічними процесами: Автореф. дис... докт. техн. наук: 05.13.06 / Київ: НАУ, 2001. – 34 с.
3. Приймак М.В. Марківські періодичні процеси // Вісник Тернопільського державного технічного університету. – 2003. – Т.8, число 3. – С. 17-21.
4. Приймак М.В. Періодичні ланцюги Маркова в задачах статистичного аналізу і прогнозу енергонавантажень // Технічна електродинаміка. – 2004. – №2. – С. 3-7.
5. Приймак М., Прошин С. Елементи однорідності для періодичних ланцюгів Маркова // Вісник Тернопільського державного технічного університету. – 2009. – Том 14 – № 2. – С. 114-123.
6. Приймак М.В. Прошин С.Ю. Оцінювання матриць переходів періодичних ланцюгів Маркова // ISSN 1990-5548 Електроніка та системи управління. – 2009. – №3(21). – С. 26-33.

УДК 517.51

М.В.Приймак, докт. техн. наук, проф.

Тернопільський національний технічний університет імені Івана Пулюя, Україна

## ПЕРІОДИЧНІ ФУНКЦІЇ ЗІ ЗМІННИМ ПЕРІОДОМ ТА ОРТОГОНАЛЬНІ СИСТЕМИ ТАКИХ ФУНКЦІЙ

M.V.Pryimak. Dr., Prof.

### PERIODIC FUNCTIONS WITH A VARIABLE PERIOD AND ORTHOGONAL SYSTEMS OF SUCH FUNCTIONS

**Abstract.** The earlier introduced concept of a function with a variable period as the periodic function generalization has been taken into consideration. The properties of the above-mentioned functions have been studied and a number of examples have been given. An orthogonal system of trigonometric functions with a variable period has been constructed and a generating differential equation has been derived for such system.

В Господа один день – як тисяча років,  
а тисяча років – як один день.  
(2 ап. Петра, 3:8)

**1. Вступ.** В природі зустрічаються багато періодичних (ритмічних коливних) сигналів, періоди яких вже не є постійними, а певним чином змінюються. Наглядним прикладом є електрокардіограми (ЕКГ), отримані під час чи після дії на організм пацієнта фізичного навантаження. На рис. 1 наведені два відрізки ЕКГ, кожний тривалістю 3 сек., взяті через 60 сек. (верхній графік) та 90 сек. (нижній графік) після дії навантаження. Аналізуючи графіки, видно, що форма ЕКГ приблизно повторюється, але при цьому період повторюваності змінюється, а саме збільшується, що відповідає зменшенню частоти пульсу.



Рис. 1. Відрізки електрокардіограми, взяті через 60 та 90 секунд після дії фізичного навантаження.

Подібною до ЕКГ буде поведінка спірограми, Прикладами таких сигналів є звучання сирени повітряної тривоги, сирени швидкої допомоги, робота двигунів в перехідних режимах при зміні зовнішнього навантаження. За даними Міжнародної служби обертання Землі добовий період її обертання є змінним.

Наявність сигналів із змінним періодом ставить природне запитання, як вивчати подібні сигнали. Огляд літературних джерел показує, що ні **теорії**, ні **загальних аналітичних методів** дослідження таких сигналів до останнього часу **не існувало**.

### 2. Загальний підхід до аналітичного вивчення сигналів із змінним періодом.

Досвід багатьох науковців свідчить, що для дослідження сигналів аналітичними та обчислювальними методами надзвичайно плідним вважається підхід, суть якого зводиться до тріади «**модель-алгоритм- програма**» [1, стр.8-9]. Згідно цього підходу на **першому** етапі вибирається **модель** сигналу, що відображає в математичній формі найважливіші його властивості. На **другому** етапі на основі моделі розробляється **алгоритм** дослідження сигналів, на **третьому** – створюється відповідне **програмне** забезпечення обробки сигналів. Основним в цьому підході є, безумовно, перший етап –

обґрунтування моделі, оскільки від вдалого вибору моделі залежить успішність розв'язків наступних задач тріади. Що стосується сигналів із змінним періодом, то вперше модель була запропонована в [2].

**3. Означення періодичної функції із змінним періодом (ПФЗП).**

Функція  $f(x)$  дійсного аргументу  $x \in I \subseteq R$  називається **періодичною із змінним періодом**, якщо існує така диференційовна функція  $T(x) > 0$ , що для всіх  $x \in I$  таких, що  $x + T(x) \in I$ , виконується рівність

$$f(x) = f(x + T(x)). \tag{1}$$

Функцію  $T(x)$  будемо називати змінним періодом.

Із (1) при  $T(x) = T = const$  випливає, що  $f$  є звичайною періодичною функцією з періодом  $T$ . Приклад графіка  $T(x)$  показано на рис. 2.

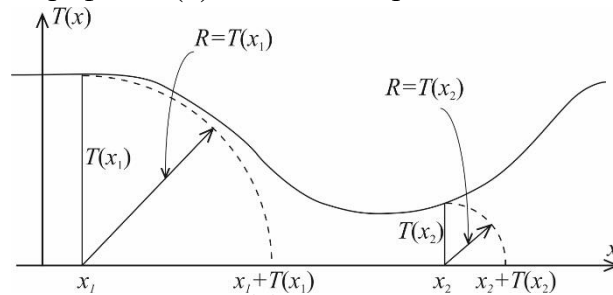


Рис. 2. Змінний період  $T(x)$ , його значення в точках  $x_1$  і  $x_2$ .

**4. Деякі властивості змінного періоду.**

**4.1.** Похідна змінного періоду задовольняє умові:  $T'(x) > -1$ .

**4.2.** Відомо, що для періодичної функції  $g(x)$  з постійним періодом  $T$  виконується рівність  $g(x) = g(x + T) = g(x - T)$ . Для функції  $f(x)$  із змінним періодом  $T(x)$  аналогічна рівність  $f(x) = f(x + T(x)) = f(x - T(x))$  в загальному не виконується. Тому для випадку, коли аргумент  $x$  зменшується, змінний період позначимо через  $T^-(x)$ . При цьому виконується рівність

$$f(x) = f(x - T^-(x)).$$

Можна показати, що періоди  $T(x)$  і  $T^-(x)$  взаємопов'язані:

$$T(x) = T^-(x + T(x)), \quad T^-(x) = T(x - T^-(x)).$$

**5. Приклади ПФЗП та їх змінні періоди.** Найпростішими ПФЗП є тригонометричні функції  $\sin x^\alpha$ ,  $\cos x^\alpha$ ,  $\alpha > 0$ ,  $\alpha \neq 1$ ,  $x \in I$ . На рис. 3 зображений графік функції  $\sin x^{3/4}$  (неперервна лінія), та для порівняння графік функції  $\sin x$  (пунктирна лінія).

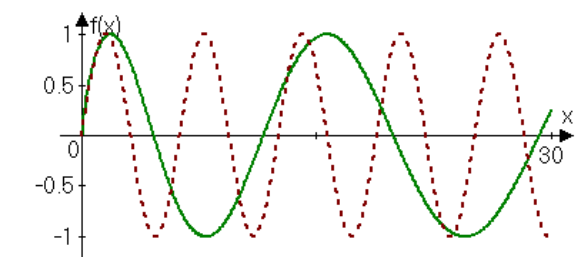


Рис. 3. Функція  $\sin x^{3/4}$  – неперервна лінія,  $\sin x$  – пунктирна лінія.

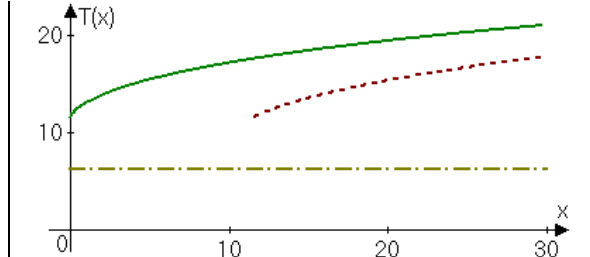


Рис. 4. Змінні періоди для функції  $\sin x^{3/4}$ :  $T(x)$  – неперервна лінія;  $T^-(x)$  – пунктирна лінія. Період  $T = 2\pi$  для функції  $\sin x$  – штрих-пунктирна лінія

**Твердження.** Для функцій  $\sin x^\alpha$  та  $\cos x^\alpha$ ,  $\alpha > 0$ ,  $x \geq 0$ , їх змінні періоди  $T_\alpha(x)$  та  $T_\alpha^-(x)$  визначаються формулами:

$$T_\alpha(x) = -x + (x^\alpha + 2\pi)^{1/\alpha}, \quad x \geq 0, \quad T_\alpha^-(x) = x - (x^\alpha - 2\pi)^{1/\alpha}, \quad x \geq T_\alpha(0).$$

Як приклад, для функції  $\sin x^{3/4}$ ,  $x \geq 0$ , її змінні періоди

$$T(x) = -x + \left(x^{3/4} + 2\pi\right)^{4/3}, \quad x \geq 0, \quad T^-(x) = x - \left(x^{3/4} - 2\pi\right)^{4/3}, \quad x \geq (2\pi)^{4/3}.$$

Графіки періодів показані на рис. 4.

**6. Ортогональна система тригонометрична функцій із змінним періодом.** В роботах [2-4] сформульована

**Теорема 1.** Тригонометрична система функцій

$$\sin mx^\alpha, \cos mx^\alpha, \quad x \geq 0, \quad \alpha > 0, \quad m = 1, 2, \dots, \quad (2)$$

із змінним періодом  $T_\alpha(x) = -x + (x^\alpha + 2\pi)^{1/\alpha}$ ,  $x \geq 0$ , є ортогональною з ваговою функцією  $\rho_\alpha(x) = \alpha x^{\alpha-1}$  в просторі  $L_\rho^2(x, x + T_\alpha(x))$ , норма кожної із функцій системи (2) рівна  $\sqrt{\pi}$ .

Звернемо увагу, що довжина інтервалу ортогональності  $(x, x + T_\alpha(x))$ , який фігурує у виразі  $L_\rho^2(x, x + T_\alpha(x))$ , вже не є постійною, а змінюється у відповідності до значення періоду  $T_\alpha(x)$ .

**7. Узагальнені тригонометричні функції із змінним періодом.** Узагальненням тригонометричних функцій  $\sin x^\alpha$ ,  $\cos x^\alpha$ ,  $x \geq 0$ ,  $\alpha > 0$ , є функції [3]

$$\sin g(x), \cos g(x), \quad x \in I, \quad (3)$$

де  $g(x)$  – строго зростаюча (спадна) диференційовна функція, Для функцій (3) їх змінні періоди

$$T_g(x) = -x + g^{-1}[g(x) + 2\pi], \quad T_g^-(x) = x - g^{-1}[g(x) - 2\pi].$$

**Теорема 2.** Система функцій

$$\sin mg(x), \cos mg(x), \quad x \in I, \quad m = 1, 2, \dots$$

є ортогональною в просторі  $L_\rho^2(x, x + T_g(x))$ ,  $x \in I$ , з ваговою функцією  $\rho(x) = g'(x)$ , при цьому норма кожної із функцій цієї системи рівна  $\sqrt{\pi}$ .

**8. Диференціальне рівняння тригонометричних функцій із змінним періодом.** Функції  $y(x) = \sin g(x)$ ,  $y(x) = \cos g(x)$ ,  $x \in I$ , задовольняють однорідному диференціальному рівнянню другого порядку із змінними коефіцієнтами

$$y'' - \frac{g''}{g'} y' + (g')^2 y = 0, \quad (4)$$

У випадку, коли  $g(x) = x^\alpha$ , диференціальне рівняння набуває вигляду:

$$y'' - \frac{\alpha - 1}{x} y' + (\alpha x^{\alpha-1})^2 y = 0.$$

**9. Приклади функцій із змінним періодом в математичній літературі.** В наукових джерелах зустрічаються приклади функцій, які з точки зору цієї роботи є ПФЗП.

**9.1.** Одна із них – це функція

$$f(x) = \begin{cases} \sin \frac{1}{x} = \sin x^{-1} & \text{при } x \neq 0, \\ 0 & \text{при } x = 0. \end{cases}$$

Проте ця функція розглядається (наприклад, в [5, с. 106]) лише як приклад функції, для якої точка  $x = 0$  є точкою розриву другого роду.

**9.2.** В роботі [6, с.283, 284] її автор **Лузін М.М** на прикладі функцій

$$\cos x^2, \sin x^2 \quad \text{та} \quad \cos x^{1/3}, \sin x^{1/3}$$

лише констатує, що функції  $\cos x^2, \sin x^2$  коливаються «дещо швидко», а функції  $\cos x^{1/3}, \sin x^{1/3}$  коливаються «дещо повільно».

**9.3.** Ще один приклад ПФЗП – це многочлени Чебишова  $T_n(x) = \cos(n \arccos x)$ ,  $n = 1, 2, \dots$ . З позицій цієї роботи многочлен Чебишова – це тригонометричні функції типу  $\cos g(x)$ , для яких  $g(x) = n \arccos x$  із областю визначення  $I = [-1, 1]$ . Запишемо диференціальне рівняння, якому задовольняють многочлени  $T_n$ . Оскільки для функції  $g(x) = n \arccos x$  її перша похідна  $g'(x) = n(1-x^2)^{-1/2}$ , друга похідна  $g''(x) = nx(1-x^2)^{-3/2}$ , то підставивши їх в (4), отримаємо диференціальне рівняння для многочленів  $T_n$ :

$$(1-x^2)y'' - xy' + n^2y = 0. \quad (5)$$

В літературних джерелах, де розглядаються ортогональні многочлени, наприклад, в [7], диференціальне рівняння (5) не отримується (як в нашому випадку для ПФЗП), а навпаки, використовується (як наперед задане) для отримання многочленів Чебишова. При цьому також використовують також рівняння Пірсона

$$\frac{h'(x)}{h(x)} = \frac{p_0 + p_1x}{q_0 + q_1x + q_2x^2}.$$

При певних умовах на коефіцієнти  $p_0, p_1, q_0, q_1, q_2$  розв'язки  $h(x)$  цього рівняння є ваговими функціями відповідних їм ортонормованих многочленів Чебишова.

**9.4.** Функції із змінним періодом зустрічаються при знаходженні розв'язку диференціального рівняння Ейрі  $y'' - xy = 0$  [8].

### Література.

1. Самарский А.А. Математическое моделирование: Идеи. Методы. Примеры / А.А. Самарский, А.П. Михайлов. – 2-е изд., испр. – М. : Физматлит, 2001. – 320 с.
2. Приймак М.В., Боднарчук І.О., Лупенко С.А. Умовно періодичні випадкові процеси із змінним періодом // Вісник Тернопільського державного технічного університету. – 2005. – №2. – С. 143-152.
3. Приймак М.В. Ортогональні системи періодичних функцій із змінним періодом. // Матеріали одинадцятої наукової конференції ТНДУ Івана Пулюя, 2007. – С. 72.
4. Приймак М.В. Функції із змінним періодом // Вісник Київського національного університету імені Тараса Шевченка. – Математика, механіка. Випуск 2(36) 2016. – С.14-16
5. Фролов Н.А. Теория функций действительного переменного. М., 1961. – 172 с.
6. Лузин Н.Н. Собрание сочинений. Т.3. М.: Изд-во АН СССР. – 508 с.
7. Суэтин П.К. Классические ортогональные многочлены. М.: Наука, 1979. – 416 с.
8. Математическая энциклопедия, т. 5. – М.: Сов. энцикл., 1985. – 1248 с.

УДК 593.3

С.В. Ротко, к.т.н., доц., В.В. Шваб'юк к.т.н., доц., А.Б. Мікуліч, магістр  
Луцький національний університет, УкраїнаРОЗРАХУНОК КОМПОЗИТНИХ СТРИЖНІВ НА СТІЙКІСТЬ ЗА  
НЕКЛАСИЧНОЮ МОДЕЛЛЮ ЗГИНУ

S.V. Rotko, Ph.D., Assoc. Prof., V.V. Shvabyuk, Assoc. Prof., A.B. Mikulich, M. Sc

CALCULATION OF THE STABILITY OF COMPOSITE RODS  
ACCORDING TO THE NON-CLASSICAL BENDING MODEL

**Abstrakt.** The problem of the effect of deformations of transverse shear and transverse compression on the value of the critical stress in the problem of the loss of stability of a transversely isotropic rod is considered. The fourth-order differential equation of the non-classical bending model of rods is applied. Formulas for the critical stress are obtained, as well as numerical results for rods made of different materials.

Проблема втрати стійкості елементів конструкцій (стрижнів, пластин, оболонок) під дією стискувальних навантажень досліджувалася досить давно і ґрунтовно, починаючи від Л.Ойлера [1], С.П.Тимошенка [2], Ф.Енгессера [3], Ф.С.Ясинського [4] і закінчуючи багатьма сучасними дослідниками: Б.Л.Пелехом [5], О.С.Амбарцумяном [6], О.К. Малмейстером, В.П.Тамужем [7], Ю.М.Тарнопольським та А.В.Розе [8], В.М.Трачем, А.В.Подворним, М.М. Хоружим [9], О.М. Гузем та І.Ю.Бабичем [10] та іншими [11,12]. Авторами [9,10] стійкість ортотропних оболонок досліджувалася на основі рівнянь тривимірної лінерізованої теорії деформівних елементів – ортотропних оболонок. У працях [5] - [7] розрахунки проводилися із урахуванням тільки деформацій поперечного зсуву, без урахування деформацій поперечного обтиснення. Авторами [11,12] стійкість криволінійних елементів конструкцій та оболонок досліджувалась із застосовувати рівнянь некласичних моделей із урахуванням деформацій поперечного зсуву та поперечного обтиснення.

Розглядається задача стійкості трансверсально-ізотропного стрижня перерізом  $2h \times t$  та довжиною  $l$  під дією стискуючої сили  $F$  у напрямку осі  $x$ . На відміну від зсувних теорій згину типу С.Тимошенка, для отримання розв'язку задачі скористаємося рівнянням згину та залежностями з [11,12]. Для повного задоволення усіх граничних умов обпирання на кінцях стрижня необхідно використовувати диференціальне рівняння четвертого порядку уточненої моделі [12]:

$$\frac{d^4 v}{dx^4} = \frac{q}{EI_{\min}} - \frac{\varepsilon_1 t^2}{4EI_{\min}} \cdot \frac{d^2 q}{dx^2} - \frac{\varepsilon_2 t^4}{64EI_{\min}} \frac{d^4 q}{dx^4}, \quad (1)$$

де параметри:  $\varepsilon_1 = \frac{1}{10} \left( 4 \frac{E}{G'} - 3\nu'' \right)$ ;  $\varepsilon_2 = 0,2 \left( \frac{E}{E'} - \nu'' \frac{G'}{E'} \right)$ ,  $I_{\min} = \frac{1}{6} ht^3$  - мінімальний осьовий момент перерізу стрижня;  $\nu$  - переміщення у напрямку поперечної осі  $y$ ;  $q(x) = -\frac{d^2 M}{dx^2}$  - диференціальна залежність між розподіленим навантаженням та згинальним моментом.

Вважаючи, що за такого виду навантаження згинальний момент  $M(x)$  у стрижні буде пропорціональним до прогину  $\nu(x)$ :  $M(x) = F\nu(x)$ , диференціальне рівняння (1)

можна записати, із точністю до двох сталих інтегрування, що приймаються рівними нулю, у наступному вигляді:

$$\frac{d^4 v}{dx^4} - 2a^2 \cdot \frac{d^2 v}{dx^2} - k^4 v = 0, \quad (2)$$

$$\text{де } a^2 = \frac{1}{2b^2} \left(1 - \frac{\varepsilon_1 t^2 F}{4EI_{\min}}\right); \quad b^2 = \frac{F \varepsilon_2 t^4}{64EI_{\min}}; \quad k^4 = \frac{F}{b^2 EI_{\min}} = \frac{64}{\varepsilon_2 t^4}.$$

Загальний інтеграл рівняння (2), який знаходяться із урахуванням чотирьох граничних умов на кінцях стрижня:  $v(0) = v''(0) = 0$  і  $v(l) = v''(l) = 0$ , можна записати так:

$$v(x) = A \operatorname{sh} \alpha x + B \sin \beta x. \quad (3)$$

$$\text{Тут } \alpha = \sqrt{\sqrt{a^4 + k^4} + a^2}; \quad \beta = \sqrt{\sqrt{a^4 + k^4} - a^2}.$$

У зв'язку з тим, що у розв'язку (3) коефіцієнти  $A$  і  $B$  не можуть дорівнювати нулеві, то мусить дорівнювати нулеві визначник цієї системи, тобто  $(\beta^2 - \alpha^2) \operatorname{sh} \alpha l \sin \beta l = 0$ , або  $\sin \beta l = 0$ . Отже, необхідно, щоб  $\beta l = n\pi$ , а  $\beta^2 = n^2 \pi^2 / l^2$  або  $\sqrt{a^4 + k^4} - a^2 = n^2 \pi^2 / l^2$ . Остання залежність спрощується до виразу:

$$k^4 = n^4 \pi^4 / l^4 + 2n^2 \pi^2 a^2 / l^2. \quad (4)$$

Підставивши в останню рівність замість параметрів  $k^4$ ,  $a^2$  їх значення, отримаємо

$$F = EI_{\min} \frac{n^2 \pi^2}{l^2} \left(1 + \frac{\varepsilon_1 t^2}{4} \frac{n^2 \pi^2}{l^2} - \frac{\varepsilon_2 t^4}{64} \frac{n^4 \pi^4}{l^4}\right)^{-1}. \quad (5)$$

Поступаючи аналогічно, як і у першому випадку, для визначення найменшого, критичного значення сили  $F_{кр}$ , покладемо параметр  $n=1$  і отримаємо формулу для критичної сили, як функцію від гнучкості  $\lambda$ :

$$F_{кр} = \frac{\pi^2 EA}{\lambda^2} \left(1 + 3\varepsilon_1 \frac{\pi^2}{\lambda^2} - \frac{9}{4} \frac{\varepsilon_2 \pi^4}{\lambda^4}\right)^{-1}. \quad (6)$$

$$\text{Тут } \lambda = l / i_{\min}; \quad i_{\min} = \sqrt{I_{\min} / A}; \quad A = 2h \times t.$$

Здійснюючи аналіз формули (6), можна прийти до висновку, що вплив поправок від поперечного зсуву та поперечного обтиснення (зокрема, відношення  $E/E'$ ) на величину критичної сили  $F_{кр}$  є взаємопротилежним. Одночасно, при великих гнучкостях, вплив поперечного обтиснення може бути набагато нижчим від поправок, котрі дає поперечний зсув.

Формула для нормального напруження  $\sigma_{кр} = F_{кр} / A$  на базі формули (6) має вигляд:

$$\sigma_{кр} = \frac{\pi^2 E}{\lambda^2} \left(1 + 3\varepsilon_1 \frac{\pi^2}{\lambda^2} - \frac{9}{4} \frac{\varepsilon_2 \pi^4}{\lambda^4}\right)^{-1}. \quad (7)$$

У таблиці наводяться числові дані підрахунків для відношень  $\sigma_{кр} / \sigma_{кр}^e$  за формулою (7) для матеріалів: для ізотропного матеріалу  $E/E' = 1$ ;  $G'/E' = 0,38$ ; для дерева  $E/G' = 20$ ;  $E/E' = 15$ ;  $G'/E' = 3/4$ , для органопластика  $E/G' = 36,1$ ;  $E/E' = 18,4$ ;



$G'/E' = 0,51$ , залежно від гнучкості  $\lambda$ . Коефіцієнт Пуассона для цих матеріалів приймався рівним  $\nu = \nu'' = 0,3$ .

Таблиця

Значення відношень  $\sigma_{кр} / \sigma_{кр}^e$  за формулою (7)

$\lambda$	20	40	60	100
метал	0,934	0,983	0,992	0,997
дерево	0,632	0,872	0,939	0,977
орг. пластик	0,486	0,790	0,894	0,959

Із підрахунку даних та аналізу таблиці видно, що врахування поправок від деформацій поперечного зсуву та обтиснення може бути істотним тільки при  $\lambda \leq 40$ , а також коли  $E/G' \geq 20$ . Для ізотропних матеріалів названі поправки є незначними. Додатковий аналіз підрахунків дозволяє зробити висновок, що уточнення у формулі (7), із множником  $\varepsilon_2$ , для анізотропних матеріалів дає поправки до даних у таблиці з точністю до другого, третього знаків після коми, а для ізотропного матеріалу (металу) вони є абсолютно незначними (четвертий знак після коми).

### Література

1. Euler L. Sur la force des colonnes Mémoires de l'Académie Royale des sciences et belles lettres avec Mémoires, tirés des Régistres de cette Académie, Berlin, 1759, vol. 13, pp. 252-282.
2. Тимошенко С.П. Устойчивость стержней, пластин и оболочек. М.: Наука, 1971.
3. Engesser F. Die Knickfestigkeit gerader Stäbe. Zentralblatt der Bauverwaltung. 1891, Bd. 11, № 49, SS. 483-486.
4. Ясинский Ф.С. Избранные работы по устойчивости сжатых стержней. М.-Л. Гостехиздат, 1952, стр. 11- 137.
5. Пелех Б.Л. Теория оболочек с низкой сдвиговой жесткостью. К.: Наук. думка, 1973. 246 с.
6. Амбарцумян С.А. Общая теория анизотропных оболочек. М.: Наука, 1974. 446 с.
7. Малмейстер А.К., Тамуж В.П., Тетерс Г.А. Соппротивление полимерных и композитных материалов. 3-е изд. Рига: Зинатне, 1980. 572 с.
8. Тарнопольский Ю.М., Розе А.В. Особенности расчета деталей из армированных пластиков. Рига: Зинатне, 1969. 276 с.
9. Трач В.М., Подворний А.В., Хоружий М.М. Деформування та стійкість нетонких анізотропних оболонок: Монографія. К.: Каравела, 2019. 274 с.
10. Гузь А.Н., Бабич И.Ю. Трехмерная теория устойчивости деформируемых тел. Т.4. Киев: Наук. думка. 1985. 280 с.
11. Шваб'юк В.І, Ротко С.В. Лінійне деформування, міцність і стійкість композитних оболонок середньої товщини / монографія. Луцьк, 2015. 264 с.
12. Шваб'юк В.І, Ротко С.В., Шваб'юк В.В. Математичні моделі деформування композитних плит і балок: Контактна взаємодія із штампами та основами. Вплив тріщин / монографія. Луцьк: Вежа-Друк, 2022. 804 с.

УДК 621.314

В.І. Яськів<sup>1</sup>, д. т. н., доц., М.П. Дивак<sup>2</sup>, д. т. н., проф., А.В. Яськів<sup>2</sup>, к. т. н.<sup>1</sup> Тернопільський національний технічний університет імені Іван Пулюя<sup>2</sup> Західноукраїнський національний університет

**МОДЕЛЮВАННЯ ТА ЧИСЕЛЬНА ОПТИМІЗАЦІЯ ПИТОМИХ  
ХАРАКТЕРИСТИК ОСЕРДЬ ВИСОКОЧАСТОТНИХ МАГНІТНИХ  
ПІДСИЛЮВАЧІВ ПРИ ПОБУДОВІ УНІФІКОВАНОГО РЯДУ  
ПЕРЕТВОРЮВАЧІВ НАПРУГИ**

V.I. Yaskiv, Dr., Assoc. Prof., M.P. Dyvak, Dr., Prof., A.V. Yaskiv, PhD

**SIMULATION AND NUMERICAL OPTIMIZATION OF SPECIFIC  
CHARACTERISTICS OF HIGH-FREQUENCY MAGNETIC AMPLIFIERS IN THE  
CONSTRUCTION OF A UNIFIED SERIES OF POWER CONVERTERS**

**Abstract.** Design of a unified series of MagAmp power converters requires optimization of MagAmp mass and price characteristics. Solving this task manually requires complex experiments and is time-consuming. Authors consider the optimal experiment plan and formulate the optimization problem in a form of an interval equation. It is shown that the proposed approach is suitable for MagAmp switch mass and size characteristics optimization.

З метою задоволення найвибагливіших споживачів електроенергії актуальною задачею є створення уніфікованого ряду напівпровідникових перетворювачів електроенергії (НПЕ). Традиційно уніфікацію здійснюють за рядом вихідних потужностей та конструктивних рішень. Пропонуються нові підходи до створення уніфікованого ряду НПЕ з урахуванням уніфікації елементної бази та схемотехнічних рішень [1, 2]. Такий підхід найкраще може бути реалізований при побудові НПЕ на основі високочастотних магнітних підсилювачів (ВМП) [3-9]. Однак, в цьому випадку виникає задача оптимізації масо-габаритних та цінових характеристик осердь їх магнітопроводів [10]. Тому зазначена задача зводиться до побудови енергетичних характеристик основних елементів регуляторів (стабілізаторів) – ВМП.

Розв'язання цієї задачі вимагає достатньо трудомістких експериментальних досліджень, що пов'язані з розробкою та дослідженням значної кількості електронних пристроїв у різних діапазонах вихідних потужностей з максимальними питомими та енергетичними характеристиками при мінімальних економічних затратах. Тому, спочатку розглянуто задачу оптимального планування експериментальних досліджень, а потім на основі проведених досліджень побудовано модель енергетичної характеристики ВМП для повного ряду уніфікованих НПЕ в заданому діапазоні вихідних потужностей. На основі побудованої моделі енергетичної характеристики наведено результати оптимізації вартісних і питомих характеристик створюваного уніфікованого ряду НПЕ.

Аналіз принципів функціонування імпульсного регулятора напруги на ВМП [3-9] показує (рис.1), що оптимальні розміри магнітопроводів можна буде визначати шляхом використання універсальної енергетичної характеристики ВМП уніфікованого ряду ДВЕЖ. Вказана характеристика з'являє вхідну напругу  $U_{bx}$ , силовий струм  $I_n$ , що визначається навантаженням, та необхідну енергію  $E(U_{bx}, I_n)$  для забезпечення сили даного струму в робочому циклі ВМП.

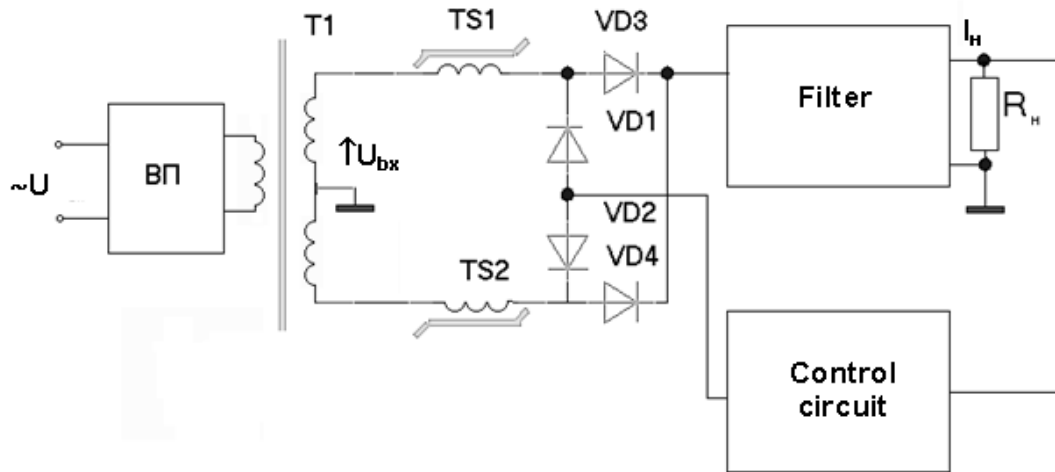


Рис. 1. Функціональна схема ДВЕЖ на основі ВМП

Нехай модель енергетичної характеристики ВМП можливо представити у вигляді лінійно-параметричного рівняння

$$E_0(U_{bx}, I_n) = \bar{\varphi}^T(U_{bx}, I_n) \cdot \bar{\beta}, \quad (1)$$

де  $E_0$  - істинне невідоме значення енергетичної характеристики;  $U_{bx}, I_n$  - вхідні змінні величини: напруга та струм;  $\bar{\varphi}^T(U_{bx}, I_n)$  - відомий вектор базисних функцій;  $\bar{\beta} = (\beta_1, \dots, \beta_m)^T$  - невідомий вектор параметрів. Результати реалізації експерименту представляємо в інтервальному вигляді

$$U_{bx_i}, I_{n_i}, [E_i^-; E_i^+], E_{0i} \in [E_i^-; E_i^+], i = 1, \dots, N, \quad (2)$$

де  $E_i^-, E_i^+$  - відповідно нижня і верхня межі інтервалу значень енергетичної характеристики;  $N$  - кількість спостережень, яка у випадку насиченого експерименту співпадає з кількістю  $m$  невідомих параметрів моделі.

Згідно з апіорним аналізом залежності енергетичної характеристики від вхідного струму та напруги вибрано для її представлення квадратичну модель

$$\hat{E}(U_{bx}, I_n) = b_0 + b_1 U_{bx} + b_2 I_n + b_3 U_{bx}^2 + b_4 I_n^2 \quad (3)$$

Значення напруги для ряду стабілізаторів постійної напруги знаходились у межах  $10 \leq U_{bx} \leq 50$  В, а струму -  $0 \leq I_n \leq 50$  А.

Щоб побудувати інтервальну модель енергетичної характеристики у вигляді (3) необхідно провести як мінімум  $N=m=5$  вимірювальних експериментів (рис.2). Враховуючи тип вибраної моделі (3) (неповна квадратична модель),  $I_G$ -оптимальний насичений план експерименту можемо отримати із таблиці [10]

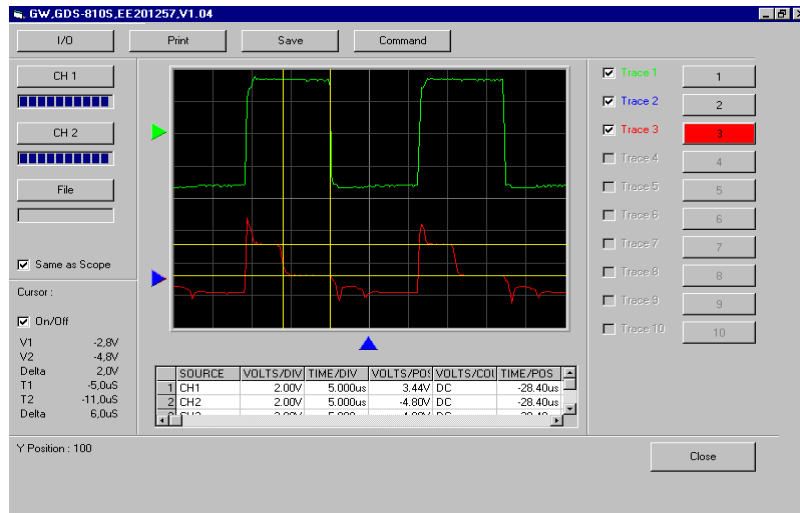


Рис. 2. Осцилограма напруги на дроселі насичення ВМП для вимірювань в одній з точок визначення значення енергетичної характеристики (площа перетину горизонтальної та вертикальної смуг пропорційна енергії, що поступає в навантаження)

Використовуючи методи інтервального аналізу [10-12], було побудовано модель енергетичної характеристики. А далі було знайдено її у функції геометричних розмірів осердь ВМП ( $l$  – довжина магнітної лінії осердя;  $s$  – площа його поперечного перерізу) у вигляді

$$[E(l, s)] = 191,837 + 83,672l + 24,928s - 38,616l^2 + 15,379s^2 \pm \frac{1}{2} \Delta_{\hat{E}(l,s,F)} \geq [E(U_{bx}, I_H)] \quad (4)$$

Для знаходження оптимальних масо-габаритних характеристик ключа, перейдемо від нерівності до рівняння у виразі (4):

$$[E(l, s)] = 191,837 + 83,672l + 24,928s - 38,616l^2 + 15,379s^2 \pm \frac{1}{2} \Delta_{\hat{E}(l,s,F)} = [E(U_{bx}, I_H)] \quad (5)$$

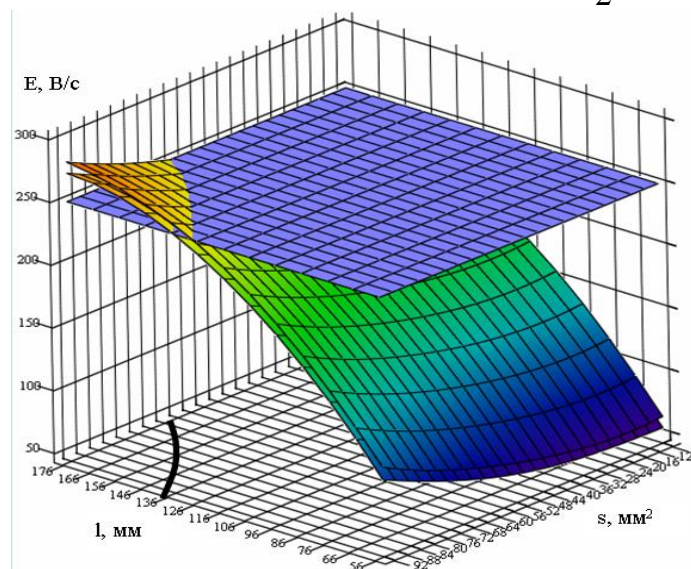


Рис. 3. Ілюстрація отримання розв'язків трансцендентного інтервального рівняння (5)

Жирна чорна лінія на рис. 3 є шуканою областю визначення масо-габаритних характеристик осердь ВМП, для яких побудовано модель енергетичної характеристики (на рис. 3 це дві паралельні площини), при заданих вихідних параметрах конкретного перетворювача напруги (горизонтальна площина синього кольору). Перетин цих площин і утворює шукану область визначення.

Вперше створено інтервальну макромодель енергетичної характеристики ВМП у вигляді функції від вихідних параметрів перетворювачів електроенергії, що забезпечило створення технології проектування уніфікованого ряду НПЕ з оптимальними масо-габаритними характеристиками.

### Література

1. Яськів В. Нові підходи при вирішенні задачі розробки уніфікованого ряду джерел вторинного електроживлення. Матеріали шостої наукової конференції Тернопільського держ. техн. ун-ту ім. Івана Пулюя, м. Тернопіль, 24-26 квіт. 2002 р., Тернопіль, 2002. С. 100.
2. Yaskiv V., Gao Xinzong, Gao Lijin. The Substantiation and New Methods of a Solution of a Problem of Development of the Unitized Switching Power Supplies. The Experience of Designing and Application of CAD Systems in Microelectronics: Proceedings of the VIII-th International Conference CADSM 2005. Lviv, 2005. P. 232.
3. K. Harada, T. Nabeshima, "Applications of magnetic amplifiers to high-frequency dc-to-dc converters," Proc. IEEE, vol. 76, no. 4, April 1988. pp. 355-361.
4. C. Jamerson, D. Y. Chen, "Magamp Postregulators for Symmetrical Topologies with Emphasis on Half-Bridge Configuration," IEEE Transactions on Power Electronics, Vol. 8, No. 1, January 1993, pp. 26-29.
5. Yaskiv V. Using of High-Frequency Magnetic Amplifier in Switch Mode DC Power Supplies / V. Yaskiv // 35th Annual IEEE Power Electronic Specialists Conference (PESC'04). — Aachen, Germany, 2004. — P. 1658–1662.
6. Yaskiv V. MagAmp Regulated Isolated AC-DC Converter with High Power Factor / Volodymyr Yaskiv, Alexander Abramovitz, Keyue Smedley, Anna Yaskiv // Communications (Scientific Letters of the University of Zilina). — Zilina, Slovakia : University of Zilina, 2015. — No 1A. — P. 28–34.
7. V. Yaskiv, A. Martseniuk, A. Yaskiv, O. Yurchenko, B. Yavorsky, "Modular High-Frequency MagAmp DC-DC Power Converter", in Proceedings of 2 9th International Conference on Advanced Computer Information Technologies (ACIT), Ceske Budejovice, Czech Republic, 2019, pp. 213–216.
8. Yaskiv V. Synchronous Rectifier in High-Frequency 24V/15A MagAmp Power Converter / Volodymyr Yaskiv, Oleg Yurchenko, Anatoliy Martseniuk, Anna Yaskiv // 2020 IEEE 4th International Conference on Intelligent Energy and Power Systems (IEPS). — Istanbul, Turkey, 2020. — P. 113–117.
9. B. Mamano, "Magnetic amplifier control for simple, low-cost, secondary regulation," Unitrode corp. slup129. [Online]. Available: <http://www.ti.com/lit/ml/slup129/slup129.pdf>.
10. M. Dyvak, V. Yaskiv, A. Pukas, "Interval estimation of weight-dimensional characteristics of high-frequency magnetic amplifier of pulse power supplies", Przeglad elektrotechniczny (Electrical Review), No 4, 2009. p. 92–94.
11. Дивак М.П., Пукас А.В. Таблиці оптимальних планів експерименту у випадку локалізації області параметрів інтервальної моделі. Вимірювальна та обчислювальна техніка в технологічних процесах. 2002. №2. С.181-190.
12. M. Dyvak, P. Stakhiv, A. Pukas, "Algorithms of parallel calculations in task of tolerance ellipsoidal estimation of interval model parameters", Bulletin of the Polish Academy of Sciences-Technical Sciences, vol. 60, issue 1, 2012, pp.159-164.

Секція 2

**ЗАДАЧІ ФОРМОУТВОРЕННЯ ОБОЛОНКОВИХ КОНСТРУКЦІЙ  
СКЛАДНОЇ ФОРМИ**

УДК 539.3

**О.Р. Гачкевич, д.ф.-м. н., проф.; М.Г. Гачкевич, к.ф.-м.н., ст. н. сп.**

Інститут прикладних проблем механіки і математики ім. Я.С.Підстригача НАН  
України, Україна

**МЕТОДИКА ОПТИМІЗАЦІЇ ВІДНОСНО НАПРУЖЕНОГО СТАНУ РЕЖИМІВ  
ТЕХНОЛОГІЧНОГО НАГРІВУ КУСКОВО-ОДНОРІДНИХ СКЛЯНИХ  
ОБОЛОНОК У ВИРОБНИЧИХ ПРОЦЕСАХ**

**A.R Gachkevich, Dr., Prof., N.G. Gachkevich, Ph.D., Assoc.Prof.**

**METHODOLOGY FOR OPTIMIZING THE RELATIVE STRESS STATE OF THE  
TECHNOLOGICAL HEATING REGIMES OF PIECE-HOMOGENEOUS GLASS  
SHELLS IN PRODUCTION PROCESSES**

**Abstract.** The technique of optimizing the relative stress state of the technological heating regimes of piece-homogeneous glass shells in production processes has been developed.

В процесі виготовлення, обробки і експлуатації скляні кусково-однорідні оболонки, чи елементи з таких оболонок, піддаються дії нестационарних температурних полів в результаті технологічного або супутнього нагріву, а також дії силового навантаження. Рівні напружень і деформацій, що виникають при цьому, суттєво залежать як від неоднорідності розподілу температури або силового навантаження, так і неоднорідності властивостей матеріалу. За перевищення допустимих вони можуть приводити до виникнення тріщин і руйнування оболонки. Тому актуальною є розробка методики оптимізації за напруженим станом режимів нагріву таких оболонки за врахування їх неоднорідності при заданих областях допустимої зміни температури і температурних напружень, які відображають специфіку і можливості конкретного способу технологічного або експлуатаційного нагріву, а також враховують міцнісні властивості матеріалу. Розв'язування різних аспектів цієї проблематики є важливим при побудові оптимальних теплових режимів багатьох видів цільової термообробки кусково-однорідних оболонкових елементів (як із скла, так і других матеріалів)-складових елементів значної кількості сучасних пристроїв цільового примінення, зокрема вакуумного і енергетичного обладнання.

Однорідні і кусково-однорідні елементи конструкцій і приладів сучасної техніки, зокрема скляні, піддаються дії багатофакторних навантажень. Одним з таких навантажень є теплове, дія якого є основою роботи різних енергетичних пристроїв, а також використовується в існуючих технологіях обробки конструктивних елементів в багатьох галузях промисловості, в тому числі енергетичної, електротехнічної і електронної.

Основним джерелом отримання теплової дії є конвективний спосіб нагріву. Часто використовують спосіб нагріву з допомогою джерел тепла, зокрема, створюваних з допомогою електромагнітного випромінювання інфрачервоного спектру. Конструктивні елементи можуть піддаватися і безпосередньому силовому навантаженню як в результаті відповідного закріплення, так і додаткової силової дії. Елементи можуть піддаватися таким діям як при виготовленні, так і експлуатації.

Нагрів і силове навантаження приводять до виникнення в конструктивних елементах температурних і механічних (переміщень, напружень і деформацій) полів, які залежать як від характеру розподілу температури і силового навантаження, так і неоднорідності матеріалу, можуть досягати значної величини і перевищувати допустимі рівні, приводити

до появи тріщин.

Тому актуальною і практично важливою є розробка методики визначення оптимальних за напруженим станом режимів нагріву кусково-однорідних скляних оболонок з врахуванням їх неоднорідності при заданих областях допустимої зміни температури і напружень, які відображають специфіку і можливості конкретного способу технологічного або експлуатаційного нагріву, а також міцнісні (термоміцнісні) властивості матеріалу. Розв'язок такого класу задач є важливим для розробки теплових режимів різних видів цільової термообробки скляних кусково-однорідних оболонок, які широко використовуються в різних галузях сучасної техніки.

Оскільки більшість технологічних процесів проходить в умовах інтенсивного теплового навантаження, яке відбувається в широкому температурному інтервалі, необхідно враховувати температурну залежність фізико-механічних характеристик матеріалу. Як відомо значення коефіцієнтів лінійного теплового розширення різних типів технічного скла (що використовується у виробництві) з підвищенням температури суттєво змінюється, а значення коефіцієнтів температуропровідності, Пуассона і модуль Юнга в границях розглядуваних температур ( $0^{\circ}\text{C} - 460^{\circ}\text{C}$ ) змінюються практично незначно і їх можна прийняти постійними [1-4]. Тому при описі напружено-деформованого стану розглядуваних кусково-однорідних скляних оболонок доцільно виходити із співвідношень незв'язаної задачі термопружності при залежному від температури коефіцієнті температурного розширення, яку часто використовують при дослідженні термомеханічної поведінки конкретних скляних елементів, обумовленої нестационарним термосиловим навантаженням [5].

В постановці задач оптимізації напружено-деформованого стану важливим є вибір критерію оптимальності. Для однорідних оболонок, як правило, вибирають відповідний функціонал, який в інтегральному сенсі відображає ціль оптимізації. Зокрема, використовуваний при побудові оптимальних режимів технологічного нагріву однорідних оболонок функціонал енергії пружної деформації пов'язують з термоміцністю скляного виробу на етапах нагріву-охолодження [6]. Кусково-однорідні оболонки мають ту особливість, що температурні напруження, які виникають при їх термообробці, можуть суттєво залежати не тільки від характеру розподілу температури, але і від неоднорідності властивостей матеріалу. При цьому, як правило, максимальні нормальні напруження (від величини яких згідно першої теорії міцності руйнується скло) виникають в приконтатній (локальній) області спряження різнорідних частин кусково-однорідної оболонки. Тому в випадку оптимізації напружено-деформованого стану кусково-однорідної оболонки доцільно використовувати локальний критерій оптимальності, що характеризує міру напруженого стану. В якості такого критерію оптимальності можна вибирати функціонал максимальних нормальних напружень [7].

При такому підході вихідна складна нелінійна задача оптимізації може бути значно спрощена за рахунок допущення про характер розподілу температури по товщині оболонки. В якості такого часто приймається допущення про кубічний закон розподілу температури за товщиною кожного складового оболонкового елемента, при якому з достатньою точністю описується характер зміни температури за товщиною координатою. При цьому задача оптимізації залишається нелінійною і може бути розв'язана тільки за використання числових методів теорії оптимізації. Методом побудови розв'язування сформульованих задач оптимізації може бути вибраний метод локальних варіацій (поетапної параметричної оптимізації) [8], причому для реалізації етапу пошуку умовного мінімуму вказаного вище функціоналу застосовний також методи безпосереднього пошуку при відомому розв'язку прямої задачі.

Розроблено розрахункову схему прямої задачі відповідної складової частини задачі оптимізації за напруженим станом режимів технологічного нагріву тонких скляних кусково-однорідних оболонок обертання, яка зводиться до визначення температурного поля

з відповідної задачі теплопровідності для кусково-однорідної оболонки, а також подальшого знаходження параметрів напружено-деформованого стану на основі співвідношень термопружності тонких оболонок при термочутливому коефіцієнті лінійного розширення матеріалу. При цьому крім представлення розподілу температури за товщинною координатою поліномом третього степеня використано метод сіток і найменших квадратів при кінцево-елементній апроксимації усередненої температури і температурного моменту [9]. Співвідношення термомеханіки кусково-однорідних оболонок класичної геометрії зведено до ключових рівнянь, розв'язок яких отримано в аналітичному вигляді [7].

Для таких оболонок запропоновано методику побудови початкового наближення функції керування, де вихідним є оптимальний тепловий режим для однорідної сферичної оболонки, коли в якості критерію оптимальності вибрано відповідний функціонал енергії пружної деформації оболонки за час тривалості нагріву [6]. На основі запропонованої методики розв'язано ряд задач оптимізації за напруженим станом режимів нагріву конкретних скляних кусково-однорідних оболонок класичної геометрії, зокрема, при наявності джерел тепла і силового навантаження, термочутливості допустимих напружень, опрацьовані окремі технології виготовлення і обробки елементів скляних виробів.

В якості прикладу приведена математична постановка і числово-аналітична методика розв'язування задачі оптимізації за напруженим станом режимів нагріву скляних кусково-однорідних циліндричних оболонок, що складаються з трьох різнорідних частин за залежності функції керування (якою є температура зовнішньої поверхні) лише від часу за різних теплових умов на внутрішній поверхні оболонок (теплоізоляція і теплообмін з внутрішнім середовищем). Числова реалізація розв'язку сформульованої задачі оптимізації здійснена на основі методів локальних варіацій і найменших квадратів при кінцево-елементній апроксимації функції керування. За побудованих режимів розтягуючі напруження виникають на етапі нагріву на внутрішній поверхні оболонки, а на етапі охолодження - на зовнішній поверхні. При цьому на внутрішній поверхні розрахунковими (найбільшими) є кільцеві, а на зовнішній - меридіональні. Розглянуті умови теплообміну на внутрішній поверхні оболонки не змінюють характеру розтягуючих напружень, а за природного конвективного теплообміну ( $Bi \leq 0,1$ ) на внутрішній поверхні, напруження співпадають з аналогічними при теплоізоляції оболонки [7].

### Література

1. ПУХ В. П.: Прочность и разрушение стекла. – Л.: Наука, 1973. – 156 с.
2. БАРТЕНЕВ Г. М.: Механические свойства и тепловая обработка стекла.-М: Стройиздат, 1960.-283с.
3. Стекло. Справочник / Под ред. д-ра техн. наук Н. М. Павлушкина. – М.: Стройиздат, 1973. – 487 с.
4. БАРАНОВСЬКИЙ В.И., ГУСЕВ Б.Н., ИВАНОВ В.Н. и др. Производство цветных кинескопов / Под. ред. В.И. Барановського. – М.: Энергия, 1978. – 368с.
5. ПОДСТРИГАЧ Я. С., КОЛЯНО Ю. М., СЕМЕРАК М. М.: Температурные поля и напряжения в элементах электровакуумных приборов.–Киев: Наук. думка, 1981.– 344 с.
6. ГРИГОЛЮК Э. И., ПОДСТРИГАЧ Я. С., БУРАК Я. И.: Оптимизация нагрева оболочек и пластин. – Киев: Наук. думка, 1979. -364с.
7. ГАЧКЕВИЧ О. Р., ГАЧКЕВИЧ М. Г., БУДЗ С. Ф.: Оптимізація за напруженим станом режимів нагріву скляних кусково-однорідних оболонок.–Львів: Ін-т прикл. проблем механіки і математики ім. Я. С. Підстригача НАН України, 2014–334с.
8. ЧЕРНОУСЬКО Ф. М., БАНИЧУК Н. В. Вариационные задачи механики и управления. – М.: Наука, 1973. – 225 с.
9. НОРРИ Д., ФРИЗ Ж.: Введение в метод конечных элементов.– М.: Мир, 1981.– 304 с.



УДК 620.171.3

Г. В. Козбур, к. т. н., доц., О. К. Шкодзінський, к. т. н., доц., І. Р. Козбур  
Тернопільський національний технічний університет ім. І. Пулюя, Україна**МАТЕМАТИЧНА МОДЕЛЬ ДІАГРАМИ ДЕФОРМУВАННЯ ПЛАСТИЧНИХ  
МАТЕРІАЛІВ ЗА СКЛАДНОНАПРУЖЕНОГО СТАНУ****H. V. Kozbur, Ph.D. Assoc. Prof., O. K. Shkodzinsky, Ph.D. Assoc. Prof., I. R. Kozbur****MATHEMATICAL MODEL OF THE STRESS-STRAIN DIAGRAM FOR PLASTIC  
MATERIALS UNDER COMPLEX STRESS STATE**

**Abstract.** A new mathematical model of the generalized stress-strain diagram for isotropic plastic materials in the strengthening area is proposed. The model contains the parameter  $p$ , which is determined from several simple experiments through optimization. The constructed curve can be used to predict the values of critical loads for structural elements under arbitrary principal stress ratios. The use of the generalized curve will allow to increase the accuracy of forecast values of critical stresses and deformations that occur in structural elements at the moment of local plastic deformations appearance.

Прогнозування граничних напружень і деформацій в матеріалі здійснюють, апроксимуючи експериментальні дані до вигляду деформаційних кривих або граничних поверхонь міцності. Для нових конструкційних матеріалів зростають вимоги до ефективності їх використання в конструкційних елементах, зменшення матеріалоемності підвищує вимоги до точності експериментальної та розрахункової частин. Експериментальні дослідження повного переліку напружено-деформованих станів зразків конструкційних елементів вимагають великої кількості дослідів з руйнуванням зразків, розробки та утримання вартісного обладнання. Тому актуальною задачею є пошук ефективних методів розрахунку прогнозних значень критичних навантажень для елементів конструкцій, визначення для них реальних коефіцієнтів запасу. Підвищення достовірності та точності прогнозних значень забезпечується через удосконалення методик їх розрахунку із застосуванням сучасної обчислювальної техніки.

У даному дослідженні увагу зосереджено на ділянці деформаційного зміцнення кривої деформування, оскільки поведінка навантажених конструкцій, для яких допускається пластичне деформування, є найменш дослідженою та представляє найбільший науковий інтерес. Для цього випадку, критичним називають напруження, при перевищенні якого в зразку розвиваються локальні пластичні деформації. Досі складно знайти узагальнені деформаційні криві для пластичних металевих матеріалів, за якими можна прогнозувати великі рівномірні пластичні деформації при різних видах складного напруженого стану.

Для інженерних розрахунків та прогнозування складних напружених станів використовують гіпотези, котрі замінюють складнонапружений стан еквівалентним йому одноосним напруженим станом. Згідно з запропонованою гіпотезою «єдиної кривої» підбирають такі еквівалентні координати, в яких деформаційна крива буде інваріантною щодо типу прикладеного навантаження [1]. Як показують результати експериментів, для певної частини металевих матеріалів спостерігається краще узгодження експериментальних даних з однією із розрахункових «класичних» узагальнених кривих, для іншої частини є краща відповідність результатів при використанні тієї чи іншої форми усереднення. Тому запропоновано універсальну методику побудови узагальненої кривої зміцнення для пластичних матеріалів, яка б узгоджувалась із класичними та враховувала відхилення від них експериментальних

даних для класу пластичних ізотропних металевих матеріалів. Для цього розроблено методику знаходження сталої матеріалу для побудови моделі узагальненої кривої деформування.

Для отримання універсального аналітичного опису єдиної, інваріантної щодо виду напруженого стану кривої деформування в [2] запропоновано узагальнити обидва класичні підходи та ввести еквівалентні координати у вигляді (1), (2).

$$\sigma_{eq} = \frac{p}{2} \left[ \frac{|\sigma_1 - \sigma_2|^p + |\sigma_2 - \sigma_3|^p + |\sigma_1 - \sigma_3|^p}{2} \right]^{\frac{1}{p}}, \quad (1)$$

$$\varepsilon_{eq} = \frac{p}{2(p+1)} \left[ \frac{|\varepsilon_1 - \varepsilon_2|^p + |\varepsilon_2 - \varepsilon_3|^p + |\varepsilon_1 - \varepsilon_3|^p}{1/2} \right]^{\frac{1}{p}}, \quad (2)$$

де  $\sigma_{eq}$  – еквівалентні напруження,  $\varepsilon_{eq}$  – еквівалентні деформації,  $p$  – деяке додатне число, параметр матеріалу, котрий відображає ступінь відхилення властивостей реального конструкційного матеріалу від властивостей ідеалізованого матеріалу, для якого можна отримати єдину криву деформування в координатах  $\tau_{max} - \gamma_{max}$  чи  $\sigma_i - \varepsilon_i$ . При  $p=1$  з (1), (2) отримуються формули для визначення найбільших дотичних напружень та кутових деформацій  $\tau_{max}$ ,  $\gamma_{max}$ , при  $p=2$  – інтенсивності напружень і деформацій  $\sigma_i$ ,  $\varepsilon_i$ .

Параметр  $p$  визначався з первинних даних деформування пластичних матеріалів, отриманих в головних напруженнях та деформаціях для кількох видів плоского напруженого стану. В системі еквівалентних координат  $\sigma_{eq} - \varepsilon_{eq}$  було побудовано точки, що відповідають експериментальним, обчислені для різних значень  $p$  ( $0,5 < p < 2,5$ ). Отримано діаграми розсіювання точок у координатах  $\tau_{max} - \gamma_{max}$  (при  $p=1$ ), в координатах  $\sigma_i - \varepsilon_i$  (при  $p=2$ ), та розраховано для інших значень  $p$  зі вказаного проміжку з кроком перерахунку  $\Delta p = 0,001; 0,01; 0,05$ .

Оскільки ділянка зміцнення кривої деформування для пластичних матеріалів має форму, близьку до прямої, то як функціонал якості при знаходженні оптимального значення  $p$  було вибрано максимум коефіцієнта кореляції Пірсона. Коефіцієнт кореляції Пірсона  $R$  розраховувався для всієї множини точок для кожного значення параметра  $p$ :

$$R = \frac{1}{n-1} \frac{\sum_{i=1}^n ((\varepsilon_{eq})_i - \overline{\varepsilon_{eq}})((\sigma_{eq})_i - \overline{\sigma_{eq}})}{\sqrt{\sum_{i=1}^n ((\varepsilon_{eq})_i - \overline{\varepsilon_{eq}})^2} \sqrt{\sum_{i=1}^n ((\sigma_{eq})_i - \overline{\sigma_{eq}})^2}}, \quad (3)$$

де  $\overline{\sigma_{eq}} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (\sigma_{eq})_i$ ,  $n$  – кількість спостережень.

Як міру відносного розсіювання експериментальних точок при кожному значенні  $p$  обчислювалось усереднене значення показника варіації  $V$ . Вхідні дані розбито на  $m$  часткових інтервалів з однаковою довжиною. Для кожного  $p$  обчислювались значення коефіцієнта варіації  $V_j$  на часткових інтервалах з подальшим усередненням значень. Усереднене значення коефіцієнта варіації для кожної величини параметра  $p$  знаходилося як:

$$V = \frac{1}{m} \sum_{j=1}^m \frac{(STD)_j}{(\overline{\sigma_{eq}})_j}, \quad (4)$$

де  $(STD)_j$  – стандартне відхилення значень напружень  $(\sigma_{eq})_i$  з  $j$ -го проміжку від середнього значення на цьому проміжку  $(\overline{\sigma_{eq}})_j$ ,  $m$  – кількість інтервалів.

Експериментальні дані з двоосного розтягу зразків ізотропних металевих конструкційних матеріалів за нормальних умов було взято з [3, 4], де проаналізовано дані для вуглецевих та легованих сталей. Результати обробки даних та знаходження значень  $p$  для вуглецевої сталі 0,37%С, високоякісної вуглецевої сталі 45, а також високолегованої сталі 15Х2НМФА приведено в [5]. Для апроксимації кривої деформування в еквівалентних координатах було взято степеневу модель:

$$\sigma_{eq}^* = A \cdot (\varepsilon_{eq})^B, \quad (5)$$

де  $A, B$  – параметри моделі: модуль та показник зміцнення відповідно.

На рис. 1 зображено апроксимаційні криві деформування, побудовані на ділянках зміцнення при  $p(R_{max})$  та стандартне відхилення експериментальних точок від розрахункової кривої.

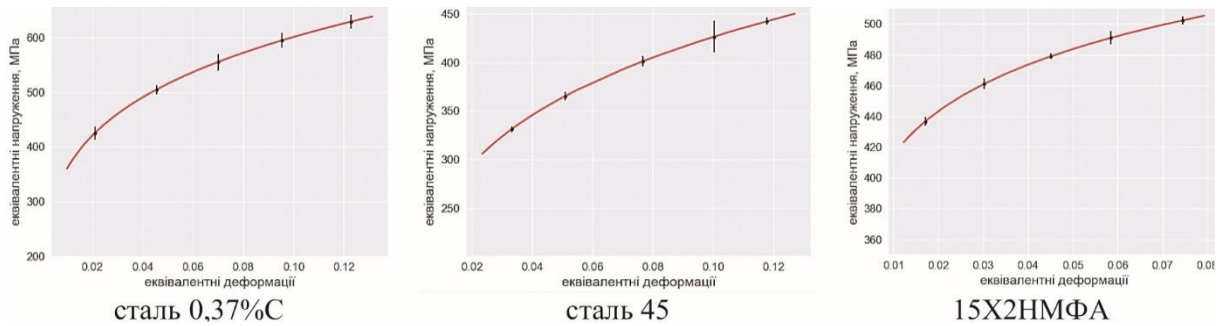


Рис. 1. Апроксимаційні криві зміцнення при оптимальних значеннях  $p$

Апроксимаційні криві, що були побудовані на основі логарифмічної моделі  $\sigma_{eq}^* = A + B \ln \varepsilon_{eq}$ , дали співрозмірні показники якості.

### Література

1. Людвиг П. Основы технологической механики. Расчеты на прочность. Машиностроение. 1970. Вып. 15. С. 130–166.
2. Шкодзінський, О.К., Козбур, Г.В., Костишин, С.О. (2004). Методика узагальнення діаграми деформування ізотропних матеріалів для складного напруженого стану. Вісник Тернопільського державного технічного університету, 10(1), 25-30.
3. Каминский А.А., Бастун В.Н. Деформационное упрочнение и разрушение металлов при переменных процессах нагружения. К.: Наук.думка, 1985. 168 с.
4. Механические свойства конструкционных материалов при сложном напряженном состоянии / Лебедев А.А., Ковальчук Б.И., Гигиняк Ф.Ф., Ламашевский В.П. Киев: Издательский дом “Ин Юре”, 2003. 540 с.
5. G. Kozbur, O. Shkodzinsky, O. Hlado, Methods of construction of the generalized hardening curve.: Proceedings of Odessa Polytechnic University, Issue 2(61), 2020, p 78–85. DOI: 10.15276/opu.2.61.2020.09

УДК 514.116.3+ 621.3

В.А. Кривень д.ф.-м.н, проф.

Тернопільський національний технічний університет ім. Івана Пулюя, Україна

### МІРА НЕПАРАБОЛІЧНОСТІ ПОВЕРХНІ, БЛИЗЬКОЇ ДО ПАРАБОЛОЇДА ОБЕРТАННЯ

V.A. Kryven Dr., Prof.

### MEASURE OF NON-PARABOLICITY OF A SURFACE APPROXIMATE TO A PARABOLOID OF ROTATION

**Abstract.** The measure of deviation from parabolicity of the convex smooth surface of rotation  $\Omega$ , which in the Cartesian coordinate system is described by the equation  $z = f(x, y), x^2 + y^2 < R^2$  is introduced. The focus of the paraboloid inscribed in this surface is found in the plane  $z=R/2$ . The degree of non-parabolicity is defined as the square of a cirque in the  $z=R/2$  plane, filled with rays which is the locus of the rays reflected from the surface  $\Omega$ .

Зацікавленість параболічними поверхнями зумовлена також і можливістю застосувань їхніх властивостей у різноманітних технічних проектах. Зокрема за ініціативи та прямої участі професора Олега Шаблія науково-технічні розробки з проектування параболічних дзеркальних антен розпочалися у технічному університеті імені Івана Пулюя.

В основі функціонування усіх параболічних антен та їх систем закладена ідея перетворення плоскої електромагнітної хвилі у сферичну (приймальні системи) або навпаки – сферичної у плоску (передавальні). Що більша площа поверхні антени то сильнішим сигналом можна отримати на її виході, однак відхилення від параболічної форми, допущені при виготовленні, монтажу чи експлуатації пристрою, можуть суттєво вплинути на його інтенсивність.

В роботі запропоновано новий підхід до оцінки відхилення поверхні від параболічності, що має переваги над існуючими з огляду на застосування у задачах визначення ефективності антен.

Розглядатимемо опуклі поверхні обертання  $\Omega$ , які у декартовій системі координат Охуз описуються рівнянням  $z = f(x, y), x^2 + y^2 < R^2, f(x, y)$  двічі диференційовна в крузі  $D$  і задовольняє у ньому таким двом умовам:

$$\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}\right)^2 - \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\right)\left(\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\right) < 0, \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} > 0. \quad (1)$$

Поверхня  $\Omega$  є параболоїдом обертання з фокусом у точці  $F(0;0;c)$  якщо  $f(x, y) = \frac{1}{4c}(x^2 + y^2), c > 0$ .

Функція

$$f(x, y) = f(x^2 + y^2) \in C^2(x^2 + y^2 < R^2). \quad (2)$$

задовольтиме умовам (1), якщо

$$f''(t) > 0, f'(t)t > 0 \quad (0 < t < R) \quad (3)$$

Параболоїд обертання володіє властивістю фокусування: промені, паралельні його вісі симетрії (оптичній вісі), відбившись від поверхні проходять через фокус параболоїда. Якщо  $f(x, y) = \frac{1}{4c}(x^2 + y^2)$ , усі паралельні осі аплікати промені, відбившись від поверхні параболоїда, збираються в точці  $F(0;0;c)$ .

Будемо говорити, що параболоїд обертання вписано у в опуклу поверхню (2) якщо співпадають їхні краї і вершини. У цьому випадку фокус параболоїда називатимемо умовним фокусом поверхні  $\Omega$ .

Нехай тепер  $\Omega$  деяка опукла поверхня обертання з умовним фокусом в точці  $F(0;0;c)$ . Позначимо через  $D_f$  область площини  $z = c$ , у яку попадають усі паралельні осі аплікати промені, відбившись від поверхні  $\Omega$ .

**Означення.** Нехай опукла поверхня  $\Omega$  обертання описується рівнянням  $z = f(x^2 + y^2)$ , ( $x^2 + y^2 < R^2$ ). Мірою непараболічності поверхні  $\Omega$  назвемо  $S(D_f)/\pi R^2$ .

Уведене тут поняття володіє такою цікавою властивістю.

Нехай

1)  $\Omega_D^f$  поверхня, що описується рівняннями  $z = f(x, y)$ ,  $(x, y) \in D$  і  $f(x, y) \in C^2(D)$  функція, що задовольняє умовам (2).

2) Нехай  $\rho(\Omega_D^f, \Omega_D^g) = |S(D_f) - S(D_g)|$ .

Тоді МЭ  $\Omega_D^f$  множина усіх поверхонь  $\Omega_D^f$ , для яких  $c = \text{const}$  з метрикою а якій  $\rho(\Omega_D^f, \Omega_D^g)$  є метричним простором.

Аксиоми невід'ємності і симетричності для уведеної метрики очевидні, нерівність трикутника є наслідком нерівності  $|S(D_f) - S(D_g)| + |S(D_g) - S(D_u)| \geq |S(D_f) - S(D_u)|$  для  $\forall f, g, u \in M$ .

Для прикладу приведемо результати обчислень міру непараболічності сферичного сегмента  $\Omega: z = R - \sqrt{R^2 - x^2 - y^2}$ ,  $x^2 + y^2 \leq r^2$  ( $r \leq R$ ) (рис.1). Його умовний фокус знайдемо вписавши  $\Omega$  параболоїд обертання:  $z = \frac{x^2 + y^2}{R + \sqrt{R^2 - r^2}}$ . І, отже,

$$c = \frac{R + \sqrt{R^2 - r^2}}{4}.$$

У площині  $Oxz$  падаючому променю  $x=x_0$  відповідає відбитий  $z = R - \sqrt{R^2 - x_0^2} + \frac{2x_0^2 - R^2}{2x_0\sqrt{R^2 - x_0^2}}(x - x_0)$ . Отже сферичний сегмент

може виконувати функції дзеркальної антени, якщо радіус його основи  $r < R/\sqrt{2}$ . Тоді міра його непараболічності

$$S = \left( \frac{r(3R\sqrt{R^2 - r^2} - 3R^2 + r^2)}{2(R^2 - 2r^2)R} \right)^2.$$

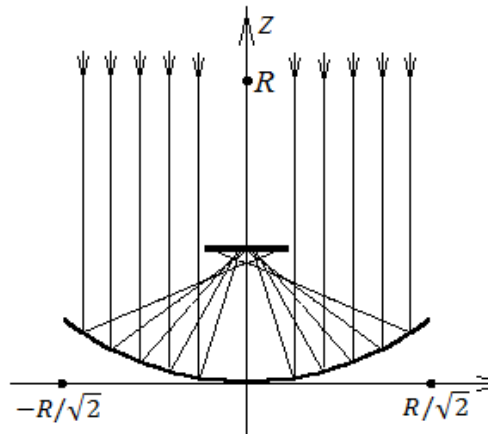


Рис. 1.

Якщо радіус сектора  $x_0 = R/\sqrt{2}$  відбитий промінь перпендикулярний до вісі сектора, і тоді міра непараболічності сферичного сегмента стає нескінченно великою.

УДК 539.3

М. І. Махоркін<sup>1,2</sup>, к. ф.-м. н., доц., І. М. Махоркін<sup>1</sup>, к. ф.-м. н., ст. н. сп.<sup>1</sup>Інститут прикладних проблем механіки і математики ім. Я. С. Підстригача НАН, Україна;<sup>2</sup>Національний університет "Львівська політехніка", Україна.**ВИЗНАЧЕННЯ ОСОБЛИВОСТЕЙ НАПРУЖЕНЬ В ОРТОТРОПНОМУ КОМПОЗИТНОМУ КЛИНІ ЗА АНТИПЛОСКОЇ ДЕФОРМАЦІЇ**

М. І. Makhorkin, Ph. D., Assoc. Prof., I. M. Makhorkin Ph. D., Senior Research Officer

**DETERMINATION OF THE STRESS SINGULARITY IN ORTHOTROPIC COMPOSITE WEDGE UNDER ANTI-PLANE DEFORMATION**

The antiplane stress state of a composite anisotropic wedge is considered. Based on the use of the apparatus of generalized functions and Mellin transform, an algorithm for constructing expressions of the stress-strain state in in this wedge is proposed. The singularity of stresses in two- and three-component orthotropic wedges is studied.

Розглянуто антиплоский напружений стан складеного анізотропного клину, який утворено сполученням довільної кількості різнорідних клинів, виготовлених із матеріалів з циліндричною анізотропією. Подібна задача для двохкомпонентного клину розглянута у роботі [1]. Запропоновано алгоритм побудови виразів, що описують напружено-деформований стан в композитному клині, складеному з довільної кількості елементів. Даний алгоритм ґрунтується на використанні апарату узагальнених функцій і перетворення Мелліна та успішно використовувався при вивченні багатоклинових систем, елементи яких виготовлені з ізотропних матеріалів.

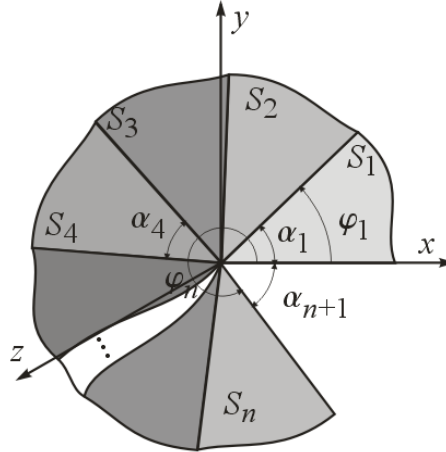


Рис. 1

Анізотропний клин (рис. 1) складено із довільної кількості  $n$  різнорідних клинів  $S_i$ ,  $i = \overline{1, n}$  з кутами розхилу  $\alpha_i$ ,  $\sum_{i=1}^n \alpha_i \leq 2\pi$  виконаних із ортоотропних матеріалів з циліндричною анізотропією, з'єднаних по своїх бокових поверхнях. Задачу з'ясування напружено-деформованого стану такого клину розв'язуватимемо в циліндричній системі координат  $(\rho, \varphi, z)$ , вважаючи при цьому, що зсув відбувається у напрямку осі  $Oz$ , початок якої збігається із вершиною композитного клину, а площина відліку кута (площина  $\varphi = 0$ ) збігається з його відповідною боковою поверхнею. На бічних сторонах

клин (  $\varphi = 0$  та  $\varphi = \varphi_n$  ), задані умови першої, другої або змішаної задачі теорії пружності. Поверхням з'єднання суміжних клинів  $S_j$  та  $S_{j+1}$   $j = \overline{1, n-1}$  відповідають поверхні  $\varphi_j = \alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_j$ .

Використовуючи методики постановки узагальненої задачі спряження для багатоклинової системи [2] задача визначення напружено-деформованого стану анізотропного пружного композитного клина зведена до відшукування розв'язку частково виродженого диференціального рівняння

$$\rho^2 \frac{\partial^2 w}{\partial \rho^2} + \rho \frac{\partial w}{\partial \rho} + \frac{\partial^2 w}{\partial \varphi^2} + \rho d \frac{\partial^2 w}{\partial \rho \partial \varphi} = \sum_{i=1}^{n-1} C_1^i(\rho) \delta'_+(\varphi - \varphi_i) + \sum_{i=1}^{n-1} C_2^i(\rho) \delta_+(\varphi - \varphi_i), \quad (1)$$

з відповідними крайовими умовами першої, другої чи змішаної задачі теорії пружності.

$$\text{Тут } C_1^i(\rho) = 0, \quad C_2^i(\rho) = - \left. \frac{b_{1i+1} - b_{1i}}{b_{1i+1}} \frac{\partial w}{\partial \varphi} \right|_{\varphi=\varphi_i+1}, \quad d = d_1 + \sum_{i=1}^{n-1} (d_{i+1} - d_i) S_+(\varphi - \varphi_i),$$

$$d_i = \frac{2b_{2i}}{b_{1i}}, \quad b_{1i} = \frac{(a_{44})_i}{(a_{44})_i^2 - (a_{45})_i^2}, \quad b_{2i} = - \frac{(a_{45})_i}{(a_{44})_i^2 - (a_{45})_i^2}; \quad a_{mn} - \text{пружні сталі } (m, n = \overline{1, 6}) \quad [1,$$

3],  $S_+(x)$  – одинична функція Гевісайда;  $\delta_+(x) = S'_+(x)$  – дельта функція Дірака.

Застосувавши до рівняння (1) перетворення Мелліна отримаємо в просторі зображень таке диференціальне рівняння:

$$\frac{\partial^2 \tilde{w}}{\partial \varphi^2} - \rho d \frac{\partial \tilde{w}}{\partial \varphi} + p^2 \tilde{w} = \sum_{i=1}^{n-1} \tilde{C}_2^i(\rho) \delta_+(\varphi - \varphi_i), \quad (2)$$

$$\text{де } \tilde{C}_2^i(\rho) = - \left. \frac{b_{1i+1} - b_{1i}}{b_{1i+1}} \frac{\partial \tilde{w}}{\partial \varphi} \right|_{\varphi=\varphi_i+1}.$$

Розв'язок рівняння (2), а відповідно і зображення за Мелліном поля переміщень матиме вигляд

$$\tilde{w} = \tilde{w}_1 + \sum_{i=1}^{n-1} (\tilde{w}_{i+1} - \tilde{w}_i) S_+(\varphi - \varphi_i), \quad (3)$$

$$\text{де } \tilde{w}_i = \left( A_i \cos[a_i^* p \varphi] + B_i \sin[a_i^* p \varphi] \right) e^{p d_i^* \varphi}, \quad d_i^* = \frac{(a_{45})_i}{(a_{44})_i} < 1, \quad a_i^* = 1 - (d_i^*)^2.$$

Для визначення сталих  $A_i, B_i$   $i = \overline{2, n}$  отримано такі рекурентні співвідношення

$$\begin{aligned} A_{i+1} &= \frac{1}{a_{i+1}^* b_{1i+1}} e^{p(d_i^* - d_{i+1}^*) \varphi_i} \left\{ a_{i+1}^* b_{1i+1} \cos[pa_{i+1}^* \varphi_i] \left( A_i \cos[pa_i^* \varphi_i] + B_i \sin[pa_i^* \varphi_i] \right) + \right. \\ &+ \left[ a_i^* b_{1i} \left( A_i \sin[pa_i^* \varphi_i] - B_i \cos[pa_i^* \varphi_i] \right) - \right. \\ &\left. \left. - (b_{1i} d_i^* - b_{1i+1} d_{i+1}^*) \left( A_i \cos[pa_i^* \varphi_i] + B_i \sin[pa_i^* \varphi_i] \right) \right] \sin[pa_{i+1}^* \varphi_i] \right\}, \\ B_{i+1} &= \frac{1}{a_{i+1}^* b_{1i+1}} e^{p(d_i^* - d_{i+1}^*) \varphi_i} \left\{ a_i^* b_{1i} \cos[pa_{i+1}^* \varphi_i] \left( B_i \cos[pa_i^* \varphi_i] - A_i \sin[pa_i^* \varphi_i] \right) + \right. \\ &+ \left( \cos[pa_{i+1}^* \varphi_i] \left( b_{1i} d_i^* - b_{1i+1} d_{i+1}^* \right) + a_{i+1}^* b_{1i+1} \sin[pa_{i+1}^* \varphi_i] \right) \times \\ &\left. \times \left( A_i \cos[pa_i^* \varphi_i] + B_i \sin[pa_i^* \varphi_i] \right) \right\}. \end{aligned} \quad (4)$$

За допомогою співвідношень (4) розв'язок (3) буде залежати лише від двох сталих  $A_1$  та  $B_1$ , для визначення яких використовуємо відповідні крайові умови.

Отож напружено-деформований стан клину описуватиметься такими поданнями:

$$w(r, \varphi) = \frac{1}{2\pi i} \int_{c-i\infty}^{c+i\infty} \tilde{w}(p, \varphi) r^{-p} dp,$$

$$\tau_{\varphi z}(r, \varphi) = \frac{b_1}{2\pi i} \int_{c-i\infty}^{c+i\infty} \frac{\partial \tilde{w}(p, \varphi)}{\partial \varphi} r^{-p-1} dp - \frac{pb_2}{2\pi i} \int_{c-i\infty}^{c+i\infty} \tilde{w}(p, \varphi) r^{-p-1} dp,$$

$$\tau_{rz}(r, \varphi) = \frac{b_2}{2\pi i} \int_{c-i\infty}^{c+i\infty} \frac{\partial \tilde{w}(p, \varphi)}{\partial \varphi} r^{-p-1} dp - \frac{pb_1}{2\pi i} \int_{c-i\infty}^{c+i\infty} \tilde{w}(p, \varphi) r^{-p-1} dp.$$

де  $p$  – корені характеристичних рівнянь.

У випадку двохелементного композитного клину характеристичні рівняння, залежно від крайових умов на берегах вирізу мають такий вигляд:

для першої крайової задачі –

$$\left\{ p \left( a_2^* b_{11} \left( (a_1^*)^2 + d_1^2 \right) \cos \left[ a_2^* p (\varphi_2 - \varphi_1) \right] \sin \left[ a_1^* p \varphi_1 \right] - \right. \right. \\ \left. \left. - \left[ (a_1^*)^2 b_{11} d_2 + d_1 \left( b_{11} d_1 d_2 - b_{12} \left( (a_2^*)^2 + d_2^2 \right) \right) \right] \sin \left[ a_1^* p \varphi_1 \right] \right) \sin \left[ a_2^* p (\varphi_1 - \varphi_2) \right] \right\} = 0,$$

для другої крайової задачі –

$$\left\{ \left( a_1^* b_{11} \cos \left[ a_1^* p \varphi_1 \right] + (b_{11} d_1 - b_{12} d_2) \sin \left[ a_1^* p \varphi_1 \right] + \right. \right. \\ \left. \left. + a_2^* b_{12} \cos \left[ a_2^* p (\varphi_2 - \varphi_1) \right] \sin \left[ a_1^* p \varphi_1 \right] \right) \sin \left[ a_2^* p (\varphi_2 - \varphi_1) \right] \right\} = 0.$$

Використовуючи описану методику, отримано співвідношення для випадку систем складених із двох та трьох клинів. Здійснено дослідження залежності порядку сингулярності напружень в околі вершини двохкомпонентного композитного клина від механічних та геометричних характеристик його складових.

### Література

1. Акопян В. Н. Смешанные граничные задачи о взаимодействии сплошных деформируемых тел с концентраторами напряжений различных типов. – Ереван: Гитутюн, 2014, 322 с
2. Makhorkin M., Makhorkina T., & Pukach P. (2021). Математичне моделювання напружено-деформованого стану композитних клиноподібних елементів конструкцій. Вісник Львівського національного аграрного університету: агроінженерні дослідження, (24), 121-130.  
<http://agroengineering.online/index.php/agro-research/article/view/162>
3. Лехницький С.Г. Теория упругости анизотропных тел. – М.: Наука, 1977, 416 с.



УДК 621.865

**Р. Михайлишин, к. т. н.; М. Михайлишин, к. ф.-м. н., доц.; Ф. Духон, к. т. н., проф.; М. Келемен, к. т. н., проф.; А. Маєвич Фей, к. т. н., проф.; Д. Сяо, к. т. н., проф.**

Тернопільський національний технічний університет імені Івана Пулюя, Україна

Словацький технологічний університет в Братиславі, Словацька Республіка

Технологічний університет в Кошице, Словацька Республіка

Техаський університет в Остіні, Сполучені Штати Америки

Вустерський політехнічний інститут, Сполучені Штати Америки

## **ПРОБЛЕМИ МОДЕЛЮВАННЯ ПРОЦЕСУ МАНІПУЛЮВАННЯ ГНУЧКИХ ОБ'ЄКТІВ В РОБОТОТЕХНІЦІ**

**R. Mykhailyshyn Ph.D.; M. Mykhailyshyn Ph.D., Assoc. Prof.; F. Duchon Ph.D., Prof.; M. Kelemen Ph.D., Prof.; A. Majewicz Fey Ph.D., Prof.; J. Xiao Ph.D., Prof.**

## **PROBLEMS MODELING THE PROCESS OF MANIPULATION FLEXIBLE OBJECTS IN ROBOTICS**

**Abstract.** During manufacturing processes, there are often tasks of manipulating flexible objects with a displaced center of mass. An important issue is the analysis of problems that arise when designing and modeling pneumatic grippers in robotic cells. We established the main directions for solving the problems of manipulating flexible objects with a shifted center of mass for various types of grippers.

Виробничі потреби в виготовленні та використанні гнучких об'єктів зростають з кожним роком. Серед проблем, які виникають при автоматизації процесів із гнучкими об'єктами є їх захоплення та маніпулювання. Це пов'язано із тим, що спрогнозувати вплив параметрів об'єкта на деформацію, фрикційні властивості та силу утримування в такому випадку дуже важко [1]. Тому зараз активно проводяться дослідження із структурування методів маніпулювання [2], розробки захоплювальних пристроїв [3-7], методів захоплення [8] та нових концепцій процесу маніпулювання [9-11] гнучкими об'єктами.

Серед усіх матеріалів, з якими виникає найбільше проблем при маніпулюванні є текстильний та плівки різної товщини. Ці матеріали є легкодеформівні і втрачають форму (деформуються) під силою власної ваги. Тому завдання захоплення та маніпулювання таких матеріалів є найбільшим викликом сьогодення. Через це одна з груп науковців займаються дослідженням саме питаннями маніпулювання текстильних (одягу) об'єктів [2-3]. Ними запропонована класифікація можливих методів маніпулювання та захоплення гнучких об'єктів Рис. 1а [2]. Проте запропоновану класифікацію Рис. 1а важко назвати закінченою. Тому що не враховується варіант захоплення із площинним зовнішнім контактом за край об'єкта, або декілька площинних зовнішніх контактів з одного краю Рис. 1б. Така ситуація часто виникає на виробництві та у побуті при можливості робота захопити об'єкт лише з одного краю. Причин чому у роботу немає такої можливості може бути декілька: обслуговуване обладнання має нависаючі елементи, що заважають роботу проводити захоплення; об'єкт маніпулювання є значно більший ніж робоча зона робота. В серії статей [12-15] автори пропонують новий метод маніпулювання плоских жорстких об'єктів, який дозволяє мінімізувати необхідну силу притягання. Це досягається шляхом переорієнтація захоплювального пристрою таким чином, щоб сумарна сила яка діє на об'єкт були направлена в протилежному напрямку до осі з захоплювача. При цьому враховуються сили тертя між об'єктом і фрикційними елементами, сила лобового опору повітря

обекта, зміщення центру мас обекта та інші сили. Для цього автори вибрали захоплювальний пристрій Бернуллі, який має трьох точковий контакт та володіють значною витратою. Проте автори довели ефективність використання даного методу і для інших пневматичних захоплювальних пристроїв [15]. З огляду на важливість переорієнтації були запропоновані декілька варіантів конструкцій захоплювача для безконтактного утримування обекта маніпулювання [4], та оптимізацію параметрів фрикційних елементів [7]. Такі конструкції дозволяють усунути зіткнення обекта із захоплювачем при безконтактному маніпулюванні та збільшити розподіл навантаження при збільшенні кількості фрикційних елементів.

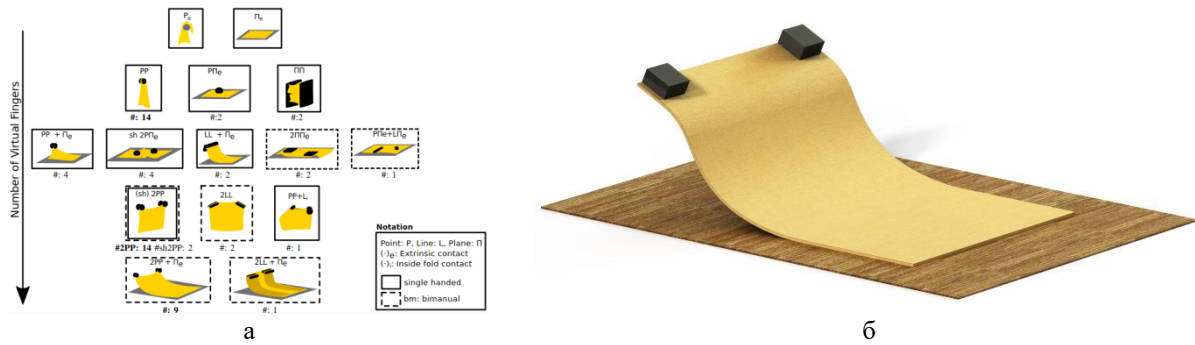


Рис. 1. Методи маніпулювання гнучких об'єктів в робототехніці

З огляду на вище сказане питання забезпечення ефективного методу маніпулювання гнучкими об'єктами є актуальною задачею. У випадку використання пневматичних захоплювачів при захопленні гнучких об'єктів за край виникає багато проблем. В основному ці проблеми зв'язані із зміщенням центру мас гнучкого об'єкта маніпулювання при поступовому піднятті. В залежності від типу пневматичного захоплювального пристрою [16] та типу контакту який використовується (Рис. 2) в цьому захоплювачі будуть виникати різні проблеми.

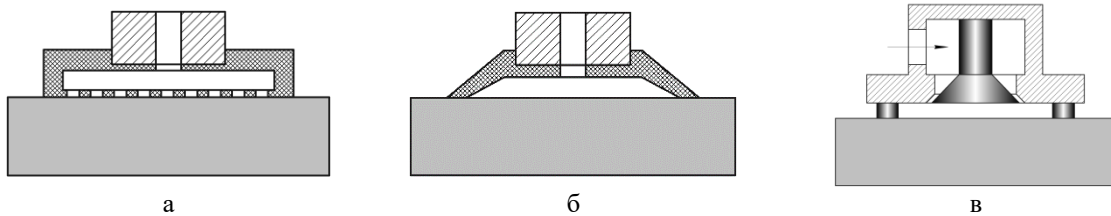


Рис. 2. Пневматичні захоплювачі із різними типами контакту [16]

Практично в усіх випадках виникає проблема із розгерметизацією присоски в не залежності яким чином утворюється розрідження. При зміщенні центру мас гнучкий об'єкта маніпулювання деформується на краю захоплювача. В результаті чого сумарні сили, що діють на обвисаючу частину обекта діятимуть лише на краю площини захоплювача, що продовжує утримувати об'єкт. Така мала зона захоплювача не спроможна утримати обвисаючу частину об'єкта. Що спричиняє відєднання об'єкта від краю захоплювача і його розгерметизацію. Така тенденція буде продовжуватися до моменту коли об'єкт відєднається від присоски: у випадку використання захоплювача Рис. 4а, 4в під час втрати достатньої сили утримування, або моментальної розгерметизації і втрати сили утримування у випадку використання захоплювача Рис. 4б. Для забезпечення безвідривного маніпулювання і максимальної сили утримування гнучких обектів, пропонується змінювати орієнтацію захоплювального пристрою. Така методика дозволить уникнути розгерметизацію присоски та використовувати додаткові сили, що виникають при зміні орієнтації захоплювального пристрою.

## Література

1. Robotic manipulation and sensing of deformable objects in domestic and industrial applications: a survey / J. Sanchez, , Corrales, J. A., Bouzgarrou, B. C., & Mezouar, Y. // *The International Journal of Robotics Research*. – 2018. – 37(7), P. 688-716.
2. A grasping-centered analysis for cloth manipulation / J. Borràs, G. Alenyà, C. Torras // *IEEE Transactions on Robotics*. – 2020. – 36(3), P. 924-936.
3. A versatile gripper for cloth manipulation / S. Donaire, J. Borràs, G. Alenyà, C. Torras // *IEEE Robotics and Automation Letters*. – 2020. – 5(4), P. 6520-6527.
4. Justification of Design and Parameters of Bernoulli-Vacuum Gripping Device / V. Savkiv, R. Mykhailyshyn, F. Duchon, O. Fendo // *International Journal of Advanced Robotic Systems*. – 2017. – № 14(6), DOI: 1729881417741740.
5. Gripping Device for Textile Materials / R. Mykhailyshyn, V. Savkiv, A. Majewicz Fey, & J. Xiao // *IEEE Transactions on Automation Science and Engineering*. – 2022. DOI: 10.1109/TASE.2022.3208796
6. 3D Printing of Cylindrical Nozzle Elements of Bernoulli Gripping Devices for Industrial Robots / R. Mykhailyshyn, F. Duchon, M. Mykhailyshyn, A. Majewicz Fey // *Robotics*. – 2022.
7. Substantiation of Parameters of Friction Elements of Bernoulli Grippers With a Cylindrical Nozzle / R. Mykhailyshyn, V. Savkiv, I. Boyko, E. Prada, & I. Virgala // *International Journal of Manufacturing, Materials, and Mechanical Engineering (IJMMME)*. – 11(2). – 2021. – P. 17-39. – DOI: 10.4018/IJMMME.2021040102.
8. Modeling, learning, perception, and control methods for deformable object manipulation / H. Yin, A. Varava, D. Kragic // *Science Robotics*. – 2021. – 6(54), – eabd8803.
9. Modeling of the Gripping Device for Non-Rigid and Porous Objects of Manipulation / R. Mykhailyshyn, A. Majewicz Fey, J. Xiao // *Robotics*. – 2023.
10. Influence of Inlet Parameters on Power Characteristics of Bernoulli Gripping Devices for Industrial Robots / R. Mykhailyshyn, J. Xiao // *Applied Sciences*. – 12(14). – 2022. 7074. DOI: 10.3390/app12147074.
11. Increasing the Holding Force of Non-Rigid Materials through Robot End-Effector Reorientation / R. Mykhailyshyn, A. Majewicz Fey, J. Xiao // *In 2023 IEEE International Conference on Robotics and Automation. IEEE*. – 2023.
12. Михайлишин Р.І. Обґрунтування параметрів та орієнтації струминного захоплювача маніпулятора для автоматизації вантажно-розвантажувальних операцій: автореф. дис. на здобуття наук. ступеня канд. техн. наук : спец. 05.05.05 “Піднімально-транспортні машини” / Р.І. Михайлишин. – Тернопіль, 2018. – 21 с.
13. Experimental Research of the Manipulation Process by the Objects Using Bernoulli Gripping Devices / R. Mykhailyshyn, V. Savkiv, M. Mikhalishin, F. Duchon // *In Young Scientists Forum on Applied Physics and Engineering, International IEEE Conference*. – 2017. – P. 8 – 11. – DOI: 10.1109/YSF.2017.8126583
14. Orientation Modeling of Bernoulli Gripper Device with Off-Centered Masses of the Manipulating Object / V. Savkiv, R. Mykhailyshyn, O. Fendo, M. Mykhailyshyn // *Procedia Engineering*. – 2017. – № 187. – P. 264 – 271. – DOI: 10.1016/j.proeng.2017.04.374
15. Research of Energy Efficiency of Manipulation of Dimensional Objects With the Use of Pneumatic Gripping Devices / R. Mykhailyshyn, V. Savkiv, I. Diahovchenko, F. Duchon, R. Trembach // *2019 IEEE 2nd Ukraine Conference on Electrical and Computer Engineering UKRCON-2019 – IEEE, 2019*. – P. 527 – 532.
16. A systematic review on pneumatic gripping devices for industrial robots / R. Mykhailyshyn, V. Savkiv, P. Maruschak, J. Xiao // *Transport*. – 37(3). – 2022. – P. 201-231. – DOI: 10.3846/transport.2022.17110

УДК 621 7.043

М.І. Пилипець д. т. н., проф.; А.П. Грабовський аспірант.

Тернопільський національний технічний університет імені Івана Пулюя, Україна

**ДОСЛІДЖЕННЯ НАПРУЖЕНО-ДЕФОРМІВНОГО СТАНУ  
ФОРМОУТВОРЕННЯ ГВИНТОВИХ ЗАГОТОВОК**

**M.I. Pylypets Dr.; Prof.; A.P. Grabovsky postgraduate.**

**RESEARCH OF THE STRESS AND DEFORMATION STATE OF THE  
FORMATION OF SCREW BILLETS**

**Abstract.** The technological bases of shaping ribbed, cylindrical, profiled screw blanks of machine parts by cold winding methods based on resource-saving technologies are considered. The given dependencies make it possible to determine the energy, strength and structural parameters of the workpiece, technological equipment and tool and to implement the technological process of winding workpieces with a material utilization factor of up to 1.

У машинобудуванні завжди були і сьогодні є актуальними питання щодо розроблення нових прогресивних, ресурсощадних, відносно недорогих способів виготовлення деталей машин. Вони повинні забезпечувати, якщо не безвідходне виробництво, то хоч би наближатись до нього. До таких способів належить навивання на оправи заготовок різних типів, з яких можна виготовляти деталі машин, що мають найрізноманітніше застосування в промисловості та народному господарстві. Це, зокрема, гвинтоподібні профілі і спіралі, які широко використовуються в сучасному машинобудуванні для виконання багатофункціональних завдань, а також у ремонтній справі.

Окрім гвинтових заготовок навитих на оправу зі стрічок прямокутного перерізу, з яких можна виготовляти різноманітні деталі класу тіл обертання та спіралі шнеків для робочих органів транспортно-технологічних систем, виникає необхідність у формоутворенні ребристих гвинтових профілів, вихідними заготовками для яких можуть бути кутники, швелери, профілі з нерівновеликими ребрами.

Гвинтоподібні профілі з ребристими елементами широко використовують у сучасному машинобудуванні. Найраціональнішим способом їх виготовлення є навивання, що забезпечує мінімальні матеріальні та енергетичні витрати, високу якість і точність виробів. При цьому можна використати методи як холодного, так і гарячого навивання, кожен із яких має свої переваги і свою область застосування.

Стосовно ж заготовок із кутників, то, як відомо, шнеки з Г-подібним поперечним перерізом при використанні їх в транспортно-технологічних системах для переміщення різних вантажів характеризуються високою продуктивністю роботи за рахунок бічної полицки шнека, а також можуть використовуватись у транспортерах без зовнішнього кожуха, оскільки полицка не дає вантажу випасти.

Особливість навивання ребристих профілів [1] полягає у створенні таких умов, за яких попереджається втрата стійкості ребер під час згинання і передбачається поєднання осьового підтискування профілів і прикладання згинального моменту, як правило, силою згинання із коротким плечем прикладання.

У зоні пластичного деформування створюється складний напружено-деформаційний стан, дослідження якого важливе для визначення цілого ряду технологічних факторів процесу та конструктивних параметрів виробу.

В загальному випадку навівання спіралі, розподіл контактних напружень невідомий, а напружено-деформівний стан описується симетричними тензорами другого рангу [1].

Враховуючи гвинтову симетрію спіралі [1], замість декартових координат зручно використовувати спеціальну систему гвинтових координат, в якій одна вісь напрямлена вздовж дотичної до гвинтової лінії друга вісь вздовж нормалі, а третя – вздовж бінормалі. Розглядаючи напружено-деформівний стан у тонких пластинах, можна прийняти, що вісь напрямлена вздовж нормалі до серединної поверхні по прямій, а система може розглядатись як ортогональна в першому наближенні.

Склавши рівняння рівноваги в системі гвинтових координат, провівши відповідні розрахунки, навіваючи профіль на крок, висоту ребра змінюємо залежно від ступені витягування профілю за зовнішнім і внутрішнім краями.

Нейтральний шар визначається із умови рівності довжини навитого витка початкової довжини заготовки:

$$N\sqrt{4\pi^2 n_0^2 + T^2} = L_3, \quad (1)$$

де  $L_3$  – довжина заготовки;

$n_0$  – радіальний параметр нейтрального шару;

$T$  – крок витка;

$N$  – кількість витків, отриманих із заготовки довжиною  $L_3$ .

Якщо позначити довжину заготовки що йде на один виток  $L_0 = L_3 / N$ , то зміну товщини при згині стрічки можна визначити за залежністю

$$B = B_0 \sqrt{\frac{L_0}{L_n}} = B_0 \sqrt{\frac{n_0^2 + C'^2}{n^2 + C'^2}}, \quad (2)$$

Тут  $C' = \frac{T}{2\pi}$  – параметр кроку гвинтової поверхні.

Якщо прийняти, що величина  $\sigma_s$   $\sigma_s = \beta \left[ \sigma_{t_0} \pm \ln \sqrt{\frac{\rho^2 + C'^2}{\rho_0^2 + C'^2}} \right]$  незначно

змінюється в часі, то умовно  $\sigma_s = const$ .

Тоді рівняння рівноваги зведеться до диференціального рівняння :

$$\frac{2d\sigma_\rho}{\mp \sigma_\rho + 2\sigma_s} = \frac{\rho d\rho}{\rho^2 + C'^2}, \quad (3)$$

де для зони розтягування приймаємо знак (+), для зони стискування - (-).

Розв'язок рівняння (3) для зони розтягування

$$\sigma_{\rho} = -2\sigma_s \left( 1 - \sqrt{\frac{\rho^2 + C'^2}{R^2 + C'^2}} \right), \quad (4)$$

для зони стискування

$$\sigma_{\rho} = -2\sigma_s \left( 1 - \sqrt{\frac{r^2 + C'^2}{\rho^2 + C'^2}} \right), \quad (5)$$

де  $R$  та  $r$  – максимальні та мінімальні радіуси гвинтової стрічки;

$\rho$  – біглий радіальний параметр довільної точки гвинтової поверхні.

Радіус нейтральної поверхні для випадку  $\sigma_s = const$  отримуємо із умови рівності радіальних параметрів у нейтральному шарі, що розділяє зону стискування та зону розтягування:

$$\rho_H = \sqrt{\sqrt{(R^2 + C'^2)(r^2 + C'^2)} - C'^2}. \quad (6)$$

Внаслідок стискування внутрішніх шарів гнutoго профілю і проковзування на оправі виникає розтягувальна складова  $N$ , що пов'язана із згинальним зусиллям  $P$  та моментом  $M_{\delta}$  від тангенційних напружень за висотою заготовки співвідношеннями [1]

$$\begin{aligned} N &= (\mu_{\rho} + \mu_0)P, \\ M_{\delta} &= [l + r(\mu_{\rho} + \mu_0)]P, \\ M_{\delta} &= \rho_{np}N, \quad \rho_{np} = \frac{M}{N} = r + \frac{l}{\mu_0 + \mu_p}, \end{aligned} \quad (7)$$

де  $\mu_0$  та  $\mu_p$  – коефіцієнти тертя заготовки відповідно до оправы й обтискного ролика;

Зусилля  $P$ , необхідне для згинання профілю із плечем  $l$ , визначається залежністю

$$P = \frac{F\beta\sigma_s k_F (\rho_c - r)}{l + (\mu_0 + \mu_p)r}, \quad (8)$$

Виведені залежності можна використовувати для навивання інших профілів за різними схемами.

### Література

1. Пилипець М.І. Науково-технологічні основи виробництва навивних заготовок деталей машин: Дис... д-ра техн. наук: 05.02.08 / Тернопільський держ. технічний ун-т ім. Івана Пулюя. - Т., 2002. - 445 арк.

УДК 539.3

Ю.І. Пиндус, к.т.н., доц., Т.Б. Пиндус, Б.Г.Шелестовський, к.ф.-м.н., доц.  
Тернопільський національний технічний університет імені Івана Пулюя, УкраїнаТИСК ПРУЖНОГО ГАРЯЧОГО ШТАМПА НА ІЗОТРОПНИЙ ШАР  
ПРИ НЕІДЕАЛЬНОМУ ТЕПЛОВОМУ КОНТАКТІ

Yu.Pyndus, Ph.D., Assoc. Prof., T. Pyndus, B. Shelestovs'kyi, Ph.D., Assoc. Prof.

HOT ELASTIC PUNCH PRESSURE ON THE ISOTROPIC LAYER  
AT NON-IDEAL THERMAL CONTACT

**Abstract.** The solution of the axially symmetric contact problem of thermal elasticity concerning circular cylindrical isotropic stamp pressure on elastic isotropic layer taking into account imperfect thermal contact through thin intermediate layer between the stamp and layer is developed in this paper. The method of temperature fields determination in the cylinder and layer as well as the normal contact stresses under given assumptions is developed.

Метою роботи є побудова розв'язку осесиметричної контактної задачі термопружності про тиск гарячого кругового штампа з плоскою основою на пружний ізотропний шар при неідеальному тепловому контакті через тонкий проміжковий шар та знаходження формул для визначення температури і нормальних контактних напружень.

Розглянемо ізотропний круговий циліндричний штамп радіусом  $R$  і довжиною  $L$  з плоскою основою, який втискується силою  $P$  в пружний шар скінченної товщини  $H$ . Усі точки торця циліндра під дією зовнішнього навантаження зміщуються на однакове значення  $\varepsilon$ . Поверхня шару зовні площадки контакту вільна від зовнішніх зусиль. На площадці контакту дотичні напруження  $\tau_{rz}$ . На вільному торці циліндра задана постійна температура  $T_0$ . Тепловий контакт між тілами здійснюється через тонкий проміжковий шар [1]. Бічні поверхні циліндра теплоізовані. Теплообмін із зовнішнім середовищем на поверхнях вільного шару відбувається за законом Ньютона. При заданих припущеннях необхідно визначити температурні поля і контактні напруження.

Введемо циліндричну систему координат  $r, \theta, z$ , центр якої лежить на поверхні шару, а вісь  $Oz$  спрямована вздовж осі циліндра. Всі величини, які позначені верхнім індексом "1", відносяться до шару, без індексів – до циліндра.

Граничні умови для температури, напружень і переміщень мають вигляд:

$$T = T_0, \quad (z = L, \quad 0 \leq r \leq R). \quad (1)$$

$$\frac{\partial T}{\partial r} = 0, \quad (r = R, \quad 0 \leq z \leq L). \quad (2)$$

$$\lambda_0^* \Delta(T^1 + T) + 2 \left( \lambda_z^1 \frac{\partial T^1}{\partial z} - \lambda_z \frac{\partial T}{\partial z} \right) = 0, \quad (z = 0; \quad 0 \leq r < R). \quad (3)$$

$$\lambda_0^* \Delta(T^1 - T) - 6 \left( \lambda_z^1 \frac{\partial T^1}{\partial z} + \lambda_z \frac{\partial T}{\partial z} \right) = -12h_0(T^1 - T) = 0.$$

$$\frac{1}{2} \frac{\partial(T^1 + T)}{\partial r} + \frac{\alpha_0^*}{\lambda_0^*} \left( \frac{T^1 + T}{2} - T_c \right) = 0, \quad (z = 0; \quad r = R). \quad (4)$$

$$\frac{1}{2} \frac{\partial(T^1 - T)}{\partial r} + \frac{\alpha_0^*}{\lambda_0^*} \left( \frac{T^1 - T}{2} - T_c^* \right) = 0, \quad (z = 0; \quad r = R).$$

$$\frac{\partial T^1}{\partial z} + H_2^1 T^1 = 0, \quad (R \leq r < \infty; z = 0). \quad (5)$$

$$\frac{\partial T^1}{\partial z} - H_1^1 T^1 = 0, \quad (0 \leq r \leq \infty; z = -H). \quad (6)$$

$$u_z^1 = -\varepsilon, \quad \tau_{rz}^{(1)} = 0, \quad (z = 0; 0 \leq r \leq R). \quad (7)$$

$$\sigma_z^1 = 0, \quad \tau_{rz}^{(1)} = 0, \quad (z = 0; R \leq r < \infty). \quad (8)$$

$$u_z^1 = \tau_{rz}^{(1)} = 0, \quad (z = -H; 0 \leq r < \infty). \quad (9)$$

тут  $\lambda_z, \lambda_z^1$  коефіцієнти теплопровідності;

$H_1^1, H_2^1$  – коефіцієнти теплообміну;

$\Delta = \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r}$  – оператор Лапласа;

$T_c = \frac{1}{2\delta} \int_{-\delta}^{\delta} T_c^0 d\gamma, \quad T_c^* = \frac{3}{2\delta^2} \int_{-\delta}^{\delta} \gamma T_c^0 d\gamma, \quad 2\delta$  – товщина проміжкового шару;

$\lambda_0^* = 2\lambda_0\delta, \quad h_0 = \frac{\lambda_0}{2\delta}, \quad \alpha_0^* = 2\alpha_0\delta, \quad \lambda_0^*, \alpha_0^*$  – коефіцієнти теплопровідності й теплообміну проміжкового шару;  $h_0$  – контактна провідність;  $T_c^0$  – температура зовнішнього середовища;  $\varepsilon$  – величина вертикального переміщення штамп.

В осесиметричному випадку термопружний потенціал і температурне поле для ізотропного тіла визначаються із рівнянь:

$$\nabla^2 \varphi = \alpha_T \frac{1+\sigma}{1-\sigma} T, \quad \nabla^2 T = 0, \quad (10)$$

а температурні напруження і переміщення знаходять за формулами:

$$u_z^{(T)} = \frac{\partial \varphi}{\partial z}, \quad \sigma_z^{(T)} = -2\mu \left( \frac{1}{r} \frac{\partial \varphi}{\partial r} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial r^2} \right), \quad \tau_{rz}^{(T)} = 2\mu \frac{\partial^2 \varphi}{\partial r \partial z}, \quad (11)$$

де  $\alpha_T$  – коефіцієнт лінійного температурного розширення;  $\mu, \sigma$  – модуль зсуву і коефіцієнт Пуассона.

Для визначення температурного поля в шарі введемо трансформанту Ганкеля функції  $T^1(r, z)$  нульового порядку

$$\overline{T^1}(\xi, z) = \int_0^\infty r T^1(r, z) J_0(\xi r) dr. \quad (12)$$

Застосувавши до другого рівняння (10) інтегральне перетворення Ганкеля і використовуючи його властивості, визначимо  $T^1(r, z)$  через довільні функції  $\varphi_1(\eta)$  і  $\varphi_2(\eta)$ :

$$T^1(\rho, \zeta) = \int_0^\infty [\varphi_1(\eta) e^{\lambda \zeta} + \varphi_2(\eta) e^{-\lambda \zeta}] I_0(\eta \rho) d\eta, \quad (13)$$

де  $I_0(\eta \rho)$  – функція Бесселя першого роду дійсного аргументу;  $\rho = \frac{r}{R}; \quad \zeta = \frac{z}{R}; \quad \eta = \xi R.$

За допомогою методу Фур'є загальний розв'язок рівняння (10) має вигляд:

$$T(r, z) = A_0 z + B_0 + D_0 (r^2 - 2z^2) + \sum_{k=1}^{\infty} I_0(\beta_k r) (A_k \operatorname{sh} \beta_k z + B_k \operatorname{ch} \beta_k z) + \sum_{k=1}^{\infty} I_0(\gamma_k r) (C_k \sin \gamma_k z + D_k \cos \gamma_k z) \quad (14)$$



де  $A_k, B_k, C_k, D_k$ , ( $k = \overline{0, \infty}$ ) – довільні постійні;  $I_0(\gamma_k r)$  – функція Бесселя I-го роду уявного аргументу;  $\beta_k, \gamma_k$  – власні значення, які визначаються із граничних умов.

Термопружний потенціал  $\varphi$  визначається із першого рівняння (10) у вигляді:

$$\varphi(\rho, \zeta) = \frac{1}{2} \frac{1+\sigma}{1-\sigma} \alpha_{T^1} \zeta \int_0^\infty \frac{1}{\eta} [\varphi_1(\eta) e^{\lambda \zeta} + \varphi_1(\eta) e^{-\lambda \zeta}] I_0(\eta \rho) d\eta. \quad (15)$$

Маючи формули температурних напружень і переміщень, можна розв'язати задачу при механічних граничних умовах. Для цього необхідно до величин, обчислених згідно формул (11), додати компоненти напружень і переміщень від бігармонічного потенціалу [2]. Розв'язок задачі теплопровідності приведений у праці [3].

Температурне поле в зоні контакту двох тіл визначається за формулами:

$$T(\rho, 0) = T_0 - A_0 R l - \sum_{k=1}^\infty I_0(\mu_{k\rho}) t h \mu_k l \cdot A_k \quad (\rho < 1), \quad T^1(\rho, 0) = \sum_{k=0}^\infty a_k \beta_k(\rho) \quad (\rho < 1) \quad (16)$$

де  $a_k = X_k T_0$  ( $k = \overline{0, N}$ );  $Y_0, Y_1$  знаходяться із системи лінійних алгебраїчних рівнянь [3]

Вимагаючи виконання граничних умов (7-9) прийдемо до системи інтегральних рівнянь відносно функцій  $\Phi(\eta)$  і  $\varphi_1(\eta)$  :

$$\int_0^\infty \Phi(\eta) I_0(\eta \rho) d\eta = -\frac{\varepsilon}{R} + \int_0^\infty G(2\eta h \Phi(\eta) I_0(\eta \rho)) d\eta - \alpha_{T^{1s}} \int_0^\infty \frac{1}{\eta} \frac{Q_2(n)}{Q(\eta) Q_1(\eta)} I_0(\eta \rho) d\eta \quad (0 \leq \rho < 1). \quad (17)$$

$$\int_0^\infty \eta \Phi(\eta) I_0(\eta \rho) d\eta = 0 \quad (\rho > 1), \quad (18)$$

розв'язок яких побудовано числовим методом.

Для визначення контактних напружень під штампом отримано наступні вирази:

$$\sigma_z^1(\rho, 0) = \sigma_z^{(P)}(\rho, 0) + \sigma_z^{(T)}(\rho, 0), \quad (19)$$

$$\sigma_z^{(P)}(\rho, 0) = -\frac{P}{2\pi R} \frac{1}{\sqrt{1-\rho^2}} \left[ Y_0^{(1)} + \frac{1}{\rho} \sum_{k=1}^N (2k+1)(-1)^k T_{2k+1}(\rho) Y_k^{(1)} \right], \quad (\rho < 1), \quad (20)$$

$$\sigma_z^{(T)} = \alpha_T T_0 \frac{x_0}{\sqrt{1-\rho^2}} \left[ Y_0^{(2)} + \frac{1}{\rho} \sum_{k=1}^{N_1} (-1)^k (2k+1) T_{2k+1}(\rho) y_k^{(2)} \right], \quad (\rho < 1), \quad (21)$$

де  $T_{2k+1}(\rho)$  – функція Чебишева;  $\sigma_z^{(P)}(\rho, 0)$  – силова складова напружень;  $\sigma_z^{(T)}(\rho, 0)$  – температурна складова напружень в шарі.

### Література

1. Подстригач Я.С. Условия теплового контакта твёрдых тел. ДАН УССР, серия А, 1963, №7, с.188-192.
2. Грилицкий Д.В., Кизима Я.А. Осесимметричные контактные задачи теории упругости и термоупругости. Львов:Вища школа. Изд.-во Львовського университета, 1981, 135 ст.
3. Окрепкий Б.С., Шелестовський Б.Г. Визначення температурного поля в системі тіл циліндр-шар. Вісник ТНТУ, 2015, №1, с.288-299.

УДК 539.3

Г.Т. Сулим<sup>1</sup>, д.ф.-м.н., проф., Й.З. Піскозуб<sup>2,3</sup>, д.ф.-м.н., доц.<sup>1</sup>ІППММ ім. Я.С. Підстригача НАН України, Україна;<sup>2</sup>Краківська Політехніка, Краків, Польща;<sup>3</sup>Українська академія друкарства, Україна

**СТРУКТУРНО-МОДУЛЬНИЙ МЕТОД ФУНКЦІЙ СТИБКА ДОСЛІДЖЕННЯ  
ДЕФОРМУВАННЯ КОМПОЗИТНИХ СТРУКТУР З ТОНКИМИ  
СТРІЧКОВИМИ ВКЛЮЧЕННЯМИ**

**Heorhiy Sulym<sup>1</sup>, Dr, Prof., Yosyf Piskozub<sup>2,3</sup>, Dr., Assoc. Prof.**<sup>1</sup>Pidstryhach IAPMM of NAS of Ukraine, Ukraine;<sup>2</sup>Cracow University of Technology, Poland;<sup>3</sup>Ukrainian Academy of Printing, Ukraine

**STRUCTURALLY MODULAR JUMP FUNCTIONS METHOD FOR  
INVESTIGATION OF THE DEFORMATION OF A COMPOSITE STRUCTURE  
WITH THIN RIBBON-LIKE INCLUSIONS**

**Abstract.** The structurally modular jump functions method is developed and used to research the effect of the functional gradient material of a thin ribbon-like interfacial deformable inclusion on the stress-strain state of a piecewise homogeneous linear elastic matrix under the conditions of longitudinal displacement.

Тріщини, оксидні плівки, сульфідні та графітові включення в металах, заповнені газом, рідиною чи твердою субстанцією порожнини є одними із найпоширеніших типів неоднорідної будови матеріалів, які зумовлюють небажану високу концентрацію напружень і, відповідно, знижують надійність та експлуатаційні характеристики виробів. З другого боку тонкі включення також слугують підкріплювальними елементами, що створюють можливість оптимізувати напружено-деформований стан (НДС) інженерних конструкцій за тих чи інших типів їхнього навантажування. Серед найбільш перспективних наукових проектів експерти називають ті, що пов'язані із значним підвищенням продуктивності комп'ютерів, відновленням людських органів з використанням відтворених тканин, отриманням нових матеріалів, створених навіть безпосереднім укладанням заданих молекул чи атомів тощо. Поряд із пошуком засобів реалізації цих проектів в теорії матеріалознавства досі залишається не вирішеною та гостро актуальною проблема подолання труднощів математичного моделювання механіки таких структур. Відтак, на сучасному етапі розвитку механіки твердого деформівного тіла доцільно зосередитися на конструюванні ускладнених конститутивних рівнянь, придатних для вивчення різномасштабних структур, а також на опрацюванні методів дослідження побудованих на їхній основі математичних моделей.

В доповіді зосереджено увагу на описі структурно-модульного методу функцій стрибка, як цілісного комплексу засобів аналітико-числового розв'язування двовимірних задач пружності для ізотропних біматеріалів із тонкими структурно неоднорідними фізично лінійно чи нелінійно деформівними міжфазними неоднорідностями.

Досліджено напружено-деформований стан перерізу безмежного ізотропного масиву, що складається з двох півпросторів з пружними сталими  $G_1, G_2$ , площиною  $xOy$ , перпендикулярною до напрямку  $z$  його поздовжнього зсуву. Перпендикулярні до цієї осі плоскі перерізи півпросторів утворюють дві півплощини  $S_k$  ( $k=1,2$ ), а межі поділу між ними відповідає вісь абсцис  $L \sim x$  (рис.). На ній уздовж відрізка  $L' = [-a; a]$

розташоване тонке включення завтовшки  $2h \ll a$ , механічні властивості якого у різних напрямках можуть різнитися (ортотропія, функціональна градієнтність) і характеризуватися конститутивним рівнянням доволі загального нелінійного вигляду

$$\sigma_{sz}^{in}(x, y) = G_s^{in}(\sigma_{xs}^{in}, \sigma_{xs}^{in}, x, y) \frac{\partial w^{in}}{\partial s}(x, y), \{s = x, y\} . \quad (1)$$

Тут монотонна функція  $G_s^{in}(\sigma_{xs}^{in}, \sigma_{xs}^{in}, x, y)$  обирається із загальнотеоретичних міркувань чи вимог щодо деформаційної поведінки проектованого функційно-градієнтного матеріалу або є якоюсь апроксимаційною залежністю емпіричних даних.

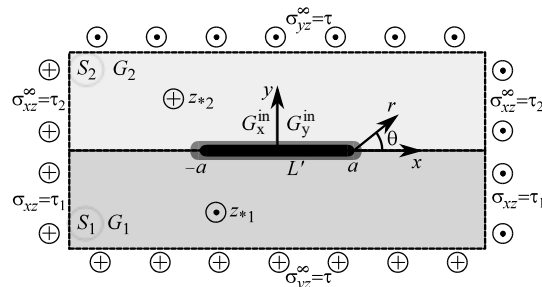


Рис. Геометрична та силова схема задачі

Величина й напрямок дії зовнішніх силових чинників (рівномірно розподілених на нескінченності напружень  $\sigma_{yz}^{\infty} = \sum_p \tau_{(p)}(t)$ ,  $\sigma_{xzk} = \sum_p \tau_{k(p)}(t)$ , зосереджених сил інтенсивності  $Q_k(t) = \sum_p Q_{k(p)}(t)$ , гвинтових дислокацій із складовою вектора Бюргера  $b_k(t) = \sum_p b_{k(p)}(t)$  в точках  $z_{*k} \in S_k$  ( $k=1,2$ .) уздовж осі  $z$ , що здійснюють поздовжній зсув масиву, змінюються квазістатично за довільним законом у вигляді монотонно змінюваних в часових проміжках  $[t_{(p-1)}; t_{(p)}]$  покрокових послідовностей. Тут  $(p)$  — номер кроку навантажування. Напруження на нескінченності повинні в довільний момент часу задовольняти умові  $\tau_{2(p)}(t)G_1 = \tau_{1(p)}(t)G_2$ , щоб забезпечити прямолінійність межі розділу матеріалів на нескінченності.

Присутність тонкого включення чи тріщини у масиві на межі поділу матеріалів моделюються стрибками компонент векторів напружень і переміщень на  $L'$ :

$$[\sigma_{yz}]_{h(p)} \cong \sigma_{yz}^- - \sigma_{yz}^+ = f_{3(p)}(x, t), \quad (2)$$

$$\left[ \frac{\partial w}{\partial x} \right]_{h(p)} \cong \frac{\partial w^-}{\partial x} - \frac{\partial w^+}{\partial x} = \left[ \frac{\sigma_{xz}}{G} \right]_{h(p)} \cong \frac{\sigma_{xz}^-}{G_1} - \frac{\sigma_{xz}^+}{G_2} = f_{6(p)}(x, t), \quad x \in L' ;$$

$$f_{3(p)}(x, t) = f_{6(p)}(x, t) = 0, \quad \text{якщо } x \notin L', \quad (3)$$

де  $t$  — деякий момент часу, як формальний монотонно зростаючий параметр, пов'язаний із змінюваністю навантаження. Тут і далі позначено:  $[\varphi]_h = \varphi(x, -h) - \varphi(x, +h)$ ,  $\langle \varphi \rangle_h = \varphi(x, -h) + \varphi(x, +h)$ ; індекси "+" та "-" відповідають граничним значенням функцій на верхньому і нижньому берегах лінії  $L$ .

Контакт між півпросторами уздовж лінії  $L'' = L \setminus L'$  та між масивом і берегами включення вздовж  $L'$  можна вважати як ідеальним

$$w^{in}(x, \pm h) = w_k(x, \pm h), \quad \sigma_{yz}^{in}(x, \pm h) = \sigma_{yzk}(x, \pm h) \quad (x \in L'), \quad (4)$$

так і ковзним

$$\sigma_{yz}^{in}(x, \pm h) = \sigma_{yz2}(x, \pm h) = -\operatorname{sgn}(w^{in}(x, \pm h) - w(x, \pm h)) \tau_{yz}^{\max}(x), \quad (x \in L'', L'' \subset L'), \quad (5)$$

де  $\tau_{yz}^{\max}(x) = -\alpha \sigma_{yy}(x)$  ( $\sigma_{yy} < 0$ ), а  $\alpha$  - коефіцієнт тертя. Причому в останньому випадку зона проковзування є апріорі невідомою.

Математична модель тонкого включення подається у вигляді так званих умов взаємодії, які еквівалентні умовам неідеального контакту між прилеглими до включення поверхнями матриці. В основі застосованої методики моделювання впливу тонкого об'єкту лежить схема інтегрування по його об'єму рівнянь опису фізико-механічного стану матеріалу включення з наступним урахуванням малості його товщини та заданих конститутивних залежностей. Побудовано універсальні математичні моделі тонких структурно-неоднорідних лінійно та нелінійно пружних, пружно-пластичних неоднорідностей з урахуванням істотних фізичних механізмів їхнього деформування з урахуванням фізичного масштабу досліджуваних явищ. Рівняння математичної моделі тонкого включення з матеріалу фізично нелінійного, чи градієнтно функційно залежного можна подати у вигляді

$$\begin{cases} G_x^{in}(\bullet) \left\langle \frac{\partial w^{in}}{\partial x} \right\rangle_h(x) - 2\sigma_{xz}^{in}(-a) - \frac{1}{h} \int_{-a}^x [\sigma_{yz}^{in}]_h(\xi) d\xi = 0, \\ G_y^{in}(\bullet) [w^{in}]_h(x) + h \langle \sigma_{yz}^{in} \rangle_h(x) = 0, \end{cases} \quad (6)$$

який при застосуванні крайових умов контакту (4), (5) приводить до системи сингулярних інтегральних рівнянь зі змінними коефіцієнтами. Для розв'язування нелінійних задач фрикційного проковзування в умовах багатокрокового навантажування-розвантажування застосовано інкрементальний підхід, розроблено ітераційний алгоритм розв'язування задач за умов апріорі невідомих зон контакту матриці з лінійно, нелінійно пружним чи пружно-пластичним включенням та довільного багатокрокового процесу навантажування-розвантажування, зокрема й циклічного.

Отримані результати розрахунків напружено-деформованого стану в околі різних типів неоднорідностей підтвердили високу міру універсальності запропонованого методу. З єдиних позицій можна досліджувати вплив тонких неоднорідностей практично довільного типу, зокрема й тріщин, на усіх рівнях їхнього фізичного масштабу - в рамках макро-, мезо-, мікро- чи наномеханіки (в геомеханіці, у теорії композитів, механіці руйнування, матеріалознавстві, мікроелектроніці тощо). Поєднання запропонованого підходу із спектакулярними здобутками створеної зусиллями професорів Олега Шаблія та Петра Яснія у Тернопільському національному технічному університеті імені Івана Пулюя наукової школи механіки деформівного твердого тіла школи створює широкі можливості для опрацювання нових ефективних методів розрахунку інженерних конструкцій, що забезпечать істотне підвищення їхньої міцності та експлуатаційного ресурсу.

УДК 531.374

М.І. Яворська<sup>1</sup> к.ф.-м.н., доц., Т.С. Дубиняк<sup>1</sup> к.т.н., доц.,О.С. Манзій<sup>2</sup> к.ф.-м.н., доц., С. К. Андрейчук<sup>2</sup> к.н. держ.упр., доц.<sup>1</sup> Тернопільський національний технічний університет імені Івана Пулюя, Україна;<sup>2</sup> Національний університет «Львівська політехніка», Україна;ДОСЛІДЖЕННЯ ПРОЦЕСУ ТА ЗАДАЧІ, ЩО ВИНИКАЮТЬ ПРИ УТВОРЕННІ  
ОБОЛОНОК МЕТОДОМ ЕЛЕКТРОДУГОВОГО НАПИЛЕННЯ

M.I. Yavorska Ph.D, Assoc.Prof., T.S. Dubyniak Ph.D, Assoc.Prof.,

O.S. Manziy Ph.D, Assoc.Prof., S.K. Andreichuk Ph.D, Assoc.Prof.

STUDY OF THE PROCESS AND PROBLEMS ARISING DURING THE  
FORMATION OF SHELLS BY THE METHOD OF ELECTRIC ARC SPRAYING

Виробництво антенних систем, та виготовлення відбиваючих поверхонь базується на нових технологічних і конструкторських ідеях, реалізація яких вимагає відповідного науково-технічного забезпечення, і можливе в тісній співпраці виробництва з науковим потенціалом. Технологія виготовлення оболонок з сітчастого матеріалу може бути використана для виготовлення осесиметричних і неосесиметричних рефлекторів або окремих елементів дзеркальних антен.

Відомі формозмінюючі операції листового штампування: витяжка, ротаційна витяжка, рельєфне формування, обтяжка, в тому числі витяжка резиною, рідиною, гідромеханічна витяжка, витяжка вибухом, штампування електричним розрядом, електромагнітне штампування, гідропневмовитяжка, які дозволяють отримати оболонку з листового матеріалу (суцільного чи газо- і гідропроникного) шляхом притискання його до матриці або пуансона передаючим середовищем. Оболонка з певними похибками відтворює профіль формоутворюючого елемента [1].

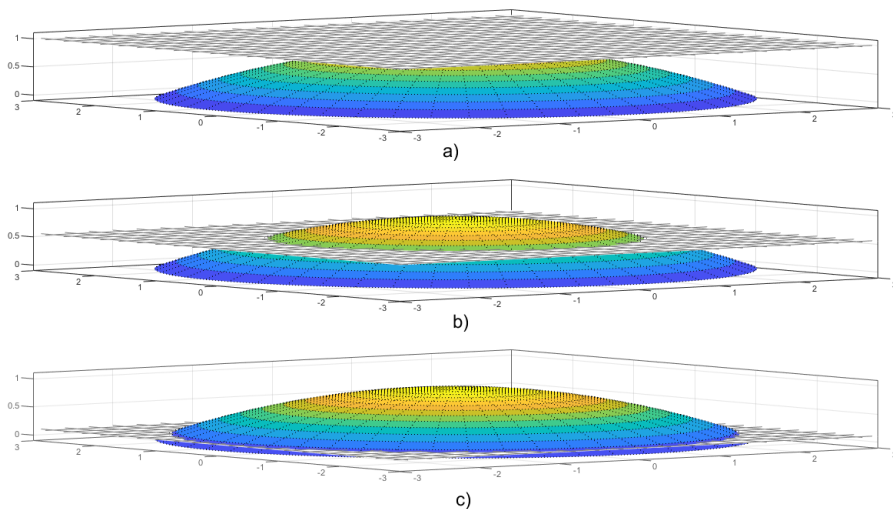


Рис. 1 Етапи наплення сітки за фрагментами еталонної поверхні

Представимо каркасну сітку (рис.1 а)) її математичною моделлю із зосередженими параметрами у вигляді сукупності мас  $m_{ij}$ , локалізованих у вузлах  $i = 1, 2, \dots, n; j = 1, 2, \dots, l$ , як показано на рис.2 б).

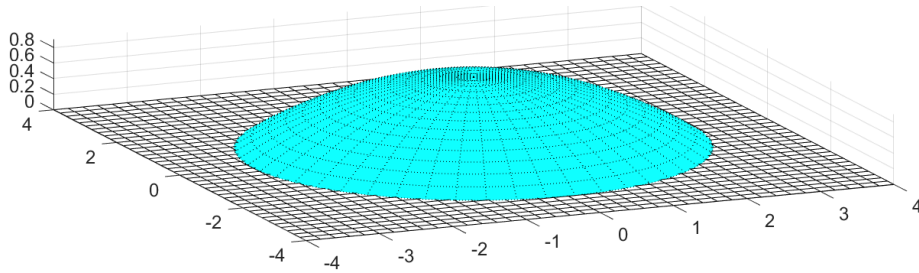


Рис. 2 Профілювання каркасної сітки за еталонною поверхнею пуансона в кінцевому варіанті

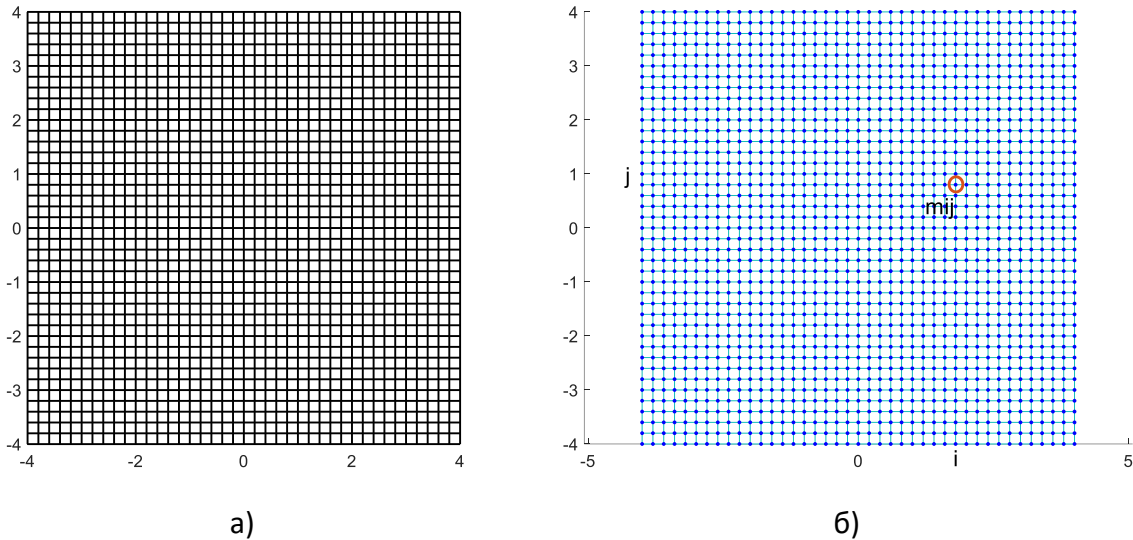


Рис. 3 Каркасна сітка (а) і представлення її моделлю із зосередженими масами у вузлах(б)

Оскільки діаметр дроту сіткового матеріалу малий а виконання заготовки забезпечує вільне проковзування дротин у вузлах, можна вважати, що вона прийматиме форму робочої поверхні під дією власної ваги. Тоді мінімум потенційної енергії:

$$W_{min} = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n m_{ij} g L_{ij}$$

де  $L_{ij}$  – відстань вузла у вихідному положенні від еталонної поверхні (рис. 4).

Якщо поверхню пуансона в системі координат  $Oxyz$  представити її математичною моделлю

$$F(x, y, z) = 0 \tag{1}$$

то

$$L_{ij} = Z_{ij} - z_{ij}$$

де значення  $z_{ij} = q$  знаходимо як розв’язок рівняння  $F(X_i, Y_j, q) = 0$ .

Іншою проблемою, що виникає при реалізації методики напилення є позиціонування, траєкторія, лінійна і кутова швидкості переміщення сопла напилювача, які б забезпечували рівномірність шару покриття по всій поверхні. Не вдаючись в технологічні особливості процесу розглянемо умову орієнтації факелу, перпендикулярно до робочої поверхні. Мінімальну відстань початкової позиції сопла з координатами  $(X_i, Y_j)$  до еталонної поверхні (рис. 4) напилення знайдемо як довжину відрізка нормалі до цієї поверхні, що проходить через точку з координатами  $(X_i, Y_j, 0)$ , і перетинає поверхню в точці з координатами  $(x_{0i}, y_{0j}, z_{0ij})$ :

$$D = \sqrt{(X_i - x_{0i})^2 + (Y_j - y_{0j})^2 + (z_{0ij})^2} \quad (2)$$

Рівняння нормалі до поверхні в точці  $M_{0ij}(x_{0i}, y_{0j}, z_{0ij})$ :

$$\frac{X - x_{0i}}{\frac{dF}{dx}(M_{0ij})} = \frac{Y - y_{0j}}{\frac{dF}{dy}(M_{0ij})} = \frac{-z_{0ij}}{\frac{dF}{dz}(M_{0ij})}. \quad (3)$$

Виходячи із системи рівнянь заданих співвідношеннями(1,2,3) можемо оцінити мінімальну відстань вузла( $i,j$ ) сітки (рис.3 а)), що знаходиться в початковому положенні (рис1 а)), від еталонної поверхні.

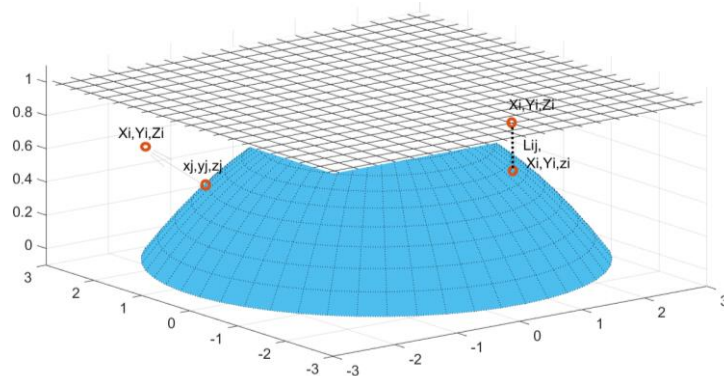


Рис. 4 До орієнтації факелу напилювача

У ході роботи розглянуто методи виробництва антенних систем, та виготовлення відбиваючих поверхонь, що базується на нових технологічних і конструкторських ідеях. Досліджено процес утворення оболонок з сітчастого матеріалу, що може бути використана для виготовлення осесиметричних і неосесиметричних рефлекторів або окремих елементів дзеркальних антен.

Однією з задач, які досліджують при формуванні оболонки є знаходження положення елементів сітки після деформування, що у нашому випадку зводиться до знаходження положення вузлів сітки після деформації. знаходження положення елементів сітки після деформування.

Мінімізація потенціальної енергії здійснено чисельно ітераційним методом. При розрахунку енергії використовується очевидний факт, що енергія елемента залежить лише від деформації самого елемента, а деформація в свою чергу залежить від зусиль, прикладених до кінців елемента. Також очевидним є те, що енергія всієї сітки дорівнює сумі енергій її частин.

### Література

1. Ротхаммель К., Кришке А. Антенны. Том 1.: Пер с нем. – Мн.: ОМО «Наш город», 2001. –416с., ил.
2. Сулим Г.Т. Основы математической теории термоупругой равновесии деформируемых твердых тел с тонкими включениями. – Львів: Дослідно-видавничий центр НТШ, 2007. – 716 с.
3. В.А.Овчаренко, С.В.Подлесний, С.М.Зінченко Основы методу скінчених елементів і його застосування в інженерних розрахунках Навчальний посібник. – Краматорськ: ДДМА, 2008. – 380 с.
4. Карвацький А. Я. Метод скінченних елементів у задачах механіки суцільних середовищ. Програмна реалізація та візуалізація результатів [Електронний ресурс], 2015

Секція 3  
ТЕРМОМЕХАНІКА ЗВАРНИХ З'ЄДНАНЬ

УДК 621.793.927.7

М.С. Михайлишин к. ф.-м. н., проф., В.Я. Гаврилюк, Ч.В. Пулька д. т. н., проф.  
Тернопільський національний технічний університет імені Івана Пулюя, Україна

ФОРМУВАННЯ НАПЛАВЛЕНОЇ ПОВЕРХНІ ПІД ВПЛИВОМ  
ВІДЦЕНТРОВОГО ОБЕРТОВОГО РУХУ

M.S. Mykhailyshyn Ph.D., Prof., V.J. Havryliuk, Ch.V. Pulka Dr., Prof.

THE SHAPING OF A FUSED SURFACE TO THE INFLUENCE OF CENTRIFUGAL  
ROTATIONAL MOTION

**Abstract.** Different methods of surfacing are using to strengthen machine parts. The surfacing will perform with using simultaneous centrifugal rotation compared to the traditional surfacing scheme. The disk is located in a fixed position during the entire surfacing process according to the traditional scheme. The rotational movement is carrying out with a certain angular velocity at the time of fusion of the metal layer.

Процес наплавлення має важливе місце для формування зміцнювальних шарів металу на контактуючих поверхнях, що піддаються інтенсивному спрацюванні. Тому важливим є дослідження форми наплавленого валика в залежності від товщини шару металу та кутової швидкості обертання круглих дисків, в момент початку розплавлення порошкоподібного твердого сплаву.

На рис. 1 зображений диск з наплавленим валиком із застосуванням відцентрового обертання. При індукційному напавленні, в даному випадку при початковому розплавленні твердого сплаву його поверхня, внаслідок дії інерційних сил, буде змінювати свою форму, що в подальшому буде впливати на товщину наплавленого шару металу. Тому необхідно теоретично знайти цей вплив обертального руху на форму поверхні розплавленого валика.

В процесі індукційного напавлення робочої поверхні тонких круглих дисків застосовується надання диску обертального руху навколо осі симетрії з деякою кутовою швидкістю  $\omega$  [1 – 3].

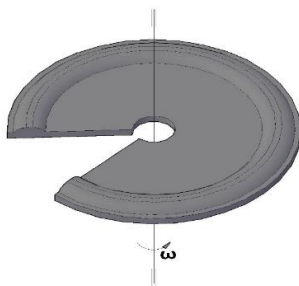


Рис. 1 – Наплавлений диск із застосуванням відцентрового обертання

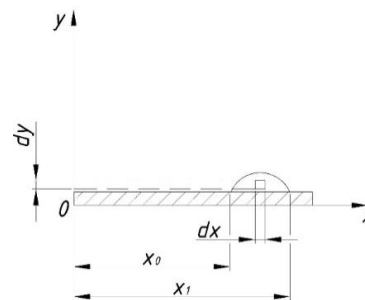


Рис. 2 – Крапля розплавленого металу на поверхні диска

Вважаємо, що рух рідини усталений і вона обертається як тверде тіло. Розплавлений метал знаходиться в рівновазі відносно диска. Рівновага рідини наступає за умови, що дорівнює нулю рівнодійна усіх сил, які діють на точки рідини.



Рівноважному стану відповідає мінімум потенціальної енергії. Повна потенціальна енергія включає в себе гравітаційну складову, поверхневу складову, енергію взаємодії поверхні диска і рідини, енергію взаємодії диска і газу, а також потенціальну енергію елементів рідини у полі сил інерції.

Для простоти розглянемо на рис. 2 двомірний випадок.

В нашому випадку зовнішніми силами є сили тяжіння  $\vec{F}_g$ , які направлені вертикально вниз. На елемент рідини площею  $dxdy$  і масою  $dm = \rho_p dxdy$  ( $\rho_p$  – густина одиниці площі рідини) діє сила ваги  $dF_g = gdm$  ( $g$  – прискорення вільного падіння). Потенціальна енергія елемента рідини в полі сил тяжіння:

$$d\Pi_g = gydm = \rho_p gydxdy. \quad (1)$$

Дійсно:

$$dF_{gy} = -\frac{\partial}{\partial y} d\Pi_g = -\rho_p g dxdy = -gdm. \quad (2)$$

Тоді, виконавши відповідні розрахунки, отримаємо формулу повної потенціальної енергії:

$$\Pi = \int_{x_0}^{x_1} \left[ \frac{1}{2} \rho_p y (gy - \omega^2 x^2) + \sigma_{pr} \sqrt{1 + y'^2} + (\sigma_{tr} - \sigma_{tr}) \right] dx, \quad (3)$$

де  $\sigma_{pr}$  – коефіцієнт поверхневого натягу розплаву при контакті з газовою фазою,  $\sigma_{tr}$  – коефіцієнт поверхневого натягу твердого тіла при контакті з розплавом,  $\sigma_{tr}$  – коефіцієнт поверхневого натягу твердого тіла при контакті з газовою фазою.

Задача про знаходження форми поперечного перерізу розплаву зводиться до визначення мінімуму отриманого функціонала при умові постійності площі поперечного перерізу розплаву. Таким чином ми отримали ізопериметричну варіаційну задачу на умовний екстремум. Умова збереження площі поперечного перерізу розплаву має вигляд:

$$\int_{x_0}^{x_1} y dx = S, \quad (4)$$

де  $S$  задана величина. Напишемо допоміжний функціонал:

$$\Pi_d = \int_{x_0}^{x_1} \left[ \frac{1}{2} \rho_p y (gy - \omega^2 x^2) + \sigma_{pr} \sqrt{1 + y'^2} + (\sigma_{tr} - \sigma_{tr}) + \lambda y \right] dx, \quad (5)$$

де  $\lambda$  – множник Лагранжа. Так як  $\sigma_{tr}$  і  $\sigma_{tr}$  постійні величини при фіксованій температурі, мінімум функціоналу буде визначатися підінтегральною функцією:

$$F = \frac{1}{2} \rho_p y (gy - \omega^2 x^2) + \sigma_{pr} \sqrt{1 + y'^2} + \lambda y. \quad (6)$$

Числові обчислення проводились для таких даних:

$$g = 9.81 \text{ М/с}^2, \rho_p = 7.8 \cdot 10^3 \text{ кг/М}^3, \sigma_{\text{пр}} = 1.75 \text{ Н/М},$$

$$x_0 = 0.05 \text{ м}, \quad x_1 = 0.07 \text{ м}, \quad S = 3 \cdot 10^{-5} \text{ м}^2.$$

Результати обчислень приведені на рис.3 і 4.

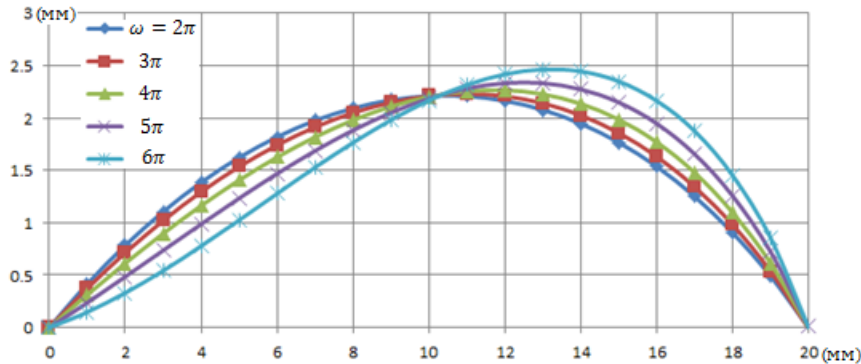


Рис. 3 – Форма поперечного перерізу розплаву ( $y(x)$ ) для різних значень кутової швидкості

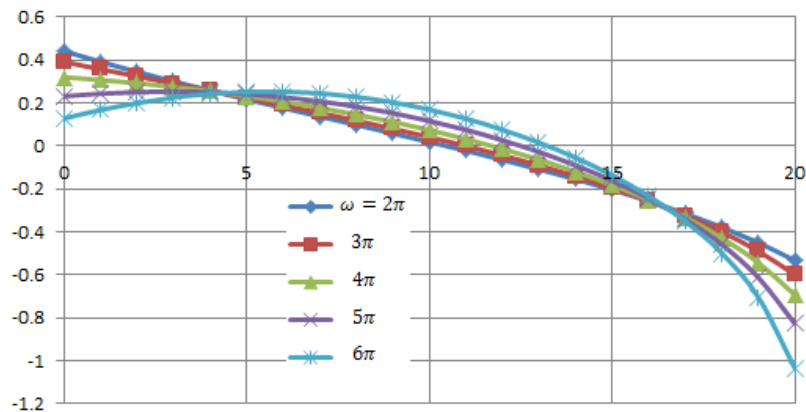


Рис. 4 – Залежність  $y'(x)$  для різних значень  $\omega$

Як бачимо із зростанням кутової швидкості форма поперечного перерізу розплаву наближається до форми каплі рідини, яка знаходиться на поверхні.

Приведені розрахунки дозволяють отримати задану геометричну форму наплавленого валика в залежності від кутової швидкості і його товщини, що в кінцевому результаті підвищує довговічність роботи наплавленої поверхні, порівнюючи з технологією наплавлення без обертання диска.

### Література

1. Пулька Ч.В. Влияние технологических схем индукционной наплавки на стабильность толщины наплавленного слоя [Текст] / Ч.В. Пулька, В.С. Сенчишин, В.Я. Гаврилюк, М.С. Базар // Автоматическая сварка. – 2013. – №4. – С. 65–67.
2. Пат. 77032 UA, МПК В23К 13/00. Спосіб наплавлення тонких дисків / Ч.В. Пулька, О.М. Шаблій, В.Я. Гаврилюк, В.С. Сенчишин; Заявник і власник Терноп. нац. техн. ун-т ім. І. Пулюя. — № u201201880; Заявл. 20.02.2012; Опубл. 10.09.2012; Бюл.№ 17.
3. Гаврилюк В.Я. Математична модель руху краплі рідкого металу на поверхні обертового сталевго диска [Текст] / В.Я. Гаврилюк, Ч.В. Пулька, В.М. Михайлишин та ін. // Вісник ТНТУ ім. І. Пулюя. – 2020. – №1(97). – С. 5 – 13.

УДК 539.3

М.С. Михайлишин, к.ф.-м.н., проф., Н.Б. Гащин, к.т.н., доц., Ю.Б. Гладьо, к.т.н., доц., Б.В. Хоміцький

Тернопільський національний технічний університет імені Івана Пулюя, Україна

## ТЕРМІЧНЕ З'ЄДНАННЯ ЦИЛІНДРИЧНИХ ОБОЛОНОК

M.S. Mykhailyshyn, Ph.D., Prof., N.B. Haschyn, Ph.D., Assoc. Prof., Yu.B. Gladyo, Ph.D., Assoc. Prof., B.V. Khomitskyi

## THERMAL CONNECTION OF CYLINDRICAL SHELLS

**Abstract.** The main ratios for determining the distribution of displacements, as well as the temperature field, bending moments and forces on different sections of the elastic cylindrical shell during the connection process, were obtained. The law of distribution of the intensity of heat sources has been determined, which provides for a given time a temperature field that differs as little as possible from the given one. The stress-strain state of the heating stage was studied for different sets of boundary conditions.

В задачах посадки виникає потреба отримання заданого поля переміщення, які можна отримати як за рахунок силового навантаження, так і деколи в результаті дії температурного поля. Розглядається випадок досягнення заданого поля переміщень за рахунок нагріву. Процес нагріву протікає деякий час, який будемо позначати  $\tau_n$ . Задача може ставитися досягнення необхідного розподілу температури в тілі за заданий час, або за мінімально можливий час.

В цьому випадку задачі нагріву і деформування розділяються: перша задача – знайти такий розподіл температури в тілі, який забезпечує задане поле переміщень (якщо це можливо) або який забезпечує поле переміщень, яке мінімально відрізняється від заданого; друга задача – знайти закон зміни в часі і по координатах інтенсивності внутрішніх джерел, які за час  $\tau_n$  забезпечать нагрівання оболонки до заданої чи близької до заданої температури.

В тонкій циліндричній оболонці товщиною  $2h$ , довжиною  $2l$  і радіусом серединної поверхні  $R$  потрібно знайти такий закон розподілу інтенсивності теплових джерел  $W_t(x,t)$  (для осесиметричного випадку), який забезпечить за заданий час  $\tau_n$  температурне поле, яке якнайменше відрізняється від заданого розподілу  $T_3(x)$ . Зауважимо, що  $T_3(x)$  задовольняє в момент  $\tau_n$  рівнянню теплопровідності:

$$\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial \varphi^2} - \bar{m}^2 T = \frac{\partial T}{\partial t} - W_t$$

і граничним умовам конвективного теплообміну.

Оскільки ставиться задача добитися заданого розподілу температури при мінімальних енергозатратах, то розглядається двохкритеріальна задача мінімізації потужності теплових джерел та мінімізації відхилення температурного поля від заданого. Розширений функціонал:

$$J = \alpha \int_{-l}^l [T(x, t_n) - T_3(x)]^2 dx + \int_0^{t_n} \int_{-l}^l \{ \beta W_t^2(x, t) + \psi(x, t) [ \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} - \bar{m}^2 T - \frac{\partial T}{\partial t} + W_t ] \} dx dt \Rightarrow \min$$

де  $\alpha$  і  $\beta$  деякі вагові коефіцієнти.

З умови стаціонарності розширеного функціоналу в просторі функцій стану, отримаємо систему розв'язуючих рівнянь для множника Лагранжа, граничних і часових умов для нього.

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} - \bar{m}^2 \psi + \frac{\partial \psi}{\partial t} &= 0; \\ \psi(x, t) &= 2\alpha [T(x, t_n) - T_3(x)] \text{ при } t = t_n; \\ \pm \frac{\partial \psi}{\partial x} + h_t \psi &= 0 \text{ при } x = \pm l; \\ \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} - \bar{m}^2 T - \frac{\partial T}{\partial t} + W_t &= 0; \\ W_t &= -\frac{1}{2\beta} \psi(x, t); \\ T &= 0 \text{ при } t = 0; \\ \pm \frac{\partial T}{\partial x} + h_t T &= 0 \text{ при } x = \pm l. \end{aligned}$$

Шукаємо розв'язки отриманих диференціальних рівнянь методом розділення змінних:  $\psi(x, t) = \Psi(x)\Phi(t)$ . З граничних умов отримаємо систему однорідних рівнянь для визначення сталих інтегрування. Прирівнявши визначник даної системи до нуля, отримаємо трансцендентне рівняння для визначення власних чисел  $\delta_n$ .

В результаті проведених перетворень вираз для визначення температурного поля, що якнайменше відрізнятиметься від заданого розподілу, матиме вигляд:

$$T_n(t) = \frac{1}{4\beta} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{b_n}{k_n^2} (e^{-k_n^2 t} - e^{k_n^2 t}) (\cos \delta_n x + a_n \sin \delta_n x).$$

Невідомі коефіцієнти  $b_n$  визначаються із співвідношення:

$$b_n = \frac{-2\alpha \delta_n \int_{-l}^l T_3(x) (\cos \delta_n x + a_n \sin \delta_n x) dx}{[e^{k_n^2 t_n} - \frac{\alpha}{2\beta k_n^2} (e^{-k_n^2 t_n} - e^{k_n^2 t_n})] [\delta_n l (1 + a_n) + (1 - a_n) \sin 2\delta_n l]}$$

Розроблений алгоритм, написана програма та проведені числові дослідження для різних наборів вхідних даних.

### Література

1. Берникер Е.И. Посадки с натягом в машиностроении. - Л.: Машиностроение, 1966. – 166 с.
2. Зенкин А.С., Арпентьев Б.М. Сборка неподвижных соединений термическими методами.- М.:Машиностроение, 1987.-128 с.
3. Шаблій О.М., Гащин Н.Б. Оптимізація термічної посадки кільцевих дисків//Матеріали п'ятої наукової конференції ТДТУ-2001.С.5.
4. Шаблій О.М., Гащин Н.Б., Хоміцький Б.В. Оптимізація переміщення кільцевого диску в процесі температурної обробки – Збірник наукових праць, присвячений 60-річчю від дня народження д.т.н., проф. Коляно Ю.М., Київ – 1996, С.165-168.

УДК 621.326

Паламар М., д.т.н., проф, Яворська М., к.т.н., доц., Апостол Ю., Наконечний Ю.  
Тернопільський національний технічний університет ім. Івана Пулюя, УкраїнаМОДЕЛЮВАННЯ ПРОЦЕСУ ФОРМУВАННЯ ОБОЛОНКИ РЕФЛЕКТОРА  
ГАЗОТЕРМІЧНИМ НАПИЛЕННЯМ

Palamar M., Dr., Prof., Yavorska M., Ph.D., Assoc.Prof, Apostol Yu., Nakonechnyi Yu.

SIMULATION OF THE REFLECTOR SHELL FORMATION PROCESS BY THE  
THERMAL SPRAYING METHOD

**Abstract.** The peculiarities of the technology of forming the surface of the reflector by the method of gas-thermal spraying in the process of applying the coating by heating the material to a liquid state and spraying it on the product-substrate with a gas jet are considered. The trajectory and orientation of the nozzle are reproduced for uniform spraying on the surface.

Виготовлення параболічних дзеркальних антен за ініціативи та прямої участі професора Олега Шаблія розпочалося у технічному університеті ім. Івана Пулюя з пошуку технології формування поверхонь із заданими геометричними властивостями і підвищеною точністю форми відбиваючої поверхні. Зокрема, як один із варіантів розглядався спосіб формоутворення відбиваючої поверхні заданого профілю шляхом газотермічного напилення [1]. Передбачалося виготовлення відбиваючої поверхні з розміщеної на пуансоні заготовки із сіткового матеріалу через нанесення на неї покриття плазмовим чи електродуговим напиленням, що дозволило б зменшити габаритні розміри оболонки за товщиною і її масою.

Зазначимо, що для дотримання рівномірного нанесення важливим є правильне позиціонування робочого вузла по відношенню до поверхні пуансона, тобто його переміщення із дотриманням сталої відстані і орієнтування за нормаллю до кожної точки на поверхні.

Так для реконструкції за заданим шаблоном поверхні, що являє собою параболоїд обертання і в аналітичному представленні задається як:

$$F(x, y, z) = x^2 + y^2 - 2Fz, \quad (1)$$

геометричне місце позицій  $(X, Y, Z)$ , що знаходяться на нормалі до біжучих точок  $(x, y, z)$  поверхні і рівновіддалені від них на задану відстань  $d$ , знаходимо з розв'язків системи нелінійних рівнянь: (2) і (3):

$$\frac{X-x}{\frac{\partial F}{\partial x}} = \frac{Y-y}{\frac{\partial F}{\partial y}} = \frac{Z-z}{\frac{\partial F}{\partial z}}, \quad (2)$$

$$d^2 = \sqrt{(X-x)^2 + (Y-y)^2 + (Z-z)^2}. \quad (3)$$

Можна показати, що для кожної біжучої точки  $(x, y, z)$  даної поверхні координати  $(X, Y, Z)$  розташування робочого вузла наступні:

$$X = x \left( 1 - \frac{d}{\sqrt{x^2 + 4F^2 + y^2}} \right), Y = y \left( 1 - \frac{d}{\sqrt{x^2 + 4F^2 + y^2}} \right), Z = z \left( 1 + \frac{2Fd}{\sqrt{x^2 + 4F^2 + y^2}} \right). \quad (4)$$

Як проілюстровано на рис. 1, при відтворенні поверхні параболоїда вони розміщуються на колових траєкторіях, а радіус кожної з яких на конкретному рівні  $Z$   $r = \sqrt{X^2 + Y^2}$ .

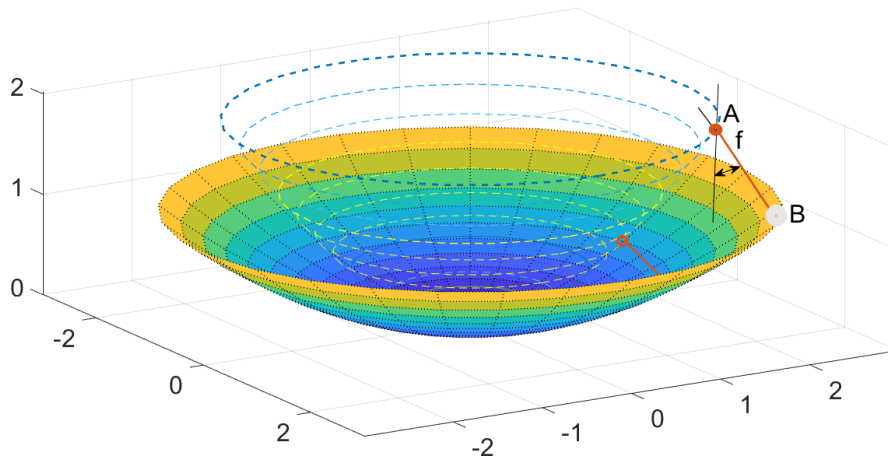


Рис.1 Основа для напилювання і траєкторії переміщення (пунктирні криві). Лінійні розміри подано в метрах.

Відповідно кут  $f$  відхилення осі сопла від вертикалі  $f = \arctan \frac{x-x}{y-y}$  (5)

На рис. 2 показано зміну кута відхилення сопла для радіального перерізу робочої поверхні у вертикальній площині.

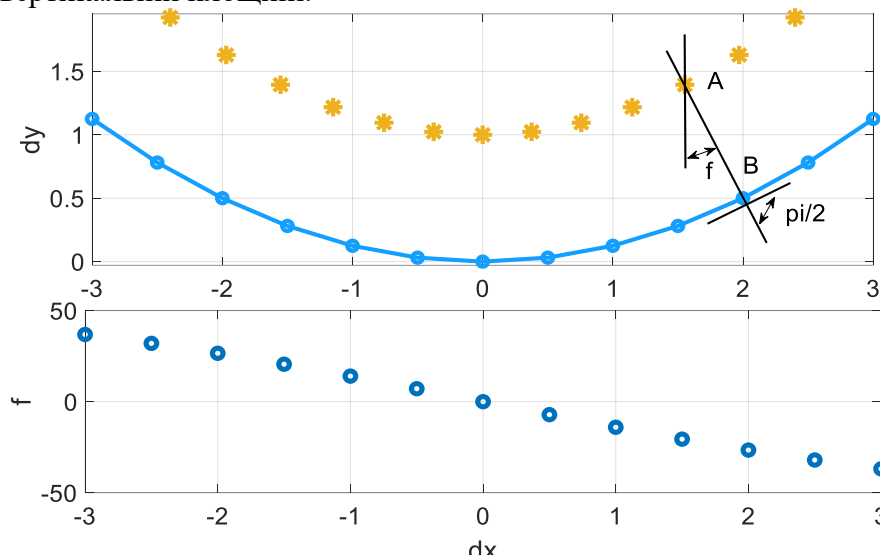


Рис. 2 Зміна кута відхилення сопла (в градусах) від вертикалі.

Отримані залежності (4) і (5) дозволяють коригувати взаємне розміщення пуансона і сопла напилювача та його відповідного кутового зміщення  $f$  від вертикалі впродовж всього процесу і таким чином забезпечити рівномірне напилення робочої поверхні.

### Література

[1]. Новосад М.В, Куцевич А. В., Рудник А. Г., Спосіб виготовлення оболонкової конструкції, Патент № 23461, 02.06.1998.

[2] M. Palamar The Device for Remote Measurements of Geometric Dimensions and Positions [Text] / Palamar M., Zelinsky I. Yavorska M. // Proceedings of the 2017 IEEE 9th International Conference on Intelligent Data Acquisition and Advanced Computing Systems: Technology and Applications (IDAACS): - 21-23 September 2017, Bucharest, Romania. IEEE, Vol.1, P.: 524–527. ISBN 978-1-5386-0696-4

УДК 621.721.052.539.4.014

О.В. Прохоренко<sup>1</sup> к.т.н., доц., В. М. Прохоренко<sup>1</sup> д.т.н., проф.,

Ч.В. Пулька<sup>2</sup> д.т.н., проф., В. С. Сенчишин<sup>2</sup> к.т.н.

<sup>1</sup> КПІ ім. Ігоря Сікорського, Україна

<sup>2</sup> Тернопільський національний технічний університет імені Іваа Пулюя, Україна

### **ЧИСЛОВЕ МОДЕЛЮВАННЯ НАПРУЖЕНОГО СТАНУ З УРАХУВАННЯМ КІНЕТИКИ ФАЗОВИХ ПЕРЕТВОРЕНЬ У СТИКОВОМУ З'ЄДНАННІ ЗІ СТАЛІ DC04 ДЛЯ РІЗНИХ ТЕХНОЛОГІЧНИХ СХЕМ ЗВАРЮВАННЯ**

**Анотація.** Для моделі стикового з'єднання зі сталі DC04 розмірами 600x600x10 мм методом скінченних елементів розв'язана нестационарна задача термопружнопластичності з урахуванням фазових перетворень при однопрохідному зварюванні під флюсом стикового шва. Для трьох технологічних схем зварювання представлені результати дослідження напруженого стану з урахуванням розподілу фазового складу у шві в залишковому стані, які мають науково-практичну цінність для прогнозування безпечної роботи зварних конструкцій.

**Odarka Prokhorenko Ph.D, Assoc. Prof., Volodymyr Prokhorenko Dr., Prof.,  
Cheslav Pulka Dr., Prof., Viktor Senchyshyn Ph.D**

Igor Sikorsky Kyiv Polytechnic Institute, Ukraine

Ternopil Ivan Puluj National Technical University, Ukraine

### **NUMERICAL SIMULATION OF THE STRESS STATE TAKING INTO ACCOUNT THE KINETICS OF PHASE TRANSFORMATIONS IN A BUTT WELDED JOINT OF STEEL DC04 FOR DIFFERENT TECHNOLOGICAL WELDING SCHEMES**

**Abstract.** For the model of butt welded joint made from steel DC04 with dimensions: 600x600x10 mm, a non-stationary thermoelastoplasticity problem, which takes into account phase transformations during single-pass submerged arc welding, was solved by means of the finite element method. For three technological welding schemes, the results of study of the stress state are presented, taking into account the distribution of the phase composition in the weld in the residual state, which have important scientific and practical interest in terms of predicting the safe operation of the welded structures.

Butt-welded structural elements, joined by arc welding, are the most common elements for the manufacturing of various structures in shipbuilding, industrial and civil building: bottom sections of welded tanks, side sections of ship hulls, etc. High manufacturing productivity of welded flat structural elements is provided by the use of automatic submerged arc welding with a fusible electrode, which is characterized by high rate of heat generation, which allows elements to be welded together in a single pass. However, high heat input causes structural transformations during welding and cooling, which are accompanied by volume changes of the metal, which can cause the formation of welding deformations and stresses. From the works [1, 2] it is known that high-gradient thermal cycle during welding causes complex kinetics of thermo-deformation processes and the formation of temporary stresses and strains with their gradual irreversible transition into residual ones, the magnitude of which could be critical for safe operation of the welded structure, as they need to be taken into account together with normative loads during strength analysis.

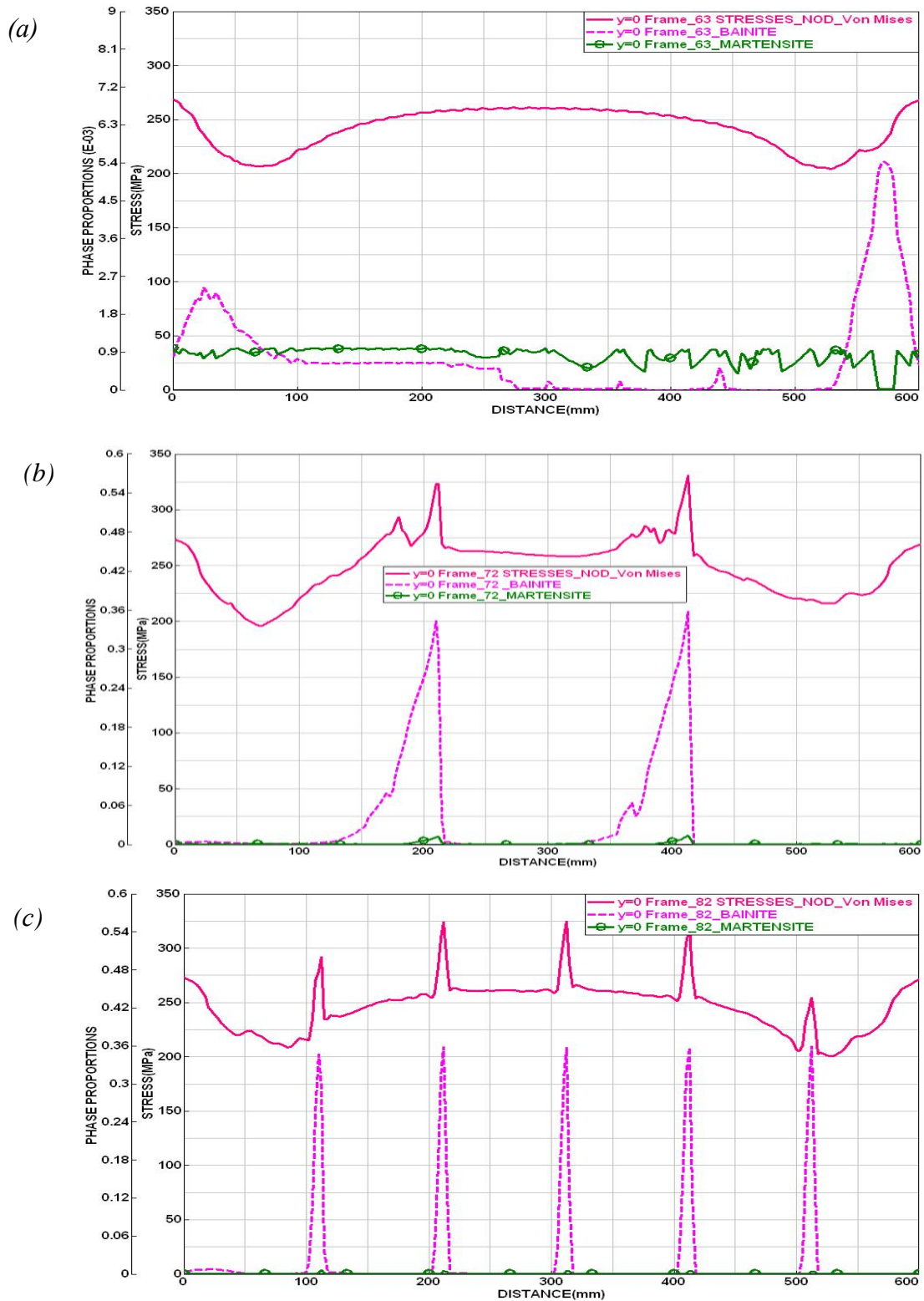


Fig. 1. Distribution of martensite, bainite and equivalent stresses in the residual state along the weld axis at  $|y|=0$  for various technological welding schemes: (a) - Fr\_63; (b) - Fr\_72; (c) - Fr\_82

In the work for three technological welding schemes a symmetrical butt joint with dimensions 600x600x10 mm and made from steel DC04 a compatible solution for the thermo-elastoplasticity problem was obtained using the finite element method using the SYSWELD



software complex [3]. The distribution of martensite and bainite structural phases, and the equivalent stresses in the residual state along the weld axis is shown in Fig. 1.

The technological welding schemes, considered in the work, are denoted by the number of frames needed to achieve the required accuracy of the problem to be solved: single pass welding - "Fr\_63", the back-step welding scheme with three 200 mm long sections - "Fr\_72", the back-step welding scheme with six 100 mm long sections - "Fr\_82". Welding time for each technological scheme is 120 s. The time of heating and cooling of the welded joint is 1200 s.

Based on the calculation results [4, 5] of the temperature in the nodes of the mesh model of the welded joint, as well as the kinetics of different phase proportions in the weld, it was established that: for "Fr\_63" scheme, the weld and the heat-affected zone (HAZ) on (99.44...100)% consists of ferrite; for "Fr\_72" scheme - in two places where adjacent sections of the back-step weld joining with each other, in the weld and HAZ, localized circular shape regions with a diameter of  $\sim (20...25)$  mm are formed with peak values of upper bainite  $\sim 36\%$ , ferrite  $\sim 62\%$ , martensite and austenite make up  $\sim 2\%$  in total; for the "Fr\_82" scheme - distribution and the quantitative values of the phase proportions are similar to the "Fr\_72" welding scheme. Characteristic cone-shaped surfaces of the maximum values of the phase structure considered parameter are also formed here (upper bainite  $\sim 36\%$ ; ferrite  $\sim 63\%$ , martensite and austenite make up a total of  $\sim 1\%$ ), above the back-step weld in the vicinity of the junction of the adjacent sections with each other. The analysis of the distribution of equivalent stresses for technological schemes showed that for the "Fr\_63" scheme no peak values of stresses are observed (Fig. 1, (a)), since the amount of bainite along the weld does not exceed the average value of  $\sim 0.07\%$ , and martensite  $\sim 0.01\%$ . The magnitude of stresses in the middle of the welded joint is  $\sim 260$  MPa, in the near-end regions  $\sim 267$  MPa. For the "Fr\_72" and "Fr\_82" schemes, as a result of metal volume changes that occur during the bainite transformation, localized areas of increased values of equivalent stresses are formed in the weld, which correspond to areas of increased values of bainite (Fig. 1, (b), (c)). In particular, the level of the peak stress on the weld axis for these schemes is the same ( $\sim (325...331)$  MPa) and is  $\sim 20\%$  higher than the stress level between the peak values and the stress level for the «Fr\_63» scheme. Thus, the obtained results of the distribution of equivalent stresses show the necessity and importance of taking into account the number of sections for performing a butt joint in terms of the strength of the welded structure.

### References

1. Makhnenko V.I. Raschetnyye issledovaniya kinetiki svarochnykh napryazheniy i deformatsiy. Kiyev: «Naukova dumka», 1976.
2. Prokhorenko V. M., Prokhorenko D. V., Zvorykin C. O., Hainutdinov S. F. (2019). Kinetics of strains during single-pass fusion welding of a symmetrical butt joint. Technological Systems, 3 (88), 87–98. <https://doi.org/10.29010/88.11>
3. SYSWELD. (2015) Reference manual version 2015. ESI Group
4. Prokhorenko, O., Hainutdinov, S., Prokhorenko, V., Pulka, Ch., Senchyshyn, V. 2022. Numerical simulation of the kinetics of temperature and phase composition in a butt joint made from steel DC04 during a single-pass submerged arc welding. Procedia Structural Integrity, 2022, 36, P. 290–297 <https://doi.org/10.1016/j.prostr.2022.01.037>
5. Prokhorenko, O., Hainutdinov, S., Prokhorenko, V., Pulka, Ch. 2022. Numerical simulation of the phase proportion distribution in a butt welded joint of steel DC04 for different back-step welding technological schemes. Procedia Structural Integrity, 2022, 36, P. 254–261 <https://doi.org/10.1016/j.prostr.2022.01.032>

УДК 621.791.927.7

Пулька Ч.В. д.т.н., проф., Михайлишин М.С., к.ф-м.н., доц., Сенчишин В.С. к.т.н.,  
Окіпний І.Б. к.т.н., доц., Шарик М.В., Гаврилюк В.Я.

Тернопільський національний технічний університет імені Івана Пулюя, Україна

## ВИКОРИСТАННЯ МАТЕМАТИЧНОГО МОДЕЛЮВАННЯ ПРИ РОЗРОБЛЕННІ НОВИХ ТЕХНОЛОГІЧНИХ ПРОЦЕСІВ ІНДУКЦІЙНОГО НАПЛАВЛЕННЯ

Ch. Pulka Dr., Prof., M. Mykhailyshyn Ph.D., Assoc. Prof., V. Senchyshyn Ph.D.,  
I. Okipnyi Ph.D., Assoc. Prof., M. Sharik, V. Havryliuk

### THE USE OF MATHEMATICAL MODELING IN THE DEVELOPMENT OF NEW TECHNOLOGICAL PROCESSES OF INDUCTION SURFACING

**Abstract.**The paper presents the peculiarities of the application of mathematical modeling in the development of new technologies and processes of induction surfacing. On the basis of the considered mathematical models, algorithms, graphical dependencies and tabular data were obtained, which allow determining the structural dimensions of heating sources (inductors and systems), as well as the vibration parameters of parts without conducting an experiment, which allows to reduce the time and material costs associated with the development new technological processes.

Розроблення нових технологічних процесів індукційного наплавлення деталей машин є актуальною проблемою як в технологічному так і в практичному плані. Це дозволяє досягти значної економії енергії та коштів внаслідок оптимізації технологічних процесів із застосуванням засобів математичного моделювання в порівнянні із засобами експериментального підбору.

В доповіді академіка Б.Є. Патона „Проблеми зварювання на межі віків”, яка була зроблена на Міжнародній конференції „Зварювання та споріднені технології – в ХХІ столітті” в листопаді 1998 р. в м. Києві, відмічено, що при розробленні нових технологічних процесів при зварюванні, наплавленні і т.п. багато сил і енергії витрачається на проведення експериментів, які пов’язані з великими матеріальними затратами. Для їх зменшення при проектуванні нових технологічних процесів необхідно розробляти таке математичне моделювання, яке охоплювало б багатогранність явищ, що відбуваються в цьому технологічному процесі, що призведе до зменшення кількості експериментів. Цільовий експеримент в даному випадку повинен використовуватися з метою перевірки теоретичних даних.

Дана робота присвячена оптимізації процесу індукційного наплавлення шляхом застосування математичного моделювання. Даний спосіб наплавлення широко застосовується при виготовленні робочих органів ґрунтообробних машин. Це здійснюється з метою підвищення їх експлуатаційних характеристик, і в свою чергу процесу самогострювання в процесі експлуатації. Даний тип деталей мають різні конструктивні форми, тому при їх наплавленні необхідним є розроблення нових конструкцій нагрівальних систем, що потребує значних матеріальних і трудових затрат.

З метою цього авторами були розроблені математичні моделі, які дозволяють теоретично визначати та вибирати необхідні параметри нагрівальних систем із врахуванням особливостей конструкції деталей. Так, були створені теоретичні засади та рекомендації для проектування енергоощадних нагрівальних джерел і систем одночасного індукційного наплавлення по всій робочій поверхні тонких деталей і розробка нових технологій і обладнання при мінімальних термінах та матеріальних затратах для їх практичної реалізації.

Були розроблені математичні моделі для проектування енергоощадних нагрівальних джерел (індукторів, систем - індуктор, тепловий та електромагнітний екрани (ІТЕЕ) та індуктор-магнітопровід) з урахуванням їх тепло-, електрофізичних, енергетичних, механічних та геометричних параметрів з використанням енергоощадного режиму наплавлення. На їх основі створені інженерні методики розрахунку нагрівальних систем для реалізації нового напрямку технології індукційного наплавлення тонких деталей. Отримані теоретичні та експериментальні результати підтвердили обґрунтованість застосування вибраних моделей з достатньою для інженерних розрахунків і практичних цілей точністю.

На основі створених математичних моделей обґрунтовано застосування комбінованого екранування теплових та електромагнітних полів при індукційному наплавленні. Це дозволило здійснювати керування розподілом температури в процесі наплавлення плоских деталей, в тому числі замкнених, і створити однакову температуру у всій зоні наплавлення. За рахунок цього було досягнуто рівномірне розплавлення наплавлювального металу, що дозволило усунути перегрівання основного металу на торці деталей та призвело до покращення якості наплавлювального металу по всій робочій поверхні. На основі розроблених математичних моделей були сконструйовані нагрівальні системи індуктор-тепловий та електромагнітний екрани (ІТЕЕ), які дозволили скоротити час наплавлення та зекономити затрати електроенергії. На основі проведених експериментальних досліджень було підтверджено ефективність застосування системи (ІТЕЕ). Сумарна економія електроенергії при цьому складає приблизно 42...56% на один виріб.

Математичне моделювання процесу індукційного наплавлення показало, що тепла енергія, скерована на одночасне індукційне наплавлення, формується та спрямовується в екранованому тепловому полі фіксованих параметрів. Таке поле забезпечує рівномірне кероване виділення тепла в зоні наплавлення, що підвищує рівномірність товщини шару наплавленого металу на 12% в широкому спектрі їх конструктивних та експлуатаційних параметрів. На основі запропонованих моделей отримано числові результати і графічні залежності, що дозволяють підбирати конструктивні параметри індукторів і нагрівальних систем виходячи із потреб технологічного процесу. Також, це дозволяє визначати коефіцієнти екранування, за допомогою яких можна здійснювати керування температурою в зоні наплавлення.

Наступним етапом оптимізації процесу індукційного наплавлення було проведено математичне моделювання нагрівальної системи індуктор-феритний магнітопровід. Застосування такої нагрівальної системи дозволяє скоротити час наплавлення однієї деталі з 60 до 50 с та зменшити витрати електроенергії на 20% в порівнянні з індуктором без магнітопроводу. Дана технологія є ефективною при наплавленні тонких деталей переважно великих розмірів і складної конфігурації.

Крім економії енерговитрат та підвищення стабільності товщини наплавленого шару металу, даний спосіб удосконалюється в напрямку підвищення експлуатаційних характеристик наплавлених деталей. Так, з метою підвищення зносостійкості наплавленого шару, було запропоновано застосування додаткових технологічних операцій, а саме механічної вібрації деталей в процесі наплавлення. За літературними даними встановлено, що застосування вібрації призводить до подрібнення структурних складових і підвищує експлуатаційні характеристики отриманих деталей в 1,5 рази. На основі цього було розроблено розрахунково-математичну модель, яка описує зміну параметрів структури наплавленого шару металу індукційним способом залежно від співвідношення характеристик і властивостей порошкоподібних твердих сплавів та параметрів вібрації, за яких забезпечуються оптимальні розміри структурних складових наплавленого металу, що дозволяють покращити службові характеристики наплавлених

деталей. Розроблена математична модель дозволяє, в залежності від типу порошкоподібного твердого сплаву, визначати параметри вібрації (амплітуду та частоту коливань) залежно від заданих характеристик порошкоподібного твердого сплаву та розмірів заданих структурних складових наплавленого металу. Дана модель, також дозволяє прогнозувати величину структурних складових в залежності від заданих параметрів вібрації. Це дозволить застосовувати один і той же наплавлювальний порошкоподібний твердий сплав при наплавленні деталей із різними показниками зносостійкості, тобто розширити його експлуатаційні характеристики і умови експлуатації.

Враховуючи вище сказане, можна зробити висновок, що застосування математичного моделювання процесу індукційного наплавлення в разі зменшує трудові та матеріальні затрати при розробленні нових прогресивних технологій, а також дозволяє на основі розроблених моделей підбирати необхідні конструктивні параметри нагрівальних систем та режими наплавлення в залежності від конструкції деталей та експлуатаційних умов її роботи.

## УДК 539.4

М.Г. Стащук<sup>1,2</sup>, д. ф. – м.н., проф.; П.Я. Пукач<sup>1</sup> д.т.н., проф.;М.І. Ігнатишин<sup>3</sup>, к.т. н., доц.; Р.С. Гром'як<sup>4</sup>, к. ф. – м.н., доц.<sup>1</sup>Національний університет “Львівська політехніка”, Україна<sup>2</sup>Фізико-механічний інститут ім. Г.В. Карпенка НАН України<sup>3</sup>Мукачівський державний університет, Україна<sup>4</sup>Тернопільський національний технічний університет імені Івана Пулюя, Україна**ЕЛЕКТРОДНИЙ ПОТЕНЦІАЛ В ЕЛЕМЕНТІ ЗВАРНОГО ШВА ВЗДОВЖ  
ТВІРНОЇ БАЛОНУ, ЗАПОВНЕНОГО ВОДЕНЬВМІСНИМ СЕРЕДОВИЩЕМ****M. Stashchuk, Dr., Prof, P. Pukach, Dr., Prof,****M. Ihnatyshyn, Ph.D., Assoc. Prof., R. Hromyak, Ph.D., Assoc. Prof.****ELECTRODE POTENTIAL IN THE WELD ELEMENT ALONG THE CREATIVE  
CYLINDER FILLED WITH A HYDROGEN-CONTAINING ENVIRONMENT**

**Abstract.** The work examines the electrode potential in the tube element of the cylinder welded along the generator. The pipe element is filled with a hydrogen-containing medium and is under the influence of internal and external pressures. Analytical-mathematical relations are proposed. Appropriate calculations have been made.

**Вступ.** Дослідження явищ локальної деградації матеріалів, призначених для експлуатації в енергоустаткуванні, що перебувають в контакті із різної активності воденьвмісними середовищами, вимагає досконалого вивчення питань впливу напруженого стану на зміну фізико-механічних характеристик та їх параметрів на довговічність елементів конструкцій і відповідальних споруд.

Найбільш важливим є потреба встановлення критичних навантажень на локальну поведінку цих матеріалів біля технологічно-необхідних або небажаних різноманітностей. Такими є різноманітні з'єднання, зварні шви, неповари, щілини, заповнені воденьвмісними середовищами і т. п. Тому проблема визначення взаємодії матеріалів із вказаними для них недосконаlostями є актуальною та особливо важливою на даний час.

Розглянемо елемент балона типу циліндричної труби (рис. 1), звареної вздовж твірної, що знаходиться під дією внутрішнього  $p_1$  й зовнішнього  $p_2$  тисків та перебуває в контакті з агресивним середовищем. Визначення електродного потенціалу в трубці проводились на основі загальних співвідношень [1-3] та одержаної формули для дилатації при заданні усадки, перпендикулярної до площини шва [2,4].

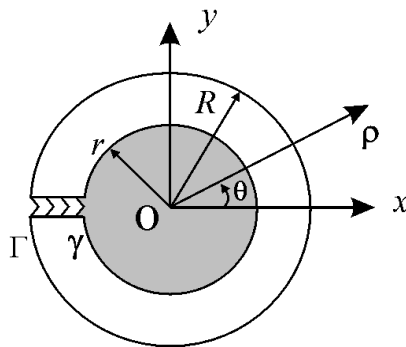


Рис. 1 Поперечний переріз елемента трубного елемента балону.

**Аналітико - математичні співвідношення.** Загальні співвідношення в полярних координатах в цьому випадку будуть мати наступний вигляд:

$$\left\{ \begin{aligned} \frac{\partial^2 \varphi_m(\rho, \theta)}{\partial \rho^2} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial \varphi_m(\rho, \theta)}{\partial \rho} + \frac{1}{\rho^2} \frac{\partial^2 \varphi_m(\rho, \theta)}{\partial \theta^2} &= \chi_m^2 \varphi_m(\rho, \theta) + \beta K \varepsilon_\sigma \varepsilon_0^{-1}, \quad r < \rho < R; \\ \frac{\partial^2 \varphi_{mc}(\rho, \theta)}{\partial \rho^2} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial \varphi_{mc}(\rho, \theta)}{\partial \rho} + \frac{1}{\rho^2} \frac{\partial^2 \varphi_{mc}(\rho, \theta)}{\partial \theta^2} &= \chi_{mc}^2 \varphi_{mc}(\rho, \theta), \quad r - \lambda < \rho < r, \\ \frac{\partial^2 \varphi_c(\rho, \theta)}{\partial \rho^2} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial \varphi_c(\rho, \theta)}{\partial \rho} + \frac{1}{\rho^2} \frac{\partial^2 \varphi_c(\rho, \theta)}{\partial \theta^2} &= \chi_c^2 \varphi_c(\rho, \theta), \quad 0 < \rho < r - \lambda, \end{aligned} \right. \quad (1)$$

де  $\chi_m^2 = \rho_m C_m \varepsilon_0^{-1}$ ,  $\chi_{mc}^2 = \rho_{mc} C_{mc} \varepsilon_0^{-1}$ ,  $\chi_c^2 = \rho_c C_c \varepsilon_0^{-1}$ ,  $\varphi_m, \varphi_{mc}, \varphi_c$  - електричні потенціали відповідно в металі, подвійному нанопроміжковому електричному шарі (п.е.ш.) товщини  $\lambda$  та середовищі;  $\beta$  - електрострикційний коефіцієнт об'ємного розширення;  $K$  - модуль об'ємного розширення;  $\varepsilon_\sigma$  - дилатація металу;  $\varepsilon_0$  - електрична стала;  $\chi_m, \chi_{mc}, \chi_c$  - постійні характеристики металу, подвійного електричного шару та середовища, в яких  $C_m, C_{mc}, C_c$  електроємності. Граничні умови для труби з нескінченним швом, забезпечують неперервність струмів і електричних потенціалів відповідно на межі метал-подвійний електричний шар та подвійний електричний шар-середовище [5]:

$$\begin{aligned} \varphi_m(r, \theta) &= \varphi_{mc}(r, \theta), \quad \sigma_m \frac{\partial \varphi_m(r, \theta)}{\partial \rho} = \sigma_{mc} \frac{\partial \varphi_{mc}(r, \theta)}{\partial \rho}; \\ \varphi_{mc}(r - \lambda, \theta) &= \varphi_c(r - \lambda, \theta), \quad \sigma_{mc} \frac{\partial \varphi_{mc}(r - \lambda, \theta)}{\partial \rho} = \sigma_c \frac{\partial \varphi_c(r - \lambda, \theta)}{\partial \rho}. \end{aligned}$$

(2)

Використовуючи [3,4], знайдемо дилатацію металу.

$$\begin{aligned} \varepsilon_\sigma &= \frac{2(1+\nu)}{3K(1+4\nu)} (\sigma_{rr} + \sigma_{\theta\theta}) = \frac{2(1+\nu)}{3K(1+4\nu)} (\sigma_{\rho\rho} + \sigma_{\theta\theta}) = \\ &= \frac{2(1+\nu)}{3K(1+4\nu)} \left( \frac{4\mu}{\pi(\kappa+1)} \left( \frac{1}{\rho} - \frac{2\rho}{r^2 + R^2} \right) s_2 \cos\theta + 2 \frac{R^2 p_2 - r^2 p_1}{R^2 - r^2} \right); \end{aligned} \quad (3)$$

Тут  $\nu$  - коефіцієнт Пуассона,  $\kappa = (3 - \nu)/(1 + \nu)$ ,  $\mu$  - модуль зсуву [4]. Підставляючи формулу дилатації (3) в перше рівняння системи (1), з використанням методу Фур'є, розділенням змінних записуємо загальний розв'язок системи диференціальних рівнянь (1).

$$\begin{aligned} \varphi_m(\rho, \theta) = & \sum_{n=0}^{\infty} \cos n\theta (A_n^+ I_n(\chi_m \rho) + A_n^- K_n(\chi_m \rho)) + \\ & + \frac{8\beta(1+\nu)}{3 C_m \rho_m (1+4\nu)} \frac{\mu}{\pi(\kappa+1)} \left( \left( \frac{2\rho}{R^2+r^2} - \frac{1}{\rho} \right) s_2 \cos \theta \right) - \\ & - 4 \frac{\beta(1+\nu)}{3 \chi_m^2 \varepsilon_0 (1+4\nu)} \frac{R^2 p_2 - r^2 p_1}{R^2 - r^2}, \quad r \leq \rho < R; \end{aligned} \quad (4)$$

$$\begin{aligned} \varphi_{mc}(\rho, \theta) = & \sum_{n=0}^{\infty} \cos n\theta (B_n^+ I_n(\chi_m \rho) + B_n^- K_n(\chi_m \rho)), \\ & r - \lambda < \rho < R; \end{aligned} \quad (5)$$

$$\varphi_c(\rho, \theta) = \sum_{n=0}^{\infty} C_n^+ I_n(\chi_c \rho) \cos n\theta, \quad 0 < \rho \leq r - \lambda; \quad (6)$$

де  $A_n^+, A_n^-, B_n^+, B_n^-, C_n^+$  - постійні, які знаходимо згідно граничних умов (2),  $I_n(\dots), K_n(\dots)$  - функції Бесселя. Рівняння для електродного потенціалу:

$$\Delta\varphi(\theta) = \Delta\varphi_m(\rho, \theta) \Big|_{\rho=r} - \Delta\varphi_c(\rho, \theta) \Big|_{\rho=r-\lambda} \quad (7)$$

При розрахунках за анімацією моделей монографії [6] приймалися наступні пружні характеристики для сталі: коефіцієнт Пуассона  $\nu = 0,3$ , модуль зсуву  $\mu = 1,3 \cdot 10^4$  МПа. Вважалось, що усадка, зніційована зварним швом, була,  $s_2 = 0,006$  м, а експлуатація труби з внутрішнім діаметром  $d = 0,852$  м та товщиною стінки  $h = 0,05$  м відбувалось під дією внутрішнього та зовнішнього тисків з величинами  $p_1 = 35$  МПа,  $p_2 = 1$  МПа.

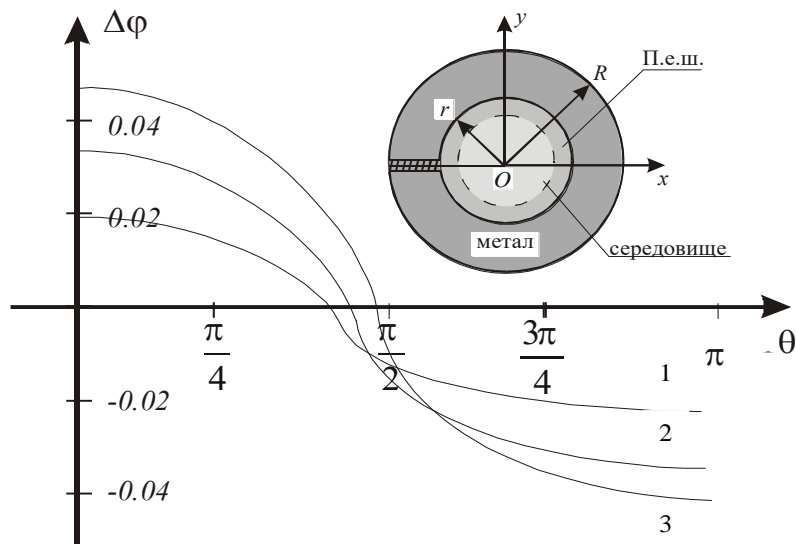


Рис. 2 Зміна електродного потенціалу в звареного швом балону, заповненого середовищем та проміжним електрошаром (п.е.ш)

На рис.2 зображено зміну електродного потенціалу. Криві 1, 2, 3 побудовані для різних відношень провідностей металу та середовища. Аналіз відношень провідностей  $\frac{\sigma_m}{\sigma_c} = 10$  (крива 1), 100 (крива 2), 1000 (крива 3) показує, що із їх зростанням розмах

електродного потенціалу збільшується, що також підвищує силу збуджених залишковими напруженнями циркуляційних корозійних струмів.

Електродний потенціал, обумовлений залишковими напруженнями при зміні кута  $\theta$  від 0 до  $\pi$  радіан міняє свій знак з плюса на мінус. Такий ефект зміни знаку електродного потенціалу можна пояснити саме наявністю зварного шва. Зміна знаку відбувається в чвертях, що містять ділянки зварного з'єднання.

Врахування одержаних досліджень із викирстанням розрахунків дислокаційних тріщин [7] стають перспективними в поясненні пластифікації в околі зварних швів балонних ємностей.

**Висновок.** Проведений розрахунок електродного потенціалу в зоні зварного шва, який знаходиться в умовах одночасної дії механічних навантажень та робочого воденьвмісного середовища, що дозволяє визначити ділянки підвищеної корозійної активності і можливості появи пітингів та тріщиноутворень на границі розділу зварного шва з основним матеріалом.

### Література

1. Сташук Н.Г. Визначення електродного потенціалу та струмів корозії уздовж поверхонь концентраторів напружень // Механіка руйнування і міцність конструкцій: у 3т./ За заг. ред. Панасюка В. В (вип. 2). – Львів: Каменяр, 1999. – т.2. с. 213-219.
2. Сташук М.Г. Оцінка впливу пружної деформації на електродний потенціал металевого циліндра в середовищі // Фізико-хімічна механіка матеріалів. – 2000. – №1. – С. 47-50.
3. Сташук М.Г. Аналітична оцінка стрибка електродного потенціалу на межі розділу “метал-середовище” // Праці наукового Товариства ім. Шевченка. Т VII. Матеріалознавство і механіка. – Львів – 2001. – С. 58-67.
4. Мусхелишвили Н.И. Некоторые основные задачи математической теории упругости. – М.: Наука, 1966.-707 с.
5. Mykola Stashchuk, Petro Pukach, Evgen Irza, Roman Hromyak, Nazar Stashchuk. Calculation of electric potentials on the surfaces of interaction of deformable metal bodies with hydrogen-containing environment // Scientific journal of she ternopil national technical university, 2021, №4(104). p. 98-108.
6. Ігнатишин М.І. Анімація механізмів та механіко – математичне моделювання реологічних моделей і напружено – деформованого стану конструкцій Mathcad / М.І Ігнатишин. – Мукачєво: РВВ МДУ, 2022. – 206 с.
7. Сташук М.Г. Мікротріщина на продовженні ядра дислокації // Фіз.-хім. механіка матеріалів, 2022, 58, №2. С. 95 – 102.



УДК 539.3

Л.І. Цимбалюк, к. ф.-м. н., доц.

Тернопільський національний технічний університет імені Івана Пулюя, Україна

**ТРИВИМІРНИЙ РОЗПОДІЛ ЗВАРЮВАЛЬНИХ ЗАЛИШКОВИХ НАПРУЖЕНЬ  
У ПЛАСТИНІ З КРУГОВИМ ШВОМ**

L.I. Tsymbaliuk, Ph.D, Assoc. Prof.

**THREE-DIMENSIONAL DISTRIBUTION OF WELDED RESIDUAL STRESSES  
IN A PLATE WITH A CIRCULAR SEAM**

With use of a meth of conditional plastic deformations and direct method of integration of the equations axisymmetric of a task for a flat sphere the expressions for meaning of residual stresses in a plate with circular seams are received. In case of symmetric distribution of plastic deformations rather median of a surface of a plate the numerical analysis of a task is carried out. Is shown, what even in rather thin the volumetric effects take place and the stresses are essentially redistributed on thickness of a plate.

При виготовленні зварних елементів конструкцій, зокрема, при вварюванні різного роду фланців, штуцерів, латок використовуються кругові шви. Характерною особливістю таких швів є те, що поперечні укорочення не можуть бути компенсовані простим переміщенням, як у випадку поздовжніх швів, і викликані ними напруження та деформації часто домінують над всіма іншими видами напружень та деформацій. Враховуючи, що ці напруження можуть істотно вплинути на міцність і тримкість зварних елементів конструкцій та споруд, необхідне удосконалення методів їх визначення.

Розглянемо безмежну пластину з ввареним диском циліндричної форми, яку будемо моделювати плоским шаром завтовшки  $2h$ , що знаходиться під дією поля умовних осесиметричних пластичних деформацій  $e_{ij}^0$  [1,2]. Віднесемо шар до циліндричної системи координат  $r, \varphi, Z$  і введемо безрозмірні координати  $\rho = r/h$  і  $z = Z/h$ . Якщо поле  $e_{ij}^0$  описати функціями:  $e_{rr}^0 = e_{rr}^0(\rho, z)$ ,  $e_{\varphi\varphi}^0 = e_{\varphi\varphi}^0(\rho, z)$ ,  $e_{zz}^0 = e_{zz}^0(\rho, z)$ ,  $e_{rz}^0 = 0$ , то ключові рівняння, аналогічно як це зображено в [3] для осесиметричної задачі термопружності, у цьому випадку запишемо у вигляді

$$\nabla^2 \sigma = f, \quad (1)$$

$$\nabla^2 \sigma_{zz} = \frac{1}{1+\mu} \left\{ \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} \left[ \rho \frac{\partial}{\partial \rho} (\sigma + \sigma_{\varphi\varphi}^0) \right] + f_1 \right\}, \quad (2)$$

тут  $\sigma = \sigma_{rr} + \sigma_{\varphi\varphi} + \sigma_{zz}$ , де  $\sigma_{rr}$  - радіальні,  $\sigma_{\varphi\varphi}$  - колові,  $\sigma_{zz}$  - осьові напруження;

$$\nabla^2 = \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} \left( \rho \frac{\partial}{\partial \rho} \right) + \frac{\partial^2}{\partial z^2},$$

$$f = \frac{1}{1-\mu} \left\{ f_1 + \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} \left[ \rho \frac{\partial}{\partial \rho} (\sigma_{\varphi\varphi}^0 + \sigma_{zz}^0) \right] + \frac{\partial^2}{\partial z^2} (\sigma_{rr}^0 + \sigma_{\varphi\varphi}^0) \right\},$$

$$f_1 = \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} (\sigma_{\varphi\varphi}^0 - \sigma_{rr}^0), \quad \sigma_{ij}^0 = E e_{ij}^0,$$

$E$  - модуль Юнга,  $\mu$  - коефіцієнт Пуассона.

Дотичні  $\sigma_{rz}$  і нормальні  $\sigma_{rr}$ ,  $\sigma_{\varphi\varphi}$  напруження обчислюються через  $\sigma$  і  $\sigma_{zz}$  за формулами

$$\sigma_{zz} = -\frac{1}{\rho} \int_0^\rho \zeta \frac{\partial \sigma_{zz}(\zeta, z)}{\partial z} d\zeta,$$

$$\sigma_{rr} = \frac{1}{\rho^2} \int_0^\rho \zeta \left[ \sigma(\zeta, z) - \sigma_{zz}(\zeta, z) + \zeta \frac{\partial \sigma_{rz}(\zeta, z)}{\partial z} \right] d\zeta, \quad (3)$$

$$\sigma_{\varphi\varphi} = \sigma - \sigma_{rr} - \sigma_{zz}.$$

Для незавантаженої на поверхнях  $z = \pm 1$  пластини повинні задовольнятися крайові умови

$$\sigma_{zz} = \sigma_{rz} = 0. \quad (4)$$

При цьому крайову умову для дотичних напружень  $\sigma_{rz}$  за допомогою рівняння рівноваги можна замінити на крайову умову від нормальних напружень [3]:

$$\frac{\partial \sigma_{zz}}{\partial z} = 0, \quad z = \pm 1.$$

Поле умовних пластичних деформацій  $e_{ij}^0$ , зумовлене накладанням стикового кругового шва, можна розділити на дві складові [4]. Перша  $e_{ij}^p$ , як і при зварюванні прямолінійним швом, зумовлена пластичними деформаціями шва і біляшовної зони. Друга складова  $e_{ij}^T$  зумовлена розігрівом всього диску теплом зварювальної дуги.

Розглянемо випадок, коли деформації  $e_{ij}^0$  симетричні відносно серединної поверхні шару і апроксимуємо їх виразами

$$e_{ij}^0(\rho, z) = [e_{ij}^p(\rho) + e_{ij}^T(\rho)](1 - mz^2). \quad (5)$$

Результати проведених досліджень по визначенню залишкових напружень при вварюванні у пластину кругового диску [4] показують, що деформації  $e_{ij}^T(\rho)$  можна подати у вигляді

$$e_{ij}^T(\rho) = -E_T^* \frac{\rho^2}{\rho_0^2} \exp[-c^2(\rho - \rho_0)^2],$$

$$e_{\varphi\varphi}^T(\rho) = e_{zz}^T(\rho) = e_{rr}^T(\rho), \quad (6)$$

де  $\rho_0 = r_0 / h$ ,  $r_0$  - радіус ввареного диска;  $c$  - коефіцієнт, що характеризує степінь зосередженості деформації  $e_{ij}^T(\rho)$  біля країв шва ( $c = 0,6 \dots 1,5$  і залежить від коефіцієнтів теплопровідності і лінійного розширення матеріалів, що зварюються);  $E_T^*$  - числовий параметр.

При описанні пластичних деформацій  $e_{ij}^p(\rho)$  будемо враховувати, що поперечні відносно лінії шва деформації укорочення значно перевищують поздовжні [1, 5]. Для матеріалів, які широко використовуються у зварних конструкціях, узагальнення експериментальних даних різних авторів обґрунтовує залежності

$$e_{rr}^p(\rho) = -E_p^* \varphi(\rho), \quad e_{\varphi\varphi}^p(\rho) = k e_{rr}^p(\rho), \quad e_{zz}^p(\rho) = -(e_{rr}^p(\rho) + e_{\varphi\varphi}^p(\rho)), \quad (7)$$

$$\varphi(\rho) = \begin{cases} 1 - a \frac{(\rho - \rho_0)^2}{b^2} - (1 - a) \frac{(\rho - \rho_0)^4}{b^4}, & |\rho - \rho_0| \leq b, \\ 0, & 0 \leq \rho < \rho_0 - b, \quad \rho > \rho_0 + b. \end{cases} \quad (8)$$

тут  $b = b_0 / h$ ,  $b_0$  - півширина зони пластичних деформацій;  $E_p^*$ ,  $a$ ,  $k$  - числові параметри. Для спрощення подальших обчислень функцію (8) можна подати також у вигляді

$$\varphi(\rho) = \exp \left[ -a \frac{(\rho - \rho_0)^2}{b^2} - (1-a) \frac{(\rho - \rho_0)^4}{b^4} \right], \quad 0 \leq a \leq 1 \quad (9)$$

Для знаходження розв'язку рівнянь (1), (2) застосовуємо до них інтегральне перетворення Ганкеля [6]. Тоді, позначивши всі величини для зображень з рисками зверху, у просторі зображень отримаємо

$$\bar{\nabla}^2 \bar{\sigma} = \bar{f}, \quad (10)$$

$$(1 + \mu) \bar{\nabla}^2 \bar{\sigma}_{zz} = -s^2 (\bar{\sigma} + \bar{\sigma}_{\varphi\varphi}) + \bar{f}_1, \quad (11)$$

$$\bar{\sigma}_{zz} \Big|_{z=\pm 1} = 0, \quad \frac{d\bar{\sigma}_{zz}}{dz} \Big|_{z=\pm 1} = 0. \quad (12)$$

Тут  $\bar{\nabla}^2 = d^2 / dz^2 - s^2$ ,  $s$  – параметр інтегрального перетворення Ганкеля.

Використавши запропонований в [3] спосіб побудови розв'язків системи рівнянь задачі термопружності, отримано вирази для ключових функцій  $\bar{\sigma}$  і  $\bar{\sigma}_{zz}$ , що задовольняють рівняння (10), (11) і граничні умови (12). На основі знайдених розв'язків та формул (3) для визначення залишкових напружень в шарі, отримано вирази:

$$\begin{aligned} \sigma(\rho, z) &= \int_0^\infty s \bar{\sigma}(s, z) J_0(s, \rho) ds, \quad \sigma_{zz}(\rho, z) = \int_0^\infty s \bar{\sigma}_{zz}(s, z) J_0(s, \rho) ds, \\ \sigma_{rr}(\rho, z) &= \int_0^\infty \left\{ \left[ \bar{\sigma}(s, z) - \bar{\sigma}_{zz}(s, z) \right] \frac{J_1(s\rho)}{\rho} + \frac{\partial^2 \bar{\sigma}_{zz}(s, z)}{\partial z^2} \frac{J_2(s\rho)}{s} \right\} ds, \\ \sigma_{rz}(\rho, z) &= - \int_0^\infty \frac{\partial \bar{\sigma}_{zz}(s, z)}{\partial z} J_1(s\rho) ds, \end{aligned} \quad (13)$$

де  $J_n(x)$ ,  $n = 0, 1, 2, \dots$  - функції Бесселя першого роду.

Для залишкових деформацій, що описується виразами (5) – (7), (9) за допомогою вищенаведених співвідношень і формул виконано числовий аналіз розподілу залишкових напружень у пластині завтовшки  $h = 10$  мм з круговим швом радіусом  $r_0 = 5$  мм. Числовий аналіз проведено для значення коефіцієнта Пуассона  $\mu = 0,3$  і параметрів  $b = 0,5$ ;  $r_0 = 5$ ;  $k = 0,1$ ;  $k_1 = 0,4$  ( $k_1 = E_T^* / E_p^*$ );  $c = 0,6$  при різних значеннях параметра  $m$  та побудовано графіки для залишкових напружень.

Отримані результати досліджень показують, що в околі шва має місце об'ємний характер розподілу напружень, а перепад залишкових деформацій по товщині шару може суттєво вплинути на величину напружень та їх перерозподіл у цьому ж напрямку.

### Література

1. Сварные строительные конструкции. В 3-х т. / Под общей ред. Л.М. Лобанова. – К.: Наук. думка, 1993. – Т. 1: Основы проектирования конструкций / Л.М. Лобанов, В.И. Махненко, В.И. Труфляков и др. – 416 с.
2. Подстригач Я.С., Осадчук В.А., Марголин А.М. Остаточные напряжения, длительная прочность и надежность стеклоконструкций. – К.: Наук. думка, 1991. – 296 с.
3. Вігак В.М. Прямий метод інтегрування рівнянь плоских задач пружності й термопружності // Доп. НАН України. – 1998. - №12. – С. 62 – 67.
4. Недосека А.Я. Основы расчета и диагностики сварных конструкций. – К.: Из-тво ИНДПРОМ. 1998. – 640 с.
5. Винокуров В.А., Григоряну А.Г. Теория сварочных деформаций и напряжений. – М.: Машиностроение, 1984. – 280 с.
6. Снеддон И. Преобразования Фурье. – М.: Изд – во иностр. лит., 1955. – 667 с.

Секція 4

ПРИКЛАДНІ ЗАСТОСУВАННЯ МЕХАНІКИ В ЗАДАЧАХ  
ЕНЕРГОЗБЕРЕЖЕННЯ

УДК 621.646:621.783.2

С.М. Балабан, к.т.н., доц.; В. Б. Каспрук, к.т.н., доц.

Тернопільський національний технічний університет імені Івана Пулюя, Україна

ПРО ОСОБЛИВОСТІ МОДЕЛІ РОЗРАХУНКУ ОПТИМАЛЬНОГО РЕЖИМУ  
РЕКУПЕРАЦІЇ ТЕПЛА ВІДПРАЦЬОВАНИХ ТЕХНОЛОГІЧНИХ ГАЗІВ

S. Balaban, Ph.D, Assoc. Prof.; V.Kaspruc, Ph.D, Assoc. Prof.

PECULIARITIES OF THE MODEL FOR CALCULATING THE OPTIMAL  
MODE OF HEAT RECOVERY OF WASTE PROCESS GASES

**Abstract.** The objective of the investigation is to reveal the effect of exhaust technological gases on the environment while reducing the consumption of primary fuel and energy resources due to the decrease of exhaust technological gases temperature. The problem of saving fuel resources while reducing the energy-intensity cost of the product unit with simultaneous increase of its quality in the baking process in industrial furnaces and drying in dryers is considered and analyzed. Analysis of the constructions of thermal installations with the improvement of the combustion process and the form of contact of the thermal agent with products and materials undergoing heat treatment is carried out.

Зростаючі темпи збільшення кількості основних парникових газів в атмосфері та енергетичне і теплове забруднення довкілля є основними причинами глобальної зміни клімату. Вирішенню даної проблеми присвятив свою роботу кліматичний саміт у Глазго в 2021 році. Його учасники затвердили спільну декларацію «Кліматичний пакт «Глазго» серед основних завдань якого зазначено зниження глобальних викидів вуглекислого газу до 2030 року, порівняно з 2010 роком на 45%. Для досягнення поставленої мети ряд країн зобов'язалися скоротити використання метану на 30%.

Такого результату можна досягнути шляхом впровадження у промисловості ефективних заходів із енергозбереження при рекуперації тепла відпрацьованих технологічних газів з подальшим його використанням у технологічних процесах [1]. Повторне використання тепла відпрацьованих технологічних газів дозволить суттєво скоротити використання первинних енергоносіїв на виробництві і знизити собівартість продукції. Так зниження температури кожного метра кубічного відпрацьованих технологічних газів на 10 градусів дозволить економити 10 кДж теплової енергії.

Успішне впровадження у виробництво процесу рекуперації тепла відпрацьованих технологічних газів у значній мірі залежить від правильного вибору способу повторного використання одержаного тепла [2]. Оскільки параметри відпрацьованих технологічних газів не залежать від кліматичних умов і практично не змінюються для стабільної роботи технологічного обладнання необхідно забезпечити постійне використання тепла одержаного шляхом рекуперації. Ідеальним варіантом, у цьому випадку, є нагрівання повітря перед подачею його в обладнання відпрацьовані технологічні гази з якого охолоджуються в процесі рекуперації.

Як зазначено у літературних джерелах [3], охолоджуючи технологічні гази печей або сушарок і нагріваючи одержаним теплом атмосферне повітря перед подачею у печі або сушарки можна досягнути суттєвої економії енергетичних ресурсів, які необхідні для організації технологічних процесів. Максимальну глибину охолодження відпрацьованих технологічних газів забезпечує використання теплових насосів. Теплові насоси здатні

охолоджувати відпрацьовані технологічні гази до температури нижчої від температури точки роси. Отже в них може відбуватися конденсація водяної пари, що дозволяє одержати додаткову енергію для нагрівання атмосферного повітря і зменшити викиди в атмосферу водяної пари, яку відносять до парникових газів.

Досвід проектування та експлуатації технологічних ліній з використанням теплових насосів показує, що із зростанням температури гарячого теплового агента різко зростають затрати на організацію роботи теплових насосів. Вважається, що теплові насоси доцільно використовувати у випадках коли температура гарячих теплових агентів не перевищує  $40^{\circ}\text{C}$ . Таким чином, перед охолодженням у тепловому насосі відпрацьовані технологічні гази, температура яких перевищує  $40^{\circ}\text{C}$ , охолоджують у теплообміннику.

Враховуючи складність проведення реконструкції працюючого обладнання і вартість теплообмінних агрегатів модель розрахунку оптимального режиму рекуперації тепла відпрацьованих технологічних газів передбачає проведення реконструкції у два етапи. На першому етапі пропонується встановлення теплообмінника «повітря – повітря». Другий етап реконструкції передбачає встановлення теплового насоса. Під час організації процесу теплообміну відпрацьовані технологічні гази виконують роль гарячого теплового агента, атмосферне повітря виконує роль холодного теплового агента. Запропонована схема теплообміну передбачає роботу теплообмінника в автономному режимі. При цьому запропонована модель розрахунку оптимального режиму рекуперації тепла відпрацьованих технологічних газів передбачає використання пластинчастого теплообмінника із зустрічним рухом теплових агентів.

Для стабільної роботи теплового насоса необхідно забезпечити поступлення гарячого теплового агента з постійною температурою. Тому теплообмін у теплообміннику доцільно проводити у режимі охолодження сталої кількості гарячого теплового агента до постійної температури. Отже модель розрахунку оптимального режиму рекуперації тепла відпрацьованих технологічних газів передбачає, що процес теплообміну у теплообміннику проходить за умов постійних початкової  $T_{g1}$  і кінцевої  $T_{g2}$  температур гарячого теплового агента і змінних, в залежності від температурних режимів навколишнього середовища, початкової  $T_{x1}$  і кінцевої  $T_{x2}$  температур холодного теплового агента. Попередньо підігрітий холодний тепловий агент подають у зону згоряння первинного паливно – енергетичного ресурсу. В процесі горіння утворюються технологічні гази, які забезпечують передбачені технологічними умовами температурний і аеродинамічний режими. В результаті зміни температури холодного теплового агента змінюється розхід первинного паливно – енергетичного ресурсу. Оскільки, на даному етапі досліджень, за розходом первинного паливно – енергетичного ресурсу оцінюють економічну ефективність впровадження повторного використання тепла відпрацьованих технологічних газів у виробництво, важливо знати вплив кінцевої температури холодного теплового агента на цей розхід.

Запропонована модель розрахунку оптимального режиму рекуперації тепла відпрацьованих технологічних газів дозволяє виконати попередній розрахунок зміни розходу первинного паливно – енергетичного ресурсу при зміні кінцевої температури холодного теплового агента. Для розв'язання вказаної задачі необхідно знати до якої максимальної температури можна нагрівати холодний тепловий агент у заданих умовах. Відомі способи розрахунку теплообмінних процесів не дозволяють вирішити це питання. Запропонована модель передбачає встановлення залежності об'ємного розходу холодного теплового агента  $L_x$  від його початкової температури при різних значеннях кінцевої температури для конкретного технологічного обладнання і параметрів технологічного процесу. Одержана залежність  $L_x=f(T_{x1})$  дозволяє встановити до якої максимальної температури можна нагріти холодний тепловий агент у теплообміннику, якщо відома його початкова температура. Отримані результати використовують для розрахунку зміни розходу первинного паливно – енергетичного ресурсу в результаті

подачу в зону згоряння попередньо підігрітого атмосферного повітря. Зміна розходу первинного паливно – енергетичного ресурсу приводить до зміни розходу холодного теплового агенту, а відповідно і його кінцевої температури. Для розрахунку вказаного процесу передбачено встановлення впливу початкової температури холодного теплового агенту на його кінцеву температуру для різних розходів. В процесі проведених досліджень в межах зміни початкової температури холодного теплового агенту -  $30^{\circ}\text{C} \leq T_{x1} \leq +30^{\circ}\text{C}$  встановлено, що залежність  $T_{x2}=f(T_{x1})$  має пряmlinійний характер, а процес описується рівнянням

$$T_{x2}=AT_{x1}+B.$$

Запропоновану модель розрахунку оптимального режиму рекуперації тепла відпрацьованих технологічних газів використано для попереднього розрахунку ефективності реконструкції печі А2ШБТ з встановленням теплообмінного обладнання для організації рекуперації тепла відпрацьованих технологічних газів і попереднього підігріву атмосферного повітря перед подачею його в піч. В якості первинного паливно – енергетичного ресурсу передбачено використання природного газу теплотворна здатність якого становить  $33,5 \text{ мДж/м}^3$ . Максимальна температура технологічних газів в печі  $+280^{\circ}\text{C}$ . Параметри відпрацьованих технологічних газів: об'ємний розхід –  $0,543 \text{ м}^3/\text{с}$ ; температура –  $+160^{\circ}\text{C}$ . Введення в експлуатацію системи рекуперації передбачено виконувати у два етапи. На першому етапі пропонується встановлення пластинчастого теплообмінника «повітря – повітря» із зустрічним рухом теплових агентів. В якості холодного теплового агенту використовують атмосферне повітря температура якого змінюється від  $-30^{\circ}\text{C}$  до  $+30^{\circ}\text{C}$ .

Розрахунок теплообмінника проводиться з урахуванням подальшого охолодження відпрацьованих технологічних газів у конденсаторі теплового насоса. Тобто температура відпрацьованих технологічних газів на виході з теплообмінника рівна  $+40^{\circ}\text{C}$ . За результатами розрахунків необхідний режим охолодження відпрацьованих технологічних газів забезпечує пластинчастий теплообмінник з площею поверхні теплообміну  $16,7 \text{ м}^2$ . За прийнятих умов теплообміну температура попередньо нагрітого атмосферного повітря може змінюватися від  $+70^{\circ}\text{C}$  до  $140^{\circ}\text{C}$ . Відповідно кількість рекуперованого тепла на першому етапі реконструкції може досягати  $230 \text{ мДж/год}$ , що дозволить економити  $7 \text{ м}^3/\text{год}$  природного газу.

### Література

1. Балабан С. М., Дуда М. І. Особливості використання утилізації тепла на енерго затратному обладнанні підприємств первинної переробки сільськогосподарської продукції // Збірник тез доповідей Міжнародної науково – технічної конференції, присвяченої пам'яті професора Гевка Б. М. «Проблеми теорії проектування та виготовлення транспортно – технологічних машин», 23-24 вересня 2021 р. – Тернопіль: 2021. – С. 45.
2. Стадник І. Я., Балабан С. М., Каспрук В. Б., Деркач А. В. Обґрунтування вибору схеми рекуперації тепла відпрацьованих технологічних газів на підприємствах // Екологічна безпека держави: тези доповідей Другого всеукраїнського круглого столу, м. Київ, 15 грудня 2021 року/ редкол. О. С. Волошкіна та ін. – К.: ІТТА, 2021. – С.120-123. № 619285-ЕРР-1-2020-1-ФІ-ЕРРКА2 СВНЕ-ЖР (15.11.2020 – 14.11.2023)
3. Балабан С. М., Каспрук В. Б. Про деякі особливості впровадження енергозберігаючих технологій на підприємствах переробної та харчової промисловості // Збірник тез доповідей Міжнародної науково – практичної конференції, присвяченої 90 – річчю від дня народження професора Рибак Тимотія Івановича та 60 – річчю кафедри технічної механіки та сільськогосподарських машин «Процеси, машини та обладнання агропромислового виробництва: проблеми теорії та практики», 29-30 вересня 2022 р. – Тернопіль: 2022. – С. 81-82.

УДК 519.63

І.О. Баран, к.т.н., доцент

Тернопільський національний технічний університет імені Івана Пулюя, Україна

МАТЕМАТИЧНЕ МОДЕЛЮВАННЯ ТЕПЛОВИХ ПРОЦЕСІВ У  
БАГАТОКОМПОНЕНТНИХ ОБЛАСТЯХ ІЗ НЕІДЕАЛЬНИМ КОНТАКТОМ

Ihor Baran, Ph.D., Assoc. Prof.

MATHEMATICAL MODELING OF HEAT PROCESSES IN MULTICOMPONENT  
AREAS WITH NON-IDEAL CONTACT

**Abstract.** The problems described by the elliptic equation in the polar coordinate system with the conjugation conditions of non-ideal contact are considered. On the basis of the method of finite elements (FEM), computational algorithms of a higher order of accuracy of their discretization are built. Individual results of solving model examples are given.

Технічні системи, котрі працюють за високих температур з навантаженням різного роду, мають складну, як правило, багатокомпонентну конструкцію. Характерним для таких систем є наявність тонких включень (технологічних швів, теплоізоляційних покриттів і т.п.), які продукують розриви в полях теплових процесів, котрі в них протікають. Оскільки наявна значна складність реальних конструкцій та тих режимів, яким вони піддаються ззовні, проведення якісного дослідження теплових процесів у них є можливим тільки із використанням сучасних методів обчислень і апарату математичного моделювання. Особливістю таких матмоделей є те, що для їх опису необхідно формулювати крайові чи/або початково-крайові задачі, котрі містять також і умови спряження неідеального контакту (УСНК). У своїй більшості це задачі, котрі мають розриви у розв'язках на тих лініях, котрі моделюють власне тонкі включення [1]. Для отримання наближених розв'язків для таких задач використовується метод скінченних елементів (МСЕ).

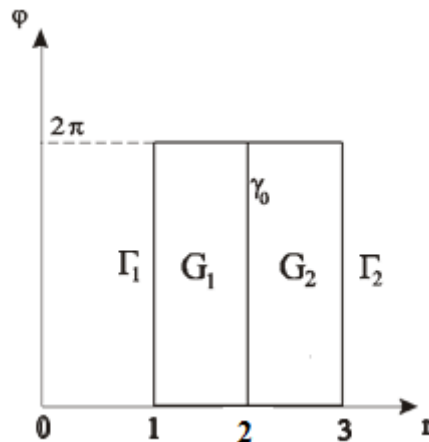
Як модель підземного сховища для зберігання різного роду відходів може бути два аксіальних анізотропних циліндри, котрі з'єднані один із одним тонкими включенням. В цьому випадку формуються задачі поширення теплового потоку для з'єднаних циліндрів. Властиво такі задачі можна звести до знаходження розв'язку еліптичного рівняння з УСНК. Спершу потрібно сформулювати крайову задачу в складній анізотропній області із врахуванням крайових умов та УСНК. На наступному етапі розв'язування за допомогою методики, котра наведена в роботі [1], та отриманих автором результатів в роботі [2], цю задачу необхідно звести до деякої варіаційної задачі пошуку мінімуму функціоналу енергії, що включає УСНК на поверхнях, котрі містять розриви розв'язку. Варто відмітити, що на границі розглядуваної області можливе задання крайових умов різного роду.

Для отримання розв'язку у варіаційній постановці застосовується дискретизація області за допомогою МСЕ. Потрібно відмітити, що записаний функціонал енергії містить параметри крайових умов та УСНК. Умови отримання мінімуму функціоналу призводять до системи лінійних алгебраїчних рівнянь, котра розв'язується за допомогою розкладу Холецького.

На рисунку наведено модельний приклад у полярних координатах  $(r, \varphi)$ . Тут  $G = G_1 \cup G_2$  – складений циліндр;  $\gamma_0$  – тонке включення. На області  $G$  визначено рівняння

$$-\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left\{ r \left( k_{11} \frac{\partial u}{\partial r} + \frac{k_{12}}{r} \frac{\partial u}{\partial \varphi} \right) - \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \varphi} \left( k_{21} \frac{\partial u}{\partial r} + \frac{k_{22}}{r} \frac{\partial u}{\partial \varphi} \right) \right\} = f, \quad (r, \varphi) \in G, \quad (1)$$

де  $k_{ij} = k_{ji}(r, \varphi)$  – неперервні на кожній із областей  $G_1, G_2$ . Області  $G$  прямокутній декартовій системі координат ( $x = r \cos \varphi, y = r \sin \varphi$ ) відповідає складене кільце при  $L_2 - l_2 = 2\pi$ .



Для складеної області  $G$  її границя  $\Gamma = \Gamma_1 \cup \Gamma_2$  складається з двох кіл

$$\Gamma_1 = \{(r, \varphi): r = l_1, l_2 \leq \varphi \leq L_2 = l_2 + 2\pi\}, \quad (2)$$

$$\Gamma_2 = \{(r, \varphi): r = L_1, l_2 \leq \varphi \leq L_2 = l_2 + 2\pi\}. \quad (3)$$

Точний класичний розв'язок задачі  $u(r, \varphi)$  є наперед відомим для обох частин складеної області. Рішення задачі полягає у отриманні наближеного числового розв'язку  $u_k$ , похибка якого буде мінімальною.

З використанням спеціально розробленого програмного забезпечення область з модельного прикладу можна піддати дискретизації елементами, які містять три або шість вузлових точок, котрі містять подвійну нумерацію вузлів на  $\gamma_0$ . Таким чином для апроксимації можна застосовувати кусково-лінійні (а) або кусково-квадратичні (б) функції МСЕ [1, 2]. Застосування функцій (а) та (б) МСЕ (якщо однакове число вузлів розбиття) видає розв'язки з однаковим порядком точності. Із застосуванням (б) область  $G$  з включенням  $\gamma_0$  ділилася на 96 трикутників.  $n=250$  – отриманий порядок матриці МСЕ. Після застосування розкладу Холецького півширина нумерації вузлів матриці буде рівною 27. Відносна похибка  $\Delta = \left| \frac{(u - u_k)}{u} \right| \cdot 100\%$  отриманого наближеного числового розв'язку була в такому діапазоні:  $6,18 \cdot 10^{-6} < \Delta < 7,14 \cdot 10^{-2}$ .

Наведені результати говорять, що для розв'язування задач, котрі містять УСНК, слушно застосовувати такі обчислювальні алгоритми, в основі яких лежить МСЕ.

### Література

- 1 Дейнека В.С., Сергиенко И.В. Модели и методы решения задач в неоднородных средах. – Киев: Наукова думка, 2001. – 606 с.
- 2 Баран І.О. Високоточні обчислювальні алгоритми та система автоматизованого розрахунку дифузійних процесів в багатокомпонентних середовищах: Дис... канд. техн. наук: 01.05.02. Тернопіль, ТДТУ, 2003.



УДК 519.85

В.В. Батюк, М.І. Паламар, д. т. н., проф.

Тернопільський національний технічний університет імені Івана Пулюя, Україна

### АЛГОРИТМ ПІДВИЩЕННЯ ТОЧНОСТІ ВИМІРЮВАНЬ МОБІЛЬНОЇ РОБОТИЗОВАНОЇ ПЛАТФОРМИ

V. Batiuk, M. Palamar, Dr, Prof.

### ALGORITHM FOR INCREASING THE ACCURACY OF MOBILE ROBOTIC PLATFORM MEASUREMENTS

**Abstract.** An algorithm for increasing the measurement accuracy of a mobile robotic platform using mathematical laws was proposed, parallelism and distance to the object were determined in real time.

Keywords: mobile robotic platform, movement algorithm, isosceles right triangle, mathematical model.

Методи точного вимірювання відстані і визначення паралельності мобільних роботизованих платформ (МРП) до перешкод і об'єктів в реальному часі є важливою складовою при поставленні задач сучасним роботизованим платформам.

Аналізування перешкоди МРП в просторі відбувається за допомогою чотирьох інфрачервоних давачів Sharp GP2Y0A02YK0F. Схема розміщення давачів показана на рис. 1.

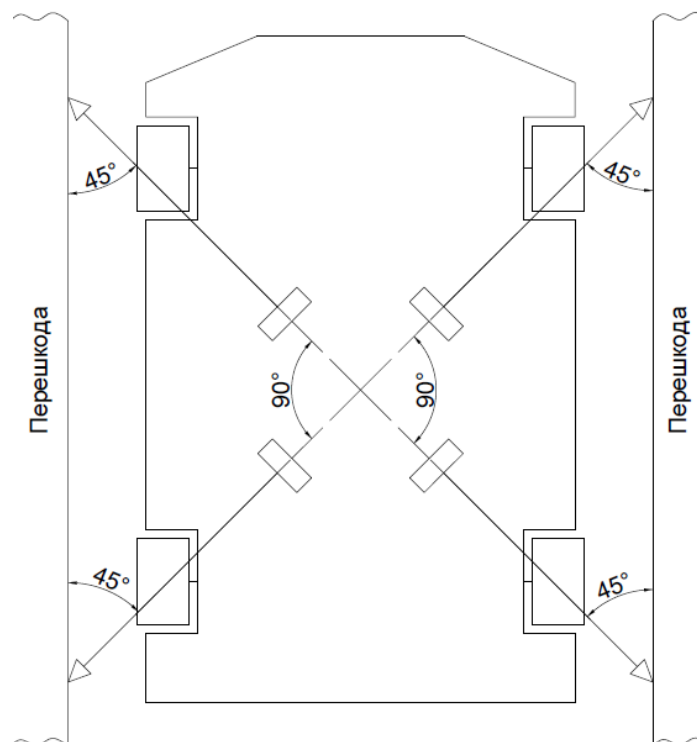


Рис. 1. Схема розміщення давачів на мобільній роботизованій платформі

Вимірювання відстані і паралельності МРП до об'єктів здійснюється за допомогою рівнобедреного прямокутного трикутника. Відстань до об'єкта здійснюється за допомогою знаходження бісектриси ( $B$ ) за формулою:

$$B = \sqrt{2} \frac{ab}{a+b}.$$

Виходячи з характеристик давачів ми можемо здійснювати виміри відстань ( $a, b$ ) в діапазоні від 15 до 150 см із збереженням потрібної точності. Дана схема розміщення дозволяє визначати паралельність і відстань до об'єкта від 0 до 106см

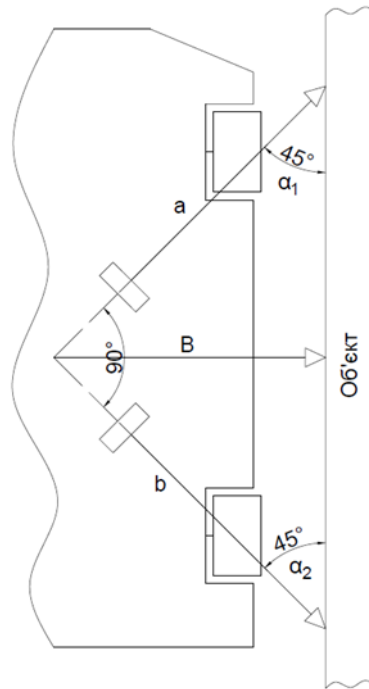


Рис. 2. Схема розрахунку паралельності і відстані до об'єкта

Для визначення паралельності ми визначаємо ( $a_{ex}$ ) експериментальну відстань і порівнюємо з реальним ( $a$ )

$$a_{ex} = \frac{B}{\cos 45^\circ}$$

Визначення кута  $\alpha_1$  здійснюється

$$\alpha_1 = \text{atan} \left( \frac{a}{b} \right)$$

Якщо  $(\alpha_1) > (\alpha)$  то шуканий кут  $\alpha_1$ :

$$\alpha_1 = \text{atan} \frac{2B - a}{\sqrt{3B}}$$

Якщо  $(\alpha_1) < (\alpha)$  то шуканий кут  $\alpha_1$ :

$$\alpha_1 = \text{atan} \frac{a - 2B}{\sqrt{3B}}$$

Де  $a_{ex}$  – експериментально визначена довжина катета рівнобедреного прямокутного трикутника.

$a$  – дійсна довжина катета досліджуваного трикутника.

$\alpha_1$  – кут відхилення від об'єкта.

$B$  – бісектриса досліджуваного трикутника.

$\alpha$  – дійсний кут до об'єкту  $45^\circ$ .

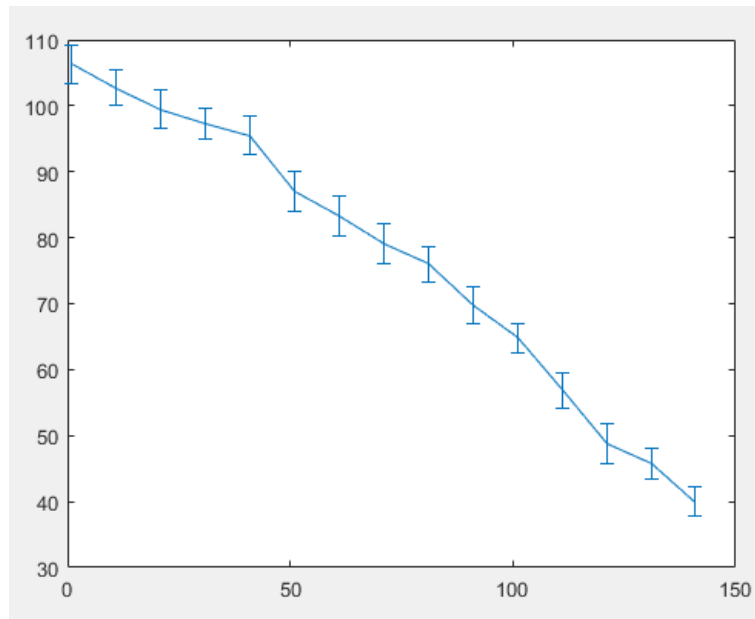


Рис 2 Діаграма відхилення вимірювання  $a_{ex}$  до кута  $\alpha_1$  паралельності

Запропонований метод вимірювання відстані і паралельності дозволяє здійснювати дані операції з використанням малої кількості датчиків, а також дозволяє досить точно здійснювати виміри виходячи з базових характеристик датчиків.

#### Література

1. Datasheet GP2Y0A02YK0F (Sharp).
2. Matlab в инженерных и научных расчетах А. Ф. Дащенко, В. Х. Кирилов, Л. Л. Колумиец, В. Ф. Оробей; Одесса «Астропринт», 2003
3. Лазарев Ю. Ф. Довідник з MATLAB / Електронний навчальний посібник з курсового і дипломного проектування / Ю. Ф. Лазарев. – Київ, 2013. – 132 с. – (НТУУ "КПІ")

УДК 621.71

В.В. Васильків, д. т. н., проф.; Л.М. Данильченко, к. т. н., доц.;

Д.Л. Радик, к. т. н., доц.

Тернопільський національний технічний університет імені Івана Пулюя, Україна

## МАТЕМАТИЧНЕ МОДЕЛЮВАННЯ ПРОЦЕСІВ КРИСТАЛІЗАЦІЇ ВИЛИВОК

V.V. Vasykiv, Dr., Prof.; L.M. Danylchenko, Ph.D., Assoc. Prof.;

D.L. Radyk, Ph.D., Assoc. Prof.

## MATHEMATIC SIMULATION OF CASTINGS' CRYSTALLIZATION PROCESS

**Abstract.** The mathematical model for calculating the content of the solid phase, taking into account the change in thermophysical parameters of the alloy during cooling and solidification, is presented, which provides the possibility of solving the problem by computer thermal analysis (CCA-methods). The use of simulation modeling of foundry processes allows to reduce the costs of developing technologies for the production of defect-free castings.

Створення конкурентоспроможних литих деталей, які володіють високою якістю та мінімальною вартістю виготовлення, значною мірою забезпечується на стадії проектування технологічного процесу їх виробництва. Інтенсивний розвиток методів та засобів комп'ютерного моделювання дозволяє зменшити витрати часу та матеріальних ресурсів при використанні спеціалізованих програм моделювання ливарних процесів. Моделювання процесу кристалізації (затвердіння) повинно враховувати всі особливості формування кінцевої структури та властивостей виливків. При цьому операції модифікування та використання вторинних матеріалів істотно змінюють характер затвердіння виливків з кольорових сплавів.

Моделювання процесів формування виливків може здійснюватися за допомогою різних спеціалізованих програм, таких як LVMFlow, ProCAST, QuikCAST, MagmaSoft, WinCast, SolidCast, NovaSolidFlow та ін. [1]. Вирішення задач охолодження та кристалізації виливків у системах імітаційного моделювання пов'язане з розв'язком нестационарного рівняння теплопровідності з функцією тепловиділення:

$$c(T)\rho(T)\frac{\partial T}{\partial t} = \operatorname{div}(\lambda(T)\operatorname{grad}T) + \rho(T)L\frac{\partial f_s}{\partial t}, \quad (1)$$

де  $T$  – температура, К;  $\lambda$  – теплопровідність, Вт/(м·К);  $\rho$  – щільність, кг/м<sup>3</sup>;  $c$  – питома теплоємність, Дж/(кг·К);  $t$  – час, с;  $L$  – питома теплота кристалізації, Дж/кг;  $f_s$  – об'ємна частка твердої фази, яка виділяється в розплаві.

Для кольорових сплавів, що зазнають фазового переходу з рідкого в твердий стан, вирішення задач моделювання затвердіння неможливе без попереднього визначення функції тепловиділення, зумовленої утворенням і зростанням твердої фази  $f_s$  в розплаві. Особливості технології лиття кольорових сплавів впливають на значення теплофізичних параметрів і на процес формування усадкових дефектів. У цьому випадку важливим є адекватний облік нерівномірності тепловиділення та утворення твердої фази в інтервалі температур затвердіння. Вміст твердої фази при затвердінні розплаву можна оцінювати різними способами: методом виливання рідкого залишку; за допомогою металографічного аналізу; методом вимірювання фізичних величин, які корелюють із вмістом твердої фази в розплаві; непрямими методами вимірювання; методами диференціального термічного аналізу або термодинамічного моделювання. Проте, всі ці методи не знайшли широкого застосування з властивих їм певних обмежень.

У завданнях моделювання теплових процесів ливарних систем частка виділеної твердої фази  $f_s$  як функція часу не може бути розрахована через відсутність прямих

залежностей. Проблему визначення вмісту твердої фази при моделюванні теплових процесів або упускають, наприклад, для чистих металів або евтектичних сплавів, або припускають, що значення  $f_s$  лінійно змінюється від температури в межах фіктивного діапазону затвердіння, або значення  $f_s$  розраховують за залежностями, які описують процеси утворення та зростання кристалів з урахуванням отриманих експериментальних даних про переохолодження, кількості зерен в об'ємі виливки тощо.

Найчастіше для термодинамічного розрахунку використовують правило «важіля» і рівняння Шейла, засновані на використанні рівноважних фазових діаграм (CALPHAD методи), які забезпечують визначення температурної залежності твердої фази [2]. Так, функція виділеної твердої фази  $f_s$  при рівноважному затвердінні відповідно до правила «важіля» описується наступними залежностями:

$$f_s = \frac{1}{1-k_p} \frac{T_L - T}{T_m - T}, \quad k = \frac{T_m - T_L}{T_m - T_s}, \quad (2)$$

де  $k_p$  - коефіцієнт розподілу бінарного сплаву;  $T_m$  - температура плавлення металу.

З використанням рівняння Шейла вміст твердої фази як функцію від температури можна обчислити за формулою:

$$f_s = 1 - \left( \frac{T_m - T}{T_m - T_L} \right)^{1/(1-k_p)}. \quad (3)$$

Для моделювання теплових процесів виливків широко використовуються методи аналізу кривих охолодження (ССА-методи) або комп'ютерного аналізу кривих охолодження (СА-ССА-методи) через низьку вартість, високу оперативність і точність. Використання експериментальних даних термічного аналізу (кривих охолодження) сплавів є простим та маловитратним методом визначення вмісту твердої фази  $f_s$  металів і сплавів як функції від часу та температури [3]. Суть ССА-методів полягає у вимірюванні та обробленні даних термічного аналізу технологічної проби розплаву за допомогою термопар, тобто залежності «температура-час» при її затвердінні для розрахунку функції твердої фази. Розрахунок функції твердої фази реалізується шляхом математичних перетворень рівняння теплового балансу проби розплаву:

$$\frac{dQ_L}{dt} - V\rho C_p \left( \frac{dT}{dt} \right)_{cc} = \alpha_{cc} F (T_{cc} - T_\theta), \quad (4)$$

де  $Q_L$  - кількість теплоти кристалізації, виділеної при затвердінні, Дж;  $V$  - об'єм проби розплаву, м<sup>3</sup>;  $\rho$  - щільність розплаву, кг/м<sup>3</sup>;  $T_{cc}$  - температура, яка вимірюється термопарою, (індекс cc позначає криву охолодження);  $C_p$  - теплоємність, Дж/(кг К);  $t$  - час, с;  $\alpha_{cc}$  - ефективний коефіцієнт теплопередачі, який описує втрати тепла при ньютонівському охолодженні металу через форму у навколишнє середовище, Вт/(м<sup>2</sup> К);  $F$  - площа поверхні технологічної проби, м<sup>2</sup>;  $T_\theta$  - температура довкілля.

За відсутності фазових перетворень рівняння балансу теплових потоків має вигляд:

$$-V\rho C_p \left( \frac{dT}{dt} \right)_{zc} = \alpha_{zc} F (T_{zc} - T_\theta), \quad (5)$$

або

$$\left( \frac{dT}{dt} \right)_{zc} = \frac{-\alpha_{zc} F (T_{zc} - T_\theta)}{V\rho C_p}, \quad (6)$$

де індекс zc означає «базову лінію» яка відповідає таким умовам, коли фазові перетворення в сплаві відсутні.

Нехтуючи змінами теплофізичних властивостей в інтервалі кристалізації сплаву, отримуємо залежність для розрахунку теплоти і питомої кристалізації:

$$Q_L = V\rho C_p \int_0^t \left( \left( \frac{dT}{dt} \right)_{cc} - \left( \frac{dT}{dt} \right)_{zc} \right) dt, \quad L = \frac{Q_L}{V\rho} = C_p \int_0^t \left( \left( \frac{dT}{dt} \right)_{cc} - \left( \frac{dT}{dt} \right)_{zc} \right) dt.$$

Вміст твердої фази в розплаві визначаємо як функцію від часу:  $f_s = \frac{L'(t)}{L}$ .

Функцію «базової лінії» знаходимо наближено, визначаючи моменти початку та завершення кристалізації, припустивши, що температура проби розплаву за відсутності фазових перетворень змінюється за експонентним законом. Тоді рівняння балансу теплових потоків проби розплаву запишемо у вигляді:

$$\frac{dT}{dt} = \frac{-\alpha F (T - T_\theta)}{mC_p}. \quad (7)$$

Ввівши позначення  $k = \alpha F / (mC_p)$ , рівняння (7) матиме вигляд:

$$\frac{dT}{dt} = k(T - T_\theta), \quad (8)$$

розв'язком якого за початкової умови  $T(t=0)=T_H$  у випадку, коли параметр  $k$  (комплексний теплофізичний коефіцієнт Ньютона-Ріхмана) приймається за постійну величину, є залежність експонентного виду:  $T(t) = T_0 + (T_H - T_0)ke^{-kt}$ .

Диференціюванням рівняння (9) отримуємо залежність експонентного виду:

$$\frac{dT}{dt} = (T_0 - T_H)ke^{-kt}. \quad (9)$$

Аналіз рівняння (8) показує, що значення коефіцієнта  $k$  у будь-який момент часу для однофазних ділянок експериментально отриманої кривої охолодження сплаву (до початку кристалізації та після затвердіння проби) визначаються з виразу:

$$k(t) = \frac{dT / dt}{T - T_0}. \quad (10)$$

Використовуючи рівняння (10), можна визначити значення параметра  $k$  для різних моментів часу до початку та після закінчення затвердіння сплаву, використовуючи чисельну схему розрахунку похідної кривої охолодження:

$$k(t_i) = \frac{T(t_{i+1}) - T(t_{i-1}))}{(t_{i+1} - t_{i-1})(T(t_i) - T_0)}. \quad (11)$$

Температурну залежність значень коефіцієнта  $k$  для однофазних ділянок кривої охолодження можна отримати, застосовуючи чисельну схему оброблення даних термічного аналізу (11), а в інтервалі кристалізації – методом найменших квадратів з використанням отриманих даних термічного аналізу для однофазних ділянок сплаву.

### Література

1. Danylchenko L. (2021) Comparative analysis of computer systems for casting processes simulation. In: Ternopil National Ivan Puluj Technical University, Proceedings of the International Conference Advanced Applied Energy and Information Technologies, Ternopil, December 15-17, 2021, pp. 105-113.
2. Danylchenko L., Radyk D. Simulation of processes of manufacturing workpieces by sheet metal forming / Book of abstract of the International scientific and technical conference “Fundamental and applied problems of modern technologies” 22th-24th of May 2018. – Ternopil: TNTU, 2018. - С.98-99.
3. Vasylyk V., Danylchenko L. Simulation of springback processes in sheet metal parts forming / Book of abstract of the XXI-th scientific conference of Ternopil Ivan Pul’uj National Technical University 16th-17th of May 2019. – Ternopil: TNTU, 2019. – P. 9-10.

УДК 539.3

Н.Б. Гащин к.т.н., доц.

Тернопільський національний технічний університет імені Івана Пулюя, Україна

## ЕНЕРГОЗБЕРІГАЮЙЙ ВАРІАНТ ТЕХНОЛОГІЇ ТЕРМІЧНОГО З'ЄДНАННЯ

N. Gashchyn, Ph.D, Assoc.Prof.

## ENERGYSAVING TECHNOLOGY OF THE THERMAL FITTING

**Abstract.** The engineering decision of revealing the optimum power and temperature necessary to fit a disc on a round shaft.

Економія енергії в процесі виконання технологічних процесів є важливою проблемою в машинобудуванні, приладобудуванні, енергетиці, будівництві, транспорті тощо. При конструюванні приладів і обладнання вказаних галузей часто застосовується технологічний процес термічної посадки з натягом [1]. Так при складанні опорних підшипників, корпусів із вставними втулками, зубчастих коліс на валах редукторів, з'єднувальних муфт, вставних кілець на валах електропоїздів, колісних пар рухомого складу здійснюють термічну посадку кільцевих дисків на круглі вали [2]. Тепловий метод формування таких з'єднань має ряд переваг в порівнянні з пресовим: виключає можливість пошкодження спряжених поверхонь при складанні, забезпечує високу міцність з'єднання, дає можливість автоматизації процесу складання, допускає можливість розбирання без пошкодження спряжених поверхонь. Нагрівання, як правило, здійснюється без урахування економного використання енергії теплових джерел. Тому математичне моделювання оптимальних режимів нагрівання з метою посадки кільцевих дисків при мінімальних енергозатратах та розробка на цій основі енергоощадної технології створення з'єднань з заданим натягом є актуальними.

Так у статті [3] розглянуто задачу несиметричного деформування кільцевого диска при мінімальних енергетичних затратах. Методом множників Лагранжа одержана система рівнянь керування питомою потужністю теплових джерел та граничні і часові умови задачі оптимізації з метою створення необхідного поля переміщень.

Стаття [4] присвячена визначенню оптимального розподілу потужності внутрішніх джерел, дія яких за заданий час забезпечує необхідне переміщення внутрішнього контура в'язкопружного диска для посадки його на круглий вал. Методами варіаційного числення отримана розв'язуюча система рівнянь для круглого диска у випадку осесиметричної задачі і розв'язана за допомогою методу малого параметра та методу відокремлення змінних. Знайдені таким чином режими нагріву забезпечують посадку дисків при мінімальних енергозатратах. Проведено числовий аналіз режимів нагріву.

Нагрів для термічної посадки кільцевого диска за допомогою теплових джерел сталої потужності досліджено в статті [5]. Аналітично визначено потужність, температурне поле та напружено-деформований стан диска.

Доцільно здійснити оцінку ефективності і переваг застосування одного із вищезгаданих методів нагрівання. Слід зазначити, що метод нагріву з допомогою теплових джерел зі сталою питомою потужністю застосовується на практиці частіше внаслідок його простоти та наявного технологічного обладнання.

На рис. 1 зображено графіки загальних затрат енергії, яка потрібна для нагрівання кільцевих дисків із сталі у випадку використання джерел сталої потужності та джерел енергії, потужність яких змінюється за оптимальним законом в залежності від загального часу технологічної операції. Як видно, енергетичні затрати при використанні оптимального режиму значно менші, причому з плином часу їх величина стабілізується. При короткому нагріванні величина загальної використаної енергії в обох випадках близька за величиною. Проте, використання короткого часу нагрівання є

недоцільним через можливе локальне перегрівання, фазові перетворення та значні температурні напруження.

Оцінити ефективність розглянутих методів нагріву доцільно з огляду на їх економічність. Для її оцінки введено коефіцієнт економії енергії, який визначимо за формулою

$$\Delta = \frac{\int_0^{\tau} \int_{R_1}^{R_2} w_{onm} r dr dt - \int_0^{\tau} \int_{R_1}^{R_2} w_{nocm} r dr dt}{\int_0^{\tau} \int_{R_1}^{R_2} w_{nocm} r dr dt} 100\%$$

в якій  $\int_0^{\tau} \int_{R_1}^{R_2} w_{onm} r dr dt$  та  $\int_0^{\tau} \int_{R_1}^{R_2} w_{nocm} r dr dt$ , помножені на  $4\pi h$ , означають енергію, яка

затрачається на нагрівання диска за допомогою оптимальних та сталих джерел. Якщо коефіцієнт економії, який визначається в процентах, є від'ємна величина, то більш економним є оптимальне нагрівання. Для оцінки економії енергії нагрівання проведені підрахунки для дисків із сталі при часі нагріву  $t=60$  с,  $t=120$  с і  $t=240$  с коефіцієнти економії будуть дорівнювати 18%, 44% та 68% відповідно.

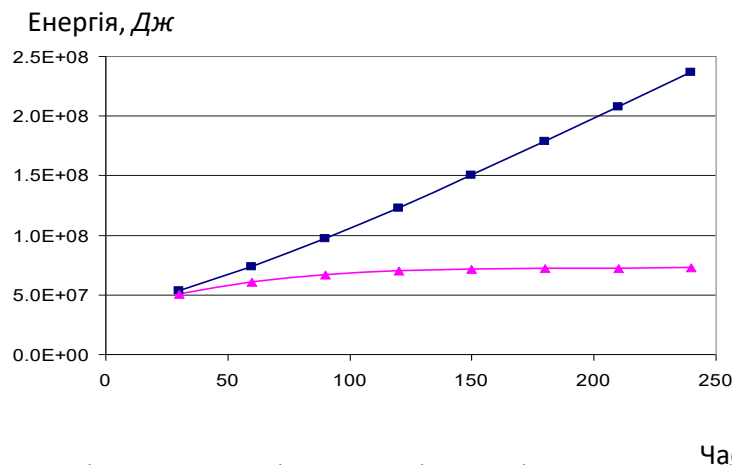


Рисунок. 1. Загальні витрати енергії для нагрівання кільцевого диска із сталі (на графіках квадратним маркером позначено зміну сталої, а трикутним – оптимальної потужності).

Таким чином, застосування методів нагрівання з оптимальним розподілом питомої потужності теплових джерел дає можливість значної економії енергоресурсів та суттєвого здешевлення собівартості зібраної машини чи механізму.

### Література

- 1.Новиков.М.П. Основы технологии сборки машин и механизмов.- М.:Машиностроение, 1969.-630 с.
- 2.Андреев Г.Я. Тепловая сборка колесных пар .- Харьков: Из-во Харьк.ун-та, 1965.-320 с.
- 3.Шаблій О.М., Гащин Н.Б. Постановка задачі та розв'язуючі рівняння для створення необхідного поля переміщень у в'язко-пружних дисках при мінімальних енергетичних затратах // Вісник ТДГУ.- 2001. -Том 6, № 1. - С. 5-11.
- 4.Шаблій О.М., Гащин Н.Б. Оптимізація посадки кільцевого диска на круглий вал // Вісник ТДГУ.- 2001. -Том 6, № 2. - С. 5-11.
- 5.Шаблій О.М., Гащин Н.Б. Посадка кільцевого диска на круглий вал з використанням теплових джерел сталої питомої потужності.- Львів: Машинознавство.- 2001. - № 8. - С. 6-9.



УДК 620.9

Н.Р.Крива, Г.М.Семенишин

Тернопільський національний технічний університет імені Івана Пулюя, Україна

## РОЗРАХУНОК СПІРАЛЕПОДІБНОГО НАГРІВАЧА

N.Kryva, H.Semenyshyn

## CALCULATION OF SPIRAL HEATER

**Abstract.** Based on the laws of electrodynamics, the specific power of heat sources during induction heating of a spiral-shaped cylindrical container made of a tube with a circular cross-section was determined. This technique can be used to design various types of induction heating systems.

Розглянемо метод визначення питомої потужності теплових джерел при індукційному нагріванні спіралеподібної ємкості циліндричної форми виготовленої з трубки круглого поперечного перерізу (далі будемо називати її технологічний індуктор) зображену на рис. 1. Намотка, розміщена всередині між двома сталевими циліндричними поверхнями одночасно діє на внутрішню та зовнішню частини індуктора. Приварені до циліндрів сталеві труби одночасно забезпечують передачу тепла до теплоносія та споживання електромагнітної енергії.

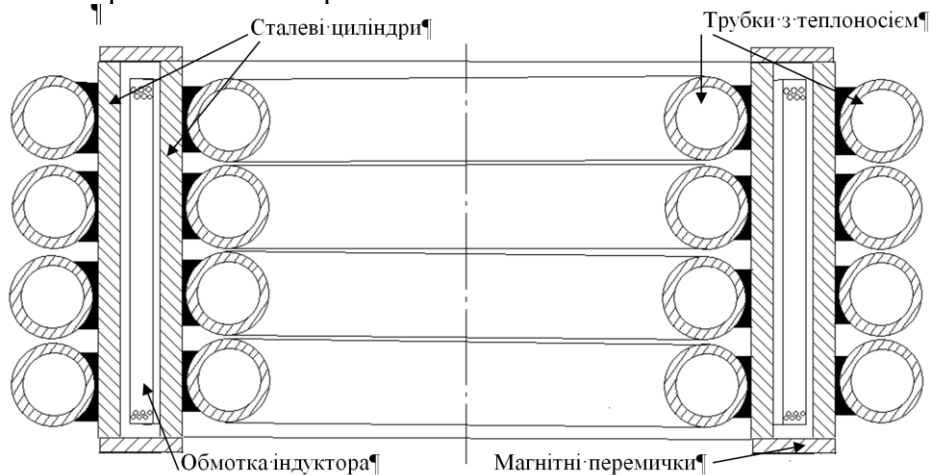


Рис. 1. Індуктор з двостороннім розміщенням джерел тепла.

Дослідимо перший випадок, коли індуктор розташований зовні технологічного індуктора. Позначимо  $H_{me}$  - напруженість магнітного поля на поверхні цієї сторони, тоді напруженість електричного і магнітного полів в цьому елементі буде визначатися так:

$$\dot{E}_5 = \dot{E}_m \cdot e^{i\omega t} = \sqrt{2} \cdot k\rho H_{me} \cdot e^{-k(x-x_n)} e^{i(\omega t - k(x-x_n) + \frac{\pi}{4})} \quad (1)$$

$$\dot{H} = \dot{H}_m \cdot e^{i\omega t} = H_{me} \cdot e^{-k(x-x_n)} e^{i(\omega t - k(x-x_n))} \quad (2)$$

де  $k = \sqrt{\frac{\omega\mu_0\mu}{2\rho}}$ , тут  $\mu_0$  - магнітна стала,  $\mu$  - магнітна проникність матеріалу,  $\omega = 2\pi f$  - кругова частота,  $f$  - частота струму,  $t$  - час нагрівання,  $\rho$  і  $\gamma$  - відповідно питомий опір і питома провідність матеріалу,  $H_{me} = \frac{\sqrt{2} \cdot I \cdot N}{a}$ ,  $I$  - сила струму, що протікає в індукторі,  $N$  - кількість витків індуктора,  $a$  - висота індуктора,  $x_n$  і  $x_m$  - відповідно, координати внутрішньої і зовнішньої стінок індуктора.

Відомо [1], що питома потужність теплових джерел на боковій стороні матиме вигляд:

$$W = \gamma \dot{E} E^* \quad (3)$$

Підставляючи вирази (1) і (2) у вираз (3) одержимо формулу для визначення питомої потужності теплових джерел через фізичні і геометричні параметри простору:

$$W_1 = 2k^2 \rho H_{me}^2 \cdot e^{-2k(x_1-x_n)} \quad (4)$$

Визначена у (4) залежність стосується однієї сторони індуктора, що нагрівається. Для іншої (зовнішньої) розрахунок виглядає таким самим, але із зміною системи координат.

$$W_2 = 2k^2 \rho H_{me}^2 \cdot e^{-2k(x_2-x_m)} \quad (5)$$

При такому розміщенні обмотки індуктора на обидві сторони виділяється однакова питома потужність теплових джерел, відповідно і однакова кількість тепла буде виділятися на стінці зовнішнього і внутрішнього нагрівача.

Для того щоб отримати значення потужності  $P$ , що виділяється в результаті нагрівання стінок технологічного індуктора, необхідно кожному питомому потужності теплового джерела (4) і (5) проінтегрувати по об'єму своєї сталевий частини індуктора, який вона нагріває, після чого просумувати.

Даний метод визначення питомої потужності теплових джерел можна використовувати для проектування різного роду нагрівальних систем. Так якщо через технологічний індуктор пропустити теплоносії (для прикладу воду), то його можна використовувати в якості опалювальної системи, а також в промисловості для нагрівання різного роду речовин.

Метод можна використовувати для визначення питомої потужності теплових джерел, як для однофазного струму так і для трьохфазного, при цьому використовуються ті ж самі формули, що і для однофазного струму. Тобто розглядаються три окремі однофазні системи, технологічні індуктори яких з'єднанні паралельно або послідовно між собою, в залежності від конструктивного виконання пристрою для нагрівання теплоносія.

На основі розробленої математичної моделі отримані вирази для визначення напруженості магнітного та електричного полів, які дозволяють визначити питому потужність теплових джерел через фізичні та геометричні параметри простору для проектування електричних нагрівальних систем індукційної дії.

### Література

1. Письменный А.С. Расчет двухмерного электромагнитного поля при синусоидальном в пространстве возбуждающем поле / Письменный А.С. // Техническая электродинамика. — 1988.- № 4. - С. 25-30.

УДК 537.8, 539.3

О. Король, Б. Береженко, О. Гурик канд. техн. наук, доц.

Тернопільський національний технічний університет імені Івана Пулюя, Україна

**РОЗРАХУНОК ПИТОМОЇ ПОТУЖНОСТІ ТЕПЛОВИХ ДЖЕРЕЛ ПРИ ІНДУКЦІЙНІМ НАГРІВАННІ ЦИЛІНДРИЧНИХ ДЕТАЛЕЙ**

O. Korol, B. Berezhenko, O. Guryk Ph.D., Assoc. Prof

**CALCULATION OF SPECIFIC POWER OF HEAT SOURCES DURING INDUCTION HEATING OF CYLINDRICAL PARTS**

**Abstract.** The increase of durability and reliability of parts and operating members of machines and mechanisms is one of the most important issues for various sectors of the economy of Ukraine. In order to improve the parts wear resistance during operation, their working surfaces are strengthened by various surfacing methods. Available surfacing processes of worn working cylindrical bodies, induction ones in particular, possess some disadvantages: relatively low productivity, large energy consuming and uneven thickness of the surfacing metal. To improve these characteristics, theoretical foundations of improving welding technology and increasing of its energy efficiency should be developed.

Одним з ефективних способів відновлення експлуатаційних властивостей спрацьованих деталей циліндричної форми в тому числі коліс залізнодорожних вагонів є нарощування спрацьованої робочої поверхні колеса розплавленим металом. Для цього необхідно попередньо підготовлену до нарощування поверхню нагріти до високої температури (близької до температури плавлення основного металу) для того, щоб відбулося надійне з'єднання розплавленого і основного металу. Виходячи з умов забезпечення необхідної точності, а також з економічних міркувань, найбільш сприятливим є індукційний нагрів одночасно всієї робочої поверхні колеса. Для побудови раціональних режимів такого нагрівання потрібно побудувати відповідну математичну модель і на її основі провести необхідні дослідження.

В роботі [1] побудовані математичні моделі індукційного нагріву, електропровідного шару, півпростору, біметалічного шару і нескінченного суцільного і порожнинного циліндрів. Отримані розв'язки відповідних задач методами інтегральних перетворень для випадку, коли струмами заміщення в області електропровідного тіла нехтують. В роботі [2] запропоновано математичну модель і методику чисельного моделювання електромеханічних, теплових і механічних процесів в електропровідних тілах за індукційного нагріву з використанням методу скінчених елементів і методу зважених залишків.

Розроблено математичну модель для визначення питомої потужності теплових джерел, які виникають у результаті індукційного нагріву масивних циліндричних тіл. Такий нагрів використовується в технологічних процесах відновлювання експлуатаційних властивостей коліс залізничного транспорту методом нарощування їхньої робочої поверхні за допомогою заливки рідкого металу в тигель і схоплення його з підготовленою для відновлювання поверхнею.

Розглянемо довгий суцільний циліндр радіуса  $R_0$ , вісь симетрії якого співпадає з віссю  $z$ . Циліндр поміщений в коаксіальний з ним індуктор радіуса  $R_1$  і довжиною

$2h$  в такій області магнітна проникливість матеріалу різко падає і стає близькою до магнітної проникливості вакууму. В зв'язку з цим розглянемо випадок, коли можна вважати циліндр двохшаровим.

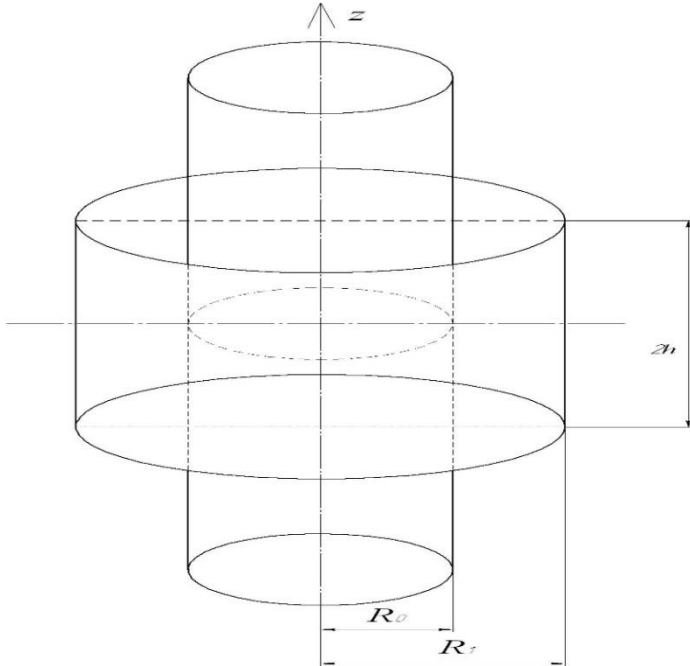


Рисунок 1 Розрахункова схема

В області I ( $R_k \leq r \leq R_0$ ) магнітна проникливість і питома об'ємна провідність  $\mu_1$  і  $\sigma_1$ , а в області II ( $0 \leq r \leq R_k$ ) - відповідно  $\mu_2$  і  $\sigma_2$ . В технічних розрахунках, як правило, приймають  $\mu_1 = \mu_0$ , а  $\mu_2 = \mu$ , де  $\mu$  - значення магнітної проникливості матеріалу до втрати ним феромагнітних властивостей. Значення питомої об'ємної провідності в технічних розрахунках приймають  $\sigma_1 = \sigma_2 = \sigma$ . Рівняння для визначення комплексної амплітуди напруженостей електричного поля в області вакууму залишається без зміни у

виді, а в областях (I) і (II) циліндра одержимо такі рівняння

$$\left( \frac{\partial^2}{\partial z^2} + \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} + k_i^2 - \frac{1}{r^2} \right) E^{(i)} = 0, \quad k_i^2 = -i\mu_i\omega\sigma, \quad (1)$$

$i = 1$ , якщо  $R_k \leq r \leq R_0$ ,  $i = 2$ , якщо  $0 \leq r \leq R_k$ .

Умови обмеженості розв'язку при  $r = 0$  і випромінювання на нескінченості залишаються без зміни. Умови спряження електромагнітного поля при  $r = R_0$  приймуть вигляд  $E^{(1)} = E^{(0)}$ ,

$$\frac{1}{\mu_1} \left( \frac{\partial E^{(1)}}{\partial r} + \frac{1}{r} E^{(1)} \right) = \frac{1}{\mu_0} \left( \frac{\partial E^{(0)}}{\partial r} + \frac{1}{r} E^{(0)} \right), \quad \text{при } r = R_0. \quad (2)$$

Аналогічні умови спряження повинні виконуватися на границі  $r = R_k$

$$E^{(2)} = E^{(1)}, \quad \frac{1}{\mu_2} \left( \frac{\partial E^{(2)}}{\partial r} + \frac{1}{r} E^{(2)} \right) = \frac{1}{\mu_1} \left( \frac{\partial E^{(1)}}{\partial r} + \frac{1}{r} E^{(1)} \right), \quad \text{при } r = R_k. \quad (3)$$

Застосовуючи інтегральне перетворення до рівнянь (1) і умов спряження прийдемо до наступної крайової задачі для зображення напруженості електричного поля в області циліндра

$$\left( \frac{d^2}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{d}{dr} + \chi_i^2 - \frac{1}{r^2} \right) \tilde{E}^{(i)}(r, \xi) = 0, \quad \chi_i^2 = k_i^2 - \xi^2, \quad (4)$$

$i = 1$ , якщо  $R_k \leq r \leq R_0$ ;  $i = 2$ , якщо  $0 \leq r \leq R_k$ ,  $\tilde{E}^{(2)}(0, \xi)$  - обмежене.

$$\tilde{E}^{(2)} = \tilde{E}^{(1)}, \quad \frac{1}{\mu_2} \left( \frac{d\tilde{E}^{(2)}}{dr} + \frac{1}{r} \tilde{E}^{(2)} \right) = \frac{1}{\mu_1} \left( \frac{d\tilde{E}^{(1)}}{dr} + \frac{1}{r} \tilde{E}^{(1)} \right), \quad \text{при } r = R_k. \quad (5)$$

$$H_1^{(1)}(\chi_0 R_0) \frac{d\tilde{E}^{(1)}}{dr}(\xi, R_0) + \tilde{E}^{(1)}(\xi, R_0) \left[ \frac{H_1^{(1)}(\chi_0 R_0)}{R_0} - \frac{\mu_1 \chi_0}{\mu_0} H_0^{(1)}(\chi_0 R_0) \right] = -i \frac{R_1}{R_0} \mu_1 \omega j_0 \tilde{N}(\xi) H_1^{(1)}(\chi_0 R_1),$$

Загальний розв'язок в областях I і II має вигляд

$$\tilde{E}^{(i)}(\xi, r) = C_1^{(i)} J_1(\chi_i r) + C_2^{(i)} Y_1(\chi_i r), \quad i = 1, 2. \quad (6)$$

Враховуючи обмеженість розв'язку при  $r = 0$  покладемо  $C_2^{(2)} = 0$ .

Задовольняючи умови (5) знайдемо  $\bar{E}^{(1)}(\xi, r) = \frac{i \frac{R_1}{R_0} \mu_1 \omega j_0 \tilde{N}(\xi) H_1^{(1)}(\chi_0 R_1)}{\bar{\Delta}} [\bar{F}_1 J_1(\chi_1 r) - \bar{F}_2 Y_1(\chi_1 r)],$

$$\bar{E}^{(2)}(\xi, r) = \frac{i \frac{R_1}{R_0} \mu_1 \omega j_0 \tilde{N}(\xi) H_1^{(1)}(\chi_0 R_1)}{\bar{\Delta}} [\bar{F}_1 J_1(\chi_1 R_k) - \bar{F}_2 Y_1(\chi_1 R_k)] \frac{J_1(\chi_2 r)}{J_1(\chi_2 R_k)},$$

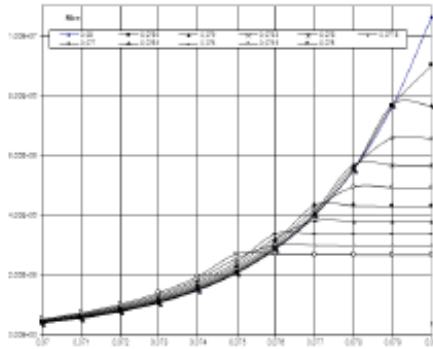


Рисунок 2 Залежність потужності джерел тепла від радіуса циліндра

де позначено  $\bar{\Delta} = \bar{M}_1 \bar{F}_2 - \bar{M}_2 \bar{F}_1$ ,

$$\bar{F}_1 = \chi_2 \mu_1 Y_1(\chi_1 R_k) J_0(\chi_2 R_k) - \chi_1 \mu_2 Y_0(\chi_1 R_k) J_1(\chi_2 R_k)$$

$$\bar{F}_2 = \chi_2 \mu_1 J_1(\chi_1 R_k) J_0(\chi_2 R_k) - \chi_1 \mu_2 J_0(\chi_1 R_k) J_1(\chi_2 R_k),$$

$$\bar{M}_1 = \chi_1 \mu_0 H_1^{(1)}(\chi_0 R_0) Y_0(\chi_1 R_0) - \chi_0 \mu_1 H_0^{(1)}(\chi_0 R_0) Y_1(\chi_1 R_0)$$

$$\bar{M}_2 = \chi_1 \mu_0 H_1^{(1)}(\chi_0 R_0) J_0(\chi_1 R_0) - \chi_0 \mu_1 H_0^{(1)}(\chi_0 R_0) J_1(\chi_1 R_0)$$

Напруженість електричного поля в області циліндра отримуємо згідно з формулою. Якщо індуктор безмежної довжини, то напруженість електричного поля в області циліндра прийме вигляд

$$E^{(1)}(r) = \frac{i \frac{R_1}{R_0} \mu_1 \omega j_0 H_1^{(1)}(k_0 R_1)}{\Delta} [F_1 J_1(k_1 r) - F_2 Y_1(k_1 r)], \quad E^{(2)}(r) = \frac{i \frac{R_1}{R_0} \mu_1 \omega j_0 H_1^{(1)}(k_0 R_1)}{\Delta} [F_1 J_1(k_1 R_k) - F_2 Y_1(k_1 R_k)] \frac{J_1(k_2 r)}{J_1(k_2 R_k)},$$

$$\Delta = M_1 F_2 - M_2 F_1.$$

Питому потужність джерел тепловиділення обчислюємо, як і в попередньому випадку, за формулою  $Q(r) = \begin{cases} \frac{\sigma}{2} E^{(1)}(r) \bar{E}^{(1)}(r), & R_k \leq r \leq R_0, \\ \frac{\sigma}{2} E^{(2)}(r) \bar{E}^{(2)}(r), & 0 \leq r \leq R_k. \end{cases} \quad (7)$

На рисунку 2 наведено графіки залежності питомої потужності джерел тепла, піднесеної до квадрата густини струму в індукторі, від радіуса циліндра для різних значень  $R_k$ . За допомогою розробленої математичної моделі проведено дослідження залежності питомої потужності теплових джерел від частоти і сили струму в індукторі та тривалості нагрівання.

### Література.

1. Пидстрыгач Я.С. Термоупругость электропроводных тел. [Текст] / Я.С. Пидстрыгач, Я.Й. Бурак, А.Р. Гачкевич, Л.В. Чернявская // – К.: Наукова думка, 1977. – 247 с.
2. Гачкевич О.Р. Математичне моделювання процесу індукційного нагрівання електропровідних тіл. [Текст] / О.Р. Гачкевич, Б.Д. Дробенко // Вісник Львівського університету – №8 – 2004, – С. 97 – 111.

УДК 539.3

В.М. Михайлишин.

Тернопільський національний технічний університет імені Івана Пулюя, Україна

**ОПТИМАЛЬНЕ КЕРУВАННЯ НАГРІВАННЯМ ТОНКИХ КРУГЛИХ ДИСКІВ З  
МЕТОЮ СТВОРЕННЯ ЗАДАНОГО ТЕМПЕРАТУРНОГО ПОЛЯ ПРИ  
ОБМЕЖЕННЯХ НА НАПРУЖЕННЯ**

V.M. Mykhailyshyn

**OPTIMUM CONTROL OF HEATING OF THIN CIRCULAR DISCS TO CREATE A  
GIVEN TEMPERATURE FIELD UNDER STRESS CONSTRAINTS**

**Abstract.** The problem of finding the power of heat sources, which is necessary to create a temperature field close to the given one in a given time in a round plate, with minimal energy consumption and stress restrictions, is considered.

Розглядається задача знаходження потужності теплових джерел, необхідних для нерівномірного за радіусом нагріву тонкої круглї пластинки за заданий час до деякої температури  $\theta_3(r)$  при мінімальних енергозатратах, причому термообробка повинна задовольняти деякому обмеженню (наприклад гарантується робота матеріалу в пружній області).

Припускається, що розподіл теплових джерел і умови взаємодії пластинки з зовнішнім середовищем симетричні відносно серединної площини, так що можна ввести середні за товщиною температуру і потужність теплових джерел, а напружено деформований стан вважати плоским. Основні рівняння прямої задачі для випадку конвективного теплообміну із зовнішнім середовищем на лицьових поверхнях пластини наступні

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{1}{x} \frac{\partial T}{\partial x} - m^2 T - \frac{\partial T}{\partial \tau} + w &= 0; \\ \frac{\partial s_r}{\partial x} + \frac{s_r - s_\varphi}{x} &= 0; \quad e_r = \frac{\partial u}{\partial x}, \quad e_\varphi = \frac{u}{x}; \\ s_r &= G_* [e_r + \nu e_\varphi - \alpha(1 + \nu)\theta_c(1 + T)], \\ s_\varphi &= G_* [e_\varphi + \nu e_r - \alpha(1 + \nu)\theta_c(1 + T)], \end{aligned}$$

де позначено

$$\begin{aligned} T &= \frac{(T^* - \theta_c)}{\theta_c}, \quad w = \frac{w^* R^2}{2\lambda h}, \quad T^* = \frac{1}{2h} \int_{-h}^h \theta dz, \quad w^* = \int_{-h}^h W dz, \quad m^2 = \frac{\alpha R^2}{\lambda h}, \quad \tau = \frac{at}{R^2}, \\ x &= \frac{r}{R}, \quad u = \frac{U}{R}, \quad s_{r,\varphi} = \frac{\sigma_{r,\varphi}}{\sigma_0}, \quad G_* = \frac{2G}{\sigma_0(1 - \nu)}, \end{aligned}$$

$\theta(z, x, \tau), W(z, x, \tau)$  – температура і потужність теплових джерел;  $\lambda, a, \alpha$  – коефіцієнти теплопровідності, температуропровідності і тепловіддачі;  $2h, R$  – товщина і радіус пластинки;  $\theta_c$  – температура зовнішнього середовища;  $U, \sigma_r, \sigma_\varphi$  – радіальне переміщення, радіальне і окружне напруження в пластинці. Початкові і граничні умови прямої задачі мають вигляд

$$\begin{aligned} T(x, \tau)|_{\tau=0} &= 0; \quad T(x, \tau)|_{x=0} < \infty; \quad \left( \frac{\partial T}{\partial x} + kT \right) \Big|_{x=1} = 0; \quad \left( k = \frac{\alpha R}{\lambda} \right); \\ u(x, \tau)|_{x=0} &= 0; \quad s_r(x, \tau)|_{x=0} = s_\varphi(x, \tau)|_{x=0}; \quad s_r(x, \tau)|_{x=1} = 0. \end{aligned}$$

Приймаємо наступний функціонал якості

$$I = \int_0^{\tau^*} [T(x, \tau^*) - T_3(x)]^2 x dx + \int_0^{\tau^*} \int_0^1 w^2 x dx d\tau \rightarrow \min,$$

де  $\tau^*$  – безрозмірний час нагріву. Обмеження на напруження приймаємо у вигляді

$$s_r^2 - s_r s_\varphi + s_\varphi^2 \leq 1.$$

Розв'язок поставленої задачі шукаємо методом множників Лагранжа. Обмеження у вигляді нерівності шляхом введення додаткової функції керування  $\psi(x, \tau)$  представляємо у вигляді рівності

$$s_r^2 - s_r s_\varphi + s_\varphi^2 - 1 + \psi^2 = 0$$

і записуємо необхідну умову екстремуму розширеного функціонала задачі. В результаті отримуємо наступну спряжену задачу

$$\frac{\partial^2 \bar{T}}{\partial x^2} + \frac{1}{x} \frac{\partial \bar{T}}{\partial x} - m^2 \bar{T} + \frac{\partial \bar{T}}{\partial \tau} + G_* \alpha \theta_c (1 + \nu) (\bar{e}_r + \bar{e}_\varphi) = 0;$$

$$\bar{e}_r = \frac{\partial \bar{u}}{\partial x} - \bar{\psi} (2s_r - s_\varphi), \quad \bar{e}_\varphi = \frac{\bar{u}}{x} - \bar{\psi} (2s_\varphi - s_r);$$

$$\bar{s}_r = G_* (\bar{e}_r + \nu \bar{e}_\varphi), \quad \bar{s}_\varphi = G_* (\bar{e}_\varphi + \nu \bar{e}_r); \quad \frac{\partial \bar{s}_r}{\partial x} + \frac{\bar{s}_r - \bar{s}_\varphi}{x} = 0;$$

$$\psi \cdot \bar{\psi} = 0; \quad \bar{T}(x, \tau)|_{x=0} < \infty;$$

$$\left( \frac{\partial \bar{T}}{\partial x} + k \bar{T} \right) \Big|_{x=1} = 0; \quad \left( \frac{\partial \bar{T}}{\partial x} + k \bar{T} \right) \Big|_{x=1} = 0; \quad w = -\frac{1}{2} \bar{T}.$$

$$\bar{T}(x, \tau^*) = 2[T(x, \tau^*) - T_3(x)]; \quad \bar{u}(x, \tau)|_{x=0} < \infty; \quad \bar{s}_r(x, \tau)|_{x=1} = 0.$$

Аналітичний розв'язок спряженої і прямої задач можна знайти, поклавши в рівнянні доповняльної нежорсткості спряженої задачі  $\bar{\psi} = 0$ , що означає не врахування обмеження на напруження. Знайдений розв'язок наступний

$$w = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2} C_n J_0(\mu_n x) e^{(\mu_n^2 + m^2)\tau}; \quad T = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{C_n \text{sh}[(\mu_n^2 + m^2)\tau] J_0(\mu_n x)}{2(\mu_n^2 + m^2)};$$

$$C_n = \frac{2a_n(\mu_n^2 + m^2)}{\text{sh}[(\mu_n^2 + m^2)\tau^*] + (\mu_n^2 + m^2)e^{(\mu_n^2 + m^2)\tau^*}};$$

$$s_r = G_* \sum_{n=1}^{\infty} B_n(\tau) \left\{ (\mu_n - 1) J_0(\mu_n x) - \frac{1 - \nu}{x} J_1(\mu_n x) - \left[ (\mu_n - 1) - \frac{k(1 - \nu)}{\mu_n} \right] J_0(\mu_n) \right\};$$

$$s_\varphi = G_* \sum_{n=1}^{\infty} B_n(\tau) \left\{ (\nu \mu_n - 1) J_0(\mu_n x) + \frac{1 - \nu}{x} J_1(\mu_n x) - \left[ (\mu_n - 1) - \frac{k(1 - \nu)}{\mu_n} \right] J_0(\mu_n) \right\};$$

$$u = \alpha \theta_c x + \sum_{n=1}^{\infty} B_n(\tau) \left\{ J_1(\mu_n x) - \frac{x}{1 + \nu} \left[ (\mu_n - 1) - \frac{k(1 - \nu)}{\mu_n} \right] J_0(\mu_n) \right\};$$

$$B_n(\tau) = \frac{C_n \alpha \theta_c (1 + \nu) \text{sh}[(\mu_n^2 + m^2)\tau]}{2(\mu_n^2 + m^2)}; \quad a_n = \frac{2\mu_n^2}{(\mu_n^2 + m^2) J_0^2(\mu_n)} \int_0^1 x T_3(x) J_0(\mu_n x) dx.$$

Власні числа  $\mu_n$  задачі є додатними коренями рівняння

$$kJ_0(\mu_n) - \mu_n J_1(\mu_n) = 0.$$

Числові розрахунки для деяких випадків розподілу  $\theta_3(r)$  показали задовільне співпадання температури в заданій області з необхідною і при цьому обмеження на напруження в цих випадках виконувалися.

УДК 621.311.153

**Б.Я. Оробчук, к. т. н., доц.; І.М. Сисак, к. т. н.; Я.М. Осадца, к. т. н.; В.П. Коваль, к. т. н., доц.; С.М. Бабюк, к. т. н.**

Тернопільський національний технічний університет імені Івана Пулюя, Україна

**ЕНЕРГООЩАДНА ІНТЕЛЕКТУАЛЬНА СИСТЕМА КЕРУВАННЯ  
МЕХАНІЧНОЮ СИСТЕМОЮ****B. Orobchuk, Ph.D., Assoc. Prof.; I. Sysak, Ph.D.; I. Y. Osadtca, Ph.D.; V. P. Koval, Ph.D., Assoc. Prof.; S.M. Babiuk, Ph.D.****ENERGY-SAVING INTELLIGENT CONTROL SYSTEM  
MECHANICAL SYSTEM**

**Abstract.** The paper deals with the development, construction and principle of operation of an intelligent energy-saving system for controlling a mechanical system, which is implemented on the basis of the department of electrical engineering of the Ternopil Ivan Puluj National Technical University and as a laboratory installation.

Забезпечення сталого та ефективного економічного зростання за рахунок зменшення долі енергоспоживання на одиницю виробленої продукції на даний час є визначальною стратегією розвитку народного господарства передових світових країн. Досягнення цієї стратегії здійснюється в більшості випадків за рахунок застосування сучасних енергозберігаючих технологій та впровадження систем раціонального управління енергогенеруючими об'єктами. Зокрема, надзвичайно актуальною задачею є створення інтелектуальних енергозберігаючих систем для керування кінцевими виконавчими механічними пристроями [1].

Розробка таких інтелектуальних енергозберігаючих систем дозволить здійснити модернізацію всього комплексу генерації та доставки електроенергії на основі вдосконаленого керування механічними пристроями, захисту та оптимізації технологічних елементів електроенергетичної системи у їхньому взаємозв'язку. Розвиток, з одного боку, комп'ютерних технологій та можливостей Інтернету, поява останніх досягнень в області інформаційних та мережевих технологій, інформаційно-керуючих систем на базі мікропроцесорної та силової електроніки, а з іншого – розвиток ринкових відношень в енергозбереженні обумовили якісно новий стрибок у ефективності енергоспоживання та стали передумовою розвитку нового виду енергетики – інтелектуальної [2].

З метою практичного забезпечення лабораторного обладнання лабораторії «Системи управління електропостачанням» кафедри електричної інженерії було розроблено інтелектуальну енергоощадну систему керування механізмом рулонних штор, живлення якої здійснюється від гібридної сонячної електростанції. На рис. 1 приведено структурну схему інтелектуальної системи керування механізмом рулонних штор для трьох вікон розміром 5×1,8 м кожне, а на рис. 2 - шафу керування. Система зібрана майже із підручних засобів, про те є достойним аналогом подібних брендових систем. Керування здійснюється за чотирма варіантами:

- ручне керування (за допомогою кнопок);
- керування за допомогою Wi-Fi-модуля Arduino ESP8266 та 8-канального модуля реле 12V для Arduino (через смартфон, ноутбук, по мережі Wi-Fi);
- автоматичне керування за допомогою 8-канального модуля реле 12V для Arduino та датчачем освітленості Arduino;
- керування за допомогою навчальної SCADA-системи «Енергія» та системи телемеханіки «Стріла», яка є частиною навчального обладнання цієї лабораторії.



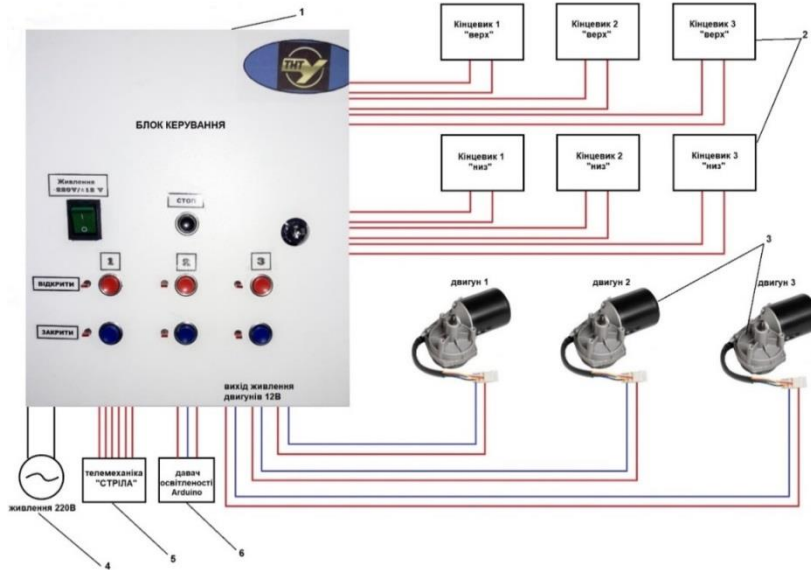


Рисунок 1 - Структурна схема системи інтелектуальної системи керування: 1 – блок керування; 2 - кінцевики; 3 – двигуни постійного струму 12В; 4 – джерело живлення 220 В; 5 - система телемеханіки «Стріла»; 6 – давач освітленості Arduino

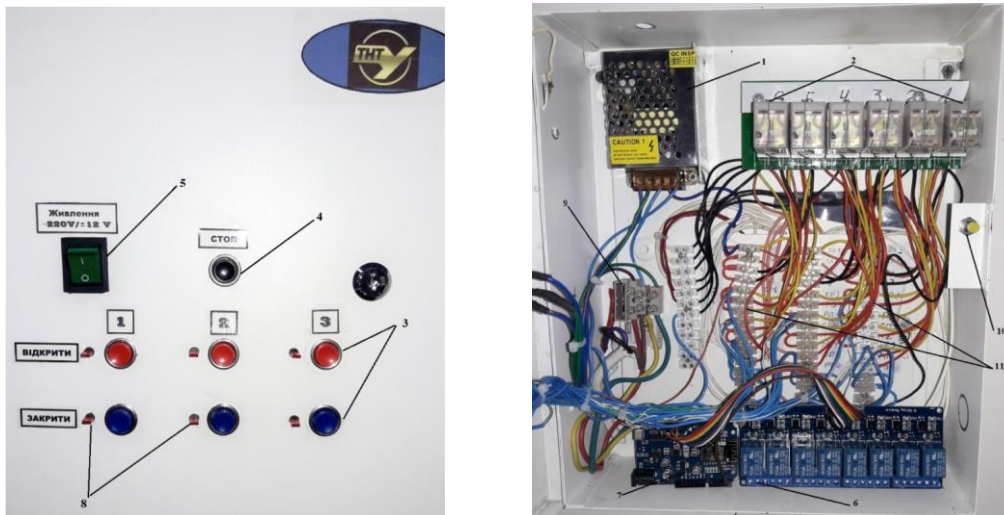


Рисунок 2 - Шафа керування: 1- блок живлення; 2 – блок реле; 3 - нормально-розімкнуті кнопки; 4 - нормально-замкнута кнопка; 5 - вимикач живлення 220В; 6 – 8-и канальний модуль реле Arduino; 7 - Wi-Fi-модуль Arduino; 8 - світлодіодні індикатори; 9 - запобіжник; 10 - кнопка вимкнення живлення системи при відкриванні шафи; 11- комутаційні провідники

Керування за допомогою телемеханіки базується на подачі імпульсів 12 В постійного струму. Паралельно до кнопок «ЗАКРИТИ/ВІДКРИТИ» підведено 6 провідників від системи телемеханіки «Стріла», якою обладнана лабораторія. Керування розробленою системою у даному випадку здійснюється за допомогою ПК або ноутбука, на яких встановлено навчальну SCADA-систему «Енергія» [3]. При запуску програми на моніторі комп'ютера з'являється спеціальний інтерфейс для керування, на якому продубльовано у віртуальному вигляді розміщення кнопок на щитку. Якщо ми натиснемо курсором миші на одну із них, подається короткотривалий імпульс на реле та спрацює його самопідхоплення. Далі схема працює за тим же алгоритмом, як і з ручним керуванням.

У випадку з Wi-Fi-контролером Arduino ESP8266 (рис. 3, а) потрібно під'єднатися до мережі Wi-Fi за допомогою смартфона, ноутбука чи планшета та встановити додаток «Blynk» або «Arduino», внести певні корективи, тобто запрограмувати під потрібну програму.

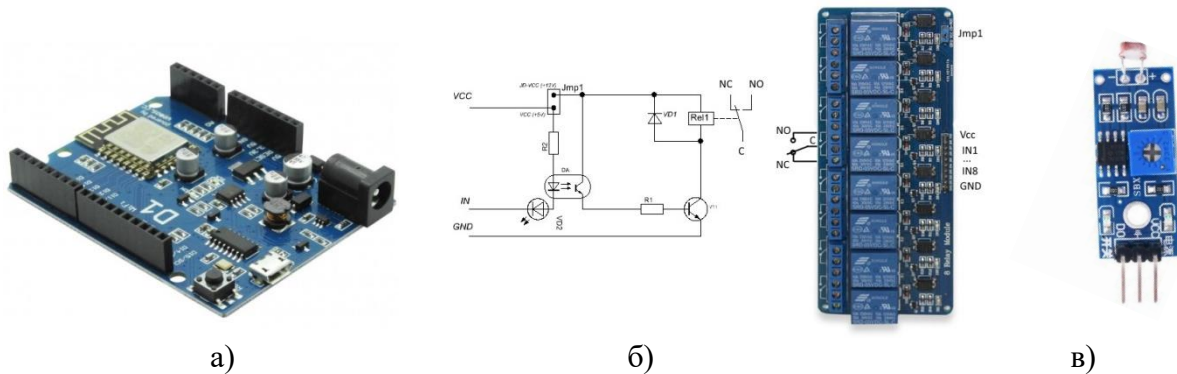


Рисунок 3 – Обладнання для дистанційного керування:

а) Wi-Fi-контролер Arduino; б) 8-канальний модуль реле; в) давач освітленості

У вище згаданих додатках потрібно ввести спеціальний код програми, в результаті на екрані смартфона з'являються віртуальні кнопки керування. При натисканні цих кнопок подається сигнал через мережу Wi-Fi на контролер, який подає спеціальний імпульс на 8-канальний модуль реле 12V (рис. 3, б), а реле подає живлення в контур блока керування, спрацьовує самопідхоплення реле. Перевагою даного варіанту керування є те, що при використанні даного методу системою можна керувати з будь-якого місця при наявності мережі Internet [4].

Даний Wi-Fi модуль Arduino можливий і для використання в якості функції «розумне зашторення» при під'єднанні давача освітленості (рис. 3, в), який розміщений в оптимальному місці аудиторії. Якщо рівень освітленості надто великий (це буває зазвичай після обіду, оскільки більшість вікон виходять на захід), тоді спрацьовує давач і штори автоматично прикриваються, створюючи заданий рівень освітленості без стороннього втручання людини. Коли рівень освітленості надто низький, штори відкриваються.

### Література

1. Bogdan Orobchuk, Ivan Sysak, Serhii Babiuk. Development of simulator automated dispatch control system for implementation in learning process // 2017 9th IEEE International Conference on Intelligent Data Acquisition and Advanced Computing Systems: Technology and Applications (IDAACS).
2. Оробчук Б.Я., Піскун С.С., Рафалюк О.О. Впровадження систем телемеханіки керування енергооб'єктами в навчальному процесі. // III Всеукраїнська науково-технічна конференція «Теоретичні та прикладні аспекти радіотехніки і приладобудування». - м. Тернопіль, 2017 р.
3. B. Orobchuk, V. Koval. Development and research of Wi-Fi network for receiving and transmitting telemechanical information in the training laboratory // Scientific Journal of TNTU (Tern.) // Ternopil Ivan Puluj National Technical University, Ternopil, Ukraine, 2020
4. B. Orobchuk, I. Sysak, S. Babiuk, M. Karpinski, D. Jancarczyk. Development and implementation of a local area wireless network in the educational process on the basis of the dispatch control simulator // Przetwarzanie, transmisja i bezpieczeństwo informacji. ISBN 978-83-66249-55-4 // Wydawnictwo naukowe akademii techniczno - humanistycznej w Bielsku-Białej, 2020

УДК 621.365.5

Пулька Ч.В.<sup>1</sup>, д.т.н., проф., Базар М.С.<sup>2</sup>, Комар Р.В.<sup>1</sup> к.т.н., доц., Сенчишин Віт. С.<sup>1</sup>,  
Допик В.В.<sup>1</sup>, Войціховський М.Р.<sup>1</sup><sup>1</sup>Тернопільський національний технічний університет, Україна<sup>2</sup>ТОВ "СЕ БОРДНЕТЦЕ - УКРАЇНА", Україна**ЗАСТОСУВАННЯ МАТЕМАТИЧНОГО МОДЕЛЮВАННЯ ПРИ РОЗРОБЛЕННІ  
ЕНЕРГООЩАДНИХ ОПАЛЮВАЛЬНИХ СИСТЕМ****Ch. Pulka, Dr., Prof., M. Bazar, R. Komar, Ph.D., Assoc. Prof., V. Senchyshyn,  
V. Dopyk, M. Voitsikhovskyi****APPLICATION OF MATHEMATICAL MODELING IN THE DEVELOPMENT OF  
ENERGY-SAVING HEATING SYSTEMS**

**Abstract.** Based on the application of mathematical modeling, expressions were obtained that allow designing energy-saving induction electric heating systems for heating residential premises and buildings. The proposed mathematical models agree well with experimental studies of their work. This approach allows you to reduce material and labor costs when designing new induction heating systems based on their productivity and power.

Електричні опалювальні системи є перспективним напрямком розвитку теплоенергетики України. Це шлях до енергетичної безпеки та незалежності від дефіцитних викопних енергоресурсів.

В даний час у світі також є актуальною проблема екологічної безпеки, в цьому плані електричні опалювальні системи без сумніву є лідерами, навіть в порівнянні з установками, які працюють на біопаливі, тому, що при роботі електричного приладу не виділяється жодних газів, а електроенергію можна отримувати перетворюючи енергію вітру, сонця та іншими екологічно чистими методами. Крім того електроенергії в Україні виробляється достатньо.

На світовому ринку ведуться розробки та виробництво індукційних нагрівальних систем. Однак для проектування та конструювання таких приладів затрачається велика кількість часу та матеріалів на виготовлення експериментальних прототипів установок враховуючи об'єм нагріваючої рідини. З врахуванням цього для індукційних нагрівальних систем розроблено математичні моделі джерел нагрівання та моделі температурного поля, що встановлюється у теплообміннику. Використано резонанс струмів для підвищення ефективності використання спожитої електроенергії, а також дано рекомендації щодо матеріалів, з яких краще виготовляти індуктор та теплообмінник.

На основі запропонованих математичних моделей розроблені рекомендації для раціонального проектування нових індукційних електричних опалювальних систем.

В результаті теоретичних та експериментальних досліджень розроблені схеми та експериментальна установка для дослідження роботи індукційного нагрівального пристрою (рис.1).

На рис.2 представлено схему індукційного нагрівального пристрою, а на рис. 3 схему для визначення електромагнітного поля ( $\vec{E}$  і  $\vec{H}$ )

На основі отриманих математичних моделей побудовано розподіл напруженості магнітного та електричного поля на краю та в середині індуктора (рис. 4).

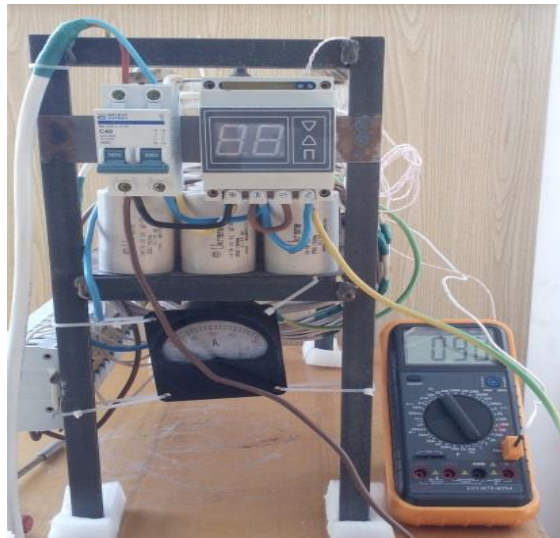
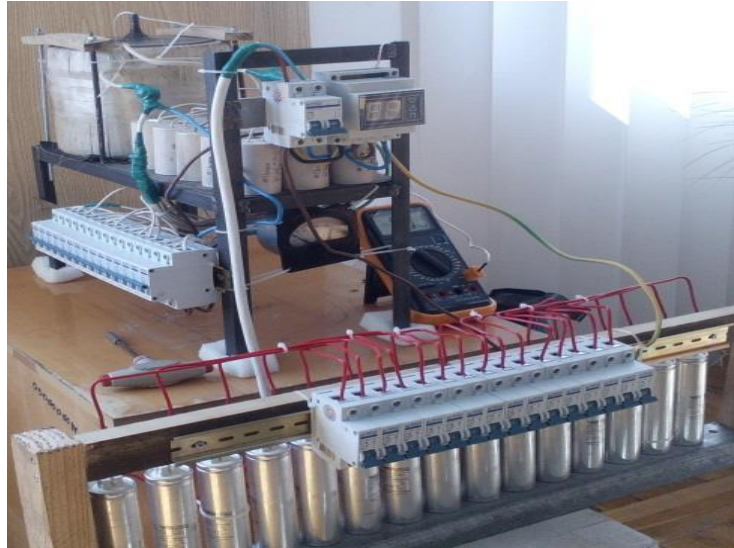
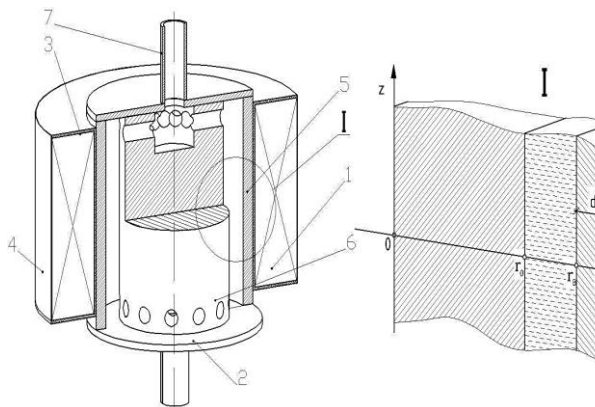
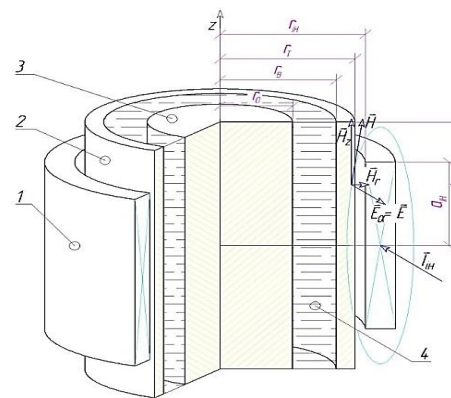


Рис.1 – Експериментальна установка для дослідження роботи індукційного нагрівального пристрою



1 – індуктор; 2 – кришка; 3 – тепло електроізоляційна шпилька електромагнітний екран; 5 – циліндрична магнітопровідна ємкі

Рис. 2. Схема індукційного нагрівального пристрою



1-індуктор, 2 - стінка теплообмінника, 3- осердя, 4 теплоносій

Рис.3. Схема для визначення складових електромагнітного поля ( $\vec{E}$  і  $\vec{H}$ )

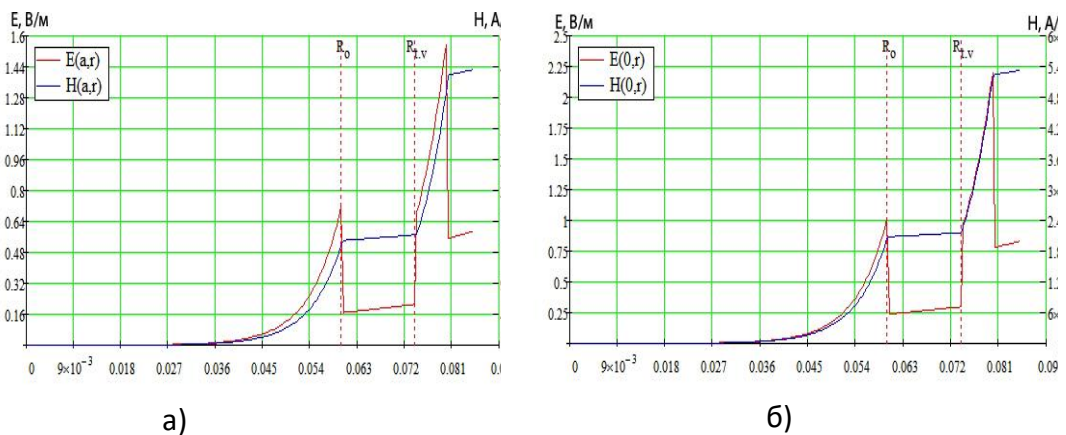


Рис. 4 – Графік розподілу напруженості магнітного  $H$  та електричного  $E$  поля на краю (а), та середині (б) індуктора

З цих рисунків добре видно що напруженість магнітного поля не має стрибків при переході від одного середовища до іншого, на відміну від напруженості електричного поля, яка змінюється скачкоподібно при переході з одного середовища до іншого, при цьому величина скачка залежить від густини поверхневих струмів.

На рис. 5 зображено залежність температури в стінці по довжині теплообмінника, зі сторони індуктора, і теплоносія, при часі нагрівання 10 с і 100 с. З графіків видно, що максимальна температура по середині теплообмінника, нижча ніж на краях. Враховуючи те, що торці теплоізовані, менше значення температури на торцях пов'язано з розподілом електромагнітного поля, а відповідно і питомої потужності теплових джерел які в середині індуктора генеруються інтенсивніше, а на краях має місце розсіювання електромагнітного поля.

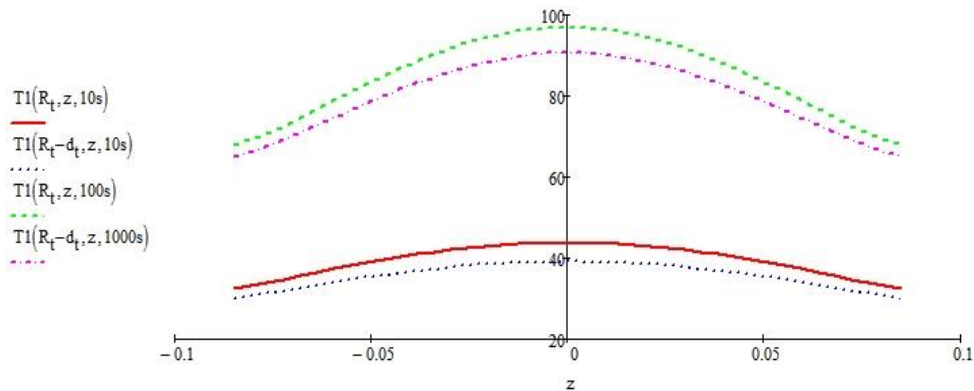


Рис. 5 - Залежність температури в стінці по довжині теплообмінника, зі сторони індуктора, і теплоносія, при часі нагрівання 10 с і 100 с

За результатами проведеного математичного моделювання отримано математичні вирази для знаходження теплової потужності зосередженої в конкретній зоні нагрівального пристрою та струм який протікає в індукторі, з врахуванням геометричних та фізичних параметрів індуктора. Для досягнення підвищення продуктивності роботи пристрою використано резонансний режим.

На основі розроблених математичних моделей дано рекомендації, щодо вибору оптимальної частоти та матеріалу теплообмінника для ефективного конструювання та проектування електричних нагрівальних приладів індукційної дії.

УДК 664

І.Я. Стадник д.т.н., проф., Н.М. Зварич к.т.н., доц., О.М. Пилипець к.т.н., доц.,  
В.Я. Ворошчук к.т.н., доц.

Тернопільський національний технічний університет імені Івана Пулюя, Україна

## ТЕРМОДИНАМІЧНИЙ АНАЛІЗ ЕНЕРГЕТИЧНИХ РЕСУРСІВ

I. Stadnyk Dr.; Prof., N. Zvarych Ph.D.; Assoc. Prof., O. Pylypets Ph.D.; Assoc. Prof.,  
V. Voroshchuk Ph.D.; Assoc. Prof.

## THERMODYNAMIC ANALYSIS OF ENERGY RESOURCES

**Abstract.** The estimation of the general condition of processes at power effects is given. The offered air pump and system of realization of a refrigerating cycle are considered. The redistribution of energy potentials of natural, forcibly created environments or systems and the synthesis on this basis of powerful heat fluxes in combination with advanced control methods, allows you to control their values of thermodynamic parameters.

Відомо, що фізичний стан системи визначається значеннями двох змінних величин з числа трьох, а саме тиску, об'єму і температури. Між цими трьома параметрами існує функціональний зв'язок. Надалі будемо вважати тиск  $p$  і об'єм  $v$  незалежними змінними і тоді цей зв'язок відобразимо у формі:  $T = f(p, v)$ .

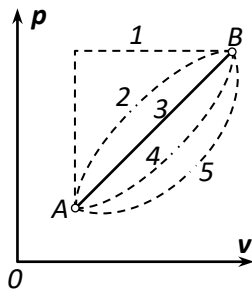


Рисунок 1. Залежність  $p=p(v)$  в трансформаціях термодинамічних параметрів

Сукупність значень  $p$  і  $v$  визначає положення деякої точки на площині  $p-v$ . Кожній такій точці відповідає певне значення температури  $T$  (рисунок 1).

Диференціал  $dT = \frac{\partial f}{\partial p} dp + \frac{\partial f}{\partial v} dv$  є повним диференціалом. За зміни стану системи від параметрів в точці  $A$  до параметрів точки  $B$  температура в точці  $B$  може бути визначена у формі:  $T_B = f(p_B, v_B)$ .

Визначення значень роботи, що здійснюється системою в результаті зміни її стану за переходу параметрів від точки  $A$  до точки  $B$  і, вважаючи процес зворотним, відобразимо залежність:

$$W_{A \rightarrow B} = \int_{v_A}^{v_B} p dv$$

Графічною інтерпретацією наведеного інтегралу є площа під кривою переходу на діаграмі  $p-v$ . Оскільки перехід від точки  $A$  до точки  $B$  можливо здійснити різними траєкторіями, то це означає, що ці площі будуть різними. Їх площа в тій чи іншій мірі визначається конструктивними параметрами та частотою обертання привода. Звідси витікає, що значення роботи  $W$  залежить не тільки від координат точок  $A$  і  $B$ , а і від обраних траєкторій переходу. Логічно припустити, що і кількість теплоти, яка сприймається в цьому переході системи також залежить від останніх, однак різниця між кількістю сприйнятої теплоти  $Q$  і енергії  $W$  від форми траєкторії переходу не залежить. Висновок про сталість різниці  $Q - W$ , яка відповідає тільки стану системи в точках  $A$  і  $B$ , вказує на зміну внутрішньої енергії  $u$ :

$$\Delta u_{A \rightarrow B} = (Q - W)_{A \rightarrow B} = F(p_B, v_B) - F(p_A, v_A) \quad (1)$$

В іншій формі вираз (1) має вид:

$$du = dQ - dW = \frac{\partial u}{\partial p} dp + \frac{\partial u}{\partial v} dv \quad (2)$$

Для випадку замкнутої траєкторії від точки  $A$  одержуємо криволінійний інтеграл від  $du$ , тоді маємо:

$$\int_{v_A}^{v_A} du = u_A - u_A = 0.$$

Підведення теплового потоку  $Q$  до середовища означає відповідні зміни в значення ентропії. Остання визначається лише змінними, що характеризують фізичний стан системи, і в переході від точки  $A$  до точки  $B$  зміни ентропії не залежать від його траєкторії. При цьому

$$\Delta S_{A \rightarrow B} = \int_A^B \frac{dQ_{зв}}{T},$$

де  $dQ_{зв}$  – кількість теплоти, що проходить через границі системи в період зворотного процесу.

Заміна значень  $dQ$  і  $dW$  в умові (2) приводить до виду:

$$du = Tds - pdv, \quad (3)$$

в якому присутні функції точки і повні диференціали.

Інтегрування (3) приводить до значення  $u$  як функції змінних  $s$  і  $v$  у формі:

$$u = f_u(s, v), \quad (4)$$

або, розкриваючи умову (4), запишемо:

$$du = \left( \frac{\partial u}{\partial s} \right)_v ds + \left( \frac{\partial u}{\partial v} \right)_s dv, \quad (5)$$

а співставленням з умовою (3) одержимо:

$$\left( \frac{\partial u}{\partial s} \right)_v = T \quad \text{і} \quad \left( \frac{\partial u}{\partial v} \right)_s = -p, \quad (6)$$

Якщо умова (6) відома для даної маси всякої однорідної рідини, то параметри  $T$ ,  $p$  і  $u$  можуть бути вираховані для всякого фізичного стану середовища, який визначається незалежними змінними  $s$  і  $v$ . Тому продуктивність теплового насоса встановлює значення внутрішньої енергії  $u$  процесу.

### Література

1. Hu, B., Xu, S., Wang, R. Z., Liu, H., Han, L., Zhang, Z., Li, H. 2019. Investigation on advanced heat pump systems with improved energy efficiency. *Energy Conversion and Management*, 192, 161-170. <https://doi.org/10.1016/j.enconman.2019.04.031>
2. Liu, S., Dai, S., Ding, Q., Hu, L., Wang, Q. 2017. Fast Calculation Method of Energy Flow for Combined ElectroThermal System and Its Application. *Energy and Power Engineering*, vol. 09, no. 04, p. 376-389. <https://doi.org/10.4236/epe.2017.94b043>
3. Byrne, P., Ghouballi, R. 2019. Exergy analysis of heat pumps for simultaneous heating and cooling. *Applied Thermal Engineering*, vol. 149, p. 414-424. <https://doi.org/10.1016/j.applthermaleng.2018.12.069>

УДК 621.867.42

Д.П. Часов к. т. н., доц., В.О. Бейгул к. т. н., доц., Н.О. Захаров  
Дніпровський державний технічний університет, Україна

**ДОСЛІДЖЕННЯ ЕНЕРГОЄМНОСТІ ГВИНТОВОГО КОНВЕЄРА ПРИ  
ТРАНСПОРТУВАННІ ВІДХОДІВ МЕХАНІЧНИХ ПІДПРИЄМСТВ ТА  
ПРОДУКТІВ АРГОТЕХНІЧНОЇ СФЕРИ**

**D.P. Chasov Ph.D., Assoc. Prof., V.O. Beihul Ph.D., Assoc. Prof., N.O. Zakharov**

**RESEARCH OF THE ENERGY CAPACITY OF THE SCREW CONVEYOR WHEN  
TRANSPORTING WASTE OF MECHANICAL ENTERPRISES AND PRODUCTS  
OF THE ARGOTECHNICAL SPHERE**

**Abstract.** The object of the research is the process of transportation with simultaneous grinding of waste. The subject of the research is the energy intensity of the performed operations at different angles of attack of the installed blades with variations in the types of transported material – root crops, wood and shavings. The effective parameters of screw conveyor modernization have been determined. Further possibilities for the development of the studied parameter are presented.

Переміщення матеріалів та відходів виробництв є складовою собівартості продукції, для зниження якої необхідно використовувати варіативні технології. До таких технологій слід віднести зниження спожитої електроенергії за рахунок доопрацювання процесів переробки – об'єднання процесу транспортування та подрібнення з метою використання спільного приводу, адже процес окремо процес підготовки до переміщення матеріалів споживає до 70 % енергоємності процесу переробки.

Об'єктом дослідження є процес транспортування відходів механічних підприємств та продуктів аграрних виробництв від місць утворення до зони подальшої переробки за допомогою модернізованого шнекового конвеєра (рис. 1) [1].



Рис. 1. Модернізований шнековий конвеєр

У якості транспортованого матеріалу використовувалася стружка, отримана при точінні зубчастого вінця колеса (Сталь 40Х); коренеплоди (буряк), деревина тверда (дуб).

Проведені дослідження із споживання енергії конвеєром при транспортуванні різних типів матеріалів (рис. 2) показали арифметичну залежність росту споживання від твердості матеріалу та заданої продуктивності роботи. Якщо продуктивність є позитивним чинником, то її модернізувати не доцільно. Також, як видно з графіків, енергоспоживання коливається при зміні кута атаки встановленої лопаті. Найнижча



величина споживання ресурсів спостерігається при величині кута встановленої лопаті у межах 40-50°.

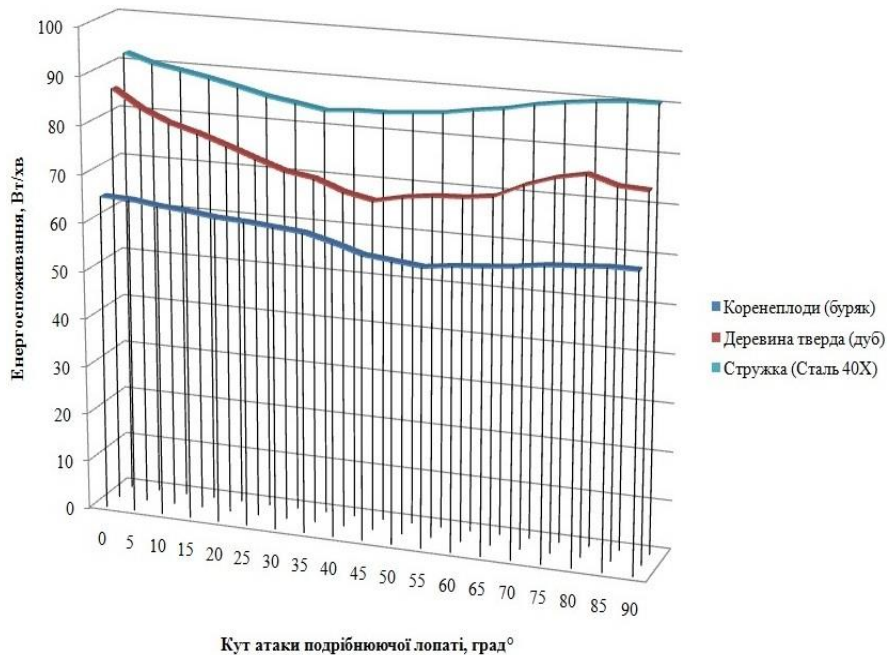


Рис. 2. Енергоємність модернізованого конвеєра

Під час виконання дослідження було визначено найнижчу енергоємність конвеєра при транспортуванні різних типів:

- для коренеплодів - 57,3 Вт/хв;
- для твердої деревини - 67,8 Вт/хв;
- для стружки - 84,1 Вт/хв.

Визначено відповідні діапазони кутів встановлення додаткової лопаті:

- для коренеплодів – 45-70°;
- для твердої деревини – 35-65°;
- для стружки – 15-70°.

Наявність додаткової лопаті дає енергетичний ефект у межах від 5 до 15 відсотків в залежності від кута встановлення лопаті та типу транспортованого (подрібнюваного) матеріалу.

Великий діапазон кутів встановлення додаткової лопаті при одночасному транспортуванні та подрібненню стружки обумовлений фракційністю матеріалу, яка дозволяє практично не потрапляти під дію лопаті. Тому для подальшого розвитку досліджень доцільно використовувати розширений спектр дослідних зразків матеріалів.

### Література

1. Chasov D. (2016). «Determining the equation of surface of additional blade of a screw conveyor», Eastern-European Journal of Enterprise Technologies #5. P. 10–14.
2. Pankiv V.R., Tokarchuk O.A. (2017). Investigation of constructive geometrical and filling coefficients of combined grinding screw conveyor. INMATEH–Agricultural engineering. National Institute of research development for machines and installations designed to Agriculture and food industry. Inma Bucharest. Vol. 51. P. 59–68.
3. Baranovsky V.M., Potapenko M.V. (2017). Theoretical analysis of the technological feed of lifter root crops. INMATEH–Agricultural Engineering. National Institute of research development for machines and installations designed to Agriculture and food industry. Inma Bucharest. Vol. 51. P. 29–38.

Секція 5

ЕКОНОМІКО-МАТЕМАТИЧНІ МЕТОДИ І МОДЕЛІ

УДК: 336.76; 311.15

**В.В. Вітлінський**<sup>1</sup>, д.е.н., проф., **Л.Л. Маханець**<sup>2</sup>, к.е.н., доц.

<sup>1</sup> Київський національний економічний університет імені Вадима Гетьмана, Україна

<sup>2</sup> Чернівецький національний університет імені Юрія Федьковича, Україна

**МОДЕЛЮВАННЯ ЕКОНОМІЧНИХ СИСТЕМ В  
УМОВАХ ПІДВИЩЕНОГО РИЗИКУ**

**Valdemar V. Vitlinskyi**, Doctor of Economic Sciences, professor, **Liubov Makhanets**, PhD, Associate professor,

**SIMULATION OF ECONOMIC SYSTEMS IN CONDITIONS OF INCREASED RISK**

**Abstract.** The intensive development and widespread use of economic and mathematical models and methods of analysis and management of economic objects, processes, events taking into account the increasing range of risks and their degree is considered in this paper. The wide use of a number of systems and tools of artificial intelligence, economic dynamics, etc. is highlighted.

Математичне моделювання економічних систем увійшло в черговий принципово важливий етап свого розвитку, «вбудовуючись» у структури інформаційного (цифрового) суспільства, використовуючи та даючи нові імпульси розвитку інтелектуальних систем і технологій.

Історія методології математичного моделювання переконує: вона (методологія) може й повинна бути інтелектуальним ядром цифрових технологій, усього процесу інформатизації суспільного буття [1].

Створивши тріаду: «модель-алгоритм-програмний комплекс», дослідник (системний аналітик) отримує гнучкий і відносно дешевий інструмент, який тестується в «пробних» модельованих обчислювальних інтелектуальних експериментах. Після того, як адекватність (достатній рівень відповідності) реальному економічному об'єкту, процесу, явищу, зважаючи на цілі та доведену систему гіпотез тріади, засвідчена, з моделлю проводять різноманітні та детальні «досліди», обов'язково враховуючи невизначеність, конфліктність, суб'єктивізм та породжений ними ризик. Ці дослідження дають нову інформацію про якісні та кількісні властивості й характеристики досліджуваного економічного об'єкта, процесу, явища.

Наголосимо, що доречно проводити ситуаційне моделювання, котре враховує суттєві ризики, а також інтелектуальний аналіз низки альтернативних модельних рішень та рекомендацій, водночас пропонуючи один, у певному сенсі, найкращий варіант, пам'ятаючи про решту варіантів, створюючи відповідні та кращі рішення, де доцільно враховувати ступінь ризику.

Розв'язуючи проблеми на різних рівнях ієрархії економіки в умовах цифрового суспільства, враховуючи невизначеність, конфліктність, суб'єктивність суспільства, мало покладати надію лише на потужність комп'ютерів та штучні інтелектуальні системи.

Постійне вдосконалення тріади математичного моделювання та її імплементація в сучасні інтелектуалізовані інформаційно-моделюючі системи це – методологічний імператив, який враховує постійні суспільні зміни, ускладнення, невизначеність

соціально-економічного середовища, зміну цілей та критеріїв у процесі отримання нових знань тощо.

Наголосимо, що людство перебуває в стадії, яку, скориставшись образним висловом Лафонтена, можна назвати «стадією глобального ризику», але не лише глобального, а й різноманітного й концентрованого.

Із початком широкомасштабного військового вторгнення рашистів, з'явилася низка нових ризиків, пов'язаних безпосередньо з військовими операціями, а також ризику масового закриття підприємств, великого, середнього та малого бізнесу, масове безробіття. Дуже багато кваліфікованих фахівців переїхало працювати за межі України. Існує ризик дефолту, ризик гіперінфляції, загроза погіршення психологічного стану людей, ризик масової депресії тощо.

Через хижацьке, позбавлене будь-яких етичних норм, ставлення до людини та природи, людство опинилося перед глобальними екологічними кризами, коли виробництво різноманітної зброї поглинає колосальні ресурси, а загроза ядерної війни є, як ніколи реальною. Мало того, рашистами масово винищуються товари аграрного виробництва, низка країн опинилася перед загрозою масового голоду. Стрімко знищуються засоби виробництва й транспортування електроенергії тощо. У низці сфер економіки ступінь ризику набуває катастрофічного рівня.

На нашу думку, ризик – це системна характеристика, котра відображає особливості сприйняття зацікавленими суб'єктами господарювання існуючих невизначеності та конфліктності в ситуаціях цілепокладання, оцінювання, прийняття рішень.

Ще у 1996 році в нашому підручнику [2], висвітлені, зокрема, принципи та методи системного аналізу економічного ризику, економіко-математичні моделі та методи застосування для аналізу та моделювання економічних систем з урахуванням ризику. Відтоді здійснено значний доробок математичного інструментарію, особливо на підґрунті застосування штучних інтелектуальних систем, нових досягнень в ігровому моделюванні тощо.

А ще, на нашу думку, потрібно знижувати ризики зволікання щодо швидкого та широкого впровадження нової техніки та технічних новинок, а також якомога швидшого застосування нових економіко-математичних моделей та методів, які використовують новітні досягнення в сфері штучного інтелекту та комп'ютерних технологій, нових результатів щодо більш точного та варіативного прогнозування параметрів та показників економічних ризиків, виявлення суперечностей, окремі з яких на даний час є латентними.

### Література

1. Вітлінський В.В. Моделювання економіки: навчальний посібник. / В.В. Вітлінський // – К.: КНЕУ, 2003. – 408с.
2. Вітлінський В.В. Економічний ризик і методи його вимірювання: Підручник. / С. І. Наконечний, О. Д. Шарапов // – К.: ІЗМН, 1996. – 400с.

УДК 336.7

М. І. Ігнатишин<sup>1</sup>, к. т. н., доц., О.В. Максютова<sup>2</sup>, Н.М.Стащук<sup>3</sup>.<sup>1</sup> Мукачівський державний університет, Україна<sup>2</sup> Національний університет "Львівська політехніка", Україна<sup>3</sup> Технічний коледж національного університету "Львівська політехніка"МАТЕМАТИЧНИЙ АНАЛІЗ ТРЕЙДИНГУ НА  
КРИПТОВАЛЮТНОМУ РИНКУ

M. I. Ihnatyshyn, Ph.D., Assoc. Prof., O.V. Maksyutova, N.M.Statshuk

MATHEMATICAL ANALYSIS OF TRADING ON  
CRYPTOCURRENCY MARKET

**Abstract.** Trading, like any type of activity, must be effective. We set ourselves the task of evaluating the effectiveness of trading regardless of whether it is carried out by a trader or a BOT. We will use the aggregate, which is the main form of the economic index. To evaluate trading results, we will use the Laspeyres index system.

В Україні остаточно легалізували криптовалюту. Президент України підписав закон «Про віртуальні активи», ухвалений Верховною Радою України 17 лютого [1]. Наразі криптовалюта офіційно легалізована в Україні.

Капіталізація криптовалютного ринку сягнула \$1,53 трлн. Щоденний оборот на валютному ринку FOREX становить більше \$6,62 млрд [2].

Економічна наука покликана вивчати економічні явища, одним з яких є валютний та криптовалютний ринок, що за останні 20 років зазнав значного зростання. Науковці, в тому числі і українські, займаються вивченням стратегій трейдингу [3].

Ми не розглядаємо стратегії трейдингу, не задаємось питанням чи вільний валютний ринок, чи керований. Трейдинг як будь-який вид діяльності повинен бути ефективним. Ми ставимо задачу оцінити ефективність трейдингу незалежно від того хто його здійснює трейдер чи БОТ (спеціальна програма, що виконує автоматично і/або за заданим розкладом які-небудь дії через ті ж інтерфейси, що й звичайний користувач-трейдер).

В економічній статистиці відома теорія агрегатних індексів.

Агрегатний індекс являється основною формою економічного індекса.

В залежності від правил побудови агрегатних індексів розрізняють індексні системи Ласпейреса, Пааше та Фішера.

Для оцінки результатів трейдингу скористаємось індексною системою Ласпейреса.

$p_0$  – ціна ордера Buy, \$/криптовалюта (купівля криптовалюти),

$q_0$  – обсяг ордера Buy, криптовалюта (купівля криптовалюти),

$p_1$  – ціна ордера Sell, \$/криптовалюта (продаж криптовалюти),

$q_1$  – обсяг ордера Sell, криптовалюта (продаж криптовалюти),

$A_0$  – кошти на придбання криптовалюти, \$

$A$  – кошти від продажу криптовалюти, \$

$I_p$  – агрегатний індекс ціни,

$I_q$  – агрегатний індекс обсягу,

$I_{pq}$  – агрегатний індекс ціни та обсягу (обороту),

Розглянемо приклад. Трейдер придбав криптовалюту Polkadot (DOT) за ціною  $p_0 = 18,11$  \$/DOT, обсяг придбаної криптовалюти  $q_0 = 66,27$  DOT, трейдинг проводився протягом  $n = 9$  днів і завершився продажем криптовалюти обсягом  $q_1 = 71,70$  DOT за ціною  $p_1 = 19,14$  \$/DOT.

Розрахуємо агрегатний індекс ціни

$$I_p = \frac{\sum p_1 q_0}{\sum p_0 q_0} = \frac{19,14 \cdot 66,27}{18,11 \cdot 66,27} = 1,06 \quad (1)$$

індекс агрегатний обсягу

$$I_q = \frac{\sum p_1 q_1}{\sum p_1 q_0} = \frac{19,14 \cdot 71,70}{19,14 \cdot 66,27} = 1,08 \quad (2)$$

індекс агрегатний обороту

$$I_{pq} = \frac{\sum p_1 q_1}{\sum p_0 q_0} = \frac{19,14 \cdot 71,70}{18,11 \cdot 66,27} = 1,14 \quad (3)$$

В формулах (1) – (3) знак суми можна опустити, оскільки в «кошику» трейдера одна криптовалюта.

Очевидна властивість агрегатних індексів виконується

$$I_{pq} = I_p I_q, \quad \Delta_{pq} = \Delta_p + \Delta_q \quad (4)$$

Сформулюємо критерії ефективності трейдингу і перевіримо їх виконання

$$\begin{cases} I_p > 1 \\ I_q > 1 \\ I_{pq} > 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} I_p = 1,06 > 1 \\ I_q = 1,08 > 1 \\ I_{pq} = 1,14 > 1 \end{cases} \quad (5)$$

або

$$\begin{cases} \Delta_p = p_1 q_0 - p_0 q_0 > 0 \\ \Delta_q = p_1 q_1 - p_1 q_0 > 0 \\ \Delta_{pq} = p_1 q_1 - p_0 q_0 > 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \Delta_p = 68,26\$ > 0 \\ \Delta_q = 103,93\$ > 0 \\ \Delta_{pq} = 172,19\$ > 0 \end{cases} \quad (6)$$

Трейдинг відповідає критеріям ефективності. Отже купивши криптовалюту на суму 1200\$ трейдер, займаючись трейдингом, отримаав прибуток 172,19\$ в тому числі 68,26\$, - за рахунок росту ціни і 103,93\$, - за рахунок примноження криптовалюти.

З формули складних відсотків

$$A = \left(1 + \frac{x}{100}\right)^n A_0 \quad (7)$$

знайдемо середньоденни прибуток трейдера

$$x = \left(\sqrt[n]{\frac{A}{A_0}} - 1\right) \cdot 100\% = \left(\sqrt[9]{\frac{19,14 \cdot 71,70}{18,11 \cdot 66,27}} - 1\right) \cdot 100\% \quad (8)$$

$$= 3,87\%$$

Результати обчислень наведено в таблиці, таблиця 1.

Таблиця 1. Розрахунок агрегатних індексів трейдингу.

		Базовий період		Поточний період							
		BUY		SELL							
Дата	Криптовалюта	Початковий обсяг	Початкова ціна, \$/од	Кінцевий обсяг	Кінцева ціна, \$/од	Індекси			Обсяги, \$		
		$q_0$	$p_0$	$q_1$	$p_1$	$I_p$	$I_q$	$I_{pq}$	$\Delta_p$	$\Delta_q$	$\Delta_{pq}$
15.04.22	DOT	66.27	18.11	71.70	19.14	1.06	1.08	1.14	68.26	103.93	172.19
		66.27		71.70		<b>1,06</b>	<b>1,08</b>	<b>1,14</b>	<b>68,26</b>	<b>103,93</b>	<b>172,19</b>
								Обсяги, %			
								5,69	8,66	14,35	

Програма EXEL за якою проведено розрахунки наведені в таблиці 1 знаходиться за QR – кодом, рис. 1



Рис.1. Програма EXEL для перевірки ефективності трейдингу[4].

Висновок. Агрегатний індекс, що застосовується для оцінки зміни індексованих показників в часі в різних сферах виробництва і торгівлі може бути використаний і в такому ризикованому виді діяльності як трейдинг на валютному ринку. Регулярно перевіряючи результати торгівлі, щогодини, щодня трейдер може змінити свою стратегію і спрямувати її так, щоб вона задовільняла сформульованим критеріям ефективності трейдингу.

#### Література

1. Електронний ресурс:<https://zakon.rada.gov.ua/laws/show/2074-20#Text>
2. Daily turnover of global foreign exchange market with 39 different currencies from 2001 to 2019. Statista: веб-сайт. URL: <https://www.statista.com/statistics/247328/activity-per-trading-day-on-the-globalcurrency-market/> (дата звернення: 01.08.2021).
3. Биченко Д.О. Спекуляції на валютному ринку України. Вісник СумДУ. Серія «Економіка», № 2' 2021. С140-145.
4. Електронний ресурс:  
[https://docs.google.com/spreadsheets/d/1ID8NojlsLK5oAwQnsXrG7X01Tsx6M6Op/edit?usp=share\\_link&ouid=103200378566821156320&rtpof=true&sd=true](https://docs.google.com/spreadsheets/d/1ID8NojlsLK5oAwQnsXrG7X01Tsx6M6Op/edit?usp=share_link&ouid=103200378566821156320&rtpof=true&sd=true)

УДК 004.413.4 (330.322.1)

Б.М.Маркович<sup>1</sup> д.ф.-м.н., проф., Т.С. Дубиняк<sup>2</sup> к.т.н., доц.,

О.С. Манзій<sup>1</sup> к.ф.-м.н., доц., А. П. Сенік<sup>1</sup> к.ф.-м.н., доц., Ю.В. Футрик<sup>1</sup>

<sup>1</sup>Національний університет «Львівська політехніка», Україна;

<sup>2</sup>Тернопільський національний технічний університет імені Івана Пулюя, Україна;

## ІНФОРМАЦІЙНА ВЕБОРІЄНТОВАНА СИСТЕМА СТВОРЕННЯ ТА АНАЛІЗУ ІНВЕСТИЦІЙНОГО ПОРТФЕЛЯ

Markovych Bohdan Dr. Sci., Full Prof., Dubyniak Taras Ph.D, Assoc.Prof., Manziy Oleksandra Ph.D, Assoc.Prof., Senyk Andrij Ph.D, Assoc.Prof., Futryk Yuriy

## INFORMATION WEB-ORIENTED SYSTEM FOR CREATING AND ANALYZING AN INVESTMENT PORTFOLIO

**Abstract.** The issue of decision-making on the formation and optimization of the investment portfolio is in the field of attention today. In the presented work the developed new web-information system for creation investment set and portfolio analysis is offered. Such a decision will help the investor to find the optimal content of the portfolio and minimize possible investment risks.

Питання прийняття ефективних рішень щодо формування та оптимізації інвестиційного портфеля є актуальними як для великих інвестиційних компаній, так і для приватних інвесторів. Застосування математичних методів та інформаційно-комунікаційних технологій сьогодні розглядають як один із ефективних методів управління портфелем інвестицій.

Згідно із відомою моделлю Гаррі МарковіцаMPT (ModernPortfolioTheory) для кожного рівня ризику є відповідна комбінація активів, яка максимізує дохід. Вирішення питання ефективного набору інвестицій, пов'язане зі зниженням інвестиційних ризиків та виконується за допомогою формалізації і кількісної оцінки ризику шляхом прийняття багатокритеріальних рішень та кластеризації, а також із застосуванням інтервального нечіткого формалізму прийняття рішень. Очевидно, що спеціалізовані програмні продукти для управління портфелем інвестицій є платними та непростими у застосуванні. Візуалізація даних та бізнес-аналітика є одними з найпоширеніших сучасних методологій аналізу обраного набору інвестиційних інструментів.

Наявність візуальної інформації про фінансовий продукт дозволить споживачеві оцінити, чи відповідає він обраним активним потребам і чи готовий споживач прийняти притаманні такому продукту ризику і, відповідно, збільшить попит на фінансовому ринку та залучить нових клієнтів до фінансових установ. Таким чином, чітке надання достовірної інформації споживачеві про фінансові продукти, як і використання інструментів інвестування, має стати вагомим фактором збільшення доходів громадян на ринку цінних паперів. В мережі Інтернет широко присутні спеціалізовані програмні продукти для управління фінансовими ризиками, здійснення порівняльного аналізу набору інвестицій, формування звітів та моделювання інвестиційних сценаріїв. Проте більшість цих продуктів не розраховані на непрофесійних інвесторів і вимагають додаткових знань.

Авторами запропоновано проект програмного продукту, який дозволяє на основі візуалізації здійснювати аналіз інвестиційної привабливості фінансових інструментів, а також за допомогою прогнозування руху їх цін на фінансовому ринку, здійснювати

динамічну диверсифікацію обраного набору фінансових активів. Сервіс орієнтований на україномовну аудиторію, а простий і зрозумілий інтерфейс дозволяє непрофесійним/малокваліфікованим інвесторам приймати рішення щодо формування та оптимізації інвестиційного портфеля. Основною методологічною засадою створення системи є те, що більшість інформації, з якою стикається інвестор, має табличний формат, а людина є більш сприйнятлива до візуалізованих способів подання інформації. Виходячи з цього, за основу новоствореної інформаційної системи береться процес візуалізації: представлення наявної табличної інформації в структурованому вигляді діаграм та графіків.

Інформаційна система підтримки прийняття рішення при формуванні інвестиційного портфеля та керування інвестиційними ризиками опублікована в мережі Інтернет за адресою: <https://risk-investment-portfolio.herokuapp.com>. Вхідні дані завантажуються за допомогою бібліотеки Pandas з джерела постачальника фінансової інформації YahooFinance (<https://finance.yahoo.com>).

На головній сторінці платформи викладена ознайомча інформація, яка допоможе зрозуміти, як правильно зважувати ризик і приймати рішення під час формування інвестиційного портфеля. Користувач має можливість оцінити динаміку зміни ціни фінансового інструменту на графіку (рис. 1) та проаналізувати графіки з урахуванням ковзної середньої.



Рис. 1 Сторінка огляду цін.

Запропонована інформаційна система дозволяє потенційним інвесторам самостійно оцінювати ефективність інвестиційного портфеля шляхом порівняння динаміки зростання курсу акцій, доступних на фінансовому ринку, а також передбачити ціну фінансового інструменту. Для цього в системі реалізовані наступні методики: розрахунок річної прибутковості та волатильності для кожного інструменту та для портфеля в цілому; візуалізацію кореляції (таблиця та теплова карта) і її числову характеристику, знайдену за допомогою коефіцієнта кореляції Пірсона; методи прогнозування SARIMA; а також реалізовано два найпоширеніші методи перевірки стаціонарності: візуалізація та тест Дікі-Фуллера (ADF). Показник оцінки, який використовується для пошуку параметрів, є значенням AIC (AkaikeInformationCriterion). Під час розрахунку ефективності портфеля використовується коефіцієнт Шарпа, який є відношенням очікуваної надлишкової прибутковості портфеля до його волатильності. Система дозволяє створювати різні набори портфоліо для подальшого вибору



найкращого. Застосовується моделювання методом Монте-Карло побудови різноманітних довільно сформованих шкал. Візуалізація співвідношення прибутку та ризику змодельованих інвестиційних портфельів дозволяє інвестору оцінити мінімізацію ризику для заданого рівня прибутковості. А розраховані значення очікуваної прибутковості, ризикового коефіцієнта Шарпа допомагають вибрати оптимальний результат.

Результати аналізу представлені візуально. У таблиці також наведено відповідні значення для аналізу очікуваної прибутковості обраного портфельного рішення.

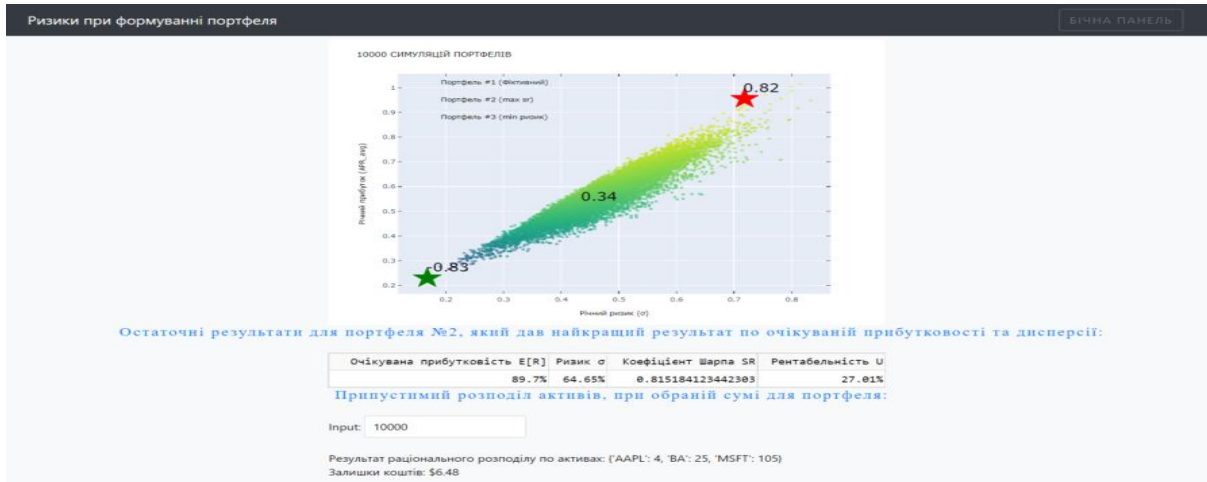


Рис. 2 Очікувані доходи та ризики для вибраного інвестиційного портфеля.

У результаті (рис.3) у вигляді діаграми візуалізується оптимальне наповнення інвестиційного портфеля.



Рис. 3 Діаграма результату раціонального розподілу активів портфеля.

Новизна представленої інформаційної системи для підтримки прийняття рішень щодо оптимізації портфелю цінних паперів полягає у можливості візуального порівняння активів, доступних на фінансовому ринку, а також прогнозування їх ціни. Сервіс орієнтований на українську аудиторію, а інтерфейс програми є простим та інтуїтивно зрозумілим, що дозволяє припускати її ефективне використання непрофесійними приватними інвесторами.

УДК 621.762:678-19

В.В. Пастернак, к. т. н., доц.

Волинський національний університет імені Лесі Українки, Україна

## ОСОБЛИВОСТІ МОДЕЛЮВАННЯ МЕТОДАМИ STARUML

V.V. Pasternak, Ph.D., Assoc. Prof.

## FEATURES OF MODELING BY METHODS STARUML

**Abstract.** This work outlines the need for modeling complex objects and processes using UML methods. The main types of diagrams are presented, which detail and concretize various representations of the model of a complex system of the Unified Modeling Language (UML). The performed analysis of each type of diagram allows to improve the quality of the final product by solving a large number of different applied problems.

Зростання ролі інформаційних систем (ІС) в сучасних умовах обумовлене конкурентними перевагами, які потребують постійного вдосконалення та розвитку [1]. Для розробки та впровадження таких систем призначені сучасні засоби їх проектування [2]. На сьогоднішній день StarUML є загальновизнаним стандартом, який використовує більшість розробників системного та прикладного програмного забезпечення. UML підтримується багатьма об'єктно-орієнтованими CASE-продуктами [3]. Тому, знання StarUML є необхідним не лише для системних аналітиків і проектувальників, але й для звичайних програмістів і тестувальників програмного забезпечення. На рис. 1 представлено інтерфейс вікна програмного забезпечення StarUML.

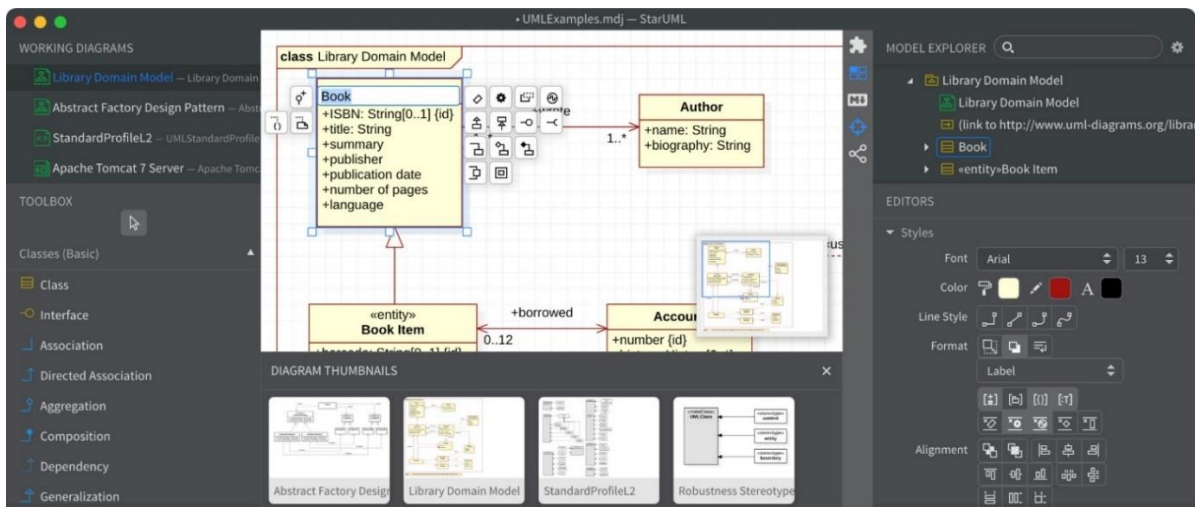


Рис. 1. Інтерфейс вікна програмного забезпечення StarUML

Слід відмітити, що мова UML має широкий профіль, являє собою відкритий стандарт, що використовує графічні позначення для створення абстрактної моделі системи. А також, Unified Modeling Language (UML) реалізує об'єктно-орієнтований підхід до моделювання. На рис. 2 представлено основні види діаграм, які побудовані на основі моделювання UML. Перелік цих діаграм і їх назв є канонічними в тому сенсі, що являють собою невід'ємну частину графічної нотації мови UML. Більше того, процес об'єктно-орієнтованого проектування та моделювання нерозривно пов'язаний із процесом побудови цих діаграм.

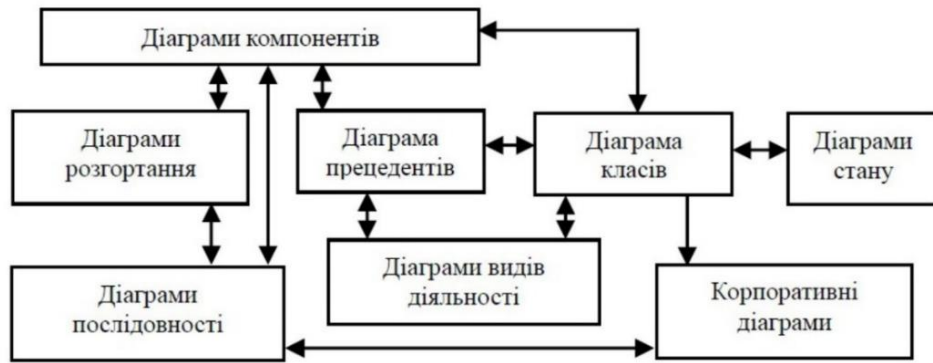


Рис. 2. Основні види діаграм, які побудовані на основі моделювання UML

Слід також зазначити, що сукупність побудованих у такий спосіб діаграм є самодостатньою в тому сенсі, що у них міститься вся інформація, яка необхідна для реалізації проекту складної системи. Важливо відмітити і те, що кожна з цих діаграм деталізує і конкретизує різні представлення результатів про модель складної системи в термінах мови UML. При цьому діаграма варіантів використання являє собою найбільш загальну концептуальну модель складної системи, що є вихідною для побудови всіх інших діаграм. Діаграма класів, по своїй суті – логічна модель, що відбиває статичні аспекти структурної побудови складної системи. Діаграми кооперації і послідовностей являють собою різновид логічної моделі, що відображають динамічні аспекти функціонування складної системи. Діаграми станів і діяльності призначені для моделювання поведінки системи. Діаграми компонентів і розгортання служать для представлення фізичних компонентів складної системи і тому відносяться до її фізичної моделі. Крім графічних елементів, що призначені для кожної канонічної діаграми, на них може бути зображена текстова інформація, що розширює семантику базових елементів.

Отже, Unified Modeling Language (UML) дозволяє вирішувати задачі по двох основних напрямках: 1) дослідження структурних моделей (статичних моделей), які описують структуру сутностей або компонентів певної системи; 2) дослідження моделей поведінки (динамічних моделей), котрі описують поведінку або функціонування об'єктів системи. Таким чином, уніфікована мова візуального моделювання UML, яка створена для оптимізації процесу проектування та розробки інформаційних систем, дозволяє збільшити ефективність їх реалізації, помітно покращити якість кінцевого продукту шляхом вирішення великої множини різних прикладних задач. Тому, використання UML є ефективним інструментом у моделюванні та проектуванні інформаційних систем в будь якій сфері діяльності та для вирішення різноманітних прикладних задач.

### Література

1. Pasternak V. Computer modelling of objects and processes: monograph. Chisinau: Lambert Academic Publishing, 2022. 110 p.
2. Pasternak V., Samchuk L., Ruban A., Chernenko O., Morkovska N. Investigation of the Main Stages in Modeling Spherical Particles of Inhomogeneous Materials. Materials Science Forum. 2022. № 1068. P. 207-214.
3. Pasternak V., Samchuk L., Huliieva N., Andrushchak I., Ruban A. Investigation of the Properties of Powder Materials Using Computer Modeling. Materials Science Forum. 2021. № 1038. P. 33-39.

УДК 330.4

Н.М. Різник, к.е.н., доц., А. Парушевські

Тернопільський національний технічний університет імені Івана Пулюя, Україна

**АНАЛІЗ ТА МОДЕЛЮВАННЯ ФІНАНСОВО-ЕКОНОМІЧНИХ  
ПОКАЗНИКІВ ПІДПРИЄМСТВ З ВИКОРИСТАННЯМ ВІДКРИТИХ  
ІНФОРМАЦІЙНИХ БАЗ ДАНИХ**

**N.M. Riznyk, Ph.D., Assoc. Prof., A. Parushevski**

**ANALYSIS AND SIMULATION OF FINANCIAL AND ECONOMIC  
INDICATORS OF ENTERPRISES USING OPEN DATABASES**

**Abstract.** In the conditions of digital transformation of society, it is extremely important to receive reliable information in a timely and efficient manner. A significant component of this information is data from open databases. The use of modern tools of financial and economic analysis, in particular FinScore, is currently one of the important factors of conducting a successful business analysis for further obtaining effective management decisions.

В умовах цифрової трансформації суспільства надзвичайно важливо вчасно та оперативно отримувати достовірну інформацію. Згідно постанови Кабінету Міністрів України від 21.10.2015 р. № 835 затверджено Положення про набори даних, які підлягають оприлюдненню у формі відкритих даних і на основі якого формується низка відкритих інформаційних баз даних. Завдяки цій інформації економісти-аналітики мають дієві інструменти для проведення моніторингу, аналізу та моделювання фінансово-економічних показників підприємств.

Деякі інформаційні бази даних дають змогу не лише отримати інформацію, а й містять інструменти для ефективного фінансово-економічного аналізу. Однією з таких систем є YouControl [1], що використовується для компласу, дослідження та аналізу ринків, проведення ділової розвідки. Важливим ключовим індексом даної системи є FinScore – це індекс оцінки фінансової стабільності компанії, який розраховується відділом аналітики YouControl на основі 20 фінансових показників, які в сукупності описують ліквідність, платоспроможність, прибутковість і ефективність діяльності компанії. Внаслідок поєднання машинного навчання, нейронних мереж, моделювання логістичної регресії та новітніх методів фінансового аналізу індекс FinScore щорічно підтверджує свою високу сигнальну здатність прогнозувати ймовірність банкрутства компанії. Значення індексу FinScore варіюється від 1 (найменш можлива фінансова стійкість) до 4 (найбільш можлива фінансова стійкість) в залежності від значення фінансових показників компанії.

Складові індексу ретельно відібрано в результаті емпіричного дослідження динамічних змін приблизно 100 загальноприйнятих фінансових показників. Індикатори ризику та алгоритми оцінки, які використовуються для побудови індексу, відображають найбільшу прогностичну силу для оцінки фінансового стану компанії. Тобто українські компанії з поганими значеннями цих показників ставали неплатоспроможними частіше, ніж їхні конкуренти в період аналізу 2011-2020 років.

Завдяки поєднанню досліджень в галузі економічної теорії, фінансового аналізу та методів машинного навчання, було створено нову модель скорингу, яка формує індекс FinScore- консолідований показник фінансової стабільності. Згідно з останньою моделлю розрахунку індексу FinScore за даними від 2019 року, компанії з індексом «D»

мають тенденцію до банкрутства в 10-14 разів частіше, ніж компанії з індексом «А» (Залежно від тривалості тестування).

На відміну від попередніх алгоритмів скорингу, новий метод не вимагає чіткої галузевої диференціації, лінійних залежностей і трансформації фінансових показників до середніх значень для розрахунку загальних балів. Вхідними даними для моделі є звичні фінансові результати компанії, які попередньо були обрані на основі історичного рівня спроможності прогнозувати банкрутство українських компаній. Вибрані показники всебічно демонструють фінансовий стан підприємства щодо ліквідності, платоспроможності, прибутковості та ділової активності.

Раніше формула FinScore була лінійною для кожної фінансової метрики. Якщо якась із них була відсутня, показник фінансової стійкості не розраховувався. Нова модель вирішує цей недолік, оскільки вона не є лінійною і працює, базуючись на алгоритми машинного навчання, які використовують усі доступні дані для визначення ймовірності банкрутства.


Значення всіх десяти індикаторів, які раніше входили до індексу FinScore, автоматично трансформувались в бали від 1 до 4, в залежності від їхньої позиції стосовно емпіричного квартиля розподілу відповідного значення для інших компаній на ринку. Підприємство отримувало 4 бали, якщо значення показника фінансової стійкості прямувало до максимуму. Компанії з низькими значеннями індексу отримали нижчі бали.

Загальний індекс FinScore розраховується за формулою [1]:


$$FinScoreIndex = \sum_{i=1}^n F_i w_i, \quad (1)$$

де  $F_i$  – бал, який компанія отримує за фактором, вираженим за допомогою індикатора  $i$ ;  $w_i$  – вага фактору  $F_i$  (причому  $1 \leq F_i \leq 4$ ;  $0 < w_i < 1$ ;  $\sum_{i=1}^n w_i = 1$ ).


Спираючись на числове значення балу FinScore (від 4 до 1) кожна компанія отримує буквенний показник FinScore, який відображає відносну фінансову стійкість на ринку.

-  **A** Високий рівень фінансової стійкості  
(Вище верхнього квартиля розподілу FinScore)

---

-  **B** Добрий рівень фінансової стійкості  
(Вище медіани розподілу FinScore)

---

-  **C** Задовільний рівень фінансової стійкості  
(Вище нижнього квартиля розподілу FinScore)

---


-  **D** Незадовільний рівень фінансової стійкості  
(Нижче нижнього квартиля розподілу FinScore)

Рис. 1. Співвідношення між рівнем фінансової стійкості та буквенним показником FinScore

Ефективність моделі фінансового скорингу підтверджена історіями банкрутства українських компаній. Фірмам, які пізніше стали неплатоспроможними, зазвичай були притаманні набагато нижчі індекси, порівняно з тими, хто вижив. Зменшення індексу також свідчить про деяку здатність сигналізувати про погіршення фінансової стабільності.

Згідно історії банкрутств вітчизняних компаній у 2015-2020 роках, 55-61% компаній, які щороку банкрутували, раніше входили до групи FinScore «D», тобто мали незадовільний рівень фінансової стійкості. У компаній, які збанкрутували у 2021 році, за останнє десятиліття показники FinScore знизилися, чого не можна сказати про компанії, які продовжують працювати. Медіанний показник FinScore у них залишився незмінним.

Використання сучасних інструментів фінансово-економічного аналізу, зокрема FinScore, на сьогодні є одним з важливих факторів проведення успішного бізнес-аналізу для подальшого отримання ефективних управлінських рішень. Хоча треба прийняти до уваги, що також індексу FinScore притаманна стохастичність - навіть найвищі показники індексу не є однозначною гарантією фінансової стабільності. Можна лише припустити, що такі компанії збанкрутують з меншою ймовірністю.

#### Література

1. YouControl - повне досьє на кожную компанію України. URL: <https://youcontrol.com.ua/>.

УДК 338.1

Шерстюк Р. П., д.е.н. проф, Андрушків Б. М., д.е.н. проф., Ратинський В. В. к.е.н., доц., Погайдак О. Б., д.е.н. с.н.с., Кирич Н. Б., д.е.н. проф.

Тернопільський національний технічний університет імені Івана Пулюя, Україна

**ДІДЖИТАЛ-ІНСТРУМЕНТАРІЙ ВІДРОДЖЕННЯ СЕРВІСНОЇ  
ІНФРАСТРУКТУРИ В УМОВАХ ОБ'ЄДНАННЯ ТЕРИТОРІАЛЬНИХ ГРОМАД  
У ПОВОЄННИЙ ПЕРІОД НАБЛИЗИТЬ ЕКОНОМІКУ УКРАЇНИ ДО  
ЄВРОПЕЙСЬКИХ СТАНДАРТІВ**

**Roman Sherstiuk, Dr., Prof. Bohdan Andrushkiy, Dr., Prof. Vadym Ratynskiy, Ph.D.,  
Assoc. Prof. Pogaidak Olha, Dr, S.R.O. Kyrych Nataliia, Dr., Prof.**

**DIGITAL TOOL KIT FOR THE REVIVING THE SERVICE STRUCTURE IN  
CONDITIONS OF UNIFICATION OF TERRITORIAL COMMUNITIES WHICH  
WILL BRING UKRAINE CLOSER TO EUROPEAN STANDARDS IN THE POST-  
WAR PERIOD**

**Abstract.** Modern European economic conditions provide significant potential opportunities for the development of service enterprises of their infrastructure as business entities, at the same time providing for their full responsibility for the final results of their own activities. In defense and military conditions, domestic OTG lose such opportunities. Therefore, the assessment of the socio-economic situation and the organization of strategic planning on this basis are of paramount importance for the successful development of service infrastructure, since the strategy is intended to ensure the market stability of the enterprise in the conditions of a changing external environment, especially in rural areas for the post-war perspective.

*Літературний відступ до статті від проф. Андрушків Б.М: Шаблія Олега Миколайовича знав особисто з часу трансформації технічного факультету Львівської «Політехніки» у самостійний політехнічний інститут, а потім і в Тернопільський технічний та Національний університет. Працюючи в об'єднанні спільно з ним готували відповідні обґрунтування в МОН України та інші державні інстанції. Олег Миколайович відомий в ученому світі як український учений у галузі механіки, математичного моделювання, теорії конструювання джерел нагріву, теорії конструювання засобів інформаційних технологій як керівник навчального закладу забезпечував його успішний розвиток. Працюючи ректором він ніколи не збував про своє перше покликання ученого. Кафедра інформатики і математичного моделювання перехопила і гідно несе цю естафету. Свідченням того є організована кафедрою і її керівником Михайлом Михайлишиним цієї Міжнародної науково-технічної конференції під назвою: «Математичні методи та моделі технічних та економічних систем», яка присвячена пам'яті професора Шаблія Олега Миколайовича та 60-ти річчю кафедри теоретичної механіки.*

*Мабуть власне цими міркуваннями і продиктовано вибір теми нашої статті у якій домінує термін «Діджитал».*

*За участі Шаблія Олега Миколайовича відбувалося становлення університету. З використанням його наукових надбань відбудеться відродження нашої держави, її економіки у повоєнний період.*

Сучасні Європейські умови господарювання надають значні потенційні можливості для розвитку сервісних підприємств їх інфраструктури як суб'єктів підприємництва, передбачаючи водночас їх повну відповідальність за кінцеві результати власної діяльності. В оборонно-військових умовах вітчизняні ОТГ такі можливості втрачають. Відтак непересічного значення для успішного розвитку сервісної інфраструктури набуває оцінка соціально-економічної ситуації та на цій базі організація стратегічного планування, оскільки стратегія призначена забезпечувати ринкову стійкість підприємства в умовах мінливого зовнішнього середовища особливо у сільській місцевості на повоєнну перспективу. Однією з альтернативних стратегічних орієнтацій підприємства є інноваційні методи серед яких використання диджитал-інструментарію, диверсифікації, спеціалізації, концентрації, кооперації та ін. з огляду на їх можливості забезпечення конкурентної позиції сервісних підприємства на цільовому ринку.

**Довідково:** *Діджитал* (від лат. *digitus* — «палець», англ. *digital* — «пальцевий, цифровий»)

Згідно трактувань Вікіпедії, Діджитал, це сучасне міжнародне науково-технічне поняття, яке в українській мові може мати близькі, але різні значення: дискретний, цифровий, електронний. Ще в іншому випадку слово діджитал використовують дизайнери під яким розуміють: малюнок, створений за допомогою цифрових пристроїв.

В іншому випадку, Діджитал, розглядається як цифровий маркетинг - комплексний підхід, що охоплює всі онлайн- та офлайн-канали (QR-коди на листівках, IoT, інтерактивні екрани. Діджитал - та інтернет-маркетинг - схожі поняття. Інтернет-маркетинг - це канали просування послуг і продуктів, залучення та утримання клієнтів, які використовують тільки інтернет. Сюди входять SEO/SEM, SMM (маркетинг у соціальних мережах), інтернет-реклама тощо [8]..

Розвиток технологій і боротьба за клієнтів сервісної сфери піднімає Діджитал-інструментарій, на новий рівень. Сервісні підприємства, після воєнних руйнацій стають першопрохідцями і впроваджують абсолютно нові підходи до просування, займають ці поки що ще не цілком зайняті ніші.

Отже в організації розвитку сервісної інфраструктури важливе значення має співвідношення чисельності жителів сільської місцевості (зайнятих в сільськогосподарському виробництві) та торгово-побутового сервісу і полягає в їх комплементарності, яка передбачає тісний взаємозв'язок та взаємозалежність діяльності підприємств цих двох сфер. Проте через недосконалість, в свій час, приватизаційних процесів в ході трансформації виробництва до ринкових умов відбувся розрив економічних взаємовідносин між сільським господарством та сферою загального та виробничого обслуговування, що в оборонно-воєнних умовах негативно позначається на діяльності партнерів по сервісному бізнесу. Тому нині нагальною є потреба запровадження економічно виважених організаційно-економічних механізмів та управлінського Діджитал-інструментарію узгодження інтересів всіх суб'єктів ринку торгово-побутових послуг. Відтак дослідженням подальшого розвитку інфраструктури сервісних підприємств та їх ефективного функціонування, а також розробкою науково обґрунтованих напрямів диверсифікації діяльності торгово-побутових обслуговуючих підприємств, спеціалізації, концентрації, кооперації, Діджитал-інструментарію та ін. обумовлює актуальність та своєчасність означеної теми.

Метою даного наукового дослідження є розробка науково обґрунтованих пропозицій щодо активізації використання на інноваційних засадах Діджитал-інструментарію в торгово-побутовому обслуговуванні сільського населення, у



повоєнний період, удосконалення організаційно-економічних механізмів та підходів підвищення ефективності їх діяльності серед яких диверсифікація, концентрація, спеціалізація, кооперація, засоби маркетингу сервісних підприємств та на кінець того ж таки діджетал-інструментарію.

В даному випадку об'єктом дослідження послужили процеси формування сервісної інфраструктури її адаптації діяльності сервісних підприємств до умов Європейського конкурентного ринкового середовища та активізація їх діяльності, у повоєнний період, відповідно до вимог і стандартів ЄС. Предметом виступають сукупність теоретико-методологічних і практичних аспектів як диверсифікації, концентрації і спеціалізації, кооперації, засобів маркетингу роздрібною торгівлі, так і сервісного обслуговування в діяльності підприємств торгово-побутового сервісу в умовах ОТГ загалом.

За допомогою абстрактно-логічного методу, зокрема прийомів аналогії і співставлення, індукції та дедукції уточнено поняття: «діджетал-інструментарію», під яким пропонуємо розуміти, активне викисання цифрово-інформаційного, комплексного підходу, що охоплює всі онлайн- та офлайн-канали, IoT, інтерактивні екрани для збору і переробки інформації необхідної для формування сервісної інфраструктури пошуку каналів просування продукції, робіт та послуг, залучення та утримання клієнтів, які використовують тільки інтернет відповідно до воєнно-оборонних обставин. Сюди входять SEO/SEM, SMM (маркетинг у соціальних мережах), інтернет-реклама тощо. Без сумніву отримана засобами «діджетал-інструментарію» інформація, буде корисною для планування розвитку торгово-побутового сервісу, використання «диверсифікації», «концентрації і спеціалізації», «кооперації», засобів маркетингу роздрібною торгівлі та сервісного обслуговування в сільській місцевості [8].

Для визначення проблем активізації відновлювальних робіт та адаптації підприємств торгово-побутового сервісу до Європейських ринкових умов функціонування, від посттоталітарного до воєнного та повоєнного періоду, окреслення шляхів їх подолання доцільно застосувати не лише метод аналізу і синтезу, а і Діджитал-інструментарій. При аналізі сучасного стану та тенденцій розвитку села, учасників сільськогосподарського товаровиробництва та сервісних підприємств крім цього, використано статистико-економічний метод, зокрема його прийоми – графічний, порівняння та ін. що теж. Пов'язано з використанням Діджитал-інструментарію.

За допомогою монографічного методу та методу соціологічних опитувань, на прикладі, окремих Тернопільських підприємств сфери послуг, проведено обстеження діяльності (обслуговування) громадян сільської місцевості, сільгосптоваровиробників та ін. отримано підтвердження правильності обраного напрямку. За допомогою методу крос-табуляції встановлено зв'язок між економічним станом жителів села, учасників сільськогосподарського виробництва та їх потребою в сервісних торгово-побутових послугах, між фінансовим станом жителів села та способом задоволення їх потреб у торгово-сервісному обслуговуванні. Застосування Діджитал-інструментарію та методу супутньої варіації дало змогу встановити зв'язок між чисельністю сільського населення, учасниками сільгоспвиробництва та потребами в сервісному торгово-сервісному обслуговуванні, між витратами на інформацію та її якістю. Здійснено оцінку щільності зв'язку між рядом змінних за допомогою коефіцієнтів сполученості ознак та коефіцієнта Крамера [2].

Знову ж таки за допомогою діджетал-інструментарію та методу кореляційно-регресійного аналізу з використанням прикладних комп'ютерних програм статистичної обробки інформації визначено вплив організації маркетингової діяльності на обсяги

реалізації сервісними торгово-побутовими підприємствами ресурсів та послуг. В результаті застосування SWOT-аналізу досліджено чинники внутрішнього та зовнішнього маркетингового середовища, що може стати основою для вибору напрямів процесів диверсифікації, концентрації і спеціалізації, кооперації, засобів маркетингу роздрібної торгівлі та сервісного обслуговування в сільській місцевості сервісних підприємств. При здійсненні прогностичних розрахунків подальшого активного розвитку сервісних підприємств використано метод екстраполяції рядів динаміки. Застосування групової дисперсії дало змогу розрахувати поваріантний прогноз функціонування сервісних підприємств придатний для визначення напрямів розвитку сервісу з врахуванням традицій та територіальних особливостей краю.

Наукова новизна наукових розробок, пропозицій та рекомендацій полягає у наступному. Вперше на основі поваріантного прогнозу функціонування сервісних підприємств засобами диверсифікації, концентрації і спеціалізації, кооперації, маркетингу роздрібної торгівлі та сервісного обслуговування в умовах ОТГ (сільській місцевості), обґрунтовано доцільність, у повоєнний період, активізації їх діяльності, що має на меті використання Діджитал-інструментарію для забезпечення обслуговуючим підприємствам різного економічного стану конкурентної позиції на ринку, а також подолання негативних воєнних тенденцій, які супроводжують становлення системи торгово-побутового сервісу в умовах добровільного об'єднання територіальних громад відповідно до вимог та стандартів ЄС у повоєнний період.

Нами пропонується уточнити окремі трактування за темою і зокрема, сутності торгово-побутового сервісу в воєнних умовах функціонування ОТГ, яке полягає в тому, що функціональне призначення сервісу не обмежується інфраструктурним забезпеченням жителів села, та учасників сільськогосподарського виробництва, а передбачає комплекс взаємопов'язаних видів діяльності, що зумовлюють ефективність функціонування процесу виробництва й доведення до кінцевого споживача продукції, робіт і послуг, проходження на всіх його стадіях; уточнення функцій відповідно понять «діджитал-інструментарію», «диверсифікації», «концентрації і спеціалізації», «кооперації», засобів маркетингу роздрібної торгівлі та сервісного обслуговування в сільській місцевості що, на відміну від існуючих, тлумачить їх як стратегічну соціальну орієнтацію торгово-побутового підприємства, яка передбачає реалізацію аналітичних, організаційних, контролюючих заходів, спрямованих на створення, підтримку та розширення економічно обґрунтованих напрямів його діяльності для досягнення його стратегічної мети – задоволення потреб сільських жителів та учасників сільськогосподарського виробництва в продукції, роботах та послугах; теоретичне обґрунтування механізму диверсифікації діяльності сервісних підприємств, концентрації і спеціалізації, кооперації, засобів маркетингу в сільській місцевості що ґрунтується на взаємовпливі мотиваційної складової освоєння нових ринків, стратегічних позицій сервісних підприємств, альтернативних варіантів розширення напрямів їх діяльності, а також визначення основних підходів щодо реалізації стратегії активізації ін. [3].

На даний час потребують подальшого вивчення особливостей та чинників, що негативно впливають на становлення та розвиток сервісних підприємств у повоєнний період, з метою обґрунтування можливостей їх локалізації і нейтралізації. До основних з яких віднесено відсутність системності у визначенні стратегічної орієнтації сервісних підприємства та застосуванні відповідних маркетингових інструментів, недостатній рівень підготовки менеджерів щодо ефективного управління різними напрямками діяльності сервісних підприємств, низький рівень платоспроможності сільських

споживачів; розробка концептуальної моделі сервісного кластера як регіональної сервісної мережі, ключовим елементом якої вбачається формування ліній взаємопов'язаних процесів диверсифікації, концентрації і спеціалізації, кооперації, засобів маркетингу роздрібної торгівлі та сервісного обслуговування в сільській місцевості для координації діяльності сервісних підприємств різного профілю з метою надання жителям сільської місцевості, сільгосптоваровиробникам комплексного торгово-побутового та сервісного обслуговування; пропозиції щодо необхідності здійснення моніторингу функціонування сервісного кластера, які полягають у ситуаційному аналізі сучасного стану діяльності обслуговуючих сервісних підприємств та середовища їх функціонування, що дасть змогу визначити найбільш перспективні напрями диверсифікації сервісних підприємств. Авторами пропонується здійснити формування парадигми розв'язання воєнно-оборонних проблем та обґрунтовано доцільність формування загальнодержавної концепції відродження сервісної інфраструктури в умовах ОТГ з використання програмування, моделювання та діджетал-інструментарію.

Практична цінність пропозицій та рекомендацій полягає у широких можливостях їх використання для вирішення проблеми формування сервісної інфраструктури та активізації розвитку сервісного обслуговування сільських жителів у повоєнний період, удосконалення організації системи сервісного обслуговування сільськогосподарських товаровиробників в контексті комплементарного розвитку сервісних підприємств що сприятиме їх адаптації до ринкових Європейських умовах.

Пропозиції та рекомендації щодо удосконалення механізму формування і функціонування системи сервісного обслуговування, використані при розробці регіональних програм соціально-економічного розвитку Тернопільської області.

Основні положення статті, що стосуються активізації роботи обслуговуючих підприємств, оптимізації стратегічного планування діяльності підприємств торгівельно-побутового сервісу, економічно обґрунтованого вибору напрямів диверсифікації, концентрації і спеціалізації, кооперації, засобів маркетингу роздрібної торгівлі та сервісного обслуговування в умовах ОТГ (сільській місцевості) й оцінки ефективності розширення діяльності, маркетингового забезпечення реалізації стратегії активізації рекомендовано до впровадження в Тернопільській облспоживспілці інших підприємствах сфери послуг. Теоретичні узагальнення та практичні аспекти становлення системи сервісного, торгівельно-побутового обслуговування використовуються у Тернопільському національному технічному університеті ім. Івана Пулюя, Тернопільському торгово-економічному коледжі при викладанні дисциплін “Основи кооперації”, “Організація бізнесу та підприємництва”, «Менеджмент», “Маркетинг”, комп'ютерних науках ін.. для підготовки студентів з економічних спеціальностей.

Основні положення та результати, викладені в статті, доповідались і пройшли апробацію на семінарах та загально університетських науково-практичних конференціях.

Загалом дослідження проблем удосконалення управління в умовах добровільного об'єднання територіальних громад у контексті повоєнного формування сервісної інфраструктури, відродження сервісних підприємств відповідно вимог і стандартів ЄС з використанням діджетал-інструментарію є як ніколи своєчасною і актуальною та потребує подальших наукових досліджень.

**Література**

1. Андрушків Б. Маргіналізація і глобальні небезпеки економіки /Б. Андрушків, І. Романська // Матеріали тези 15-ої наукової конференції Тернопільського національного технічного університету імені Івана Пулюя, 14-15 грудня 2011 р. – Тернопіль: ТНТУ, 2011. – С.247.
2. Андрушків, Б.М., Погайдак, О. Б., Кирич, Н. Б. та Мельник, Л. М., 2012. Соціальні особливості дослідження механізму реалізації державної інноваційної політики у сфері людського капіталу соціологічними засобами (на прикладі підприємницької діяльності). Соціальні технології: актуальні проблеми теорії та практики, 56, с.136-146.
3. Андрушків, Б.М., Кирич, Н. Б., Погайдак, О. Б. та Шерстюк, Р.П., 2015. Особливості використання державних важелів управління інноватикою суб'єктів господарювання як інструментом підвищення їхньої конкурентоспроможності (Європейські аспекти). Теорія та практика державного управління, 2 (49), с.134 – 143.
4. Крикавський С.В., Гринів Н.Т., Таранський І.П. формування інвестиційних потоків в логістиці підприємства // Доповіді X Міжнар. Наук.-практ. Конф. “Сучасна інноваційно-промислова політика України: інвестиційні пріоритети та інфраструктура”, Чернівці, 6-8 квіт., Т. 1, 1999. 80 с.
5. Кузьмін, О.Є., Мельник, О.Г. та Яструбський, М.Я., 2017. Закономірності гармонійного розвитку та державного регулювання діяльності ВНЗ. Регіональна економіка, 3, с.100-107.
6. Погайдак О. Б. Формування системи управління якістю послуг комунально-побутових підприємств: монографія / О. Б. Погайдак. – Тернопіль : ТзОВ «Терно-граф», 2015. – 438 с.
7. Погайдак О. Б. Основи соціального менеджменту [Теоретичні положення та прикладні механізми] / Б. М. Андрушків, О. Є. Кузьмін, О. Б. Погайдак [та ін.]. – Тернопіль : ТзОВ «Терно-граф», 2007. – 1024 с.
8. В. Ратинський. Особливості використання методу маркетингового дослідження "фокус-група" в глобальній мережі інтернет / В.Ратинський // Галицький економічний вісник. — 2011. — №2(31). — с.179-183 - (маркетингові технології підприємств в сучасному науково-технічному середовищі)

УДК 330.43+336.764.2

В. С. Янішевський, к. ф.-м. н., доц.

Національний університет "Львівська політехніка", Україна

## ФРАКТАЛЬНИЙ БРОУНІВСЬКИЙ РУХ В МОДЕЛЯХ ФІНАНСОВОЇ ІНЖЕНЕРІЇ

V. S. Yanishevskiy, Ph. D., Assoc. Prof.

### FRACTAL BROWNIAN MOTION IN FINANCIAL ENGINEERING MODELS

**Abstract.** The Gaussian measure of fractal Brownian motion (FBM) was analyzed and a one-point probability density based on it and the Fokker-Planck (FP) equation for it were found. A general solution of the FP equation for the conditional probability density of the FBI in the form of a functional integral has been found. Based on the Gaussian measure with a modified covariance, the conditional probability density for the stochastic equation (with the FBI as a base) is determined and presented in the form of a functional integral.

У побудові багатьох стохастичних моделей фінансової інженерії базову роль відіграє броунівський рух [1, 2]. Зокрема геометричний броунівський рух який використовується для моделювання еволюції цін фінансових активів [1]. Розглядаються також моделі на основі фрактального броунівського руху (ФБР) в якості базового [3, 4, 5]. Досліджувались як властивості ФБР так і його застосування для ряду прикладних задач. Зокрема, наведено узагальнення формули Іто для ФБР, на її основі отримано рівняння Фоккера-Планка (ФП) для густини умовної ймовірності. Зазначене рівняння ФП застосовувалося для узагальнення формули Блека-Шоулза для ціни опціону [6, 7].

В даній роботі отримано розв'язок рівняння ФП для густини умовної ймовірності у випадку ФБР у вигляді функціонального інтегралу. Такий же розв'язок отримано з використанням гаусової міри ФБР, при цьому визначена умова, коли знайдені розв'язки співпадають.

ФБР  $B(\tau)$  на часовому інтервалі  $\tau \in [0, t]$  визначають як гаусовий процес з нульовим середнім  $\langle B(\tau) \rangle = 0$  та коваріацією [3, 4, 5]

$$R_H(\tau, s) = \frac{1}{2}(\tau^{2H} + s^{2H} - |\tau - s|^{2H}). \quad (1)$$

На основі (1) отримаємо властивості:  $\langle B(\tau)B(s) \rangle = R_H(\tau, s)$ ,  $\langle B(\tau)^2 \rangle = \tau^{2H}$ . Тут  $s, \tau \in [0, t]$ ,  $0 < H < 1$ . З формули (1) для  $H = \frac{1}{2}$  отримаємо коваріацію для броунівського руху

$$R(\tau, s) = \frac{1}{2}(\tau + s - |\tau - s|) = \min(\tau, s).$$

Відмінною властивістю ФБР, зокрема для  $H > \frac{1}{2}$ , є довгочасова залежність між приростами

$$r(n) = \langle B(1)(B(1+n) - B(1)) \rangle, \sum_{n=1}^{\infty} r(n) \rightarrow \infty.$$

Для броунівського руху ( $H = \frac{1}{2}$ ) отримаємо  $r(n) = 0$  для  $\forall n > 1$ .

Оскільки ФБР є гаусовим процесом з коваріацією (1) йому відповідає гаусова міра. Розглянемо певну дискретну реалізацію процесу ФБР на проміжку  $[0, t]$  і задамо розбиття часового інтервалу ( $0 < t_1 < t_2 < \dots < t_n = t$ ). Цьому розбиттю співставимо випадковий вектор значень ФБР  $\mathbf{B} = (B_1, B_2, \dots, B_n)$ . Тоді густина ймовірності розподілу  $n$ -вимірною випадкового вектора  $\mathbf{B}$  (гаусова міра) визначається виразом

$$\mu(\mathbf{B}) = (2\pi)^{-\frac{n}{2}} \sqrt{\det \hat{R}^{-1}} \exp\left(-\frac{1}{2} \sum_{i,j} B_i \hat{R}_{ij}^{-1} B_j\right). \quad (2)$$

Тут  $R_{ij}^{-1}$  позначають елементи матриці оберненої до коваріаційної матриці  $\hat{R}$ :  $\hat{R} = \| R_{ij} \|$ ,  $i, j = 1 \dots n$ ,  $R_{ij} = R_H(t_i, t_j)$ .

Густину умовної ймовірності для ФБР визначимо на основі міри (2) наступним інтегралом

$$P(B, t) = \int_{-\infty}^{\infty} \mu(\mathbf{B}) \delta(B - B_n) \prod_{i=1}^n dB_i = \frac{1}{\sqrt{2\pi R_H(t)}} e^{-\frac{1}{2} \frac{B^2}{R_H(t)}}, \quad (3)$$

Тут введено позначення для діагональних елементів  $R_H(t) \equiv R_H(t, t) = t^{2H}$  матриці коваріації (1). Очевидно, густина умовної ймовірності (3) задовольняє рівнянню

$$\frac{\partial P(B, t)}{\partial t} = \frac{1}{2} R'_H(t) \frac{\partial^2 P(B, t)}{\partial B^2}. \quad (4)$$

Відомо також, що ФБР не є марківським процесом і також не є мартингалом. Тому для ФБР звичне стохастичне числення як у випадку броунівського руху не застосовне. Для стохастичної величини  $r(\tau)$ , яка задається стохастичним рівнянням [4-7]

$$dr(\tau) = A(r(\tau))d\tau + \Sigma(r(\tau))dB(\tau), \quad (5)$$

для густини умовної ймовірності стохастичного процесу (5) отримано рівняння ФП [3-5]

$$\frac{\partial P(t, r)}{\partial t} = \frac{1}{2} R_{H'}(t) \frac{\partial^2 \Sigma(r)^2 P(t, r)}{\partial r^2} - \frac{\partial A(r)P(t, r)}{\partial r}. \quad (6)$$

У випадку  $A(r(\tau)) = 0$ ,  $\Sigma(r(\tau)) = 1$  ми отримуємо ФБР і рівняння (4). Зрозуміло також, що для  $H = 1/2$  отримаємо  $R_{H'}(t) = 1$  і рівняння ФП (6) переходить у відповідне рівняння для броунівського руху [1, 2].

Розв'язки рівняння (6) розглядалися для ряду випадків стохастичних рівнянь, що є узагальненням рівняння Блека-Шоулза в моделі опціонів [1]. Загальний розв'язок рівняння (6) у вигляді функціонального інтегралу наведено в додатку.

В той же час, рівняння ФП (6) неможливо отримати на основі гаусової міри (2). Для того, щоб встановити відповідну гаусову міру (матрицю  $\hat{R}$ ) пов'язану з рівнянням ФП (6) та його розв'язком (11), запишемо коваріацію (1) у тотожному вигляді

$$R_H(t, s) = \min(R_H(t), R_H(s)) + \frac{1}{2} (|R_H(t) - R_H(s)| - R_H(|t - s|)),$$

де  $R_H(t) = t^{2H}$ .

Покажемо, що рівняння ФП (6) відповідає стохастичному процесу з коваріацією

$$\tilde{R}_H(t, s) = \min(R_H(t), R_H(s)). \quad (7)$$

Для цього використаємо гаусову міру записану через прирости ФБР  $dB = \{B_1, B_2 - B_1, \dots, B_n - B_{n-1}\}$ . Тоді для відповідної матриці гаусової міри отримаємо

$$(\delta^2 \tilde{R})_{ij} = R'_H(t_{i-1}) dt_i \delta_{ij}, \quad (i, j \in 1, \dots, n).$$

В результаті гаусову міру для стохастичного процесу з коваріацією (7) запишемо у вигляді

$$\tilde{\mu}(d\mathbf{B}) = \prod_{i=1}^n \frac{dB_i}{\sqrt{2\pi R'_H(t_{i-1}) dt_i}} \exp\left(-\frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \frac{dB_i^2}{R'_H(t_{i-1}) dt_i}\right). \quad (8)$$

Відповідно у границі  $n \rightarrow \infty$ ,  $\max(dt_i) \rightarrow 0$  в неперервному випадку міру (8) запишемо у вигляді

$$d\tilde{\mu}(B) = \mathcal{D}_H B(\tau) \exp\left(-\frac{1}{2} \int_0^t \left(\frac{B(\tau)}{d\tau}\right)^2 \frac{d\tau}{R'_H(\tau)}\right), \quad \mathcal{D}_H B(\tau) = \prod_{\tau} \frac{dB(\tau)}{\sqrt{2\pi R'_H(\tau) d\tau}}. \quad (9)$$

Очевидно, що у випадку  $H = \frac{1}{2}$  міра (9) співпадає з мірою Вінера для броунівського руху. Таким чином, коваріація (7) задає стохастичний процес з властивостями:  $\langle B(\tau)B(s) \rangle = \min(R_H(t), R_H(s))$ ,  $\langle B(\tau)^2 \rangle = R_H(t)$ . Прирости стохастичного процесу незалежні  $\langle (B(s_2) - B(s_1))(B(t_2) - B(t_1)) \rangle = 0$ ,  $s_1 < s_2 < t_1 < t_2$ , і відповідно  $\langle dB(t)^2 \rangle = R'_H(t) dt$ .

На основі міри (9) можна побудувати міру для стохастичного процесу  $r(\tau)$  стохастичного рівняння (5) способом наведеним у [8]. Виконуючи необхідні обчислення

(деталі див. також в [8]) для густини ймовірності отримаємо представлення функціональним інтегралом, який наведений в формулах (11), (12) і (13). Таким чином рівняння ФП (6) відповідає наближенню (7) для коваріаційної матриці фрактального броунівського руху.

### Додаток

Рівняння (11) перепишемо виконуючи заміну часової змінної  $\tau = R_H(t)$ . Тоді рівняння (11) запишемо в залежності від "часової змінної"  $\tau$  у вигляді

$$\frac{\partial \tilde{P}(r, \tau)}{\partial \tau} = \frac{1}{2} \frac{\partial^2 \Sigma(r)^2 \tilde{P}(r, \tau)}{\partial r^2} - \frac{\partial \tilde{A}(r, \tau) \tilde{P}(r, \tau)}{\partial r}, \quad (10)$$

де позначено  $\tilde{P}(r, \tau) = P(r, t)$ ,  $\tilde{A}(r, \tau) = \frac{A(r)}{2H\tau^{1-2H}}$ . Розв'язок рівняння ФП (10) на часовому інтервалі  $[0, \tau]$  (відповідає інтервалу  $[0, t]$ ), розглядаємо випадок  $\frac{1}{2} < H < 1$  у формі функціонального інтегралу знайдений у [8].

Повертаючись до часової змінної  $t$  отримаємо вираз для розв'язку рівняння Фоккера-Планка (6) для густини ймовірності у вигляді функціонального інтегралу

$$P(r, r_0, t) = \sqrt{\frac{\Sigma(r_0)}{\Sigma(r)^3}} \int_{r_0}^r \mathcal{D}r(\tau) \exp\left(-\frac{1}{2} \int_0^t \frac{(\dot{r}(\tau) - A(r(\tau)))^2}{R'_H(\tau) \Sigma(r(\tau))^2} d\tau - \int_0^t u(r(\tau)) d\tau\right), \quad (11)$$

де  $u(r(\tau)) = \frac{1}{2} A'(r(\tau)) - A(r(\tau)) \frac{\Sigma'(r(\tau))}{\Sigma(r(\tau))} + R'_H(\tau) \frac{1}{8} (\Sigma'(r(\tau))^2 - 2\Sigma(r(\tau))\Sigma''(r(\tau)))$ , (12)

а також елемент міри в (11) рівний

$$\tilde{\mathcal{D}}r(\tau) = \prod_{\tau} \frac{dr(\tau)}{\sqrt{2\pi R'_H(\tau) \Sigma(r(\tau))^2 d\tau}}. \quad (13)$$

### Література

1. Yuh-Dauh Lyuu. Financial Engineering and Computation: Principles, Mathematics, and Algorithms. Cambridge University Press, 648 p. (2004).
2. C. Gardiner. Handbook of Stochastic Methods - For Physics, Chem, Nat. Sciences. Springer, 417 p. (2004).
3. Umarov Sabir, Hahn Marjorie G. Kobayashi Kei. Beyond the triangle: Brownian motion, Ito calculus, and Fokker-Planck equation: fractional generalizations. World Scientific Publishing Co. Pte. Ltd., 177 p. (2018).
4. Ivan Nourdin. Selected Aspects of Fractional Brownian Motion. Springer-Verlag Italia, 133 p. (2012).
5. Nualart D. The Malliavin Calculus and Related Topics. 2nd edition, Probability and its Applications, Springer-Verlag, Berlin, 381 p. (2006).
6. A. A. Araneda. The fractional and mixed-fractional CEV model. Journal of Computational and Applied Mathematics **363**: pp. 106–123 (2020).
7. Axel A. Araneda. European option pricing under generalized fractional Brownian motion. Preprint arXiv:2108.12042v1[q-fin.MF] (2021)
8. Yanishevskiy V. S., Baranovska S. P. Path integral method for stochastic equations of financial engineering. Mathematical Modeling and Computing, 9 (1), 166–177 pp. (2022).

## ЗМІСТ

ВІД ФІЛІАЛУ ЛЬВІВСЬКОГО ПОЛІТЕХНІЧНОГО ІНСТИТУТУ ДО 57  
 ТЕРНОПІЛЬСЬКОГО НАЦІОНАЛЬНОГО ТЕХНІЧНОГО УНІВЕРСИТЕТУ  
 ІМЕНІ ІВАНА ПУЛЮЯ

**Б. Будзан.** 7  
 СПОГАД ПРО ЛЮДИНУ, КОТРА ЗАЛИШИЛА ТЕПЛІЙ СЛІД У МОЇЙ  
 ПАМ'ЯТІ

**О. Герман** 9  
 ЗОРЯ ОЛЕГА ШАБЛІЯ

**Я. Компан** 11  
 НЕЗАБУТНЄ  
 ПРО ОЛЕГА МИКОЛАЙОВИЧА ШАБЛІЯ

**О. Децик** 12  
 ПАМ'ЯТІ АКАДЕМІКА ОЛЕГА ШАБЛІЯ

## ПЛЕНАРНЕ ЗАСІДАННЯ

1 **С.Ф. Дячук** 13  
 ОЛЕГ ШАБЛІЙ – ЗАСНОВНИК УНІВЕРСИТЕТУ ПУЛЮЯ

2 **Р.М. Кушнір, Г.Т. Сулим, Я.М. Пастернак** 16  
 МЕТОД ГРАНИЧНИХ ЕЛЕМЕНТІВ ДЛЯ АНАЛІЗУ  
 ТЕРОМАГНІТОЕЛЕКТРОПРУЖНИХ ТІЛ ІЗ НИТКОВИМИ  
 НЕОДНОРІДНОСТЯМИ

3 **М.С. Михайлишин, Г.М. Семенишин.** 19  
 УЗАГАЛЬНЕННЯ ФІЗИЧНИХ СПІВВІДНОШЕНЬ ДЕФОРМАЦІЙНОЇ  
 ТЕОРІЇ ТЕРМОПЛАСТИЧНОСТІ НА ВИПАДОК ВРАХУВАННЯ  
 РОЗВАНТАЖЕННЯ.

## СЕКЦІЯ 1

ПЕРСПЕКТИВНІ МОДЕЛІ І МЕТОДИ МЕХАНІКИ ДЕФОРМІВНОГО  
 ТВЕРДОГО ТІЛА

1 **M. Petryk, D. Mychalyk, I. Boyko, O. Petryk, L. Romanovska,** 25  
**V. Stefanyshyn**  
 MODELLING AND ANALYSIS OF FILTRATION IN THE MEDIA OF  
 MULTIDIMENSIONAL NANOPOROUS PARTICLES

2 **R. Tkachuk, P. Tymkiv** 28  
 PROBLEMS OF MODELING LOW-INTENSITY ELECTRORETINAL SIGNAL  
 FOR ASSESSING THE RISKS OF NEUROTOXICATION



- 3 **В.А. Андрійчук, М.І. Котик, Л.М. Костик, М.С. Наконечний, Я.М. Осадца, Я.О. Філюк** 33  
МАТЕМАТИЧНА МОДЕЛЬ РУХОМОГО ОПРОМІНЮВАЛЬНОГО ПРИБОРУ.
- 4 **Ю.Б. Гладь** 36  
ОРТОГОНАЛЬНІСТЬ ВЛАСНИХ ФОРМ КОЛИВАНЬ ДЛЯ ПРУЖНОЇ СИСТЕМИ "БАЛКА - КАНАТИ - ЗОСЕРЕДЖЕНА МАСА"
- 5 **М.І. Ігнатишин, Я.М. Пелех, М.С. Михайлишин** 38  
ДОСЛІДЖЕННЯ ТА АНІМАЦІЯ НЕЛІНІЙНОГО ПРУЖНОГО ГАСНИКА КОЛИВАНЬ
- 6 **В.В. Крупа, В.Р. Кобельник, Н.М. Тимошенко, І.Р. Петречко** 41  
МАТЕМАТИЧНА МОДЕЛЬ ВПЛИВУ СТОХАСТИЧНОСТІ ПОДАЧІ НА ВЕЛИЧИНУ СИЛИ РІЗАННЯ В ІМОВІРНІСНОМУ АСПЕКТІ
- 7 **І.В. Луців, В.Н. Волошин, І.Г. Лось** 43  
РОЗРАХУНОК НАПРУЖЕНО-ДЕФОРМОВАНОГО СТАНУ ЗАТИСКНОГО КУЛАЧКА З АДАПТИВНИМИ ВЛАСТИВОСТЯМИ
- 8 **М. Підгурський, М. Сташків, І. Підгурський** 45  
МОДЕЛЮВАННЯ РОСТУ ТРИЩИНІ У ПЕРЕТИНІ ДВОТАВРОВОЇ БАЛКИ
- 9 **М.В. Приймак, Б.Б. Млинко** 48  
ПЕРІОДИЧНІ ЛАНЦЮГИ МАРКОВА ТА ЇХ ВИКОРИСТАННЯ В ЗАДАЧАХ ЕЛЕКТРОЕНЕРГЕТИКИ
- 10 **М.В. Приймак** 51  
ПЕРІОДИЧНІ ФУНКЦІЇ ЗІ ЗМІННИМ ПЕРІОДОМ ТА ОРТОГОНАЛЬНІ СИСТЕМИ ТАКИХ ФУНКЦІЙ
- 11 **С.В. Ротко, В.В. Шваб'юк, А.Б. Мікуліч** 55  
РОЗРАХУНОК КОМПЗИТНИХ СТРИЖНІВ НА СТІЙКІСТЬ ЗА НЕКЛАСИЧНОЮ МОДЕЛЛЮ ЗГИНУ
- 12 **В.І. Яськів, М.П. Дивак, А.В. Яськів** 58  
МОДЕЛЮВАННЯ ТА ЧИСЕЛЬНА ОПТИМІЗАЦІЯ ПИТОМИХ ХАРАКТЕРИСТИК ОСЕРДЬ ВИСОКОЧАСТОТНИХ МАГНІТНИХ ПІДСИЛЮВАЧІВ ПРИ ПОБУДОВІ УНІФІКОВАНОГО РЯДУ ПЕРЕТВОРЮВАЧІВ НАПРУГИ

## СЕКЦІЯ 2

## ЗАДАЧІ ФОРМОУТВОРЕННЯ ОБОЛОНКОВИХ КОНСТРУКЦІЙ СКЛАДНОЇ ФОРМИ

- 1 **О.Р. Гачкевич, М.Г. Гачкевич** 62  
МЕТОДИКА ОПТИМІЗАЦІЇ ВІДНОСНО НАПРУЖЕНОГО СТАНУ РЕЖИМІВ ТЕХНОЛОГІЧНОГО НАГРІВУ КУСКОВО-ОДНОРІДНИХ СКЛЯНИХ ОБОЛОНОК У ВИРОБНИЧИХ ПРОЦЕСАХ
- 2 **Г.В. Козбур, О.К. Шкодзінський, І.Р. Козбур** 65  
МАТЕМАТИЧНА МОДЕЛЬ ДІАГРАМИ ДЕФОРМУВАННЯ ПЛАСТИЧНИХ МАТЕРІАЛІВ ЗА СКЛАДНОНАПРУЖЕНОГО СТАНУ
- 3 **В.А. Кривень** 68  
МІРА НЕПАРАБОЛІЧНОСТІ ПОВЕРХНІ, БЛИЗЬКОЇ ДО ПАРАБОЛОЇДА ОБЕРТАННЯ
- 4 **М. І. Махоркін, І. М. Махоркін** 70  
ВИЗНАЧЕННЯ ОСОБЛИВОСТЕЙ НАПРУЖЕНЬ В ОРТОТРОПНОМУ КОМПОЗИТНОМУ КЛИНІ ЗА АНТИПЛОСКОЇ ДЕФОРМАЦІЇ
- 5 **Р. Михайлишин, М. Михайлишин, Ф. Духон, М. Келемен, А. Масвич Фей, Д. Сяо** 73  
ПРОБЛЕМИ МОДЕЛЮВАННЯ ПРОЦЕСУ МАНІПУЛЮВАННЯ ГНУЧКИХ ОБ'ЄКТІВ В РОБОТОТЕХНІЦІ
- 6 **М.І. Пилипець, А.П. Грабовський** 76  
ДОСЛІДЖЕННЯ НАПРУЖЕНО-ДЕФОРМІВНОГО СТАНУ ФОРМОУТВОРЕННЯ ГВИНТОВИХ ЗАГОТОВОК
- 7 **Ю.І. Пиндус, Т.Б. Пиндус, Б.Г. Шелестовський** 79  
ТИСК ПРУЖНОГО ГАРЯЧОГО ШТАМПА НА ІЗОТРОПНИЙ ШАР ПРИ НЕІДЕАЛЬНОМУ ТЕПЛОВОМУ КОНТАКТІ
- 8 **Г.Т. Сулим, Й.З. Піскозуб** 82  
СТРУКТУРНО-МОДУЛЬНИЙ МЕТОД ФУНКЦІЙ СТРИБКА ДОСЛІДЖЕННЯ ДЕФОРМУВАННЯ КОМПОЗИТНИХ СТРУКТУР З ТОНКИМИ СТРІЧКОВИМИ ВКЛЮЧЕННЯМИ
- 9 **М.І. Яворська, Т.С. Дубиняк, О.С. Манзій, С.К. Андрейчук** 85  
ДОСЛІДЖЕННЯ ПРОЦЕСУ ТА ЗАДАЧІ, ЩО ВИНИКАЮТЬ ПРИ УТВОРЕННІ ОБОЛОНОК МЕТОДОМ ЕЛЕКТРОДУГОВОГО НАПИЛЕННЯ

**СЕКЦІЯ 3****ТЕРМОМЕХАНІКА ЗВАРНИХ З'ЄДНАНЬ**

- |   |  |     |
|---|--|-----|
| 1 | <b>М.С. Михайлишин, В.Я. Гаврилюк, Ч.В. Пулька</b><br>ФОРМУВАННЯ НАПЛАВЛЕНОЇ ПОВЕРХНІ ПІД ВПЛИВОМ<br>ВІДЦЕНТРОВОГО ОБЕРТОВОГО РУХУ   | 88  |
| 2 | <b>М.С. Михайлишин, Н.Б. Гащин, Ю.Б. Гладь, Б.В. Хоміцький</b><br>ТЕРМІЧНЕ З'ЄДНАННЯ ЦИЛІНДРИЧНИХ ОБОЛОНОК   | 91  |
| 3 | <b>М. Паламар, М. Яворська, Ю. Апостол, Ю. Наконечний</b><br>МОДЕЛЮВАННЯ ПРОЦЕСУ ФОРМУВАННЯ ОБОЛОНКИ РЕФЛЕКТОРА<br>ГАЗОТЕРМІЧНИМ НАПИЛЕННЯМ  | 93  |
| 4 | <b>О.В. Прохоренко, В.М. Прохоренко, Ч.В. Пулька, В.С. Сенчишин</b><br>ЧИСЛОВЕ МОДЕЛЮВАННЯ НАПРУЖЕНОГО СТАНУ З УРАХУВАННЯМ<br>КІНЕТИКИ ФАЗОВИХ ПЕРЕТВОРЕНЬ У СТИКОВОМУ З'ЄДНАННІ ЗІ<br>СТАЛІ DC04 ДЛЯ РІЗНИХ ТЕХНОЛОГІЧНИХ СХЕМ ЗВАРЮВАННЯ | 95  |
| 5 | <b>Ч.В. Пулька, М.С. Михайлишин, В.С. Сенчишин, І.Б. Окіпний, М.В. Шарик, В.Я. Гаврилюк</b><br>ВИКОРИСТАННЯ МАТЕМАТИЧНОГО МОДЕЛЮВАННЯ ПРИ<br>РОЗРОБЛЕННІ НОВИХ ТЕХНОЛОГІЧНИХ ПРОЦЕСІВ ІНДУКЦІЙНОГО<br>НАПЛАВЛЕННЯ                          | 98  |
| 6 | <b>М.Г. Стащук, П.Я. Пукач, М.І. Ігнатишин, Р.С. Громяк</b><br>ЕЛЕКТРОДНИЙ ПОТЕНЦІАЛ В ЕЛЕМЕНТІ ЗВАРНОГО ШВА ВЗДОВЖ<br>ТВІРНОЇ БАЛОНУ, ЗАПОВНЕНОГО ВОДЕНЬВМІСНИМ СЕРЕДОВИЩЕМ   | 101 |
| 7 | <b>Л.І. Цимбалюк</b><br>ТРИВИМІРНИЙ РОЗПОДІЛ ЗВАРЮВАЛЬНИХ ЗАЛИШКОВИХ<br>НАПРУЖЕНЬ У ПЛАСТИНІ З КРУГОВИМ ШВОМ   | 105 |

**СЕКЦІЯ 4****ПРИКЛАДНІ ЗАСТОСУВАННЯ МЕХАНІКИ В ЗАДАЧАХ  
ЕНЕРГОЗБЕРЕЖЕННЯ**

- |   |   |     |
|---|---|-----|
| 1 | <b>С.М. Балабан, В. Б. Каспрук</b><br>ПРО ОСОБЛИВОСТІ МОДЕЛІ РОЗРАХУНКУ ОПТИМАЛЬНОГО РЕЖИМУ<br>РЕКУПЕРАЦІЇ ТЕПЛА ВІДПРАЦЬОВАНИХ ТЕХНОЛОГІЧНИХ ГАЗІВ | 108 |
| 2 | <b>І.О. Баран</b><br>МАТЕМАТИЧНЕ МОДЕЛЮВАННЯ ТЕПЛОВИХ ПРОЦЕСІВ У<br>БАГАТОКОМПОНЕНТНИХ ОБЛАСТЯХ ІЗ НЕІДЕАЛЬНИМ КОНТАКТОМ                            | 111 |
| 3 | <b>В.В. Батюк, М.І. Паламар.</b><br>АЛГОРИТМ ПІДВИЩЕННЯ ТОЧНОСТІ ВИМІРЮВАНЬ МОБІЛЬНОЇ<br>РОБОТИЗОВАНОЇ ПЛАТФОРМИ                                    | 113 |

4	<b>В.В. Васильків, Л.М. Данильченко, Д.Л. Радик</b> МАТЕМАТИЧНЕ МОДЕЛЮВАННЯ ПРОЦЕСІВ КРИСТАЛІЗАЦІЇ ВИЛИВОК	116
5	<b>Н.Б. Гащин</b> ЕНЕРГОЗБЕРІГАЮЙЙ ВАРІАНТ ТЕХНОЛОГІЇ ТЕРМІЧНОГО З'ЄДНАННЯ	119
6	<b>Н.Р. Крива, Г.М. Семенишин</b> РОЗРАХУНОК СПІРАЛЕПОДІБНОГО НАГРІВАЧА	121
7	<b>О. Король, Б. Береженко, О. Гурик</b> РОЗРАХУНОК ПИТОМОЇ ПОТУЖНОСТІ ТЕПЛОВИХ ДЖЕРЕЛ ПРИ ІНДУКЦІЙНИМ НАГРІВАННІ ЦИЛІНДРИЧНИХ ДЕТАЛЕЙ	123
8	<b>В.М. Михайлишин.</b> ОПТИМАЛЬНЕ КЕРУВАННЯ НАГРІВАННЯМ ТОНКИХ КРУГЛИХ ДИСКІВ З МЕТОЮ СТВОРЕННЯ ЗАДАНОГО ТЕМПЕРАТУРНОГО ПОЛЯ ПРИ ОБМЕЖЕННЯХ НА НАПРУЖЕННЯ	126
9	<b>Б.Я. Оробчук, І.М. Сисак, Я.М. Осадца, В.П. Коваль, С.М. Бабюк</b> ЕНЕРГООЩАДНА ІНТЕЛЕКТУАЛЬНА СИСТЕМА КЕРУВАННЯ МЕХАНІЧНОЮ СИСТЕМОЮ	128
10	<b>Ч.В. Пулька, М.С. Базар, Р.В. Комар, Віт.С. Сенчишин, В.В. Допик, М.Р. Войціховський</b> ЗАСТОСУВАННЯ МАТЕМАТИЧНОГО МОДЕЛЮВАННЯ ПРИ РОЗРОБЛЕННІ ЕНЕРГООЩАДНИХ ОПАЛЮВАЛЬНИХ СИСТЕМ	131
11	<b>І.Я. Стадник, Н.М. Зварич, О.М. Пилипець, В.Я. Ворошук</b> ТЕРМОДИНАМІЧНИЙ АНАЛІЗ ЕНЕРГЕТИЧНИХ РЕСУРСІВ	134
12	<b>Д.П. Часов, В.О. Бейгул, Н.О. Захаров</b> ДОСЛІДЖЕННЯ ЕНЕРГОЄМНОСТІ ГВИНТОВОГО КОНВЕЄРА ПРИ ТРАНСПОРТУВАННІ ВІДХОДІВ МЕХАНІЧНИХ ПІДПРИЄМСТВ ТА ПРОДУКТІВ АРГОТЕХНІЧНОЇ СФЕРИ	136

## СЕКЦІЯ 5

### ЕКОНОМІКО-МАТЕМАТИЧНІ МЕТОДИ І МОДЕЛІ

1	<b>В.В. Вітлінський, Л.Л. Маханець</b> МОДЕЛЮВАННЯ ЕКОНОМІЧНИХ СИСТЕМ В УМОВАХ ПІДВИЩЕНОГО РИЗИКУ	138
2	<b>М.І. Ігнатишин, О.В. Максютова, Н.М. Стащук</b> МАТЕМАТИЧНИЙ АНАЛІЗ ТРЕЙДИНГУ НА КРИПТОВАЛЮТНОМУ РИНКУ	140

- |   |   |     |
|---|---|-----|
| 3 | <p><b>Б.М. Маркович, Т.С. Дубиняк, О.С. Манзій, А.П. Сеник, Ю.В. Футрик</b><br/>                 ІНФОРМАЦІЙНА ВЕБОРІЄНТОВАНА СИСТЕМА СТВОРЕННЯ ТА<br/>                 АНАЛІЗУ ІНВЕСТИЦІЙНОГО ПОРТФЕЛЯ</p>  | 143 |
| 4 | <p><b>В.В. Пастернак</b><br/>                 ОСОБЛИВОСТІ МОДЕЛЮВАННЯ МЕТОДАМИ STARUML</p>  | 146 |
| 5 | <p><b>Н.М. Різник, А. Парушевські</b><br/>                 АНАЛІЗ ТА МОДЕЛЮВАННЯ ФІНАНСОВО-ЕКОНОМІЧНИХ<br/>                 ПОКАЗНИКІВ ПІДПРИЄМСТВ З ВИКОРИСТАННЯМ ВІДКРИТИХ<br/>                 ІНФОРМАЦІЙНИХ БАЗ ДАНИХ</p>   | 148 |
| 6 | <p><b>Р.П. Шерстюк, Б.М. Андрушків, В.В. Ратинський, О.Б. Погайдак, Н.Б. Кирич</b><br/>                 ДІДЖИТАЛ-ІНСТРУМЕНТАРІЙ ВІДРОДЖЕННЯ СЕРВІСНОЇ<br/>                 ІНФРАСТРУКТУРИ В УМОВАХ ОБ'ЄДНАННЯ ТЕРИТОРІАЛЬНИХ<br/>                 ГРОМАД У ПОВОЄННИЙ ПЕРІОД НАБЛИЗИТЬ ЕКОНОМІКУ УКРАЇНИ<br/>                 ДО ЄВРОПЕЙСЬКИХ СТАНДАРТИВ</p> | 151 |
| 7 | <p><b>В.С. Янішевський</b><br/>                 ФРАКТАЛЬНИЙ БРОУНІВСЬКИЙ РУХ В МОДЕЛЯХ ФІНАНСОВОЇ<br/>                 ІНЖЕНЕРІЇ</p>  | 157 |

Міністерство освіти і науки України  
Тернопільський національний технічний університет імені Івана Пулюя,  
Львівський національний університет імені Івана Франка, Інститут прикладних  
проблем механіки і математики ім. Я.С.Підстригача НАН України, Інститут  
електрозварювання ім.Є.О.Патона НАН України, Інститут кібернетики імені  
В.М. Глушкова НАН України, Київський національний економічний університет  
імені Вадима Гетьмана, Луцький національний технічний університет,  
Жешувський технологічний університет (Польща), Технологічний Університет в  
Братиславі (Словаччина), Технологічний університет в Кошице (Словаччина),  
Вустерський Політехнічний Інститут (Сполучені Штати Америки), Техаський  
Університет в Остіні (Сполучені Штати Америки), Університет Тарту (Естонія),  
Політехніка Білостоцька (Польща)

# МАТЕМАТИЧНІ МЕТОДИ ТА МОДЕЛІ ТЕХНІЧНИХ І ЕКОНОМІЧНИХ СИСТЕМ

## МІЖНАРОДНА НАУКОВО-ТЕХНІЧНА КОНФЕРЕНЦІЯ

*присвячена пам'яті професора Шаблія Олега Миколайовича  
та 60-ти річчю кафедри теоретичної механіки.*

22–23 листопада 2022 р.  
УКРАЇНА  
ТЕРНОПІЛЬ - 2022

Математичні методи та моделі технічних і економічних систем міжнародна науково-технічна конференція присвячена пам'яті професора Шаблія Олега Миколайовича та 60-ти річчю кафедри теоретичної механіки. (Тернопіль, 22–23 листопада 2022.) / М-во освіти і науки України, Терн. націон. техн. ун-т ім. І. Пулюя [та ін]. – Тернопіль: ФОП Паляниця В. А., 2022. – 166 с.

**ISBN 978-617-7875-44-3**

Підписано до друку 18.11.2022. Формат 60×90, 1/16.  
Друк лазерний. Папір офсетний. Гарнітура TimesNewRoman.  
Умовно–друк. арк. 9,0. Наклад – 100 прим.  
Замовлення № 18112022

\*\*\*\*\*

Друк ФОП Паляниця В. А.  
Свідоцтво ДК №4870 від 20.03.2015 р.  
м. Тернопіль, вул. Б. Хмельницького, 9а, оф.38.  
тел. (0352) 528–777.



*«Досі вважалося, що вищий навчальний заклад повинен лише давати якісну освіту, але час показав хибність таких односторонніх поглядів. Тільки багатогранне розкриття й удосконалення особистості стає гарантією її гармонійного утвердження.»*

Шаблій О., Луців І., Герман О. Навчити, виховати, оздоровити, або триєдина модель формування молоді генерції української технічної інтелігенції: Науково-практичне видання. – Тернопіль: «Воля», 2007. – 28 с.

## **Трудова діяльність О.М. Шаблія**

11.1961р. – 09.1964р. - асистент, старший викладач, доцент кафедри теоретичної механіки Тернопільського філіалу Львівського політехнічного інституту.

11.1964 р. – присвоєно науковий ступінь кандидата фізико-математичних наук.

03.1966 – присвоєно вчене звання доцента кафедри теоретичної механіки.

09.1964р. – 10.1985 р. завідувач кафедри теоретичної механіки Тернопільського філіалу Львівського політехнічного інституту.

11.1974 р. – присвоєно науковий ступінь доктора фізико-математичних наук.

03.1976 р. - присвоєно вчене звання професора кафедри теоретичної механіки.

10. 1985 - 03.1991 – директор Тернопільського філіалу Львівського політехнічного інституту.

03.1991 – 03.1995 – ректор Тернопільського приладобудівного інституту

03.1995 – 01.1997 - ректор Тернопільського приладобудівного інституту імені Івана Пулюя

01.1996 – присвоєно Почесне звання «Заслужений діяч науки і техніки України»

01.1997 – 03.2007 - ректор Тернопільського державного технічного університету імені Івана Пулюя.

03.2007-12.2009 - проректор по зв'язках з виробництвом Тернопільського державного технічного університету імені Івана Пулюя.

12.2009 – 03.2011 - проректор по зв'язках з виробництвом Тернопільського національного технічного університету імені Івана Пулюя.

03.2011 – 04.2015р. – радник ректора Тернопільського національного технічного університету імені Івана Пулюя.