МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ
ТЕРНОПІЛЬСЬКИЙ НАЦІОНАЛЬНИЙ ТЕХНІЧНИЙ УНІВЕРСИТЕТ
ІМЕНІ ІВАНА ПУЛЮЯ

КАФЕДРА КОМП'ЮТЕРНИХ НАУК

МЕТОДИЧНІ ВКАЗІВКИ
до лабораторних занять з курсу

ТЕОРІЯ ЙМОВІРНОСТЕЙ, ІМОВІРНІСНІ ПРОЦЕСИ ТА МАТЕМАТИЧНА СТАТИСТИКА
(модуль 1)

для студентів спеціальностей
- ✓ *122 - комп’ютерні науки*
- ✓ *126 – інформаційні системи та технології*

(рівень вищої освіти – бакалавр)

ТЕРНОПІЛЬ
2022

Методичні вказівки до лабораторних занять з курсу “Теорія ймовірностей, імовірнісні процеси та математична статистика”. Модуль 1 / М. Є. Фриз, Б. Б. Млинко. – Тернопіль: Вид-во ТНТУ імені І. Пулюя, 2022. – 14 с.

Укладачі: канд. техн. наук, доц. Фриз М.Є.
канд. техн. наук, доц. Млинко Б.Б.

Рецензент докт. техн. наук, проф. Пастух О.А.

Розглянуто та затверджено на засіданні кафедри комп’ютерних наук Тернопільського національного технічного університету імені Івана Пулюя. Протокол №1 від 30 серпня 2022 р.

Схвалено та рекомендовано до друку на засіданні методичної комісії факультету комп'ютерно-інформаційних систем та програмної інженерії Тернопільського національного технічного університету імені Івана Пулюя. Протокол №1 від 07 вересня 2022 р.

Відповідальний за випуск: Боднарчук І.О.

ЗМІСТ

ВСТУП

Дисципліна «Теорія ймовірностей, ймовірнісні процеси та математична статистика» викладається у третьому та четвертому семестрах і є однією з найважливіших для спеціальностей Комп'ютерні науки та Інформаційні системи та технології. Основними галузями застосування методів, що вивчаються є інформаційні технології аналізу даних, штучний інтелект, машинне навчання, опрацювання сигналів та зображень, інформаційні системи аналізу інтернет-трафіку, технології аналізу та прогнозування в економіці, соціології, бізнес-аналітиці, біомедицині, екології та ін. Курс включає лекційний матеріал і лабораторні заняття.

У третьому (осінньому) семестрі вивчається перша частина дисципліни – Теорія ймовірностей, тому лабораторні заняття, в основному, є пов'язаними з розв'язуванням задач. Однак, формат лабораторних занять дозволяє працювати студентам у формі загальної дискусії або у малих групах із подальшим обговоренням результатів, що загалом є більш ефективним способом набуття потрібних загальних та фахових компетенцій, ніж при тільки індивідуальній роботі.

Кожне лабораторне заняття оцінюється від 0 до 2 балів. Враховується активність студента на занятті, участь у роботі малих груп та дискусіях, оцінюється здатність логічно мислити, аргументувати свою точку зору, вести дискусію, розв'язувати практичні завдання самостійно та у малих групах, виступати з презентаціями, оперувати теоретичним матеріалом, пояснювати результати колегам, обгрунтовувати висновки.

ЛАБОРАТОРНЕ ЗАНЯТТЯ №1

ВИПАДКОВІ ПОДІЇ. ОПЕРАЦІЇ НАД ПОДІЯМИ

Мета заняття: *набуття навиків розв'язування задач, що стосуються операцій над випадковими подіями.*

Завдання, запропоновані викладачем розв'язуються на занятті студентами індивідуально, а також у формі загальної дискусії або у малих групах. Крім теоретичного матеріалу, поданого на відповідній лекції, до заняття потрібно пригадати теоретичні відомості з Теорії множин (Курс Дискретна математика).

Далі наведено **приклади задач**.

Приклад 1. Маємо події: A - хоча б один з контрольованих приладів бракований, B - всі прилади якісні. Що означають події: $A \bigcup B$, AB?

Подія $A \bigcup B$ означає, що або всі прилади якісні або хоча б один бракований. Очевидно, що це завжди буде мати місце. Тобто, $A \bigcup B = \Omega$ - достовірна подія.

Подія AB полягає у тому, що одночасно і всі прилади якісні, і хоча б один бракований, а це неможливо, тому $AB = \varnothing$ - неможлива подія.

Приклад 2. З таблиці випадкових чисел навмання взято одне число. Розглянемо випадкові події: A - взяте число ділиться на 5, B - взяте число закінчується нулем. Що означають події: $A \setminus B$, $A\overline{B}$?

Подія $A \setminus B$ означає, що взяте число ділиться на 5, але не закінчується нулем, тобто $A \setminus B$ - вибране число закінчується цифрою 5. Подія $A\overline{B}$ означає, що вибране число ділиться на 5 і не закінчується нулем, тобто $A\overline{B}$ - число закінчується цифрою 5.

Приклад 3. Чи сумісні події A і $\overline{A \bigcup B}$?

$\overline{A \bigcup B} = \overline{A} \cdot \overline{B}$ (правило де Моргана з теорії множин). Тому $A \cdot \overline{A \bigcup B} = A \cdot \overline{A} \cdot \overline{B} = \varnothing \bigcap \overline{B} = \varnothing$. Звідси виходить, що задані події несумісні.

Приклад 4. Корабель має один рульовий пристрій, чотири котли і дві турбіни. Нехай подія A - справний рульовий пристрій, $B_k(k=\overline{1,4})$ - справний k-ий котел, $C_j(j=\overline{1,2})$-справна j-а турбіна. Подія D - судно кероване, коли справний рульовий пристрій, хоча б один котел і хоча б одна турбіна. Виразити події D і $\overline{D}$ через A, B_k, C_j.

Нехай, подія B - справний хоча б один котел. Для того щоб був справний хоча б один котел достатньо щоб був справний або перший, або другий, або третій, або четвертий котел, тому $B = B_1 \cup B_2 \cup B_3 \cup B_4$. Аналогічно, якщо подія C - справна хоча б одна турбіна, то $C = C_1 \cup C_2$. З умови задачі зрозуміло також, що $D = ABC = A(B_1 \cup B_2 \cup B_3 \cup B_4)(C_1 \cup C_2)$.

Подія $\overline{D}$ - судно некероване, коли не працює або рульовий пристрій ($\overline{A}$) або одночасно всі чотири котли ($\overline{B}_1\overline{B}_2\overline{B}_3\overline{B}_4$) або обидві турбіни ($\overline{C}_1\overline{C}_2$), тому $\overline{D} = \overline{A} \cup \overline{B}_1\overline{B}_2\overline{B}_3\overline{B}_4 \cup \overline{C}_1\overline{C}_2$.

Приклад 5. Прилад складається з двох блоків першого типу і трьох блоків другого типу. Події: $A_k(k=\overline{1,2})$ - справний k-ий блок першого типу, $B_j(j=\overline{1,3})$ - справний j-ий блок другого типу. Прилад працює (подія C), коли справні хоча б один блок першого типу і не менше двох блоків другого типу. Виразити подію C через A_k і B_j.

Очевидно, що коли подія A - справний хоча б один блок першого типу, то $A = A_1 \cup A_2$. Нехай B - справні не менше двох блоків другого типу. $B = B_1B_2 \cup B_2B_3 \cup B_1B_3$. Тоді $C = AB = (A_1 \cup A_2)(B_1B_2 \cup B_2B_3 \cup B_1B_3)$.

Контрольні запитання

1. Що таке стохастичний експеримент?
2. Що таке простір елементарних подій? Наведіть приклади.
3. Охарактеризуйте випадкову подію як підмножину простору Ω.
4. Що таке достовірна, неможлива подія?
5. Дайте означення добутку, суми випадкових подій?
6. Що таке несумісні випадкові події?
7. Що являє собою подія, протилежна до деякої події A?
8. Чи можна віднімати випадкові події?

ЛАБОРАТОРНЕ ЗАНЯТТЯ №2

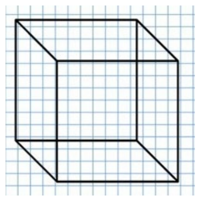
ВИЗНАЧЕННЯ ЙМОВІРНОСТЕЙ ПОДІЙ ЗА УМОВИ РІВНОМОЖЛИВОСТІ ЕЛЕМЕНТАРНИХ ПОДІЙ

Мета заняття: *набуття навиків розв'язування задач, що стосуються визначення ймовірностей випадкових подій за умови скінченності простору елементарних подій та рівноможливості його елементів.*

Завдання, запропоновані викладачем розв’язуються на занятті студентами індивідуально, а також у формі загальної дискусії або у малих групах. Крім теоретичного матеріалу, поданого на відповідній лекції, до заняття потрібно пригадати теоретичні відомості з комбінаторики (Курс Дискретна математика).

Далі наведено **приклади задач**.

П р и к л а д 1. Куб, усі грані якого пофарбовані, розпиляли на 1000 кубиків однакового розміру. Знайти ймовірність того, що навмання вибраний кубик буде мати дві пофарбовані сторони.



Усього кубиків 1000, тому число усіх елементарних подій $n = 1000$.

Кубиків із двома пофарбованими сторонами $m = 96$ (12 ребер великого куба × 8 кубиків з кожного ребра). Тому шукана ймовірність $\mathbf{P} = \dfrac{96}{1000}$.

П р и к л а д 2. Знайти ймовірність того, що серія навмання вибраної лотереї не містить однакових цифр, якщо відомо, що номер серії може бути будь-яким п’ятизначним числом, починаючи з 00001.

Усього елементарних подій $n = 10^5 - 1$, а тих, що сприяють розглядуваній події - за правилом множення (з комбінаторики) $m = 9 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6$. Тому шукана ймовірність $\mathbf{P} = \dfrac{9 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6}{10^5 - 1}$.

П р и к л а д 3. З колоди карт (36 карт) виймають три карти. Знайти ймовірність того, що серед них буде один туз.

Розглядувана подія може відбутися таким чином: з чотирьох тузів вибираємо один і потім із 32-ох карт, що залишилися вибираємо ще дві будь-які карти. Першу дію можемо здійснити C_4^1 способами, другу - C_{32}^2 способами. За правилом множення, кількість елементарних подій, що сприяють розглядуваній випадковій події $m = C_4^1 C_{32}^2$. Усього елементарних подій: $n = C_{36}^3$ (стількома способами можна вибрати три карти із 36). Тому, шукана ймовірність $\mathbf{P} = \dfrac{C_4^1 C_{32}^2}{C_{36}^3}$.

Приклад 4. Цифровий замок містить на спільній осі 8 дисків, кожен з яких розділено на 7 секторів із різними цифрами. Замок відкривається тільки в тому випадку, коли кожний диск займе одне певне положення відносно корпусу замка. Знайти ймовірність відкрити замок, якщо встановлено довільну комбінацію цифр.

Приклад 5. Тридцять книг розставлено на полиці випадковим чином. Знайти ймовірність того, що при цьому чотири певні книги виявляться поставленими поруч.

Приклад 6. Протягом зміни приймальник прийняв у ремонт 10 годинників тієї самої марки від 10 різних осіб і перед закінченням зміни навмання розклав їх підряд на круглій полиці. Знайти ймовірність того, що три годинники, які належать певним особам, виявились поруч.

Приклад 7. На десяти однакових картках написані числа 2, 4, 6, 7, 8, 10, 11, 12, 13, 17. Навмання беруть дві картки. Знайти ймовірність того, що утворений із двох отриманих чисел дріб є скоротним.

ЛАБОРАТОРНЕ ЗАНЯТТЯ №3

ВЛАСТИВОСТІ ЙМОВІРНОСТЕЙ

Мета заняття: *набуття навиків розв'язування задач, що стосуються основних теорем теорії ймовірностей, таких як теорема про ймовірність протилежної події, ймовірність різниці подій, теорема додавання ймовірностей та ін.*

Завдання, запропоновані викладачем, розв'язуються на занятті студентами індивідуально, а також у формі загальної дискусії або у малих групах.

Далі наведено **приклади задач**.

Приклад 1. Знайти ймовірність того, що партія зі 100 виробів, серед яких 5 бракованих буде прийнята контролем, якщо випробування здійснюються шляхом випадкового вибору половини всієї партії. Умовами прийому допускається наявність бракованих виробів не більше одного з 50.

Нехай подія A - серед вибраних 50 виробів немає жодного бракованого, B - серед них є один бракований виріб. Очевидно, що ці події несумісні. Тоді, за теоремою додавання ймовірностей, ймовірність шуканої події $\mathbf{P}(A+B)=\mathbf{P}(A)+\mathbf{P}(B)$ ($\mathbf{P}(A\bigcap B)=\mathbf{P}(\varnothing)=0$, оскільки події несумісні).

Аналогічно до попереднього прикладу знайдемо:

$$\mathbf{P}(A)=\frac{C_{95}^{50}}{C_{100}^{50}},\quad \mathbf{P}(B)=\frac{C_5^1 C_{95}^{49}}{C_{100}^{50}}.$$

Приклад 2. Спортсмен здійснює один постріл у мішень, що складається з одного центрального круга та двох концентричних кілець. Ймовірність попадання в круг і кільця відповідно рівні: 0.2, 0.15, 0.1. Знайти ймовірність непопадання в мішень.

Нехай подія A - попадання в мішень, тоді подія $\overline{A}$ - непопадання в мішень. За теоремою додавання, для несумісних подій $\mathbf{P}(A)=0.2+0.15+0.1=0.45$. За теоремою про ймовірність протилежної події маємо: $\mathbf{P}(\overline{A})=1-\mathbf{P}(A)=1-0.45=0.55$.

Приклад 3. В університеті 2514 студентів вивчають інформаційні технології. З них 1877 студентів вивчають мову програмування Python, 1000 студентів вивчають мову R, 346 студентів вивчають мову програмування Julia. 879 студентів вивчають Python I R, 241 студент – Python і Julia, 292 студенти вивчають R I Julia, 190 студентів вивчають одночасно усі три мови програмування. Знайти ймовірність того, що навмання вибраний студент (з усіх 2514) вивчає хоча б одну з вказаних вище мов, не вивчає жодної із цих мов?

Контрольні запитання

1. Який клас множин називається алгеброю, σ-алгеброю?
2. Що являє собою система аксіом теорії ймовірностей?
3. Чому рівна ймовірність протилежної, неможливої події?
4. Сформулюйте теорему додавання ймовірностей?

ЛАБОРАТОРНЕ ЗАНЯТТЯ №4

ФОРМУЛА ПОВНОЇ ЙМОВІРНОСТІ. ФОРМУЛА БЕЙЄСА

Мета заняття: *набуття навиків розв'язування задач, що стосуються поняття умовної ймовірності, незалежних подій, формули повної ймовірності та формули Бейєса.*

Завдання, запропоновані викладачем розв’язуються на занятті студентами індивідуально, а також у формі загальної дискусії або у малих групах.

Далі наведено **приклади задач**.

Приклад 1. Проводяться незалежні експерименти до першої появи події A. Ймовірність появи події A у кожному експерименті однакова й рівна 0.2. Знайти ймовірність того, що доведеться здійснити четвертий експеримент.

Події в кожному експерименті з’являються незалежно. Ймовірність того, що в якомусь експерименті подія A не з’явиться рівна $\mathbf{P}(\overline{A}) = 1 - \mathbf{P}(A) = 1 - 0.2 = 0.8$. Четвертий експеримент доведеться здійснити тоді, коли у перших трьох подія A не з’явиться. Тому шукана ймовірність рівна $\mathbf{P} = \mathbf{P}(\overline{A})\mathbf{P}(\overline{A})\mathbf{P}(\overline{A}) = 0.8^3$.

Приклад 2. Події A і B несумісні. Крім того $\mathbf{P}(A) \neq 0$, $\mathbf{P}(B) \neq 0$. Чи є події A і B незалежними?

Для незалежних подій повинно виконуватися співвідношення $\mathbf{P}(A \cap B) = \mathbf{P}(A)\mathbf{P}(B)$. За умовою задачі $\mathbf{P}(A \cap B) = 0$ (бо події несумісні), але $\mathbf{P}(A)\mathbf{P}(B) \neq 0$, тому події A і B не є незалежними.

Приклад 3. Знайти ймовірність того, що 100 ламп, взятих випадково з 1000 ламп виявляться якісними, якщо відомо, що число бракованих ламп на 1000 шт. є рівноможливим від 0 до 5.

Розглянемо події: A_k - є k бракованих ламп, $k = \overline{0,5}$. $\mathbf{P}(A_k) = \dfrac{1}{6}$;

подія B - 100 вибраних ламп якісні. $\mathbf{P}(B | A_k) = \dfrac{C_{1000-k}^{100}}{C_{1000}^{100}}, \quad k = \overline{0,5}$. Тому

за формулою повної ймовірності:

$$\mathbf{P}(B) = \sum_{k=0}^{5} \mathbf{P}(A_k)\mathbf{P}(B | A_k) = \frac{1}{6}\sum_{k=0}^{5} \frac{C_{1000-k}^{100}}{C_{1000}^{100}}.$$

Приклад 4. У ящику 15 тенісних м’ячів, з яких 9 нові. Для першої гри випадково беруть три м’ячі, які після гри повертають у ящик. Для другої гри теж випадково беруть три м’ячі. Знайти ймовірність того, що всі м’ячі, взяті для другої гри нові (тобто ще жодного разу не використовувались).

Маємо випадкові події: A_k, $k = \overline{0,3}$ - для першої гри взято k нових м’ячів, B - для другої гри взято 3 нових м’ячі. $\mathbf{P}(A_k) = \dfrac{C_9^k C_6^{3-k}}{C_{15}^3}$.

Після того, як у першій грі використають k нових м’ячів з дев’яти, то перед другою грою нових залишиться $9 - k$. Тому $\mathbf{P}(B | A_k) = \dfrac{C_{9-k}^3}{C_{15}^3}$. За

формулою повної ймовірності: $\mathbf{P}(B) = \displaystyle\sum_{k=0}^{3} \frac{C_9^k C_6^{3-k} C_{9-k}^3}{(C_{15}^3)^2}$.

П р и к л а д 4. Відомо, що 96% продукції задовольняє стандарту. Процедура контролю визнає придатною стандартну продукцію з ймовірністю 0.98 і нестандартну з ймовірністю 0.05. Знайти ймовірність того, що виріб, який пройшов процедуру контролю задовольняє стандарту.

Маємо випадкові події: A_1 - стандартна деталь, A_2 - нестандартна деталь, B - деталь визнано придатною. $\mathbf{P}(A_1)=0.96$, $\mathbf{P}(A_2)=0.04$, $\mathbf{P}(B|A_1)=0.98$, $\mathbf{P}(B|A_2)=0.05$.

За формулою Бейєса $\mathbf{P}(A_1|B)=\dfrac{\mathbf{P}(A_1)\mathbf{P}(B|A_1)}{\mathbf{P}(A_1)\mathbf{P}(B|A_1)+\mathbf{P}(A_2)\mathbf{P}(B|A_2)}=$

$$=\frac{0.96\cdot 0.98}{0.96\cdot 0.98+0.04\cdot 0.05}=0.998.$$

П р и к л а д 5. Відомо, що 0.4% населення мають деяке захворювання. Для виявлення захворювання використовують лабораторний тест, який дає позитивний результат з ймовірністю 0.99, якщо досліджуваний пацієнт є хворим. Якщо особа є здоровою, то тест з ймовірністю 0.995 буде негативним. Навмання обрана людина отримала позитивний результат тесту. Якою є ймовірність того, що ця людина є хворою?

П р и к л а д 6. Нова комп'ютерна програма складається з двох модулів. Відомо, що перший модуль містить помилку з ймовірністю 0.2. Другий модуль є набагато складнішим, ймовірність того, що він містить помилку дорівнює 0.4, незалежно від першого модуля. Помилка тільки у першому модулі призводить до зупинки програми з ймовірністю 0.5. Помилка тільки у другому модулі призводить до зупинки програми з ймовірністю 0.8. Якщо помилки виникають одночасно в обох модулях, то ймовірність зупинки програми дорівнює 0.9. Відомо, що програма зупинилася. Знайти ймовірність того, що помилка є в обох модулях.

Контрольні запитання

1. Що таке умовна ймовірність?
2. У чому полягає теорема множення ймовірностей?
3. Які події називаються незалежними?
4. Що таке повна група несумісних подій?
5. У чому суть формули повної ймовірності, формули Бейєса?

Рекомендована література

1. Бабак В. П. Теорія ймовірностей, випадкові процеси та математична статистика / В. П. Бабак, Б. Г. Марченко, М. Є. Фриз. – К. : Техніка, 2004. – 288 с.
2. Дороговцев А.Я., Сільвестров Д.С., Скороход А.В., Ядренко М.Й. Теорія ймовірностей. Збірник задач. – К.: Вища школа, 1980. – 480 с.
3. Жалдак М. І., Кузьміна Н. М., Берлінська С.Ю. Теорія ймовірностей і математична статистика з елементами інформаційної технології. - К. : Вища школа, 1995. – 351 с.
4. Марченко Б. Г. Теоретичні основи аналізу стохастичних сигналів і шумів: [навчальний посібник] / Б. Г. Марченко, М. В. Приймак, Л. М. Щербак. – Тернопіль: ТДТУ імені І. Пулюя, 2001. – 179 с.
5. Шефтель З.Г. Теорія ймовірностей. - К. : Вища школа, 1994. – 192 с.
6. Introduction to Probability Theory / Butsan G.P., Kyiv, Akademperiodyka, 2012
7. H. Pishro-Nik, "Introduction to probability, statistics, and random processes", available at https://www.probabilitycourse.com, Kappa Research LLC, 2014.
8. Michael Baron, "Probability and Statistics for Computer Scientists", Second Edition, Chapman and Hall/CRC, 2015
9. Dimitri P. Bertsekas and John N. Tsitsiklis, "Introduction to Probability", LECTURE NOTES, Massachusetts Institute of Technology, FALL 2000
10. Sheldon M. Ross, "A First Course in Probability", 5th. ed., Prentice Hall, 1998
11. Sheldon M. Ross, "Introduction to probability Models", Tenth Edition, Elsevier, 2010
12. Allan G. Bluman, "Probability Demystified", McGraw-Hill Education, 2005
13. Mike Le Van, "Probability and Statistics", McGraw-Hill, 2001
14. Douglas C. Montgomery and George C. Runger, "Applied Statistics and Probability for Engineers", 3rd ed., John Wiley & Sons, 2003

Інформаційні ресурси

1. Електронний навчальний курс «Теорія імовірностей, імовірнісні процеси і математична статистика» (ID: 4743)

2. Fundamentals of Probability, MIT OpenCourseWare, available at https://ocw.mit.edu/courses/electrical-engineering-and-computer-science/6-436j-fundamentals-of-probability-fall-2008

3. Statistics and probability, Khan Academy, available at https://www.khanacademy.org/math/statistics-probability

4. Probability & Statistics, Carnegie Mellon University, Open Learning Initiative, available at https://oli.cmu.edu/courses/probability-statistics-open-free/