МИНИСТЕРСТВО СЕЛЬСКОГО ХОЗЯЙСТВА И ПРОДОВОЛЬСТВИЯ УКРАИНЫ
АКАДЕМИЯ ИНЖЕНЕРНЫХ НАУК
АКАДЕМИЯ НАУК ВЫСШЕЙ ШКОЛЫ УКРАИНЫ
ТАВРИЧЕСКАЯ ГОСУДАРСТВЕННАЯ АГРОТЕХНИЧЕСКАЯ АКАДЕМИЯ

СБОРНИК ТРУДОВ

IV Международной научно-практической конференции

СОВРЕМЕННЫЕ ПРОБЛЕМЫ ГЕОМЕТРИЧЕСКОГО МОДЕЛИРОВАНИЯ

Часть 1

4—6 сентября, 1997 г.
Мелитополь, Украина

Мелитополь, 1997

Математичне моделювання процесів дифузійно-фільтраційного масопереносу в неоднорідних пористих середовищах

М.Р. Петрик, С.М. Балабан, І.А. Свистун
(Тернопільський державний технічний університет імені Івана Пулюя)

Під час розробки і впровадження у виробництво високоефективних сучасних технологій виникає необхідність вивчення різних складних фізичних процесів, що одночасно протікають в неоднорідних середовищах і зазнають взаємного взаємовпливу. Так, наприклад, при сушінні органічних матеріалів (желатин, казеїн, харчові білки, деревина) струмами високої частоти, кондуктивним або конвективним способами відбуваються складні процеси вологомасопереносу в пористих середовищах. При цьому всередині матеріалу, що сушиться, спостерігається додатковий перенос вологи і теплоти за рахунок наявності фільтраційно-сумісного переміщення вологи і теплоносія.

Відомі математичні моделі [1, 2], що описують згадані процеси, передбачають дифузійну міграцію вологи до поверхні матеріалу і випаровування її з даної поверхні. В реальних умовах випаровування проходить в складній системі капілярів та мікрокапілярів, яке спричиняє зростання тиску всередині матеріалу, що сушиться. Градієнт загального тиску в середовищі такого виду фільтраційного масопереносу спричинений інтенсивним випаровуванням та наявністю в середовищі розвиненої системи мікрокапілярів, що сприяє інтенсифікації процесів вологомасопереносу.

Враховуючи неоднорідність фізичних властивостей середовища волого-масопереносу в реальних процесах відносно просторових координат, розглянемо нестаціонарну математичну модель дифузійно-фільтраційного масопереносу в загальній постановці для декартової системи координат (3-х мірний випадок), враховуючи неоднорідність (кускову-однорідність) кінетичних параметрів переносу вздовж одного із головних напрямів переносу (напряму вздовж осі Z).

Математична постановка задачі: Побудувати обмежений в області

$$D=\left\{(\tau,x,y,z)\colon \tau>0,\ x\in(\alpha_0,\alpha_2);\ y\in(\beta_0,\beta_2);\ z\in(l_0,l)=\bigcup_{k-1}^{n+1}(l_{k-1},l)\right\}$$

розвязок системи рівнянь:

$$\frac{\partial u_k(\tau,x,y,z)}{\partial\tau} = K_{11_k}\nabla^2 u_k + K_{12_k}\nabla^2 T_k + K_{13_k}\nabla^2 P_k + f_{1k}(\tau,x,y,z),$$

$$\frac{\partial T_k(\tau,x,y,z)}{\partial\tau} = K_{21_k}\nabla^2 u_k + K_{22_k}\nabla^2 T_k + K_{23_k}\nabla^2 P_k + f_{2k}(\tau,x,y,z), \qquad (1)$$

$$\frac{\partial P_k(\tau,x,y,z)}{\partial\tau} = K_{31_k}\nabla^2 u_k + K_{32_k}\nabla^2 T_k + K_{33_k}\nabla^2 P_k + f_{3k}(\tau,x,y,z), \quad k=\overline{1,n+1}$$

за початковими та крайовими умовами.

Тут U, T, P -шукані функції поля волого-теплопереносу: концентрація вологи, температура та капілярний тиск вологи в середовищі переносу: ∇ - оператор Гамільтона, K_{ij}, i,j=1, 2,3 - коефіцієнти масопереносу.

До задачі(1) додаємо ще умови контакту по змінній z:

$$\left[\left(\xi^k_{uj1}\frac{d}{dz}+\eta^k_{uj1}\right)u_k-\left(\xi^k_{uj2}\frac{d}{dz}+\eta^k_{uj2}\right)u_{k+1}\right]_{z=l_k}=0 \qquad (2)$$

$$\left[\left(\xi^k_{Tj1}\frac{d}{dz}+\eta^k_{Tj1}\right)T_k-\left(\xi^k_{Tj2}\frac{d}{dz}+\eta^k_{Tj2}\right)T_{k+1}\right]_{z=l_k}=0 \qquad (3)$$

$$\left[\left(\xi^k_{Pj1}\frac{d}{dz}+\eta^k_{Pj1}\right)P_k-\left(\xi^k_{Pj2}\frac{d}{dz}+\eta^k_{Pj2}\right)P_k\right]_{z=l_k}=0 \qquad (4)$$

$k=\overline{1,n}$; $j=\overline{1,2}$

Змішану крайову задачу (1)-(4) розвязуємо за такою схемою:

1) систему рівнянь (1) зведемо до сепарабельної використовуючи перетворення подібности зведення матриці до діагонального виду.

2) до вихідної перетвореної задачі застосуємо послідовно по змінних x і y інтегральні перетворення Фур'є на сегменті.

3) до одержаної задачі застосуємо скінчене інтегральне перетворення Фур'є з n-точками спряження по змінній z.

4) знайшовши розв'язок одержаної в результаті таких перетворень задачі Коші, вертаємось до оригіналів.

Запишемо систему рівнянь (1) у матричній формі:

$$\frac{\partial}{\partial\tau}\begin{pmatrix}u_k\\T_k\\P_k\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}K_{11_k}&K_{12_k}&K_{13_k}\\K_{21_k}&K_{22_k}&K_{23_k}\\K_{31_k}&K_{32_k}&K_{33_k}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}u_k\\T_k\\P_k\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}f_{1_k}\\f_{2_k}\\f_{3_k}\end{pmatrix} \qquad (5)$$

Матрицю $\widetilde{K}_R=\left[K_{ij_k}\right]$, $K_{ij}\in R$, $i,j=\overline{1,3}$ можна звести до діагонального виду з допомогою такого ж перетворення подібности

$$\widetilde{K}_R = B^{-1}K_R B \qquad (6)$$

де $\widetilde{K}_k$ -діагональна матриця $\widetilde{K}_k = \left[\widetilde{K}_{ij_k}\right]$, $\widetilde{K}_{ij_k} = 0,\ i \neq j$, B-деяка модельна, невироджена матриця, елементи якої визначені шляхом розв'язування наступної системи однорідних рівнянь:

$$\left.\begin{aligned} \left(K_{11_k} - \lambda_j\right) b_{1_{jk}} + K_{12_{jk}} b_{2_{jk}} + K_{13_{jk}} b_{3_{jk}} = 0 \\ K_{21_{jk}} b_{1_{jk}} + \left(K_{12_k} - \lambda_j\right) b_{2_{jk}} + K_{23_{jk}} b_{3_{jk}} = 0 \\ K_{31_{jk}} b_{1_{jk}} + K_{32_{jk}} b_{2_{jk}} + \left(K_{33_k} - \lambda_j\right) b_{3_{jk}} = 0 \end{aligned}\right\} \tag{7}$$

де λ_{ij} - власні характеристичні рівняння $\det(K - \lambda E) = 0$,

E-одинична матриця, B^{-1}-матриця обернена до B.

Таким чином, застосувавши до системи (5)перетворення (6):

$$\frac{\partial}{\partial\tau}\begin{pmatrix} u_k \\ T_k \\ P_k \end{pmatrix} = B\begin{pmatrix} K_{11_k} & K_{12_k} & K_{13_k} \\ K_{21_k} & K_{22_k} & K_{23_k} \\ K_{31_k} & K_{32_k} & K_{33_k} \end{pmatrix} B^{-1}\nabla^2\begin{pmatrix} u_k \\ T_k \\ P_k \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} f_{1_k} \\ f_{2_k} \\ f_{3_k} \end{pmatrix} \tag{8}$$

одержимо:

$$\frac{\partial u_{ik}}{\partial\tau} = \widetilde{K}_{ij_k}\nabla^2 u_{ik} + f_{ir} \tag{9}$$

$$u_{1k} = u_k;\ u_{2k} = P_k;\ u_{3k} = T_k;\ k = \overline{1,n}$$

Застосуємо двічі до системи (8) з крайовими умовами скінченне інтегральне перетворення Фур'є на сегменті: по змінній x_1=x на сегменті $\widetilde{I}_1 = \left[\alpha_0, \alpha\right]$ і по змінній x_2=y на сегменті $\widetilde{I}_1 = \left[\beta_0, \beta\right]$

-пряме перетворення:

$$\Lambda_{n_j}\left[f(x)\right] = \int_{\widetilde{I}_{0_j}}^{\widetilde{I}_j} f(x)\sin\left(\frac{\pi n_j x}{\Delta \widetilde{I}_j}\right)dx = fn_j \tag{11}$$

-обернене перетворення:

$$\Lambda_{n_j}^{-1}\left[f_{n_j}\right] = \frac{2}{\Delta\widetilde{I}}\sum_{n_j=1}^{\infty} fn_j \sin\left(\frac{\pi n_j x}{\Delta\widetilde{I}_j}\right) = f(x) \qquad \Delta I_j = I_j - I_{0j},\ j = \overline{1,2} \tag{12}$$

-основна тотожність:

$$\Lambda_{n_j}\left[\frac{d^2 f}{dx^2}\right] = -\Lambda_{n_j}^2 f_{n_j} + \frac{V_{n_j}(I)}{h_{21}}\left(h_{21}\frac{d}{dx} + h_{12}\right)f\Bigg|_{x=I_j} + \frac{V_{n_j}(0)}{h_{11}}\left(-h_{11}\frac{d}{dx} + h_{12}\right)f\Bigg|_{x=I_0}$$

де $V_{n_1}(l) = \dfrac{h_{21}\lambda_n}{\sqrt{h_{21}^2\lambda_n^2 + h_{121}^2}}$; $V_{n_1}(l_0) = \dfrac{h_{11}\lambda_n}{\sqrt{h_{11}^2\lambda_n^2 + h_{12}^2}}$. (13)

Згідно з крайових умов вихідної задачі маємо:

$h_{11} = 0,\ h_{21} = 0,\ h_{12} = 1,\ h_{22} = 1$ (14)

З урахуванням умов (14) основна тотожність (13) набуде вигляду:

$$\Lambda_{n_1}\left[\frac{d^2 f}{dx^2}\right] = -\chi_{n_1}^2 f_{n_1} + \lambda_{n_1}\frac{V_{n_1}(l)}{h_{21}}\left(f\Big|_{x=l_j} + f\Big|_{x=l_0}\right). \qquad (15)$$

В результаті здійснення математичних перетворень одержуємо задачу Коші:

$$\frac{\partial}{\partial\tau}u_{in_1n_2m}(\tau) = -\left(\lambda_{n_1}^2 + \lambda_{n_{21}}^2 + \beta_m^2\right)u_{in_1n_2m}(\tau) + \widetilde{f}_{in_1n_2m}(\tau). \qquad (16)$$

з початковою умовою: $u_{in_1n_2m}(\tau) = u_{0n_1n_2m}$ (17)

Розв'язком якої є функція

$$u_{in_1n_2m}(\tau) = u_{in_1n_2m}\,e^{\left(\lambda_{n_1}^2 + \lambda_{n_{21}}^2 - \beta_m^2\right)\tau} + \int_0^\tau K(\tau - s)F_{in_1n_2m}(s)ds, \qquad (18)$$

де $K(\tau - s) = e^{\left(\lambda_{n_1}^2 + \lambda_{n_{21}}^2 + \beta_m^2\right)s}$.

Або в матричній формі, вертаючись до позначень в зображеннях одержимо:

$$\begin{bmatrix} u_{n_1n_2m}(\tau) \\ T_{n_1n_2m}(\tau) \\ P_{n_1n_2m}(\tau) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} u_{0n_1n_2m} \\ T_{0n_1n_2m} \\ P_{0n_1n_2m} \end{bmatrix} e^{-\left[\lambda_{n_1}^2 + \lambda_{2n_2}^2 + \beta_m^2\right]\tau} + \int_0^\tau K(\tau - s)\begin{bmatrix} F_{1n_1n_2m}(s) \\ F_{2n_1n_2m}(s) \\ F_{3n_1n_2m}(s) \end{bmatrix} ds.$$

Вертаючись до оригіналів, використовуючи інтегральні оператори зворотніх переходів $\Lambda_{n_1}^{-1}$, Λ_{n2}^{-1} ,визначених формулою (15), одержимо розв'язок вихідної крайової задачі (1):

$$\begin{bmatrix} u_K(\tau, x, y, z) \\ T_K(\tau, x, y, z) \\ P_K(\tau, x, y, z) \end{bmatrix} = \frac{4}{\Delta l_1 \Delta l_2}\sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n1=1}^{\infty}\sum_{n2=1}^{\infty}\begin{bmatrix} u_{n_1n_2m}(\tau) \\ T_{n_1n_2m}(\tau) \\ P_{n_1n_2m}(\tau) \end{bmatrix}\frac{V_k(z, \beta_m)}{\|V_k(z, \beta_m)\|^2}\sin\left(\frac{\pi n_2 x}{\Delta l_2}\right)\sin\left(\frac{\pi n1x}{\Delta l_1}\right)$$

1. Лыков А.В. Теория теплопроводности.//М.: Высшая школа, 1967.- С.600.
2. Лыков А.В. Теория сушки//М.: Энергия, 1968.- С.472.