

МИНИСТЕРСТВО СЕЛЬСКОГО ХОЗЯЙСТВА И  
ПРОДОВОЛЬСТВИЯ УКРАИНЫ  
АКАДЕМИЯ ИНЖЕНЕРНЫХ НАУК  
АКАДЕМИЯ НАУК ВЫСШЕЙ ШКОЛЫ УКРАИНЫ  
ТАВРИЧЕСКАЯ ГОСУДАРСТВЕННАЯ АГРОТЕХНИЧЕСКАЯ  
АКАДЕМИЯ

## СБОРНИК ТРУДОВ

IV Международной научно-практической конференции  
СОВРЕМЕННЫЕ ПРОБЛЕМЫ ГЕОМЕТРИЧЕСКОГО  
МОДЕЛИРОВАНИЯ

Часть 1

4—6 сентября, 1997 г.  
Мелитополь, Украина

Мелитополь, 1997

Дяхович Т.П. Конечные элементы с полярной геометрией.	92
Гучек П.И. Разработка геометрических моделей и компьютерных программ для задач восстановления функций.	95
Литвиненко Е.И. Геометрия интерполяционных полиномов на шестиугольнике.	99
Петрик М.Р., Балабан С.М., Свистун І.А. Математичне моделювання процесів дифузійно-фільтраційного масопереносу в неоднорідних пористих середовищах.	103
Балабан С.М., Петрик М.Р., Васюк І.М. Дискретне моделювання ізотермічних поверхонь при нагріванні деревини.	107
Дорошенко Ю.О. Забезпечення топологічності політканинних перетворень.	110
Дорошенко Ю.О. Політканинні перетворення тривірного простору: теоретичні основи.	118
Власюк Г.Г. Просторові криві скінченних сум та напрямки їхнього застосування.	122
Скидан І.А., Коломиец Е.А. Вычислительные формулы метода математического моделирования поверхностей в специальных координатах.	125
Борисенко В.Д., Видниченко Е.Г. Геометрическое моделирование лопаточных диффузоров центробежных компрессоров.	133
Борисенко В.Д. Профилирование лопаток центробежных турбин.	137
Борисенко В.Д., Шулежко С.В. Исследование возможности применения кубических сплайнов при конструировании аэродинамических обводов.	141
Борисенко В.Д., Калинина И.А. К вопросу моделирования скелетной поверхности рабочих лопаток осередиальных турбомашин.	145
Корабельский В.И., Иванов А.М. Геометрическое паркетирование поверхности рабочего органа по заданной объемной модели воздействия.	149
Ковалев Ю.Н. Геометрическое представление данных психологических исследований.	153
Молдавская Т.А. Результаты экспериментальных исследований конструкций сталебетонных арок.	157
Бадаева Н.И., Аушева Н.Н. Проектирование пространственных динамических обводов.	160
Аникеева Н.П., Иванов Г.С., Кострюков А.В. Характеристика алгебраических кривых, моделирующих сеть силовых и эквипотенциальных линий электрического поля.	162
Корчинский В.М. Геометрическая модель идентификации форм проекционных изображений в многомерном псевдоевклидовом пространстве.	166
Куценко Л.Н., Вобов С.В. Пожар как сложная динамическая система.	170
Куценко Л.Н., Сивак Е.М. Идентификация токарных изделий на ленте конвейера роботом-сортировщиком.	172

# Математичне моделювання процесів дифузійно-фільтраційного масопереносу в неоднорідних пористих середовищах

П.Р. Петрик, С.М. Балабан, І.А. Свистун

(Львівський державний технічний університет імені Івана Пулюя)

Під час розробки і впровадження у виробництво високоефективних технологій виникає необхідність вивчення різних складних фізичних процесів, що одночасно протікають в неоднорідних середовищах і зазнають взаємовпливу. Так, наприклад, при сушінні органічних матеріалів (казеїн, харчові білки, деревина) струмами високої частоти, кондуктивним конвективним способами відбуваються складні процеси вологомасопереносу в пористих середовищах. При цьому всередині матеріалу, що сушиться, відбувається додатковий перенос вологи і теплоти за рахунок наявності фільтраційно-сумісного переміщення вологи і теплоносія.

Відомі математичні моделі [1, 2], що описують згадані процеси, передбачають дифузійну міграцію вологи до поверхні матеріалу і випаровування її з даної поверхні. В реальних умовах випаровування проходить в складній системі капілярів та мікрокапілярів, яке спричиняє зростання тиску всередині матеріалу, що сушиться. Градієнт загального тиску в середовищі такого виду фільтраційного масопереносу спричинений інтенсивним випаровуванням та наявністю в середовищі розвиненої системи мікрокапілярів, що сприяє інтенсифікації процесів вологомасопереносу.

Враховуючи неоднорідність фізичних властивостей середовища волого-масопереносу в реальних процесах відносно просторових координат, розглянемо нестационарну математичну модель дифузійно-фільтраційного масопереносу в загальній постановці для декартової системи координат (3-х вимірний випадок), враховуючи неоднорідність (кускову-однорідність) кінетичних параметрів переносу вздовж одного із головних напрямів переносу (напряму вздовж осі Z).

Математична постановка задачі: Побудувати обмежений в області

$$D = \left\{ (\tau, x, y, z): \tau > 0, x \in (\alpha_0, \alpha_2); y \in (\beta_0, \beta_2); z \in (1_0, 1) = \bigcup_{k=1}^{n+1} (1_{k-1}, 1) \right\}$$

розв'язок системи рівнянь:

$$\begin{aligned} \frac{\partial u_k(\tau, x, y, z)}{\partial \tau} &= K_{11k} \nabla^2 u_k + K_{12k} \nabla^2 T_k + K_{13k} \nabla^2 P_k + f_{1k}(\tau, x, y, z), \\ \frac{\partial T_k(\tau, x, y, z)}{\partial \tau} &= K_{21k} \nabla^2 u_k + K_{22k} \nabla^2 T_k + K_{23k} \nabla^2 P_k + f_{2k}(\tau, x, y, z), \\ \frac{\partial P_k(\tau, x, y, z)}{\partial \tau} &= K_{31k} \nabla^2 u_k + K_{32k} \nabla^2 T_k + K_{33k} \nabla^2 P_k + f_{3k}(\tau, x, y, z), \quad k = \overline{1, n+1} \end{aligned} \quad (1)$$

за початковими та крайовими умовами.

Тут  $U, T, P$  - шукані функції поля волого-теплопереносу: концентрація вологи, температура та капілярний тиск вологи в середовищі переносу;  $\nabla$  - оператор Гамільтона,  $K_{ij}$ ,  $i, j = 1, 2, 3$  - коефіцієнти масопереносу.

До задачі(1) додаємо ще умови контакту по змінній  $z$ :

$$\left[ \left( \xi_{q1}^k \frac{d}{dz} + \eta_{q1}^k \right) u_k - \left( \xi_{q2}^k \frac{d}{dz} + \eta_{q2}^k \right) u_{k+1} \right]_{z=l_k} = 0 \quad (2)$$

$$\left[ \left( \xi_{T1}^k \frac{d}{dz} + \eta_{T1}^k \right) T_k - \left( \xi_{T2}^k \frac{d}{dz} + \eta_{T2}^k \right) T_{k+1} \right]_{z=l_k} = 0 \quad (3)$$

$$\left[ \left( \xi_{P1}^k \frac{d}{dz} + \eta_{P1}^k \right) P_k - \left( \xi_{P2}^k \frac{d}{dz} + \eta_{P2}^k \right) P_{k+1} \right]_{z=l_k} = 0 \quad (4)$$

$$k = \overline{1, n}; \quad j = \overline{1, 2}$$

Змішану крайову задачу (1)-(4) розв'язуємо за такою схемою:

1) систему рівнянь (1) зведемо до сепарабельної використовуючи перетворення подібності зведення матриці до діагонального виду.

2) до вихідної перетвореної задачі застосуємо послідовно по змінних  $x$  і  $y$  інтегральні перетворення Фур'є на сегменті.

3) до одержаної задачі застосуємо скінченне інтегральне перетворення Фур'є з  $n$ -точками спряження по змінній  $z$ .

4) знайшовши розв'язок одержаної в результаті таких перетворень задачі Коші, вертаємось до оригіналів.

Запишемо систему рівнянь (1) у матричній формі:

$$\frac{\partial}{\partial \tau} \begin{pmatrix} u_k \\ T_k \\ P_k \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} K_{11k} & K_{12k} & K_{13k} \\ K_{21k} & K_{22k} & K_{23k} \\ K_{31k} & K_{32k} & K_{33k} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_k \\ T_k \\ P_k \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} f_{1k} \\ f_{2k} \\ f_{3k} \end{pmatrix} \quad (5)$$

Матрицю  $\tilde{K}_R = [K_{ij}]$ ,  $K_{ij} \in R$ ,  $i, j = 1, 3$  можна звести до діагонального виду з допомогою такого ж перетворення подібності

$$\tilde{K}_R = B^{-1} K_R B \quad (6)$$

де  $\tilde{K}_k$  -діагональна матриця  $\tilde{K}_k = [\tilde{K}_{ij}]$ ,  $\tilde{K}_{ij} = 0$ ,  $i \neq j$ , В-деяка модельна, невідроджена матриця, елементи якої визначені шляхом розв'язування наступної системи однорідних рівнянь:

$$\begin{cases} (K_{11k} - \lambda_j) b_{1,jk} + K_{12k} b_{2,jk} + K_{13k} b_{3,jk} = 0 \\ K_{21k} b_{1,jk} + (K_{22k} - \lambda_j) b_{2,jk} + K_{23k} b_{3,jk} = 0 \\ K_{31k} b_{1,jk} + K_{32k} b_{2,jk} + (K_{33k} - \lambda_j) b_{3,jk} = 0 \end{cases} \quad (7)$$

де  $\lambda_j$  - власні характеристичні рівняння  $\det(K - \lambda E) = 0$ ,

E-одинична матриця,  $B^{-1}$ -матриця обернена до B.

Таким чином, застосувавши до системи (5) перетворення (6):

$$\frac{\partial}{\partial t} \begin{pmatrix} u_k \\ T_k \\ P_k \end{pmatrix} = B \begin{pmatrix} K_{11k} & K_{12k} & K_{13k} \\ K_{21k} & K_{22k} & K_{23k} \\ K_{31k} & K_{32k} & K_{33k} \end{pmatrix} B^{-1} \nabla^2 \begin{pmatrix} u_k \\ T_k \\ P_k \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} f_{1k} \\ f_{2k} \\ f_{3k} \end{pmatrix} \quad (8)$$

одержимо:

$$\frac{\partial u_{jk}}{\partial t} = \tilde{K}_{ij} \nabla^2 u_{jk} + f_{jk} \quad (9)$$

$u_{1k} = u_k$ ;  $u_{2k} = P_k$ ;  $u_{3k} = T_k$ ;  $k = \overline{1, n}$

Застосуємо двічі до системи (8) з крайовими умовами скінченне інтегральне перетворення Фур'є на сегменті: по змінній  $x_1 = x$  на сегменті

$\tilde{\Gamma}_1 = [\alpha_0, \alpha]$  і по змінній  $x_2 = y$  на сегменті  $\tilde{\Gamma}_1 = [\beta_0, \beta]$

-пряме перетворення:

$$\Lambda_n [f(x)] = \int_{\tilde{\Gamma}_1}^{\tilde{\Gamma}_1} f(x) \sin \left( \frac{\pi n x}{\Delta \tilde{\Gamma}_1} \right) dx = f_n \quad (11)$$

-обернене перетворення:

$$\Lambda_n^{-1} [f_n] = \frac{2}{\Delta \tilde{\Gamma}_1} \sum_{n=1}^{\infty} f_n \sin \left( \frac{\pi n x}{\Delta \tilde{\Gamma}_1} \right) = f(x) \quad \Delta \tilde{\Gamma}_1 = \tilde{\Gamma}_1 - \tilde{\Gamma}_{0j} \quad j = \overline{1, 2} \quad (12)$$

-основна тотожність:

$$\Lambda_n \left[ \frac{d^2 f}{dx^2} \right] = -\Lambda_n^2 f_n + \frac{V_{n_1}(f)}{h_{21}} \left( h_{21} \frac{d}{dx} + h_{12} \right) f \Big|_{x=\tilde{\Gamma}_j} + \frac{V_{n_1}(0)}{h_{11}} \left( -h_{11} \frac{d}{dx} + h_{12} \right) f \Big|_{x=\tilde{\Gamma}_0}$$

$$\text{де } V_{n_1}(l) = \frac{h_{21}\lambda_n}{\sqrt{h_{21}^2\lambda_n^2 + h_{21}^2}}; \quad V_{n_1}(l_0) = \frac{h_{11}\lambda_n}{\sqrt{h_{11}^2\lambda_n^2 + h_{12}^2}}. \quad (13)$$

Згідно з крайових умов вихідної задачі маємо:

$$h_{11} = 0, \quad h_{21} = 0, \quad h_{12} = 1, \quad h_{22} = 1 \quad (14)$$

З урахуванням умов (14) основна тотожність (13) набуде вигляду:

$$\Lambda_{n_1} \left[ \frac{d^2 f}{dx^2} \right] = -\chi_{n_1}^2 f_{n_1} + \lambda_{n_1} \frac{V_{n_1}(i)}{h_{21}} \left( f \Big|_{x=l_j} + f \Big|_{x=l_0} \right). \quad (15)$$

В результаті здійснення математичних перетворень одержуємо задачу

Коші:

$$\frac{\partial}{\partial \tau} u_{i n_1 n_2 m}(\tau) = -(\lambda_{n_1}^2 + \lambda_{n_2}^2 + \beta_m^2) u_{i n_1 n_2 m}(\tau) + \tilde{f}_{i n_1 n_2 m}(\tau). \quad (16)$$

$$\text{з початковою умовою: } u_{i n_1 n_2 m}(\tau) = u_{0 i n_1 n_2 m} \quad (17)$$

Розв'язком якої є функція

$$u_{i n_1 n_2 m}(\tau) = u_{0 i n_1 n_2 m} e^{-(\lambda_{n_1}^2 + \lambda_{n_2}^2 + \beta_m^2)\tau} + \int_0^\tau K(\tau-s) F_{i n_1 n_2 m}(s) ds, \quad (18)$$

$$\text{де } K(\tau-s) = e^{-(\lambda_{n_1}^2 + \lambda_{n_2}^2 + \beta_m^2)s}.$$

Або в матричній формі, вертаючись до позначень в зображеннях одержимо:

$$\begin{bmatrix} u_{n_1 n_2 m}(\tau) \\ T_{n_1 n_2 m}(\tau) \\ P_{n_1 n_2 m}(\tau) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} u_{0 n_1 n_2 m} \\ T_{0 n_1 n_2 m} \\ P_{0 n_1 n_2 m} \end{bmatrix} e^{-(\lambda_{n_1}^2 + \lambda_{n_2}^2 + \beta_m^2)\tau} + \int_0^\tau K(\tau-s) \begin{bmatrix} F_{1 n_1 n_2 m}(s) \\ F_{2 n_1 n_2 m}(s) \\ F_{3 n_1 n_2 m}(s) \end{bmatrix} ds.$$

Вертаючись до оригіналів, використовуючи інтегральні оператори зворотніх переходів  $\Lambda_{n_1}^{-1}, \Lambda_{n_2}^{-1}$ , визначених формулою (15), одержимо розв'язок вихідної крайової задачі (1):

$$\begin{bmatrix} u_k(\tau, x, y, z) \\ T_k(\tau, x, y, z) \\ P_k(\tau, x, y, z) \end{bmatrix} = \frac{4}{\Delta l_1 \Delta l_2} \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n_1=1}^{\infty} \sum_{n_2=1}^{\infty} \begin{bmatrix} u_{n_1 n_2 m}(\tau) \\ T_{n_1 n_2 m}(\tau) \\ P_{n_1 n_2 m}(\tau) \end{bmatrix} \frac{V_k(z, \beta_m)}{\|V_k(z, \beta_m)\|^2} \sin\left(\frac{\pi n_2 x}{\Delta l_2}\right) \sin\left(\frac{\pi n_1 x}{\Delta l_1}\right)$$

1. Лыков А.В. Теория теплопроводности.//М.: Высшая школа, 1967.- С.600.
2. Лыков А.В. Теория сушки//М.: Энергия, 1968.- С.472.