

УДК 539.374;539.214

С.Дячук, канд.техн.наук; М.Михайлишин, канд.фіз.-мат.наук

Тернопільський державний технічний університет імені Івана Пулюя

ОПТИМІЗАЦІЯ ПРУЖНО-ПЛАСТИЧНОГО ДЕФОРМУВАННЯ ТОНКОЇ ОБОЛОНКИ ОБЕРТАННЯ

Розглядається задача визначення зовнішнього навантаження під дією якого плоска круга заготовка в результаті пружнопластичного деформування переходить в оболонку обертання з заданою формою меридіана на кінець процесу навантаження. Припускається, що забезпечується просте навантаження і справедлива деформаційна теорія пластичності. Задача зведена до послідовності лінійних крайових задач, які розв'язуються методом дискретної ортогоналізації Годунова. Для лінеаризації фізичної нелінійності використано метод змінних параметрів пружності.

Умовні позначення:

- N_1, N_2 — інтенсивності зусиль (меридіональне і колове);
 M_1, M_2 — інтенсивності моментів в меридіональному і коловому напрямках;
 ψ — кут між нормаллю до поверхні і віссю обертання оболонки;
 Θ — зміна кута ψ за рахунок деформації;
 S_0 — дугова координата точки zdeформованої поверхні;
 w — нормальне переміщення точки серединної поверхні;
 $\varepsilon_{10}, \varepsilon_{20}, \chi_1, \chi_2$ — деформації і зміни кривин в меридіональному “1” і коловому “2” напрямках;

Розглянемо задачу знаходження зовнішнього навантаження, під дією якого здійснюється таке пружне чи пружнопластичне деформування тонкої заготовки, котре приводить до отримання необхідної форми деталі на кінець процесу навантаження. Така задача може виникнути в зв'язку з необхідністю керування формою поверхні тонкостінної конструкції, як, наприклад, в сучасній антенній техніці.

В деяких часткових випадках може виникати задача отримання заданого розподілу деяких складових поля переміщення, наприклад, поля прогинів.

Будемо вважати, що заготовка являє собою деяку тонку оболонку обертання (зокрема кругла пластинка), рівняння серединної поверхні якої задається в параметричній формі $r_0 = r_0(s_0)$, $Z_0 = Z_0(s_0)$, $0 \leq s_0 \leq s_{01}$. Нехай в результаті навантаження форма zdeформованої серединної поверхні описується рівнянням $r' = r'(s'_0)$, $Z' = Z'(s'_0)$, $0 \leq s'_0 \leq s'_{01}$. Сформулюємо слідуючий критерій мети

$$I = \int_0^{s_{01}} \left\{ \left[r'_0(s_0) - r(s_0) \right]^2 + \left[Z'_0(s_0) - Z(s_0) \right]^2 \right\} r_0 ds_0 \Rightarrow \min, \quad (1)$$

де $r(s), Z(s)$, $0 \leq s \leq s_1$ - параметричні рівняння поверхні, яку бажано отримати. Підінтегральна функція в (1) задає квадрат відстані між точками серединної поверхні zdeформованої заготовки і необхідної деталі, причому точки на обох поверхнях визначаються однією і тією ж дуговою координатою s_0 .

Таким чином, критерій мети вимагає мінімізації суми квадратів відстаней між точками обох поверхонь, причому сумування здійснюється по всіх точках поверхні заготовки. Легко бачити, що ми знехтували зміною довжини меридіана за рахунок деформування, тобто такий критерій можна застосовувати для випадку малих деформацій.

Для радіальної і вертикальної координат точки zdeформованої поверхні можна записати

$$\begin{aligned} r'(s_0) &= r_0(s_0) + u(s_0) \cos \psi_0 + w(s_0) \sin \psi_0; \\ Z'(s_0) &= Z_0(s_0) + u(s_0) \sin \psi_0 + w(s_0) \cos \psi_0. \end{aligned} \quad (2)$$

Підставляючи (2) в (1), критерій мети перепишеться так

$$I = \int_0^{s_{01}} \left\{ \left[r_0 + u \cos \psi_0 + w \sin \psi_0 - r(s_0) \right]^2 + \left[Z_0 + u \sin \psi_0 - w \cos \psi_0 - Z(s_0) \right]^2 \right\} r_0 ds_0 \Rightarrow \min, \quad (3)$$

В деяких часткових випадках може ставитися задача отримання заданого поля переміщень. Наприклад, якщо ми хочемо, щоб кожна точка серединної поверхні заготовки з координатою s_0 отримала задане нормальне переміщення $w_{зад}(s_0)$, то критерій мети можна прийняти в такому вигляді

$$I_1 = \int_0^{s_{01}} (w(s_0) - w_{зад}(s_0))^2 r_0 ds_0 \Rightarrow \min. \quad (4)$$

При розв'язуванні задачі будемо вважати, що реалізується просте навантаження і справедлива деформаційна теорія пластичності.

Приймемо геометрично нелінійні рівняння рівноваги оболонки і геометричні співвідношення в квадратичному наближенні і фізичні співвідношення деформаційної теорії пластичності [1]. В якості критерія мети використаємо (3). Клас зовнішніх навантажень обмежимо поки що тільки розподіленим нормальним до поверхні оболонки тиском $q_n(s_0)$.

$$\begin{aligned}
 \frac{dN_1}{ds_0} &= \frac{N_2 - N_1}{r_0} \cos \psi_0 - \frac{1}{\rho_{10}} Q_1 - q_s; \\
 \frac{dQ_1}{ds_0} &= \frac{1}{\rho_{10}} N_1 + \frac{\sin \psi_0}{r_0} N_2 - \frac{Q_1}{r_0} \cos \psi_0 - q_n; \\
 \frac{dM_1}{ds_0} &= \frac{M_2 - M_1}{r_0} \cos \psi_0 + Q_1 + N_1 \Theta - \frac{\sin \psi_0}{r_0} M_2 \Theta; \\
 \varepsilon_{10} &= \frac{du}{ds_0} + \frac{w}{\rho_{10}} + \frac{1}{2} \Theta^2; \quad \varepsilon_{20} = \frac{u}{r_0} \cos \psi_0 + \frac{w}{\rho_{20}}; \\
 \chi_1 &= \frac{d\Theta}{ds_0}; \quad \chi_2 = \Theta \frac{\cos \psi_0}{r_0} - \frac{1}{2} \frac{\Theta^2}{\rho_{20}}; \quad \Theta = \frac{u}{\rho_{10}} - \frac{dw}{ds_0}. \\
 N_1 &= I_1 \varepsilon_{10} + I'_1 \varepsilon_{20} + I_2 \chi_1 + I'_2 \chi_2; \\
 N_2 &= I_1 \varepsilon_{20} + I'_1 \varepsilon_{10} + I_2 \chi_2 + I'_2 \chi_1; \\
 M_1 &= I_2 \varepsilon_{10} + I'_2 \varepsilon_{20} + I_3 \chi_1 + I'_3 \chi_2; \\
 M_2 &= I_2 \varepsilon_{20} + I'_2 \varepsilon_{10} + I_3 \chi_2 + I'_3 \chi_1, \\
 \text{де } I_k &= \int_{-h/2}^{h/2} \frac{E^*}{1 - \nu^{*2}} z^{k-1} dz; \quad I'_k = \int_{-h/2}^{h/2} \frac{E^* \nu^*}{1 - \nu^{*2}} z^{k-1} dz, \quad k=1,2,3
 \end{aligned} \tag{5}$$

Задача полягає в визначенні такого розподілу $q_n(s_0)$, при якому розв'язок системи (5) при заданих крайових умовах мінімізує критерій мети (3). Для отримання розрахункової системи рівнянь і відповідних крайових умов використаємо варіаційний метод. Будемо вважати, що існує єдиний розв'язок задачі, який належить множині дійсних неперервно диференційованих функцій на інтервалі $[0, s_{01}]$.

Запишемо розширений функціонал задачі.

$$\begin{aligned}
 J &= \int_0^{s_{01}} \left\{ \left[r_0 + u \cos \psi_0 + w \sin \psi_0 - r \right]^2 + \right. \\
 &+ \left[Z_0 + u \sin \psi_0 - w \cos \psi_0 - Z \right]^2 + \\
 &+ \lambda_1 \left[\frac{dN_1}{ds_0} - \frac{N_2 - N_1}{r_0} \cos \psi_0 + \frac{1}{\rho_{10}} Q_1 \right] + \\
 &+ \lambda_2 \left[\frac{dQ_1}{ds_0} - \frac{1}{\rho_{10}} N_1 - \frac{\sin \psi_0}{r_0} N_2 + \frac{Q_1}{r_0} \cos \psi_0 + q_n \right] + \\
 &+ \lambda_3 \left[\frac{dM_1}{ds_0} - \frac{M_2 - M_1}{r_0} \cos \psi_0 - Q_1 - N_1 \Theta + \frac{\sin \psi_0}{r_0} M_2 \Theta \right] + \\
 &+ \lambda_4 \left[\frac{du}{ds_0} - \varepsilon_{10} + \frac{w}{\rho_{10}} + \frac{1}{2} \Theta^2 \right] +
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & +\lambda_5 \left[\frac{d\Theta}{ds_0} - \chi_1 \right] + \lambda_6 \left[\frac{dw}{ds_0} - \frac{u}{\rho_{10}} + \Theta \right] + \\
 & +g_1 \left[\varepsilon_{20} - \frac{u}{r_0} \cos \psi_0 - \frac{w}{\rho_{20}} \right] + g_2 \left[\chi_2 - \Theta \frac{\cos \psi_0}{r_0} + \frac{1}{2} \frac{\Theta^2}{\rho_{20}} \right] + \\
 & +g_3 \left[N_1 - I_1 \varepsilon_{10} - I'_1 \varepsilon_{20} - I_2 \chi_1 - I'_2 \chi_2 \right] + \\
 & +g_4 \left[N_2 - I_1 \varepsilon_{20} - I'_1 \varepsilon_{10} - I_2 \chi_2 - I'_2 \chi_1 \right] + \\
 & +g_5 \left[M_1 - I_2 \varepsilon_{10} - I'_2 \varepsilon_{20} - I_3 \chi_1 - I'_3 \chi_2 \right] + \\
 & +g_6 \left[M_2 - I_2 \varepsilon_{20} - I'_2 \varepsilon_{10} - I_3 \chi_2 - I'_3 \chi_1 \right]. \quad (6)
 \end{aligned}$$

Як відомо, необхідна умова мінімуму функціоналу J є умова його стаціонарності

$$\delta J = 0 \quad (7)$$

При знаходженні першої варіації розширеного функціоналу вважаємо узагальнені напруження, узагальнені деформації і переміщення незалежними між собою. Слід зауважити, що ми припускаємо справедливими фізичні співвідношення деформаційної теорії пластичності, що означає, що в кожній точці конструкції здійснюється активне навантаження і при цьому навантаження просте. Таким чином, зусилля і моменти однозначно визначаються деформаціями і діаграмою матеріалу. Якщо відомі деформації для довільної точки з координатою z поперечного перерізу оболонки, то на діаграмі матеріалу $\sigma_i = \sigma_i(\varepsilon_i)$ знаходимо відповідне значення інтенсивності напружень, а також і значення функції пластичності $\psi(z)$. Це дає можливість підрахувати в кожній точці конструкції змінні параметри пружності $E^*(z), \nu^*(z)$ і однозначно визначити I_k, I'_k ($k=1,2,3$).

Отже при знаходженні першої варіації розширеного функціоналу слід вважати, що інтеграли (узагальнені змінні модулі пружності) варіюванню не підлягають.

Записавши умову стаціонарності (7) і прирівнявши коефіцієнти при незалежних варіаціях до нуля, отримуємо повну систему рівнянь задачі, яка включає в себе всі рівняння прямої задачі (коефіцієнти при варіаціях незалежних між собою множників Лагранжа) і рівняння спряженої задачі, а також деяке рівняння зв'язку між прямою та спряженою задачами. Останнє рівняння, як правило, служить для відшукування функції керування $q_n(s_0)$.

Пропускаючи проміжні викладки, приведемо остаточну систему рівнянь задачі

$$\begin{aligned}
 \frac{dN_1}{ds_0} &= \frac{N_2 - N_1}{r_0} \cos \psi_0 - \frac{1}{\rho_{10}} Q_1 - q_s; \\
 \frac{dQ_1}{ds_0} &= \frac{1}{\rho_{10}} N_1 + \frac{\sin \psi_0}{r_0} N_2 - \frac{Q_1}{r_0} \cos \psi_0 - q_n(s_0); \\
 \frac{dM_1}{ds_0} &= \frac{M_2 - M_1}{r_0} \cos \psi_0 + Q_1 + N_1 \Theta - \frac{\sin \psi_0}{r_0} M_2 \Theta; \\
 \frac{du}{ds_0} &= \varepsilon_{10} - \frac{w}{\rho_{10}} - \frac{1}{2} \Theta^2; \\
 \frac{d\Theta}{ds_0} &= \chi_1; \\
 \frac{dw}{ds_0} &= \frac{u}{\rho_{10}} - \Theta;
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\varepsilon_{20} &= \frac{u}{r_0} \cos \psi_0 + \frac{w}{\rho_{20}}; \\ \chi_2 &= \Theta \frac{\cos \psi_0}{r_0} - \frac{1}{2} \frac{\Theta^2}{\rho_{20}};\end{aligned}\quad (8)$$

$$\begin{aligned}N_1 &= I_1 \varepsilon_{10} + I'_1 \varepsilon_{20} + I_2 \chi_1 + I'_2 \chi_2; \\ N_2 &= I_1 \varepsilon_{20} + I'_1 \varepsilon_{10} + I_2 \chi_2 + I'_2 \chi_1; \\ M_1 &= I_2 \varepsilon_{10} + I'_2 \varepsilon_{20} + I_3 \chi_1 + I'_3 \chi_2; \\ M_2 &= I_2 \varepsilon_{20} + I'_2 \varepsilon_{10} + I_3 \chi_2 + I'_3 \chi_1;\end{aligned}\quad (9)$$

$$\begin{aligned}\frac{d\lambda_1}{ds_0} &= g_3 - \frac{\lambda_2}{\rho_{10}} - \lambda_3 \Theta; \\ \frac{d\lambda_2}{ds_0} &= \frac{\lambda_1}{\rho_{10}} - \lambda_3; \\ \frac{d\lambda_3}{ds_0} &= g_5; \\ \frac{d\lambda_4}{ds_0} &= -\frac{\lambda_4}{r_0} \cos \psi_0 - \frac{\lambda_6}{\rho_{10}} - \frac{g_1}{r_0} \cos \psi_0 + 2 \left[\frac{u + \cos \psi_0 (r_0 - r)}{r_0} + \frac{\sin \psi_0 (Z_0 - Z)}{r_0} \right]; \\ \frac{d\lambda_5}{ds_0} &= -\frac{\lambda_5}{\rho_{10}} \cos \psi_0 - \lambda_3 N_1 + \lambda_3 M_2 \frac{\sin \psi_0}{r_0} + \lambda_4 \Theta + \lambda_6 - \\ &\quad - g_2 \frac{\cos \psi_0}{r_0} + \frac{1}{\rho_{20}} g_2 \Theta; \\ \frac{d\lambda_6}{ds_0} &= -\frac{\lambda_6}{r_0} \cos \psi_0 + \frac{\lambda_4}{\rho_{10}} - \frac{g_1}{\rho_{10}} + 2 \left[\frac{w + \sin \psi_0 (r_0 - r)}{r_0} - \frac{\cos \psi_0 (Z_0 - Z)}{r_0} \right]; \\ g_4 &= \frac{1}{r_0} (\lambda_1 \cos \psi_0 + \lambda_2 \sin \psi_0); \\ g_6 &= \frac{\lambda_3}{r_0} (\cos \psi_0 - \Theta \sin \psi_0); \\ g_3 I_1 + g_5 I_2 &= -(\lambda_4 + g_4 I'_1 + g_6 I'_2); \\ g_3 I_2 + g_5 I_3 &= -(\lambda_5 + g_4 I'_2 + g_6 I'_3); \\ g_1 &= g_3 I'_1 + g_4 I_1 + g_5 I'_2 + g_6 I_2; \\ g_2 &= g_3 I'_2 + g_4 I_2 + g_5 I'_3 + g_6 I_3.\end{aligned}\quad (10)$$

Рівняння зв'язку між прямою та спряженою задачами має вигляд

$$\lambda_2 = 0 \quad (12)$$

З умови стаціонарності розширеного функціоналу (7) отримуємо також умову трансверсальності

$$\left(\lambda_1 r_0 \delta N_1 + \lambda_2 r_0 \delta Q_1 + \lambda_3 r_0 \delta M_1 + \lambda_4 r_0 \delta u + \lambda_5 r_0 \delta \Theta + \lambda_6 r_0 \delta w \right) \Big|_0^{s_{01}} = 0, \quad (13)$$

яка служить для встановлення крайових умов для спряженої задачі при конкретних заданих крайових умовах прямої задачі.

Аналізуючи повну систему рівнянь задачі (8)-(11) бачимо, що потрібно знайти такий розв'язок крайової задачі для конкретних крайових умов і невідомої функції $q_n(s_0)$, щоб функція λ_2 була тотожно рівна нулю. Оскільки рівняння (12) не містить

явно шуканої функції $q_n(s_0)$, то важко запропонувати якийсь алгоритм, який забезпечив би виконання всіх рівнянь отриманої системи. В зв'язку з цим запропонуємо замість критерію мети (3) слідуючий критерій

$$I_1 = \int_0^{s_{01}} \alpha q_n^2(s_0) r_0 ds_0 + (1-\alpha) I, \quad (14)$$

де α - ваговий коефіцієнт.

При $\alpha=0$ критерій (14) перетворюється в критерій (3). Система рівнянь задачі (9)-(11) залишиться без змін при використанні нового критерію (14) за винятком рівнянь для λ_4 та λ_6 з (10), в яких останній член необхідно домножити на $(1-\alpha)$. Рівняння (13) також зміниться і прийме вигляд

$$q_n(s_0) = \frac{\lambda_2}{2\alpha} \quad (15)$$

Виключаючи з другого рівняння системи (8) $q_n(s_0)$ з допомогою співвідношення (15), отримемо замкнуту систему рівнянь відносно дванадцяти невідомих функцій- шести основних невідомих функцій прямої задачі $N_1, Q_1, M_1, u, \theta, w$ і шести множників Лагранжа λ_1 - λ_6 .

Оптимальний розв'язок, який мінімізує критерій (14), визначається рівняннями (15). Оскільки критерій мети (14) співпадає з вихідним критерієм (3) при $\alpha=0$, то, аналізуючи рівняння (12) і (15) можна зробити висновок, що при $\alpha \rightarrow 0$ функція $\lambda_2 \rightarrow 0$ і оптимальний розв'язок повинен отримуватися з рівняння

$$q_n(s_0) = \lim_{\alpha \rightarrow 0} \frac{\lambda_2}{2\alpha} \quad (16)$$

Таким чином, для отримання шуканого розв'язку потрібно побудувати ітераційний процес по параметру α . Надаючи α деяке близьке до одиниці значення, наприклад, $\alpha=0.9$ і розв'язуючи крайову задачу, знаходимо перше наближення розв'язку $q_n^{(1)}(s_0)$. Отриманий розв'язок використовується в якості початкового наближення при розв'язуванні крайової задачі при деякому меншому α (наприклад $\alpha=0.5$). Знайдене друге наближення $q_n^{(2)}(s_0)$ задається в якості початкового наближення при слідуючому значенні α і т.д. Процес послідовних наближень закінчується при умові

$$\max_{s_0 \in [0, s_{01}]} \left\{ \left| r_0 + u \cos \psi_0 + w \sin \psi_0 - r \right| + \left| z_0 + u \sin \psi_0 - w \cos \psi_0 - Z \right| \right\} \leq \varepsilon, \quad (17)$$

де ε - необхідна точність.

Розв'язування крайової задачі в кожному наближенні здійснюється з допомогою розробленого алгоритму розв'язування прямої задачі пружнопластичного деформування на основі деформаційної теорії пластичності і методу змінних параметрів пружності.

Для ілюстрації результативності запропонованого алгоритму розглянемо слідуючу задачу.

Необхідно круглу кільцеву пластинку здеформувати з допомогою нормального до поверхні пластинки розподіленого тиску так, щоб на кінець процесу навантаження форма поверхні пластинки описувалася рівнянням

$$Z' = A(R^2 - r^2) \quad (18)$$

Початково пластинка знаходиться в площині $Z_0 = 0$, $r_0 \leq r \leq R$.

Нехай край $r=r_0$ жорстко зацімлений в круглу жорстку шайбу радіусу r_0 , а край $r=R$ шарнірно закріплений, тобто крайові умови

$$u=0, \theta=0, Q_1=0 \text{ при } r=r_0;$$

$$u=0, w=0, M_1=0 \text{ при } r=R. \quad (19)$$

Умова трансверсальності (13) в даному випадку з врахуванням умов (19) прийме вигляд

$$\begin{aligned} & (\lambda_{1r} \delta N_1 + \lambda_{2r} \delta Q_1 + \lambda_{5r} \delta \Theta)_{r=R} - \\ & - (\lambda_{1r} \delta N_1 + \lambda_{3r} \delta M_1 + \lambda_{6r} \delta w)_{r=r_0} = 0. \end{aligned} \quad (20)$$

Звідси знаходимо крайові умови для спряженої задачі

$$\begin{aligned} \lambda_1=0, \lambda_3=0, \lambda_6=0 \text{ при } r=r_0; \\ \lambda_1=0, \lambda_2=0, \lambda_5=0 \text{ при } r=R. \end{aligned} \quad (21)$$

Використаємо безрозмірні величини аналогічно, як і в роботі [2].

$$\begin{aligned} x &= r/R; & u^* &= 3(1-\nu^2)R/h_0^2; \\ N_1^* &= \frac{3(1-\nu^2)R^2}{Eh_0^3} N_1; & M_r^* &= \frac{\sqrt{[3(1-\nu^2)]^3} R^2}{Eh_0^4} M_r; \\ w^* &= \sqrt{3(1-\nu^2)} w/h_0; & \Theta^* &= \sqrt{3(1-\nu^2)} \frac{R}{h_0} \Theta; \\ Q_r^* &= \frac{\sqrt{[3(1-\nu^2)]^3} R^2}{Eh_0^4} Q_r; & q_n^* &= \frac{\sqrt{[3(1-\nu^2)]^3} R^4}{Eh_0^4} q_n; \\ x_0 &= r_0/R, \end{aligned} \quad (22)$$

де r_0, R - відповідно внутрішній та зовнішній радіус пластини.

Після відповідних перетворень отримаємо слідуєчу крайову задачу (зірочки в позначеннях безрозмірних величин опускаємо). В приведеній системі рівнянь геометрична нелінійність лінеаризована методом Ньютона-Канторовича.

$$\begin{aligned} \frac{dN_1}{dx} &= -\frac{N_1}{x} + \frac{1}{x^2} (I_1 u + I_2 \Theta) + \frac{1}{xI_*} (N_1 I_{31} + M_2 I_{12}); \\ \frac{dQ}{dx} &= -\frac{Q_1}{x} + \frac{\lambda_2}{2\alpha}; \\ \frac{dM_1}{dx} &= -\frac{M_1}{x} + Q + \frac{1}{x^2} (I_2 u + I_3 \Theta) + \frac{1}{xI_*} (N_1 I_{32} + M_1 I_{13}) + \\ &+ N_1 \Theta_x + N_{1x} \Theta - N_{1x} \Theta_x; \\ \frac{du}{dx} &= \frac{1}{I_*} (N I_3 + M I_2) - \Theta \Theta_x + \frac{1}{2} (\Theta_x)^2; \\ \frac{d\Theta}{dx} &= \frac{1}{I_*} (M \bar{I}_1 - N I_2); \\ \frac{d\bar{w}}{dx} &= -\Theta; \\ \frac{d\lambda_1}{dx} &= \frac{1}{I_*} \left(\bar{I}_2 \lambda_5 - \bar{I}_3 \lambda_4 - \frac{1}{x} (\bar{I}_{31} \lambda_1 + \bar{I}_{32} \lambda_3) \right) - (\Theta_x \lambda_3 + \\ &+ \Theta \lambda_{3x} - \Theta_x \lambda_{3x}); \\ \frac{d\lambda_2}{dx} &= -\lambda_3; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \frac{d\lambda_3}{dx} &= \frac{1}{I_*} \left(I_2\lambda_4 - I_1\lambda_5 - \frac{1}{x} (I_{12}\lambda_1 + \bar{I}_{13}\lambda_3) \right); \\
 \frac{d\lambda_4}{dx} &= -\frac{\lambda_4}{x} - \frac{1}{x^2} (I_1\lambda_1 - I_2\lambda_3) + \\
 &\quad + \frac{1}{xI_*} \left(I_{31}\lambda_4 + I_{12}\lambda_5 + \frac{\lambda_1}{x} (I'_1I_{31} + I'_2I_{12}) + \frac{\lambda_3}{x} (I'_1I_{32} + I'_2I_{13}) - \right. \\
 &\quad \left. -4\beta w_0(1-\alpha)(x+\beta u)(w-w_0(1-(x+\beta u)^2)) \right); \\
 \frac{d\lambda_5}{dx} &= -\frac{\lambda_5}{x} + \lambda_6 + (\lambda_4\Theta_x + \lambda_{4x}\Theta - \lambda_{4x}\Theta_x) - \\
 &\quad -(\lambda_3N_{1x} + \lambda_{3x}N_1 - \lambda_{3x}N_{1x}) - \\
 &\quad -\frac{1}{x^2} (I_2\lambda_1 + I_3\lambda_3) + \\
 &\quad + \frac{1}{xI_*} \left(I_{13}\lambda_5 + I_{32}\lambda_4 + \frac{\lambda_1}{x} (I'_2I_{31} + I'_3I_{12}) + \frac{\lambda_3}{x} (I'_2I_{32} + I'_3I_{13}) \right); \\
 \frac{d\lambda_6}{dx} &= -\frac{\lambda_6}{x} + 2(1-\alpha) \{ w - w_0 [1 - (x + \beta u)^2] \},
 \end{aligned} \tag{23}$$

з крайовими умовами

$$x=x_0: u=0, \Theta=0, Q_1=0, \lambda_1=0, \lambda_3=0, \lambda_6=0;$$

$$x=1: u=0, w=0, M_1=0, \lambda_1=0, \lambda_2=0, \lambda_5=0, \tag{24}$$

де введено позначення

$$N = N_1 - I'_1 \frac{u}{x} - I'_2 \frac{\Theta}{x}; \quad M = M_1 - I'_2 \frac{u}{x} - I'_3 \frac{\Theta}{x};$$

$$I_1 = \frac{1}{E} \bar{I}_1; \quad I_2 = \frac{\sqrt{3(1-\nu^2)}}{E} \bar{I}_2; \leq \quad I_3 = \frac{3(1-\nu^2)}{E} \bar{I}_3; \Sigma$$

$$I'_1 = \frac{1}{E} \bar{I}'_1; \quad I'_2 = \frac{\sqrt{3(1-\nu^2)}}{E} \bar{I}'_2; \quad I'_3 = \frac{3(1-\nu^2)}{E} \bar{I}'_3;$$

$$I_k = \int_{-1/2}^{1/2} \frac{E^*}{1-\nu^{*2}} \varsigma^{k-1} d\varsigma; \quad I'_k = \int_{-1/2}^{1/2} \frac{E^* \nu^*}{1-\nu^{*2}} \varsigma^{k-1} d\varsigma, \quad k=1,2,3$$

$$d = 2(1+\nu)\psi + 1 - 2\nu; \quad E^* = \frac{E}{d}; \quad \nu^* = \frac{(1+\nu)\psi - 1 + 2\nu}{d};$$

$$\varepsilon_{ii} = \varepsilon_{i0} + \sqrt{3(1-\nu^2)} \varsigma \chi_i (i=1,2); \quad \varepsilon_{33} = -\frac{\nu^*}{1-\nu^*} (\varepsilon_{11} + \varepsilon_{22});$$

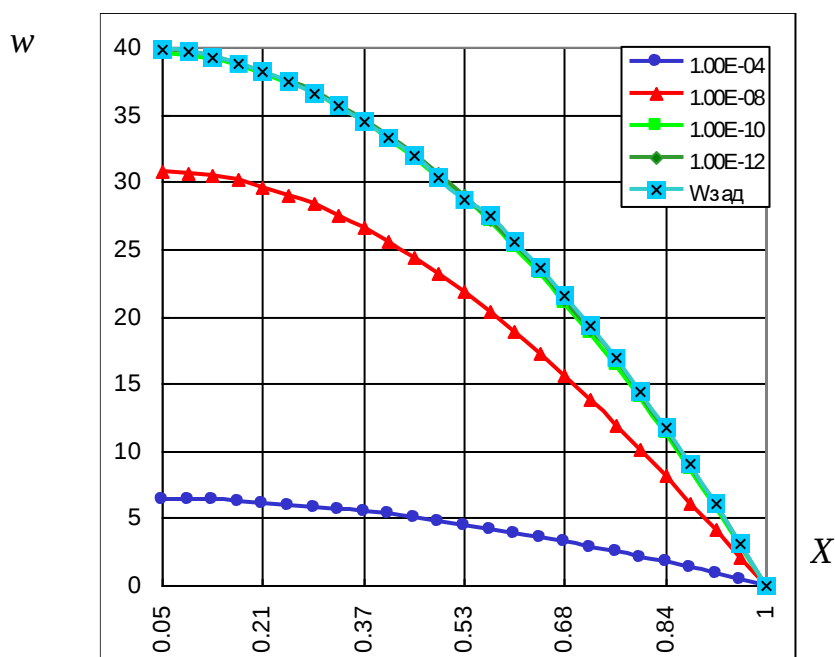
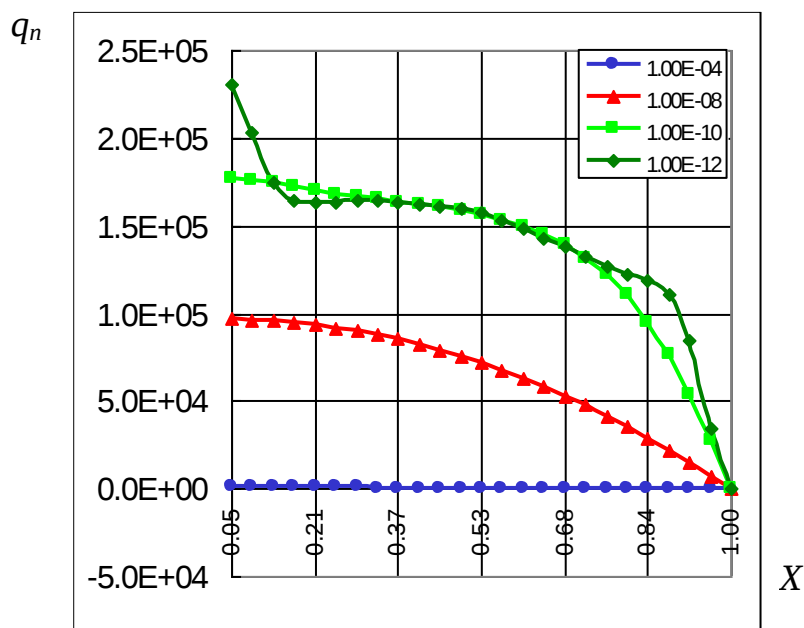
$$I_{12} = \bar{I}_1 \bar{I}'_2 - \bar{I}'_1 \bar{I}_2; \quad I_{13} = \bar{I}_1 \bar{I}'_3 - \bar{I}'_1 \bar{I}_3; \quad I_{31} = \bar{I}_3 \bar{I}'_1 - \bar{I}'_3 \bar{I}_1;$$

$$I_{32} = \bar{I}_3 \bar{I}'_2 - \bar{I}'_3 \bar{I}_2; \quad I_* = \bar{I}_1 \bar{I}_3 - \bar{I}_2^2;$$

$$w_0 = \frac{AR^2}{h} \sqrt{3(1-\nu^2)}.$$

Для розв'язку оптимізаційних задач розроблено набір програм, які базуються на алгоритмах та програмах розв'язування геометрично та фізично нелінійних задач пружнопластичного деформування тонкостінних оболонок обертання.

На графіках (рис. 1-2) приведені результати розрахунку при заданому рівнянні серединної поверхні на кінець етапу навантаження $y=40*(1-x^2)$.

Рис.1. Залежність $w(x)$ Рис.2. Залежність $q_n(x)$

На графіках (рис.1) приведені залежності $w(x)$ для різних значень α . Проведено розв'язок прямої задачі з отриманими з розв'язку оптимізаційної задачі значеннями оптимального навантаження при $\alpha = 10^{-10}$ та $\alpha = 10^{-12}$ (рис.2). Числовий аналіз результатів показує, що відхилення форми поверхні на кінець етапу навантаження при розв'язуванні прямої задачі з навантаженням отриманим при $\alpha = 10^{-12}$ рівне $\pm 0,5\%$, а при $\alpha = 10^{-10}$ відхилення форми складає $\pm 2\%$. Значить можна зробити висновок, що для технологічних розрахунків достатньо при проведенні оптимізаційних розрахунків обмежуватись $\alpha = 10^{-8} - 10^{-10}$.

The solution of the external load deformation problem is obtained. Under the action of this load as a result of elastic deformation round slab turns into the shell of rotation with the given meridian form at the end of the load process.

Література

1. Валиашвили Н.В. Методы расчета оболочек вращения на ЭЦВМ.- М.,1976. –279 с.
2. Григоренко Я.М., Мукоєд А.П. Розв'язування лінійних і нелінійних задач теорії оболонок на ЕОМ.: Навч.посібник. К.:Либідь, 1992. – 152 с.

Одержано 08.12.2000 р.