*УДК 517.946*

**М.Шелестовська, канд. техн. наук**
*Тернопільська академія народного господарства*

# НЕСТАЦІОНАРНІ ТЕМПЕРАТУРНІ ПОЛЯ У НАПІВСФЕРИЧНИХ СУЦІЛЬНИХ ТІЛАХ

*Методом фундаментальних функцій побудовано точний аналітичний розв'язок алгоритмічного характеру нестаціонарної задачі теплопровідності для ізотропних напівсферичних суцільних тіл.*

Задача про структуру нестаціонарного температурного поля у напівсферичному ізотропному суцільному тілі математично приводить до побудови обмеженого в області

$$D = \left\{ (t, r, \varphi, \mu) : t \in (0, \infty),\ r \in (0, R),\ \varphi \in [0, 2\pi),\ \mu \in [0,1];\ \mu = \cos\theta \right\}$$

розв'язку рівняння теплопровідності параболічного типу [ 1 ]

$$\frac{1}{a^2}\frac{\partial T}{\partial t} + \frac{\gamma^2}{a^2}T - \Delta_3[T] = f(t, r, \varphi, \mu);\ a > 0, \gamma^2 \ge 0 \qquad (1)$$

за початковою умовою

$$T(t, r, \varphi, \mu)\Big|_{t=0} = g(r, \varphi, \mu) \qquad (2)$$

та крайовими умовами:

$$\lim_{r \to 0} \frac{\partial T}{\partial r} = 0, \quad \left( h_{21}\frac{\partial}{\partial r} + h_{22} \right) T \Big|_{r=R} = g_2(t, \varphi, \mu) \qquad (3)$$

$$T(t, r, \varphi, \mu)\Big|_{\mu=0} = \omega_1(t, r, \varphi) \qquad (4)$$

$$T(t, r, \varphi + 2\pi, \mu) = T(t, r, \varphi, \mu)\,. \qquad (5)$$

$$\Delta_3 = \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{2}{r}\frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{1}{1-\mu^2}\frac{\partial^2 T}{\partial \varphi^2} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial \mu}[(1-\mu^2)\frac{\partial T}{\partial \mu}], h_{21} + h_{22} \ne 0, h_{2j} \ge 0\,.$$

Застосуємо до задачі (1) - (5) скінченне інтегральне перетворення Лежандра-Фур'є щодо кутових змінних $(\varphi, \mu)$ [ 2 ]:

$$F_{nm}[g(\varphi, \mu)] = \int_0^1 \int_0^{2\pi} g(\varphi, \mu) e^{-im\varphi} P_n^m(\mu) d\varphi d\mu \equiv g_{mn}\,. \qquad (6)$$

Тут $P_n^m(\mu)$ - приєднаний многочлен Лежандра 1-го роду. При $n = 2k + 1, m = 2s$ або при $n = 2k, m = 2s + 1$ внаслідок тотожності

$$F_{nm}\left\{ \frac{1}{1-\mu^2}\frac{\partial^2 u}{\partial \varphi^2} + \frac{\partial}{\partial \mu}[(1-\mu^2)\frac{\partial u}{\partial \mu}] \right\} = -n(n+1)u_{mn} + u_m(t, r, \mu)\Big|_{\mu=0} \frac{dP_n^m(0)}{d\mu} \qquad (7)$$

отримуємо задачу побудови обмеженого в області

$$D_1 = \{(t,r): t \in (0,\infty), r \in (0,R)\}$$

розв'язку В-параболічного рівняння теплопровідності

$$\left(\frac{1}{a^2}\frac{\partial}{\partial t}+\frac{\gamma^2}{a^2}\right)T_{mn}(t,r)-\left(\frac{\partial^2}{\partial r^2}+\frac{2}{r}\frac{\partial}{\partial r}-\frac{(n+1/2)^2-1/4}{r^2}\right)T_{mn}(t,r)=F_{mn}(t,r) \tag{8}$$

за початковою умовою

$$T_{mn}(t,r)\Big|_{t=0} = g_{mn}(r) \tag{9}$$

та крайовими умовами

$$\lim_{r\to 0}\frac{\partial T_{mn}}{\partial r}=0,\quad \left(h_{21}\frac{\partial}{\partial r}+h_{22}\right)T_{mn}(t,r)\Big|_{r=R}=g_{2mn}(t) \tag{10}$$

У рівності (8) бере участь функція

$$F_{mn}(t,r)=f_{mn}(t,r)+r^{-2}w_{1m}(t,r)\frac{dP_n^m(0)}{d\mu}.$$

Розв'язок задачі (8)-(10) побудуємо методом інтегрального перетворення Ганкеля 1-го роду [ 3 ]:

$$H_n[g(r)]=\int_0^R g(r)J_{n+1/2,1/2}(\beta_s r)r^2 dr \equiv g_s \tag{11}$$

$$H_n^{-1}[g_s]=\sum_{s=1}^{\infty} g_s\frac{J_{n+1/2,1/2}(\beta_s r)}{\left\|J_{n+1/2,1/2}(\beta_s r)\right\|^2}\equiv g(r)\quad . \tag{12}$$

У рівностях (11), (12) $J_{\nu,\alpha}(x)=x^{-\alpha}J_\nu(x)$, $J_\nu(x)$ - функція Бесселя першого роду порядку $\nu$,

$$\left\|J_{n+1/2,1/2}(\beta_s r)\right\|^2 \equiv \int_0^R [J_{n+1/2,1/2}(\beta_s r)]^2 r^2 dr = 2^{-1}R^3[J^2_{n+1/2,1/2}(\beta_s R)-$$

$-(2n+1)J_{n+1/2,1/2}(\beta_s R)J_{n+3/2,3/2}(\beta_s R)+\beta_s^2 R^2 J^2_{n+3/2,3/2}(\beta_s R)]$ - квадрат норми спектральної функції, $\beta_s$ - корені трансцендентного рівняння, що утворюють дискретний спектр .

$$\delta(\beta)\equiv\left(\frac{n}{R}h_{21}+h_{22}\right)J_{n+1/2,1/2}(\beta R)-h_{21}R\beta^2 J_{n+3/2,3/2}(\beta R)=0.$$

Оскільки $\left(\frac{d^2}{dr^2}+\frac{2}{r}\frac{d}{dr}+\beta_s^2-\frac{(n+1/2)^2-1/4}{r^2}\right)J_{n+1/2,1/2}(\beta_s r)\equiv 0,$

то має місце тотожність

$$H_n\left[\left(\frac{d^2}{dr^2}+\frac{2}{r}\frac{d}{dr}-\frac{(n+1/2)^2-1/4}{r^2}\right)g(r)\right]=-\beta_s^2 g_s+(h_{21})^{-1}R^2 J_{n+1/2,1/2}(\beta_s R)\times$$
$$\times(h_{21}\frac{dg}{dr}+h_{22}g)\Big|_{r=R}. \qquad (13)$$

У результаті застосування до задачі (8) – (10) інтегрального оператора $H_n$ за правилом (11) внаслідок тотожності (13) одержуємо задачу Коші [4]:

$$\left(\frac{d}{dt}+\gamma^2+a^2\beta_s^2\right)T_{mns}(t)=a^2[\mathrm{F}_{mns}(t)+(h_{21})^{-1}R^2 J_{m+1/2,1/2}(\beta_s R)g_{2mn}(t)\equiv\psi_{mns}(t) \qquad (14)$$

$$T_{mns}(t)\Big|_{t=0}=g_{mns}. \qquad (15)$$

Безпосередньо перевіряється, що розв'язком задачі Коші (14), (15) є функція [4]:

$$T_{mns}(t)=e^{-(\gamma^2+a^2\beta_s^2)t}g_{mns}\int_0^t e^{-(\gamma^2+a^2\beta_s^2)(t-\tau)}\psi_{mns}(\tau)d\tau \qquad (16)$$

Визначимо функцію Коші

$$K_n(t,r,\rho)=\sum_{s=1}^{\infty}e^{-(\gamma^2+a^2\beta_S^2)t}\frac{J_{n+1/2,1/2}(\beta_s r)J_{n+1/2,1/2}(\beta_s\rho)}{\left\|J_{n+1/2,1/2}(\beta_s r)\right\|^2}\quad. \qquad (17)$$

Якщо до функції $T_{mns}(t)$, визначеної формулою (16), застосувати оператор $H_n^{-1}$ за правилом (12), то маємо розв'язок задачі (8) – (10):

$$T_{mn}(t,r)=\int_0^R K_n(t,r,\rho)g_{mn}(\rho)\rho^2 d\rho+\int_0^t\int_0^R K_n(t,r,\rho)a^2\mathrm{F}_{mn}(\tau,\rho)\rho^2 d\rho d\tau+$$
$$+\frac{R^2}{h_{21}}\int_0^t K_n(t-\tau),r,R)a^2 g_{2mn}(\tau)d\tau\ . \qquad (18)$$

Оберненим до $F_{mn}$ є оператор [ 2 ]

$$F_{mn}^{-1}[g_{mn}]=\frac{\mathrm{Re}}{2\pi}\sum_{m,n=0}^{\infty}\varepsilon_m g_{mn}e^{im\varphi}\frac{P_n^m(\mu)}{\left\|P_n^m(\mu\right\|^2}\quad. \qquad (19)$$

У формулі (19) Re (…) – дійсна частина виразу (…), $\varepsilon_0=1, \varepsilon_1=\varepsilon_2=...=\varepsilon_m=...=2,$ квадрат норми приєднаного многочлена першого роду

$$\left\|P_n^m(\mu)\right\|^2\equiv\int_0^1[P_n^m(\mu)]^2 d\mu=\frac{1}{2n+1}\frac{(n+m)!}{(n-m)!}, n\ge m\quad. \qquad (20)$$

Визначимо фундаментальний розв’язок задачі Коші (1) - (2) в області D:

$$G(t;r,\rho;\varphi-\alpha;\mu,\eta)=\frac{1}{2\pi}\sum_{m,n=0}^{\infty}\varepsilon_m K_n(t,r,\rho)\frac{P_n^m(\mu)P_n^m(\eta)}{\left\|P_n^m(\mu)\right\|^2}\cos m(\varphi-\alpha). \tag{21}$$

Застосувавши до функції $T_{mn}(t,r)$ оператор $F_{mn}^{-1}$ за правилом (19), одержуємо єдиний розв’язок параболічної задачі (1) – (5):

$$T(t,r,\varphi,\mu)=\int_0^R\int_0^1\int_0^{2\pi}G(t;r,\rho;\varphi-\alpha;\mu,\eta)g(\rho,\alpha,\eta)\,\rho^2 d\alpha d\eta d\rho+$$

$$+\int_0^t\int_0^1\int_0^{2\pi}\frac{a^2R^2}{h_{21}}G(t-\tau;r,R;\varphi-\alpha;\mu,\eta)g_2(\tau,\alpha,\eta)\,d\alpha d\eta d\tau+$$
$$+\int_0^t\int_0^R\int_0^{2\pi}a^2\frac{\partial G}{\partial\eta}(t-\tau;r,\rho;\varphi-\alpha;\mu,\eta)\Big|_{\eta=0}w_1(\tau,\rho,\alpha)d\alpha d\rho d\tau+$$
$$+\int_0^t\int_0^R\int_0^1\int_0^{2\pi}G(t-\tau;r,\rho;\varphi-\alpha;\mu,\eta)a^2f(\tau,\rho,\alpha,\eta)\,\rho^2 d\alpha d\eta d\rho d\tau \tag{22}$$

<u>Зауваження:</u> Якщо функції $f,g,g_2,\omega$ (або одна з них чи декілька) не залежить від кутової змінної $\varphi$, то у відповідних доданках формули (22) зникає інтегрування по $\alpha$ разом із множником $2\pi$, а під інтегралом стоятиме фундаментальний розв’язок

$$G_0(t;r,\rho;\mu,\eta)=\sum_{n=0}^{\infty}K_n(t,r,\rho)\frac{P_n^0(\mu)P_n^0(\eta)}{\left\|P_n^0(\mu)\right\|^2}\ . \tag{23}$$

Нехай тепер на межі $\mu=0$ задано крайову умову другого роду

$$\left.\frac{\partial T(t,r,\varphi,\mu)}{\partial\mu}\right|_{\mu=0}=\omega_2(t,r,\varphi)\ . \tag{24}$$

Тоді при $n=2k, m=2s$ внаслідок тотожності

$$F_{mn}\left\{\frac{1}{1-\mu^2}\frac{\partial^2T}{\partial\varphi^2}+\frac{\partial}{\partial\mu}[(1-\mu^2)\frac{\partial T}{\partial\mu}]\right\}=-n(n+1)T_{mn}(t,r,)-P_n^m(0)\omega_{2m}(t,r) \tag{25}$$

отримаємо задачу (8) – (10), де $F_{mn}(t,r)=f_{mn}(t,r)-P_n^m(0)\omega_{2m}(t,r)$.

Розв’язок задачі (1) – (3), (24), (5) буде мати структуру (22), де замість $\left.\frac{\partial G}{\partial\eta}\right|_{\eta=0}$ стоятиме $(-G)\big|_{\eta=0}$, а $\omega_1$ замінене на $\omega_2$. При цьому в структурі *G* всюди *n* та *m* парні.

*The exact analytical solution of an algorithmic character of a non-stationary task of a thermal conduction for isotropic semispherical continuous fields was constructed by the method of fundamental functions*

## Література

1. Тихонов А.Н., Самарский А.А. Уравнения математической физики. –М.: Наука, 1972. –735 с.
2. Ленюк М.П. Интегральные преобразования с разделенными переменными (Вебера, Фурье-Бесселя, Лежандра-Фурье). –Киев, 1983. – 56 с. – (Препринт / АН УССР. Ин-т математики; 83 .18).
3. Ленюк М.П. Интегральные преобразования с разделенными переменными ( Фурье, Ханкеля). - Киев, 1983. – 60 с. – (Препринт / АН УССР. Ин-т математики; 83. 4).
4. Степанов В.В. Курс дифференциальных уравнений.- М.: Физматгиз, 1959. – 468 с.

*Одержано 14.10.20010р.*