

УДК 621.3.019.4

Е.Ушаков, канд.техн.наук

Вінницький державний технічний університет

СИНТЕЗ СИСТЕМ УПРАВЛІННЯ ПІДВИЩЕНОЇ НАДІЙНОСТІ ФУНКЦІОНУВАННЯ

Розглядається задача синтезу лінійних стаціонарних систем керування з урахуванням можливих відмов деяких підсистем. Синтез здійснюється на основі наближення вихідних реакцій систем, усереднених за моментами виникнення відмов, до заданої часової області. Використання ортогональних розкладів для опису динамічних характеристик системи дозволяє зводити процедуру синтезу до розв'язку системи алгебраїчних нерівностей.

При проектуванні сучасних автоматизованих систем основним чинником, що обмежує складність вибраного алгоритму керування, все частіше є необхідний рівень надійності. Для підвищення надійності систем широко застосовуються методи, засновані на використанні резервування. Проте є й інша можливість підвищення надійності систем, пов'язана з використанням властивої складним технічним системам функціональної надмірності (під функціональною надмірністю розуміється спроможність деяких підсистем керування виконувати функції підсистем, що відмовили, це дозволяє у ряді випадків забезпечувати прийнятний рівень якості керування [1]) Ефективність такого підходу значно зростає, якщо синтез «живучих» систем здійснювати на основі функціонально-статистичних критеріїв, що враховують можливості різноманітних станів системи. При цьому найбільш цікавим є випадок, коли відмова стається упродовж перехідного процесу, оскільки інтенсивність відмов елементів на перехідних режимах роботи системи значно вища, ніж на сталих. Крім того, реакції системи залежатимуть не тільки від характеристик системи з відмовою, але й від випадкового моменту виникнення відмови, що значно ускладнює процедуру обчислення статистичних характеристик систем. При використанні операторних методів опису лінійних систем з можливими порушеннями функціонування математичне сподівання і дисперсію вихідних реакцій можна одержати лише в припущенні про відомий розподіл коренів характеристичного рівняння. Проте при розв'язуванні задачі синтезу системи необхідно, щоб усереднення вихідних реакцій здійснювалося у формі, що дозволяє встановити безпосередню залежність відповідних статистичних характеристик від невідомих параметрів керівної частини. Для цього пропонується вихідні реакції системи описувати за допомогою рядів ортогональних функцій експоненціального вигляду [2]. При цьому шукані параметри системи належать до виразів для коефіцієнтів при експоненціальних функціях, показники яких відомою уявою залежать від часу, що дозволяє достатньо просто усереднювати вихідні

реакції за випадковими моментами виникнення відмов. У результаті застосування цього підходу математичні сподівання вихідних реакцій системи рекомендується подавати у вигляді експоненціальних поліномів, для яких можна сформулювати систему обмежень, що визначають належність названих математичних сподівань до заданої часової області [3].

В даній роботі розв'язок сформульованої задачі обмежується класом лінійних стаціонарних систем з випадковою зміною структури. Запропонований метод можна поширити на лінійні системи із змінними параметрами і нелінійні системи за умови, що вихідні реакції цих систем є кусочно-гладкими функціями часу.

Нехай є система керування, математична модель якої будується на децентралізованому принципі. Модель має опис об'єкта керування у вигляді:

$$\dot{x}_0(t) = A_0 x_0(t) + B_0 u_0(t), y_0(t) = C_0 x_0(t), \quad (1)$$

де $x_0(t)$ - вектор стану розмірності n_0 ; $u_0(t)$ - вектор керувань розмірності r_0 ; $y_0(t)$ - вектор вихідних координат розмірності m_0 ; а також сукупність рівнянь керівних підсистем:

$$\dot{x}_i(t) = A_i x_i(t) + B_i u_i(t), y_i(t) = C_i x_i(t), \quad (2)$$

де $x_i(t)$, $u_i(t)$, $y_i(t)$ - вектори стану, керування і вихідних координат i -ї підсистеми ($i = 1, 2, \dots, N$), котрі мають розмірності відповідно n_i , r_i , m_i . Числові матриці A_i , B_i , C_i з розмірностями $n_i \times n_i$, $n_i \times r_i$, $m_i \times n_i$ при $i=0, 1, 2, \dots, N$ у рівняннях (1), (2) є заданими. Взаємодія об'єкта керування і керівних підсистем описують рівняння зв'язку:

$$u_0(t) = \sum_{i=1}^N L_i y_i(t), \quad (3)$$

$$u_i(t) = \sum_j -F_{ij} y_j(t) + K_i (u_c(t) - y_0(t)),$$

де L_i , F_{ij} , K_i - числові матриці розмірів $r_0 \times m_i$, $r_i \times m_j$, $r_i \times m_0$; $u_c(t)$ - m_0 -мірний вектор керувань системи, компоненти якого належать множині обмежених кусочно-гладких функцій. Рівняння зв'язку показують, що вектор керування для об'єкта керування формується тільки з вихідних координат керівних підсистем, а вектори керувань кожної із підсистем залежать, крім цього, від вектора неузгодженостей [3, 4].

Вважаємо, що під час перехідного процесу кожна з керівних підсистем може відмовити з постійною інтенсивністю η_k . Під відмовою розуміємо повну відмову, в результаті якої підсистема, що відмовила, не бере участі у процесі керування. Дана ситуація є характерною як при відмовах типу «обрив», так і при заклинюванні виконавчих механізмів, після чого їхні вихідні координати перестають змінюватися. До подібних наслідків призводять й інші типи відмов, якщо система має пристрої контролю, що відключають відповідну підсистему при виявленні у ній відмов. Математична модель описаного типу відмов відповідає обнуленню матриць $L_k = 0$, $F_{ij} = 0$ ($i = 1, 2, \dots, N$), що описують зв'язок вихідних координат k -ї підсистеми з іншими частинами системи при $t > k$, де k - момент відмови k -ї підсистеми ($k = 1, 2, \dots, N$). Оскільки розглядається випадок, коли відмова виникає на достатньо короткочасних перехідних режимах роботи системи, можна застосувати припущення про неможливість двох і більше відмов у межах тривалості одного перехідного процесу. Це припущення можна поширити на весь час функціонування системи, якщо мати на увазі системи, що характеризуються високою надійністю окремих підсистем (малою інтенсивністю відмов η_k) або коротким часом безупинного функціонування.

Мета синтезу системи полягає у виборі таких матриць L_i , F_{ij} , K_i , при яких математичне сподівання $M(y_0(t))$ вектора вихідних координат об'єкта керування буде належати до заданої тимчасової області. Для розв'язку сформульованої задачі

скористаємося розкладом тимчасових характеристик системи у ряд за сукупністю ортогональних функцій експоненційного виду. Для побудови системи ортогональних функцій розглянемо сукупність лінійно-незалежних функцій

$$\psi_k(t) = \exp(-\beta(k-1)t), k = 1, 2, \dots, \quad (4)$$

повну на множині кусково-неперервних функцій. Побудуємо на цій сукупності систему ортонормованих в інтервалі $[0; +\infty)$ з вагою $h(t) = \exp(-vt)$ функцій

$$\varphi_k(t) = \sum_{l=1}^h \lambda_{kl} \psi_l(t), k = 1, 2, \dots \quad (5)$$

Основна властивість отриманої ортогональної системи полягає у тому, що для будь-якої кусочно-гладкої функції $f(t) \in L_2[0, \infty; h(t)]$, похідна якої задовольняє умові Ліпшиця порядку $0 < \delta \leq 1$ в інтервалі $[0; +\infty)$, ряд Фур'є за системою ортогональних функцій (5) з параметрами $v \leq \beta$ сходиться до $f(t)$ рівномірно в усьому інтервалі ортогональності $[0; \infty)$, причому є нерівність

$$\left| f(t) - \sum_{k=1}^q d_k \varphi_k(t) \right| \leq \frac{k(v, \beta)(1 + \sqrt{\beta q(\alpha + q)})}{q^{1+\delta}}, \quad (6)$$

де d_k - коефіцієнти розкладання, $k(v, \beta)$ - постійна, що не залежить від q .

Таким чином, якщо деяка функція $f(t)$ задовольняє сформульованим вимогам, то її можна подати з будь-якою наперед заданою точністю у вигляді кінцевої суми ряду Фур'є за системою (5). Скористаємося отриманим результатом для обчислення математичного сподівання вектора вихідних координат системи керування з урахуванням можливих відмов деяких підсистем.

Якщо в системі нагромаджуються дві і більше відмов, то підсумовування повинно виконуватися на всіх можливих станах системи. При цьому методика обчислення вихідних реакцій системи залишається старою з урахуванням тієї обставини, що замість діючої системи розглядається система з визначеним комплексом підсистем, що відмовили.

Для синтезу керування, що забезпечує бажаний вид математичних сподівань, уявімо, що кожна з допускових областей, що визначають бажаний вид математичних сподівань відповідних компонентів вектора вихідних координат, описується при якомусь фіксованому векторі керувань $u_c(t)$ своїми верхньою $M_i^I(t)$ і нижньою $M_i^{II}(t)$ межами, що є обмеженими кусочно-гладкими функціями [5]. Тоді досліджувані математичні сподівання будуть належати допусковим областям при виконанні нерівностей

$$M_i^I(t) - M[y_i^0(t, T)] \geq 0, M[y_i^0(t, T)] - M_i^{II}(t) \geq 0, i = 1, 2, \dots, m_0. \quad (7)$$

Як вихідні дані при синтезі використовується інформація про функціональний склад системи керування, динамічні властивості об'єкта керування і керівних підсистем, показники їхньої надійності (інтенсивності відмов η_k), а також вимоги до динамічних характеристик системи (межа областей $M^I(t)$, $M^{II}(t)$).

1. Формування математичної моделі функціонування системи у справному стані і при можливих відмовах - обчислення матриць $G_k, k=0, 1, \dots, N$.

2. Побудова системи ортогональних функцій $\varphi_i(t), i=1, 2, \dots, q$. При виборі параметрів v і β необхідно керуватися співвідношенням $v \leq \beta$. Щодо числа q членів ортогонального ряду, то доцільно враховувати таку обставину: умови (7) визначають сукупність близьких за виглядом вихідних реакцій системи, тому необхідна точність

їхньої апроксимації частковими сумами ортогональних рядів досягається, як правило, при однакових значеннях q . Отже, розмір числа q визначає розкладання у ряд меж допускових областей.

3. Обчислення коефіцієнтів ортогональних розкладань векторів $M^I(t)$, $M^{II}(t)$, $u_c(t)$.

4. Формування матриць $\hat{\Gamma}_0$ і W_k , $k = 1, 2, \dots, N$ відповідно до формул:

$$\begin{aligned}\hat{\Gamma}_0 &= [\Pi \otimes I_n - I_q \otimes G_0]^{-1}[(E_q^T \otimes I_n) \times (0) + \hat{S}], S = BKQ(A^T)^{-1}; \\ W_k &= [\Pi \otimes I_n - I_q \otimes G_k]^{-1}[(E_q^T \otimes I_n) \Gamma_0 A^T A + \\ &+ (I_q \otimes (BKQA))[(A^T A)^{-1}] \bullet (E_q \otimes I_q)].\end{aligned}$$

5. Обчислення коефіцієнтів b_{il_1} і $a_{l_1 l_2}^{ki}$ у виразах для вихідних реакцій справної системи і при урахуванні можливих відмов:

$$\begin{aligned}b_{il_1} &= \sum_{j_1=1}^{n_0} \sum_{j_2=1}^q \sum_{j_3=1}^q C_{ij_1} \Gamma_{j_1 j_2}^0 A_{j_3 j_2} A_{j_3 j_1}; i = 1, 2, \dots, m_0; k = 1, 2, \dots, N; \\ a_{l_1 l_2}^{ki} &= \sum_{j_1=1}^{n_0} \sum_{j_2=1}^q \sum_{j_3=1}^q C_{ij_1} W_{(j-j_2)n+j_1; j_2}^k A_{j_3 j_2} A_{j_3 j_1}; l_1, l_2 = 1, 2, \dots, q.\end{aligned}$$

6. Обчислення коефіцієнтів δ_{il_1} розкладу математичних сподівань вихідних координат системи:

$$\delta_{il_1} = \sum \left[\left(b_{ij_1} - \sum_{k=1}^N \sum_{l_2=1}^q \frac{a_{l_2 j_1}^{ki} \eta_k}{(j_1 - l_2)\beta + \eta_k} \right) \varepsilon_{0 j_2} + \sum_{k=1}^N \sum_{l_2=1}^q \frac{a_{j_1 l_2}^{ki} \eta_k}{(l_2 - j_1)\beta + \eta_k} \varepsilon_{k j_2} \right].$$

$i=1, 2, \dots, m_0; l_1=1, 2, \dots, 2q-1.$

Підсумовування тут, як відзначалося вище, виконується для всіх індексів j_1 і j_2 , що задовольняє умові $j_1 + j_2 = l_1 + 1$.

7. Формування системи алгебраїчних нерівностей щодо шуканих значень L_i , K_i , F_{ij} :

$$\begin{aligned}m_{i1}^I \lambda_{11} - \delta_{i1} &> 0; \delta_{i1} - m_{i1}^I \lambda_{11} > 0; \\ \sum_{l_1=1}^{2q-k-1} \frac{(k+l_1-1)!}{(l_1-1)!} (\delta_{i, 2q-k-l_1} - \sum_{j=1}^q m_{ij}^{II} \lambda_{j, 2q-k-l_1}) &\geq 0; i = 1, 2, \dots, m_0; \\ \sum_{l_1=1}^{2q-k-1} \frac{(k+l_1-1)!}{(l_1-1)!} (\sum_{j=1}^q m_{ij}^I \lambda_{j, 2q-k-l_1} - \delta_{i, 2q-k-l_1}) &\geq 0; \\ k &= 1, 2, \dots, 2q-3.\end{aligned}$$

8. Розв'язок системи нерівностей. Воно можливе за допомогою відомих алгоритмів: симплекс-методу, методу найменших квадратів; при великій розмірності множини шуканих параметрів ефективними є методи випадкового пошуку. Якщо рішення не можна знайти, то необхідно змінити вимоги до системи.

Накінець, необхідно зупинитися на перспективах використання запропонованого методу синтезу. Даний підхід можна використовувати при описі вихідних реакцій визначеного класу нестационарних систем, змінні коефіцієнти яких є кусочно-гладкими функціями часу, а також нелінійних систем, тимчасові характеристики котрих також описуються кусочно-гладкими функціями. У цих випадках в ряд за запропонованою системою ортогональних функцій, крім векторів перемінних стану, необхідно розкласти відомі функції, що описують змінні коефіцієнти, або нелінійні характеристики об'єкта керування. З огляду на те, що характер подання вихідних реакцій ортогональним рядом не змінюється, при зведенні цих функцій до квадрату і більш високих ступенів, зазначений підхід може

застосовуватися при обчисленні їхніх дисперсій, а також моментів більш високого порядку.

Як приклад розглянемо систему автоматичного керування технологічним процесом нейтралізації рослинної олії у мильно-лужному розчині, рівняння динаміки якого при визначеному режимі роботи виглядають так [6]:

$$\dot{x}_0(t) = -0,625 x_0(t) + 0,5 u_1^0(t) + u_2^0(t), y_0(t) = x_0(t).$$

Тут керівними впливами $u_1^0(t)$ і $u_2^0(t)$ обрана витрата олії і реактиву, а керованим параметром - рівень поділу середовищ «олія - мильно-лужний розчин».

Нехай динаміка виконавчих механізмів, що регулюють витрату олії і реактиву, описується рівняннями:

$$\begin{aligned}\dot{x}_1(t) &= u_1(t); \quad \dot{x}_2(t) = u_2(t); \\ y_1(t) &= x_1(t); \quad y_2(t) = x_2(t).\end{aligned}$$

Структура системи керування формується відповідно до рівнянь зв'язку:

$$\begin{aligned}u_1(t) &= -F_{11}y_1(t) - F_{12}y_2(t) + K_1(u_c(t) - y_0(t)), \\ u_2(t) &= -F_{21}y_1(t) - F_{22}y_2(t) + K_2(u_c(t) - y_0(t)), \\ u_1^0(t) &= L_{11}y_1(t) + L_{12}y_2(t), \\ u_2^0(t) &= L_{21}y_1(t) + L_{22}y_2(t).\end{aligned}$$

Вважаємо, що перша керівна підсистема може відмовити з інтенсивністю $\eta=1,5$. При цьому витрата олії перестає змінюватися, а бажаний характер зміни рівня поділу середовищ має забезпечувати за рахунок регулювання витрати реактиву. Потрібно знайти значення коефіцієнтів F_{ij} , L_{ij} , K_i , при яких математичне сподівання вихідної реакції об'єкта $M(y_0(t))$ на вплив $u_c(t)=1 - \exp(-0,7t)$ буде належати області, обмеженій кривими $M^I(t)=0,8-0,7\exp(-0,5t)$ і $M^{II}(t)=0,65-\exp[-0,5(t-1,5)]$. Побудуємо систему ортогональних функцій (5) з параметрами $v=1$, $\beta=1$:

$$\begin{aligned}\varphi_1(t) &= 1; \quad \varphi_2(t) = \sqrt{3}(2 \exp(-t) - 1); \quad \varphi_3(t) = \sqrt{5}(6 \exp(-2t) - 6 \exp(-t) + 1); \\ \varphi_4(t) &= \sqrt{7}(20 \exp(-3t) - 30 \exp(-2t) + 12 \exp(-t) - 1) \text{ і т.д.}\end{aligned}$$

Розкладемо у ряд за отриманою системою ортогональних функцій межі допускової області, враховуючи перші чотири члени:

$$\begin{aligned}M^I(t) &= 0,758 - 1,334 \exp(-t) + 1,334 \exp(-2t) - 0,658 \exp(-3t), \\ M^{II}(t) &= 0,523 - 4,033 \exp(-t) + 4,033 \exp(-2t) - 1,990 \exp(-3t),\end{aligned}$$

а також вирази для $u_c(t)$ і функції $\exp(-1,5t)$:

$$\begin{aligned}u_c(t) &= 0,995 - 1,573 \exp(-t) + 1,089 \exp(-2t) - 0,479 \exp(-3t), \\ \exp(-1,5t) &= -0,0069 + 0,312 \exp(-t) + 0,935 \exp(-2t) - 0,242 \exp(-3t).\end{aligned}$$

Елементи матриць Γ_0 і W_1 будуть виглядати так:

$$\Gamma_{ij}^0 = \frac{0,7(K_1\omega_{ij}^1 + K_2\omega_{ij}^2)}{j(j+0,7)};$$

$$W_{i+3s-3,j}^1 = \sum_{l=1}^3 \xi_{il}^s (Z_{lj} P_{js} + \sum_{r=1}^4 \Gamma_{ij}^0 R_{rj});$$

$$i = 1, 2, 3; s = 1, 2, 3, 4; j = 1, 2, 3, 4.$$

Визначимо коефіцієнти:

$$\delta_{l_1} = \sum_{j_1+j_2=l_1+1} \left(b_{j_1} - \sum_{l_2=1}^4 \frac{1,5a_{l_2j_1}}{j_1 - l_2 + 1,5} \right) \varepsilon_{j_2} + \sum_{l_2=1}^4 \frac{1,5a_{l_1l_2}}{l_2 - l_1 + 1,5}; \quad l_1 = \overline{1,7}.$$

Тут ε_{j_2} — коефіцієнти при експонентах в розкладі функції $\exp(-1,5t)$. Тепер можна побудувати систему нерівностей:

$$0,758 - \delta_1 > 0; \quad 0,758 - \delta_1 > 0; \quad 0,100 - \sum_{j=1}^7 \delta_j > 0; \quad \sum_{i=1}^7 \delta_i + 1,467 \geq 0;$$

$$1,240 - \sum_{i=1}^6 (7-i) \delta_i \geq 0; \quad \sum_{i=1}^6 (7-i) \delta_i + 6,865 \geq 0;$$

$$8,120 - \sum_{i=1}^5 (7-i)(6-i) \delta_i \geq 0; \quad \sum_{i=1}^5 (7-i)(6-i) \delta_i + 28,514 \geq 0;$$

$$38,99 - \sum_{i=1}^4 (7-i)(6-i)(5-i) \delta_i \geq 0; \quad \sum_{i=1}^4 (7-i)(6-i)(5-i) \delta_i + 94,368 \geq 0;$$

$$134,02 - \sum_{i=1}^3 (7-i)(6-i)(5-i)(4-i) \delta_i \geq 0; \quad \sum_{i=1}^3 (7-i)(6-i)(5-i)(4-i) \delta_i - 198,89 \geq 0;$$

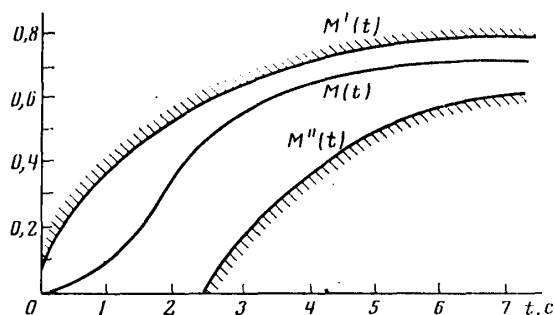
$$358,68 - 720\delta_1 - 120\delta_2 \geq 0; \quad 720\delta_1 + 120\delta_2 + 107,40 \geq 0.$$

Розв'язок $F_{11} = 0$; $F_{12} = 0$; $F_{21} = 0$; $F_{22} = 3,00$; $L_{11} = 1$; $L_{12} = 0$; $L_{21} = 0$; $L_{22} = 1,00$; $K_1 = 0,92$; $K_2 = 1,75$ даної системи нерівностей можливий при використанні стандартного програмного забезпечення типу MathCAD, MathLab та ін.

Математичне сподівання для вихідної реакції системи виглядає:

$$M(t) = 0,7126 - 3,8500 \exp(-t) + 9,5234 \exp(-2t) - 13,5441 \exp(-3t) + 11,2328 \exp(-4t) - 4,7132 \exp(-5t) + 0,6138 \exp(-6t).$$

Графік цієї функції поданий разом з границями допускової області на рисунку.



In the given work the decision of the formulated task is limited to a class of linear stationary systems with casual change of structure. At the same time by virtue of the considered below properties of an offered method it can be widespread on linear systems with variable parameters and nonlinear systems, provided that the target reactions of these systems are piece-smooth functions of time.

Література

1. Цирлин А.М. Оптимальное управление технологическими процессами. –М: Энергоатомиздат, 1986.
2. Квакернаак Х., Сиван Р. Линейные оптимальные системы управления. –М: Мир, 1977.
3. Крутько П.Д. Обратные задачи динамики управляемых систем. –М: Наука, 1987.
4. Ажогин В.В., Згуровский М.З. Автоматизированное проектирование математического обеспечения АСУ ТП. –К: Вища школа, 1986.
5. Изерман Р. Цифровые системы управления. –М: Мир, 1984.
6. Ушаков Э.П. Способ автоматического управления технологическим процессом нейтрализации растительного масла. / А.с. №1472486, МКИ С11 В3/06.

Одержано 18.06.2000 р.