

ПОЧАТКОВЕ ЗМІЩЕННЯ ВНУТРІШНЬОГО КІЛЬЦЯ РАДІАЛЬНО-УПОРНОГО ПІДШИПНИКА ОПОРИ ШПИНДЕЛЬНОГО ВУЗЛА

Вироблена просторова модель радіально-упорного підшипника опори шпindelного вузла, що дозволяє визначити початкове (додеформаційне) відносне зміщення внутрішнього кільця у просторі внаслідок неідеальності виготовлення елементів підшипника і вузла загалом.

Найбільш вагомим вихідним параметром прецизійних шпindelних вузлів є точність обертання вісі шпindelя. Відхилення вісі шпindelя від номінального положення є результатом похибок розміщення у просторі структурних компонентів шпindelного вузла та спотворення їх геометричних розмірів і форми незалежно від того, які фактори його спричинили. Опис положення будь-якої структурної одиниці у глобальній системі координат вузла базується на описі (з використанням перехідних матриць узагальнених переміщень та зусиль) стану компонентів (глобальних і локальних вузлів) у власних глобальних системах координат, які, в свою чергу, є локальними відносно глобальної системи координат вузла. Наслідком дії будь-яких узагальнених зусиль будь-якої фізичної природи є додаткове до технологічно отриманого спотворення геометричних розмірів і форми структурних компонентів шпindelного вузла. Таким чином, загалом модель прецизійного шпindelного вузла є структурованою моделлю просторово пов'язаних моделей власних структурних компонентів.

Питання точності обертання вісі шпindelя насамперед потребує розв'язання питань точності обертання осей кілець підшипників його опор, тобто отримання повної характеристики частотного спектру вібрацій підшипників опор. Крім того, технологічний аспект формування точності шпindelного вузла потребує інформації про вагомність впливу похибок виготовлення елементів шпindelного вузла на його вихідну точність і можливість взаємної компенсації дії цих похибок.

Для розв'язання цих завдань, необхідно чітко розмежувати просторове зміщення внутрішнього кільця підшипника, викликане неідеальністю виготовлення та монтажу підшипника в опорі шпindelного вузла і зміщення, викликане дією навантажень на підшипник. Тобто першочерговим завданням знаходження просторового положення вісі внутрішнього кільця підшипника в умовах початкового контакту елементів контактних груп (тіл кочення та кілець).

Переважаючого використання у прецизійних шпindelних вузлах на опорах кочення набули радіально-упорні кулькові підшипники. Опис ідеального підшипника, як підшипника правильної форми, базується на описі просторового взаєморозміщення конгруентних сферичних поверхонь для кульок і колових тороїдальних для доріжок кочення кілець. Але поверхні елементів неідеального підшипника не є правильними, тому в першу чергу постає питання про спосіб їх задання.

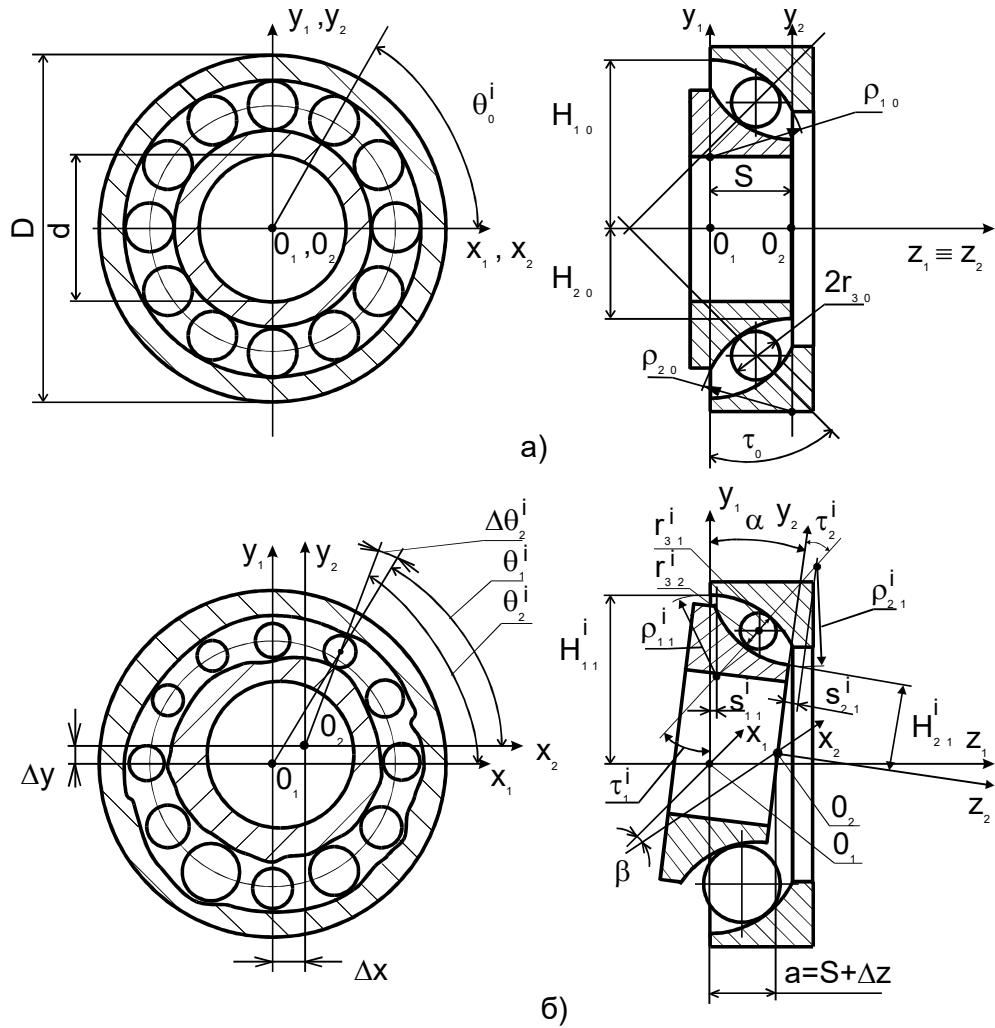


Рис.1. Геометричні характеристики радіально-упорного підшипника: а) ідеальний, б) реальний.

Найбільш доцільним для опису геометрії доріжок кочення внутрішнього та зовнішнього кілець підшипника є спеціальний вид криволінійних координат [1], у якому рівняння доріжок кочення задаються у параметричній формі з використанням у ролі параметрів кутів τ і θ (рис.1):

$$\begin{aligned} \text{зовнішнє кільце} - \rho_1 &= \rho_1(\tau, \theta), \quad H_1 = H_1(\tau, \theta), \quad S_1 = S_1(\tau, \theta); \\ \text{внутрішнє кільце} - \rho_2 &= \rho_2(\tau, \theta), \quad H_2 = H_2(\tau, \theta), \quad S_2 = S_2(\tau, \theta), \end{aligned} \quad (1)$$

де ρ_1, ρ_2 – радіус кривизни перетину в плинній точці; H_1, H_2 – відповідно максимальна і мінімальна відстані від кола, проведеного радіусом кривизни з центру кривизни до вісі Z ; S_1, S_2 – координата центру кривизни вздовж вісі Z ; τ – кут між нормаллю до перетину в плинній точці і площиною XY (кут контакту); θ – кут між площиною перетину і віссю X .

Із зовнішнім та внутрішнім кільцями зв’язані такі локальні системи координат $X_1Y_1Z_1$ і $X_2Y_2Z_2$, що для випадку ідеального підшипника функції (1) є константами і набирають значення [1]:

$$\rho_1 = \rho_1; \quad H_1 = R_1; \quad S_1 = 0; \quad \rho_2 = \rho_2; \quad H_2 = R_2; \quad S_2 = 0, \quad (2)$$

де: ρ_1, ρ_2 – радіус поперечного перетину жолоба зовнішнього та внутрішнього кілець відповідно; R_1, R_2 – радіус відповідного кільця по дну жолоба.

За глобальну систему координат підшипника вибираємо систему координат $X_1Y_1Z_1$.

Для опису реальних поверхонь елементів підшипника у глобальній системі координат впровадимо додаткову систему нижніх індексів для складових векторів \bar{q}_{rj}^i розмірних параметрів кілець та кульок у перетині i -ї контактної групи:

$$\begin{aligned} \text{зовнішнє кільце} - \quad & \bar{q}_{1j}^i = \bar{q}_{1j}^i(\rho_{1j}^i; H_{1j}^i; S_{1j}^i); \\ \text{внутрішнє кільце} - \quad & \bar{q}_{2j}^i = \bar{q}_{2j}^i(\rho_{2j}^i; H_{2j}^i; S_{2j}^i); \\ \text{кулька} - \quad & \bar{q}_{3j}^i = \bar{q}_{3j}^i(t_{3j}^i), \end{aligned} \tag{3}$$

де: r – індекс елемента підшипника, $r = 1$ (зовнішнє кільце), 2 (внутрішнє кільце), 3 (кулька); j – індекс геометрії поверхні доріжок кочення кілець та кульки; для кілець: $j = 0$ (ідеальна геометрія), 1 (реальна геометрія); для кульки: $j = 0$ (ідеальна геометрія), 1 (реальна геометрія у точці контакту із зовнішнім кільцем), 2 (реальна геометрія у точці контакту із внутрішнім кільцем).

Трохи інакша індексація розмірних параметрів кульок зумовлена тим, що ідеальна геометрія кульки повністю визначається радіусом кульки (сфери) r_{30} , а реальна – радіусами прилеглих до поверхні кульки сфер у точках контакту кульки з кільцями.

Положення внутрішнього кільця (система $X_2Y_2Z_2$) відносно зовнішнього (система $X_1Y_1Z_1$) для реального підшипника (рис. 1б) визначатиметься шістьма величинами: Δx , Δy , a , α , β , γ . Причому: Δx , Δy , a – це координати центру внутрішнього кільця в системі $X_1Y_1Z_1$, де $a = S + \Delta z$, і Δx , Δy , Δz малі зміщення вздовж вісей X_1 , Y_1 і Z_1 відповідно; а кути α , β , γ – система кутів кінцевого обертання першого роду, де α – малий кут повороту навколо вісі X_1 , β – навколо вісі Y_1 і γ – навколо вісі Z_1 . Оскільки внутрішнє кільце підшипника має одну ступінь вільності, а саме обертання навколо вісі Z відносно нерухомого зовнішнього кільця, то далі його положення відносно зовнішнього кільця визначатимемо величинами Δx , Δy , a , α , β для послідовних фіксованих положень за кутом обертання навколо вісі Z .

Для ідеального підшипника (рис. 1а) $\Delta x = \Delta y = \Delta z = \alpha = \beta = 0$; $a = S$, де S – вісьова гра підшипника [1].

Кульки вважаються рівномірно розподіленими на колі, що проходить через їх центри. Кутове положення i -ї кульки відносно зовнішнього кільця визначається кутом θ^i :

$$\theta^i = \theta^1 + \frac{2\pi}{n} \cdot (i-1) \quad \text{де } \theta^1 - \text{кутове положення кульки, названої першою; } n - \text{число кульок у} \tag{4}$$

підшипнику.

Для ідеального підшипника кутове положення i -ї кульки є кутовим положенням θ_0^i точок контакту кульки з кільцями у i -ї контактній групі. Для реального підшипника ці положення позначмо θ_1^i для зовнішнього кільця і θ_2^i – для внутрішнього кільця, що відповідає прийнятій індексації. Таку ж індексацію застосуємо і для позначення кутів контакту τ^i : для ідеального підшипника – $\tau_0^i = \tau_0$, для реального підшипника – τ_1^i – для кута контакту кульки із зовнішнім кільцем і τ_2^i для кута контакту кульки з внутрішнім кільцем.

Розгляньмо задачу початкового контакту реального підшипника на прикладі i -ї контактної групи.

На першому етапі розгляньмо задачу початкового контакту для приведенного підшипника, геометрія елементів якого ідеальна, а положення внутрішнього кільця

відносно зовнішнього відповідає положенню цих елементів у реальному підшипнику (рис.2). Для позначення приведеного підшипника приймаємо індекс $j = 3$. Для цього випадку розмірні параметри кілець тотожні відповідним параметрам кілець ідеального підшипника ($\rho_{r3}^i = \rho_{r0}$, $H_{r3}^i = H_{r0}$, $S_{r3}^i = 0$), а приведений діаметр кульки $d_{33}^i = 2r_{33}^i$ буде змінним для кожної контактної групи, оскільки вважається, що всі кульки перебувають у контакті з кільцями.

Точка контакту i -ї кульки із зовнішнім кільцем у системі координат $X_1Y_1Z_1$ загалом випадку визначається радіус-вектором \mathbf{r}_{1j}^i відповідної точки поверхні доріжки кочення зовнішнього кільця (рис. 2а):

$$\bar{\mathbf{r}}_{1j}^i = \bar{\mathbf{r}}_{1j}^i(u_m, v_m, \bar{\mathbf{q}}_{1j}^i) = \bar{\mathbf{r}}_{1j}^i(\theta_m^i, \tau_m^i, H_{1j}^i, \rho_{1j}^i, S_{1j}^i) \quad (5)$$

або вектор-функціями \mathbf{r}_{1u}^i і \mathbf{r}_{1v}^i рухомого базису криволінійної системи координат, що є дотичними до відповідних координатних ліній [2]:

$$\bar{\mathbf{r}}_{1u}^i = \frac{\partial \bar{\mathbf{r}}_{1j}^i}{\partial u_m} = \frac{\partial \bar{\mathbf{r}}_{1j}^i}{\partial \theta_m^i}; \quad \bar{\mathbf{r}}_{1v}^i = \frac{\partial \bar{\mathbf{r}}_{1j}^i}{\partial v_m} = \frac{\partial \bar{\mathbf{r}}_{1j}^i}{\partial \tau_m^i} \quad (6)$$

де m – індекс параметрів криволінійних координат: $m = 0$ (для кілець ідеального підшипника), 1 (для зовнішнього кільця реального та приведеного підшипників), 2 (для внутрішнього кільця реального та приведеного підшипників).

Одиничний вектор нормалі до поверхні у точці перетину координатних ліній:

$$\bar{\mathbf{n}}_{1j}^i = \frac{\bar{\mathbf{r}}_{1u}^i \times \bar{\mathbf{r}}_{1v}^i}{|\bar{\mathbf{r}}_{1u}^i \times \bar{\mathbf{r}}_{1v}^i|} \quad (7)$$

Далі як векторні функції точки контакту на поверхні доріжки кочення зовнішнього кільця використовуватимемо локальний базис з взаємоортогональних (внаслідок ортогональності координатних ліній) одиничних векторів $\mathbf{n}_{1j}^i, \theta_{1j}^i, \tau_{1j}^i$:

$$(8)$$

$$\bar{\theta}_{1j}^i = \frac{\bar{\mathbf{r}}_{1u}^i}{|\bar{\mathbf{r}}_{1u}^i|}; \quad \bar{\tau}_{1j}^i = \frac{\bar{\mathbf{r}}_{1v}^i}{|\bar{\mathbf{r}}_{1v}^i|}$$

$$\bar{\mathbf{n}}_{1j}^i = \bar{\tau}_{1j}^i \times \bar{\theta}_{1j}^i; \quad \bar{\theta}_{1j}^i = \bar{\mathbf{n}}_{1j}^i \times \bar{\tau}_{1j}^i; \quad \bar{\tau}_{1j}^i = \bar{\theta}_{1j}^i \times \bar{\mathbf{n}}_{1j}^i$$

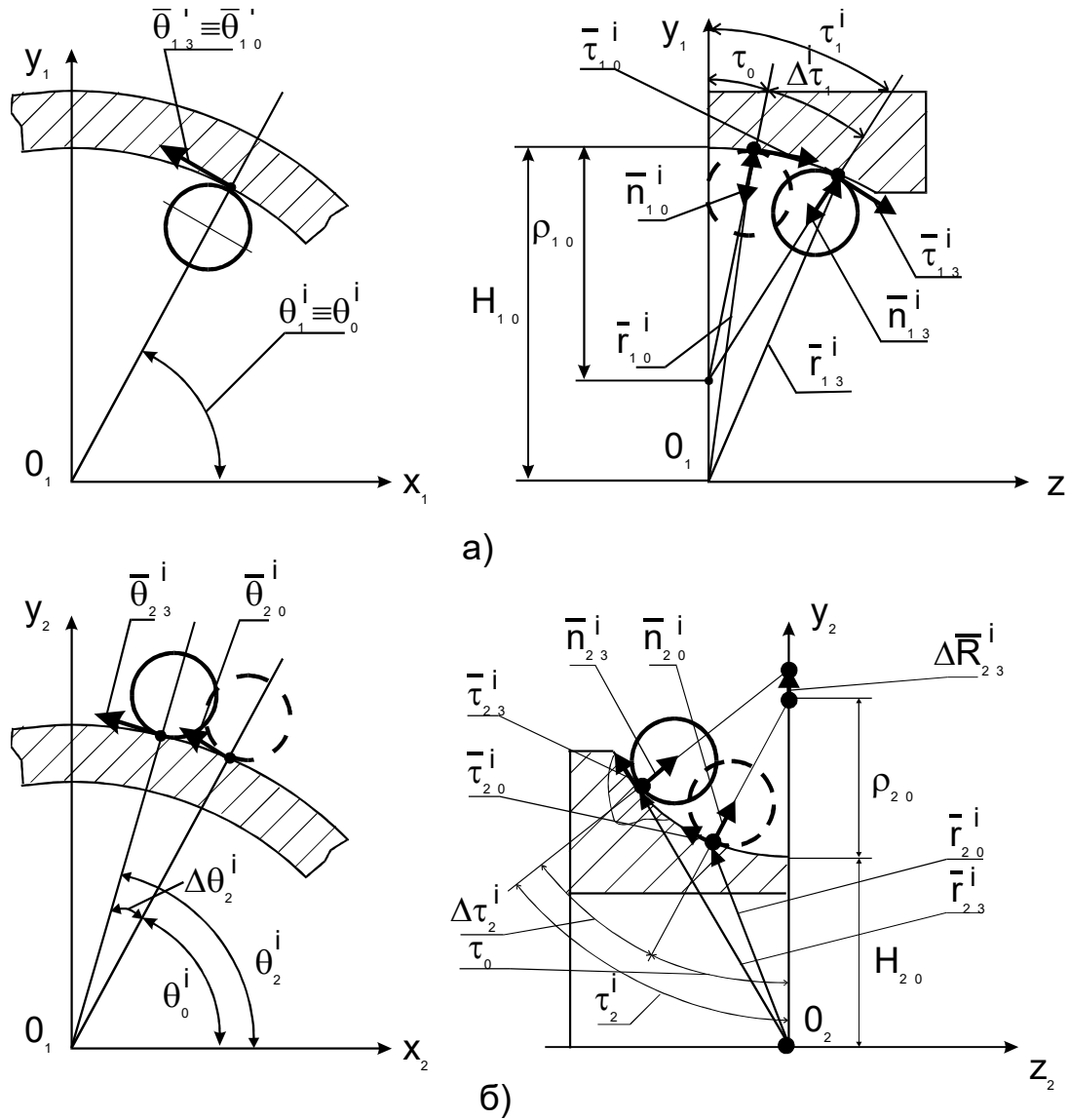


Рис. 2. Положення точок контакту i -ї контактної групи приведеного підшипника:
а) зовнішнє кільце, б) внутрішнє кільце.

Для загального випадку вектори \bar{r}_{lj}^i , \bar{n}_{lj}^i , $\bar{\theta}_{lj}^i$, $\bar{\tau}_{lj}^i$ запишемо як вектори-стовпчики четвертого порядку:

$$\bar{r}_{lj}^i = \begin{bmatrix} (H_{lj}^i - \rho_{lj}^i + \rho_{lj}^i \cdot \cos \tau_m^i) \cdot \cos \theta_m^i \\ (H_{lj}^i - \rho_{lj}^i + \rho_{lj}^i \cdot \cos \tau_m^i) \cdot \sin \theta_m^i \\ S_{lj}^i + \rho_{lj}^i \sin \tau_m^i \\ 1 \end{bmatrix}; \quad (9)$$

$$\bar{\theta}_{lj}^i = \begin{bmatrix} -\sin \theta_m^i \\ \cos \theta_m^i \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}; \quad \bar{\tau}_{lj}^i = \begin{bmatrix} -\sin \tau_m^i \cdot \cos \theta_m^i \\ -\sin \tau_m^i \cdot \sin \theta_m^i \\ \cos \tau_m^i \\ 0 \end{bmatrix}; \quad \bar{n}_{lj}^i = \begin{bmatrix} -\cos \tau_m^i \cdot \cos \theta_m^i \\ -\cos \tau_m^i \cdot \sin \theta_m^i \\ -\sin \tau_m^i \\ 0 \end{bmatrix} \quad (9a)$$

Оскільки геометрія

кілець приведенного і ідеального підшипників тотожна, то положення точки контакту на зовнішньому кільці приведенного підшипника можна розглядати як варіацію положення аналогічної точки контакту ідеального підшипника:

$$\bar{r}_{13}^i = \bar{r}_{10}^i + \Delta\bar{r}_{13}^i, \quad \text{де } \Delta\bar{r}_{13}^i = \frac{\partial \bar{r}_{10}^i}{\partial \tau_0} \cdot \Delta\tau_1^i = \rho_{10} \cdot \Delta\tau_1^i \cdot \bar{\tau}_{10}^i \quad (10)$$

при умові $\theta_1^i = \theta_0^i$; $\tau_1^i = \tau_0 + \Delta\tau_1^i$; $\Delta\tau_1^i$ - мала зміна кута контакту.

Тоді залежність базисних векторів \mathbf{n}_{13}^i , $\boldsymbol{\theta}_{13}^i$, $\boldsymbol{\tau}_{13}^i$ та \mathbf{n}_{10}^i , $\boldsymbol{\theta}_{10}^i$, $\boldsymbol{\tau}_{10}^i$ у першому наближенні виглядатиме так:

$$\bar{\mathbf{n}}_{13}^i = \bar{\mathbf{n}}_{10}^i - \Delta\tau_1^i \cdot \bar{\boldsymbol{\tau}}_{10}^i; \quad \bar{\boldsymbol{\tau}}_{13}^i = \bar{\boldsymbol{\tau}}_{10}^i + \Delta\tau_1^i \cdot \bar{\mathbf{n}}_{10}^i; \quad \bar{\boldsymbol{\theta}}_{13}^i = \bar{\boldsymbol{\theta}}_{10}^i \quad (11)$$

За аналогією отримаємо також залежності для точки контакту кульки з внутрішнім кільцем приведенного підшипника у системі координат $X_2Y_2Z_2$.

Радіус-вектор \mathbf{r}_{2j}^i відповідної точки поверхні доріжки кочення внутрішнього кільця для загального випадку (рис. 2б):

$$\bar{r}_{2j}^i = \bar{r}_{2j}^i(\mathbf{u}_m, \mathbf{v}_m, \bar{\mathbf{q}}_{2j}^i) = \bar{r}_{2j}^i(\theta_m^i, \tau_m^i, H_{2j}^i, \rho_{2j}^i, S_{2j}^i) \quad (12)$$

Вектори \mathbf{r}_{2j}^i , \mathbf{n}_{2j}^i , $\boldsymbol{\theta}_{2j}^i$, $\boldsymbol{\tau}_{2j}^i$:

$$\bar{r}_{2j}^i = \begin{bmatrix} (H_{2j}^i + \rho_{2j}^i - \rho_{2j}^i \cdot \cos\tau_m^i) \cdot \cos\theta_m^i \\ (H_{2j}^i + \rho_{2j}^i - \rho_{2j}^i \cdot \cos\tau_m^i) \cdot \sin\theta_m^i \\ S_{2j}^i - \rho_{2j}^i \sin\tau_m^i \\ 1 \end{bmatrix}; \quad (13)$$

$$\bar{\boldsymbol{\theta}}_{2j}^i = \begin{bmatrix} -\sin\theta_m^i \\ \cos\theta_m^i \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}; \quad \bar{\boldsymbol{\tau}}_{2j}^i = \begin{bmatrix} \sin\tau_m^i \cdot \cos\theta_m^i \\ \sin\tau_m^i \cdot \sin\theta_m^i \\ -\cos\tau_m^i \\ 0 \end{bmatrix}; \quad \bar{\mathbf{n}}_{2j}^i = \begin{bmatrix} \cos\tau_m^i \cdot \cos\theta_m^i \\ \cos\tau_m^i \cdot \sin\theta_m^i \\ \sin\tau_m^i \\ 0 \end{bmatrix} \quad (13a)$$

для ідеального підшипника:

$$\bar{\boldsymbol{\theta}}_{20}^i = \bar{\boldsymbol{\theta}}_{10}^i; \quad \bar{\boldsymbol{\tau}}_{20}^i = -\bar{\boldsymbol{\tau}}_{10}^i; \quad \bar{\mathbf{n}}_{20}^i = -\bar{\mathbf{n}}_{10}^i \quad (14)$$

Положення точки контакту на внутрішньому кільці приведенного підшипника з врахуванням тотожної з ідеальним підшипником геометрії визначається радіус-вектором \mathbf{r}_{23}^i :

$$\bar{r}_{23}^i = \bar{r}_{20}^i + \Delta\bar{r}_{23}^i \quad (15)$$

$$\text{де } \Delta\bar{r}_{23}^i = \frac{\partial \bar{r}_{20}^i}{\partial \tau_0} \cdot \Delta\tau_2^i + \frac{\partial \bar{r}_{20}^i}{\partial \theta_0^i} \cdot \Delta\theta_2^i = \rho_{20} \cdot \Delta\tau_2^i \cdot \bar{\boldsymbol{\tau}}_{20}^i + (H_{20} + \rho_{20} - \rho_{20} \cdot \cos\tau_0) \cdot \Delta\theta_2^i \cdot \bar{\boldsymbol{\theta}}_{20}^i$$

або

з врахуванням (14):

$$\Delta\bar{r}_{23}^i = -\rho_{20} \cdot \Delta\tau_2^i \cdot \bar{\boldsymbol{\tau}}_{10}^i + (H_{20} + \rho_{20} - \rho_{20} \cdot \cos\tau_0) \cdot \Delta\theta_2^i \cdot \bar{\boldsymbol{\theta}}_{10}^i \quad (15a)$$

при умові: $\theta_2^i = \theta_0^i + \Delta\theta_2^i$; $\tau_2^i = \tau_0 + \Delta\tau_2^i$; $\Delta\theta_2^i$ - мала зміна кутового положення; $\Delta\tau_2^i$ - мала зміна кута контакту.

При цьому необхідно зауважити, що зміщення в просторі точки контакту (вектор $\Delta\mathbf{r}_{23}^i$) супроводжується і відповідним зміщенням центру радіуса кривизни (вектор $\Delta\mathbf{R}_{23}^i$):

$$\Delta\bar{\mathbf{R}}_{23}^i = \frac{\partial \bar{\mathbf{R}}_{20}^i}{\partial \theta_0^i} \cdot \Delta\theta_2^i = (H_{20} + \rho_{20}) \cdot \Delta\theta_2^i \cdot \bar{\theta}_{20}^i \quad (16)$$

$$\text{де } \bar{\mathbf{R}}_{20}^i = \begin{bmatrix} (H_{20} + \rho_{20}) \cdot \cos\theta_0^i \\ (H_{20} + \rho_{20}) \cdot \sin\theta_0^i \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Залежність базисних векторів \mathbf{n}_{23}^i , θ_{23}^i , τ_{23}^i та \mathbf{n}_{10}^i , θ_{10}^i , τ_{10}^i з урахуванням (14) у першому наближенні:

$$\begin{aligned} \bar{\mathbf{n}}_{23}^i &= -\bar{\mathbf{n}}_{10}^i + \Delta\tau_2^i \cdot \bar{\tau}_{10}^i + \Delta\theta_2^i \cdot \cos\tau_0 \cdot \bar{\theta}_{10}^i; \\ \bar{\tau}_{23}^i &= -\bar{\tau}_{10}^i - \Delta\tau_1^i \cdot \bar{\mathbf{n}}_{10}^i + \Delta\theta_2^i \cdot \sin\tau_0 \cdot \bar{\theta}_{10}^i; \\ \bar{\theta}_{13}^i &= \bar{\theta}_{10}^i - \Delta\theta_2^i \cdot \bar{\mathbf{k}}; \quad \text{де } \bar{\mathbf{k}} = [\cos\theta_0^i; \sin\theta_0^i; 0; 0]^T \end{aligned} \quad (17)$$

Для опису положення характерних точок внутрішнього кільця та їх векторних характеристик у глобальній системі координат підшипника $X_1Y_1Z_1$ застосуємо залежність [3]:

$$\bar{\mathbf{r}} = \bar{\mathbf{r}} + \Delta\bar{\mathbf{r}} = \bar{\mathbf{r}} + [\bar{\mathbf{T}}] \cdot \bar{\mathbf{r}} = \bar{\mathbf{r}} + ([\bar{\mathbf{T}}_0] + [\bar{\boldsymbol{\varepsilon}}]) \cdot \bar{\mathbf{r}}, \quad (18)$$

де \mathbf{r} , \mathbf{r}' – векторні характеристики у локальній і глобальній системах координат відповідно; $[\mathbf{T}]$, $[\mathbf{T}_0]$, $[\boldsymbol{\varepsilon}]$ – блочні матриці зміщення системи координат: $[\mathbf{T}]$ – загальна, $[\mathbf{T}_0]$ – ідеального підшипника (номінальне положення), $[\boldsymbol{\varepsilon}]$ – узагальненої похибки положення внутрішнього кільця при його малих зміщеннях відносно номінального положення.

$$[\bar{\mathbf{T}}_0] = \begin{bmatrix} \mathbf{M}_0 & \bar{\mathbf{h}}_0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & S \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}; \quad [\bar{\boldsymbol{\varepsilon}}] = \begin{bmatrix} \mathbf{M}_\varepsilon & \bar{\mathbf{h}}_\varepsilon \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \beta & \Delta x \\ 0 & 0 & -\alpha & \Delta y \\ -\beta & \alpha & 0 & \Delta z \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad (19)$$

де \mathbf{M}_0 , \mathbf{M}_ε - матриці порядку 3×3 кутового зміщення системи $X_2Y_2Z_2$ відносно системи $X_1Y_1Z_1$ для випадків ідеального та приведеного підшипників; \mathbf{h}_0 - тримірний вектор положення початку O_2 системи $X_2Y_2Z_2$ відносно початку O_1 системи $X_1Y_1Z_1$ для номінального положення внутрішнього кільця (для ідеального підшипника); \mathbf{h}_ε - тримірний вектор похибки положення внутрішнього кільця при його малих зміщеннях відносно власного (в системі $X_2Y_2Z_2$) номінального положення.

Відповідно до (18) точка контакту i -ї кульки приведенного підшипника з внутрішнім кільцем у системі координат $X_1Y_1Z_1$ визначатиметься радіус-вектором \mathbf{r}_{2j}^i відповідної точки поверхні доріжки кочення внутрішнього кільця або локальним базисом $\mathbf{n}_{2j}^i, \theta_{2j}^i, \tau_{2j}^i$ (рис.3).

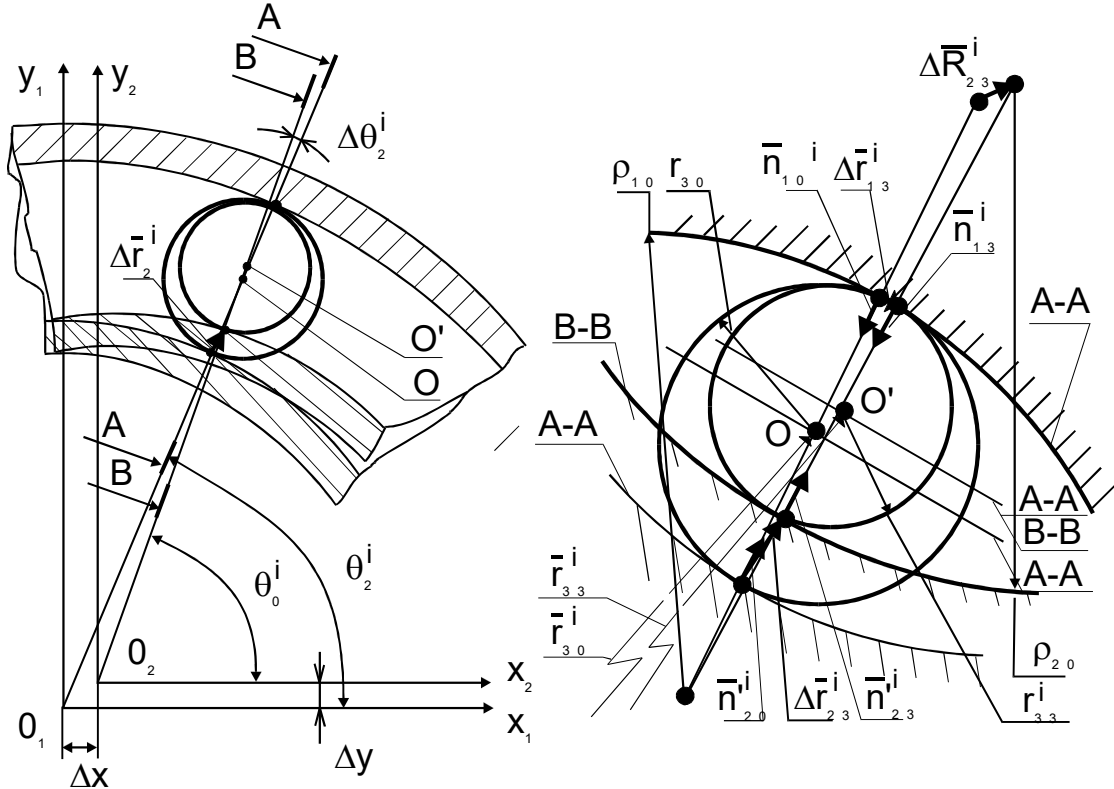


Рис. 3. Положення точок контакту i -ї кульки з кільцями приведенного підшипника у глобальній системі координат

Положення центру O' i -ї кульки приведенного підшипника у системі координат $X_1Y_1Z_1$ визначається радіус-вектором \mathbf{r}_{33}^i :

$$\bar{\mathbf{r}}_{33}^i = \bar{\mathbf{r}}_{13}^i + \bar{\mathbf{n}}_{13}^i \cdot \mathbf{r}_{33}^i \quad \text{або} \quad \bar{\mathbf{r}}_{33}^i = \bar{\mathbf{r}}_{23}^i + \bar{\mathbf{n}}_{23}^i \cdot \mathbf{r}_{33}^i \quad \text{де} \quad \mathbf{r}_{33}^i = \mathbf{r}_{30} - \Delta \mathbf{r}_{33}^i \quad (20)$$

Прирівнявши вирази 20 радіус-вектора \mathbf{r}_{33}^i з урахуванням 10, 11,13-19, в першому наближенні отримаємо значення координат $\Delta x, \Delta y, \Delta z$ вектора \mathbf{h}_ε :

$$\bar{\mathbf{h}}_\varepsilon = \begin{bmatrix} \Delta x \\ \Delta y \\ \Delta z \end{bmatrix} = -2 \cdot \Delta \mathbf{r}_{33}^i \cdot \bar{\mathbf{n}}_{10}^i + \Delta \tau^i \cdot \bar{\tau}_{10}^i - \Delta \theta^i \cdot \bar{\theta}_{10}^i - \bar{\Delta}_M^i \quad (21)$$

$$\text{де} \quad \Delta \tau^i = \Delta \tau_1^i \cdot (\rho_{10} - r_{30}) + \Delta \tau_2^i \cdot (\rho_{20} - r_{30}) ;$$

$$\Delta \theta^i = \Delta \theta_2^i \cdot (H_{20} + \rho_{20} - (\rho_{20} - r_{30}) \cdot \cos \tau_0) ;$$

$$\bar{\Delta}_M^i = \begin{bmatrix} -\beta \cdot (\rho_{20} - r_{30}) \cdot \sin \tau_0 \\ \alpha \cdot (\rho_{20} - r_{30}) \cdot \sin \tau_0 \\ (H_{20} + \rho_{20} - (\rho_{20} - r_{30}) \cdot \cos \tau_0) \cdot (\alpha \cdot \sin \theta_0^i - \beta \cdot \cos \theta_0^i) \end{bmatrix} \quad \text{Або} \quad \text{в}$$

розгорнутому вигляді у вигляді системи рівнянь:

$$\begin{cases} \Delta x = 2 \cdot \Delta r_{33}^i \cdot \cos \tau_0 \cdot \cos \theta_0^i - \Delta_\tau^i \cdot \sin \tau_0 \cdot \cos \theta_0^i + \Delta_\theta^i \cdot \sin \theta_0^i + \beta \cdot (\rho_{20} - r_{30}) \cdot \sin \tau_0 \\ \Delta y = 2 \cdot \Delta r_{33}^i \cdot \cos \tau_0 \cdot \sin \theta_0^i - \Delta_\tau^i \cdot \sin \tau_0 \cdot \sin \theta_0^i - \Delta_\theta^i \cdot \cos \theta_0^i - \alpha \cdot (\rho_{20} - r_{30}) \cdot \sin \tau_0 \\ \Delta z = 2 \cdot \Delta r_{33}^i \cdot \sin \tau_0 + \Delta_\tau^i \cdot \cos \tau_0 - (H_{20} + \rho_{20} - (\rho_{20} - r_{30}) \cdot \cos \tau_0) \cdot (\alpha \cdot \sin \theta_0^i - \beta \cdot \cos \theta_0^i) \end{cases} \quad (22)$$

З системи рівнянь 22 можна отримати залежність зміни $2\Delta r_{33}^i$ приведенного діаметру d_{33}^i кульки і-ї контактної групи порівняно з номінальним діаметром $d_{30}=2\Delta r_{30}$:

$$2 \cdot \Delta r_{33}^i = a_0 + B \cdot \sin \theta_0^i + D \cdot \cos \theta_0^i = a_0 + A \cdot \sin(\theta_0^i + \varphi) \quad (23)$$

$$\text{де } B = \alpha \cdot (H_{20} + \rho_{20}) \cdot \sin \tau_0 + \Delta y \cdot \cos \tau_0 ;$$

$$D = -\beta \cdot (H_{20} + \rho_{20}) \cdot \sin \tau_0 + \Delta x \cdot \cos \tau_0 ;$$

$$a_0 = \Delta z \cdot \sin \tau_0 ; A = \sqrt{B^2 + D^2} ; \varphi = \text{arctg} \frac{D}{B}$$

Для реального підшипника параметр $2\Delta r_{33}^i$ приведенного підшипника фактично відповідає узагальненій похибці Δ_k^i і-ї контактної групи (рис.4). Вважаймо, що для приведенного і реального підшипників точки контакту і-ї кульки із кільцями розміщені на прямих, напрям яких визначається нормаллями \mathbf{n}_{13}^i та \mathbf{n}_{23}^i . Перетин цих прямих визначає положення центру O' і-ї кульки приведенного підшипника. Власне відстані між відповідними точками контакту приведенного і реального підшипників (точки відповідних поверхонь доріжок кочення) є похибками геометрії зовнішнього (Δ_1^i) та внутрішнього (Δ_2^i) кілець. Відстані від відповідних точок контакту реального підшипника до точок перетину вище вказаних прямих колом, проведеним радіусом r_{30} з точки O' (точки відповідних поверхонь кульки) – це похибки геометрії кульки в точках контакту із зовнішнім (Δr_{31}^i) та внутрішнім (Δr_{32}^i) кільцями. На основі цих міркувань запишімо векторне рівняння:

$$(r_{30} - (\Delta_1^i + \Delta r_{31}^i)) \cdot \bar{\mathbf{n}}_{13}^i - (r_{30} - (\Delta_2^i + \Delta r_{32}^i)) \cdot \bar{\mathbf{n}}_{23}^i = r_{33}^i \cdot \bar{\mathbf{n}}_{13}^i - r_{33}^i \cdot \bar{\mathbf{n}}_{23}^i \quad (24)$$

або з урахуванням залежностей 11, 16, 17, 18 і 20 у першому наближенні:

$$2\Delta r_{33}^i = \Delta_1^i + \Delta_2^i + \Delta r_{31}^i + \Delta r_{32}^i = \Delta_k^i \quad (25)$$

Залежність 25 є характеристикою похибки геометрії реального підшипника у і-й контактній групі за умови наявності контакту кульки з обома кільцями.

Значення похибок геометрії елементів реального підшипника для і-ї контактної групи шукаймо з використанням залежностей 3, 9, 13, 18 за методикою [1] шляхом подання поверхонь кочення у формі рядів Фур'є:

$$\Delta_1^i = (\bar{r}_{12}^i - \bar{r}_{10}^i) \cdot \bar{\mathbf{n}}_{13}^i ; \Delta_2^i = (\bar{r}_{20}^i - \bar{r}_{22}^i) \cdot \bar{\mathbf{n}}_{23}^i ; \Delta r_{31}^i = r_{30} - r_{31}^i ; \Delta r_{32}^i = r_{30} - r_{32}^i \quad (26)$$

В свою чергу, залежність 23 фактично є законом зміни діаметрів кульок приведенного підшипника на куті їх розміщення θ_0^i , оскільки значення a_0 , A та φ є сталими для всіх контактних груп. Визначення вище вказаних констант для реального підшипника дозволить знайти дійсні значення координат Δx , Δy , Δz вектора \mathbf{h}_g :

$$\begin{aligned} \Delta x &= \frac{\beta \cdot (H_{20} + \rho_{20}) \cdot \sin \tau_0 + A / \sqrt{1 + \operatorname{ctg}^2 \varphi}}{\cos \tau_0}; \\ \Delta y &= \frac{-\alpha \cdot (H_{20} + \rho_{20}) \cdot \sin \tau_0 + A / \sqrt{1 + \operatorname{tg}^2 \varphi}}{\cos \tau_0}; \\ \Delta z &= \frac{a_0}{\sin \tau_0} \end{aligned} \quad (27)$$

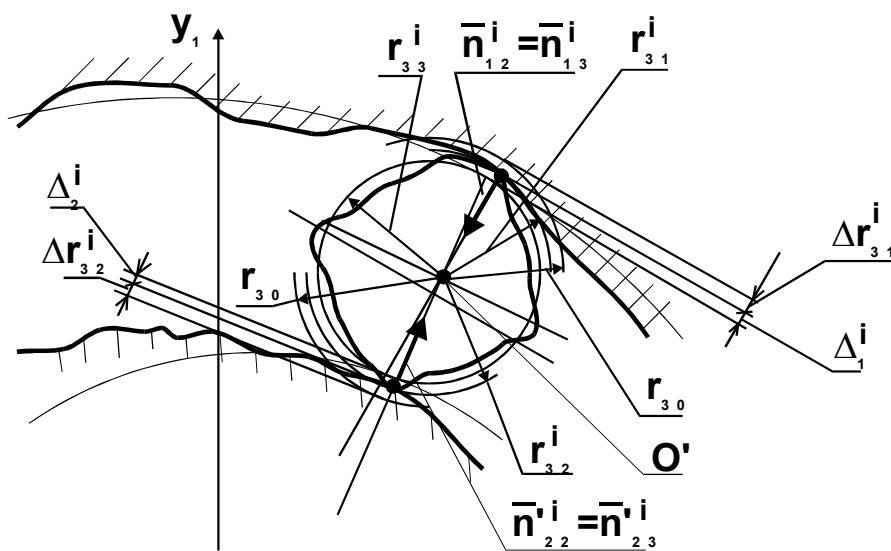


Рис.4. Характеристика похибки геометрії реального підшипника у i -й контактній групі.

Отже, процедура знаходження дійсних значень координат Δx , Δy , Δz вектора \mathbf{h}_e передбачає визначення за залежностями 26 узагальнених похибок Δ_k^i i -х контактних груп, позначення цих значень відповідними точками у системі координат $\Delta_k^i \theta^i$ і побудову та визначення параметрів a_0 , A та φ прилеглої згори до цих точок синусоїди (відповідно до 23) з умовою максимального зближення центрів внутрішнього і зовнішнього кілець у напрямку вісі Z , тобто $\Delta z \rightarrow \min$ (рис.5). Точки, що лежатимуть під прилеглою синусоїдою (Δ_k^{i+1} , рис.5), визначають контактні групи реального підшипника, у яких кулька з обома кільцями не контактує.

У першому наближенні розв'язок шукаємо з умови відповідності параметрів θ_m^i ; τ_m^i реального та ідеального підшипників, тобто $\theta_1^i = \theta_2^i = \theta_0^i$ та $\tau_1^i = \tau_2^i = \tau_0$. Уточнене обчислення потребує врахування значень малих змін цих параметрів, а саме $\Delta \tau_1^i$, $\Delta \tau_2^i$, $\Delta \theta_2^i$. Для цього використаємо систему рівнянь 22 і запишімо додаткове рівняння, що визначає взаємне положення точок контакту i -ї кульки приведеного підшипника з кільцями I та II центру O' (рис.3). З геометричних міркувань, а саме перпендикулярності діагоналей ромба, побудованого на векторах, що з'єднують центр кульки з точками контакту, маємо:

$$(\bar{\mathbf{r}}_{13}^i - \bar{\mathbf{r}}_{23}^i) \cdot (\mathbf{r}_{33}^i \cdot \bar{\mathbf{n}}_{13}^i + \mathbf{r}_{33}^i \cdot \bar{\mathbf{n}}_{23}^i) = 0 \quad (28)$$

звідки з урахуванням 10, 11, 15-18 у першому наближенні отримаємо:

$$\Delta\tau_2^i = \Delta\tau_1^i - (\alpha \cdot \sin\theta_0^i - \beta \cdot \cos\theta_0^i) \quad (29)$$

Тоді з системи рівнянь 22 з урахуванням

29 отримаємо решту залежностей:

$$\Delta\tau_1^i = \frac{\Delta z - 2 \cdot \Delta r_{33}^i \cdot \sin\tau_0 + (H_{20} + \rho_{20}) \cdot (\alpha \cdot \sin\theta_0^i - \beta \cdot \cos\theta_0^i)}{(\rho_{10} + \rho_{20} - 2 \cdot r_{30}) \cdot \cos\tau_0} \quad (30)$$

$$\Delta\theta_2^i = \frac{\Delta x \cdot \sin\theta_0^i - \Delta y \cdot \cos\theta_0^i - (\rho_{20} - r_{30}) \cdot (\alpha \cdot \cos\theta_0^i + \beta \cdot \sin\theta_0^i) \cdot \sin\tau_0}{H_{20} + \rho_{20} - (\rho_{20} - r_{30}) \cdot \cos\tau_0} \quad (31)$$

За цими залежностями 29-31 уточнюють значення похибок геометрії елементів (26), і процедура знаходження значень координат Δx , Δy , Δz вектора \mathbf{h}_e повторюється.

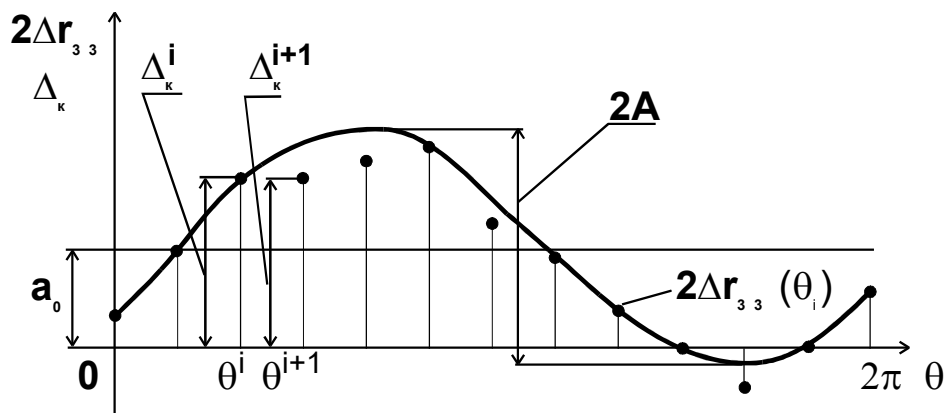


Рис.5. Процедура знаходження початкового зміщення внутрішнього кільця підшипника.

The 3D space model of radial thrust bearing for spindle unit support has been developed. The model allows us to determine initial (pre deformational) relative deflection of inner ring in 3D space due to nonideal manufacturing of bearing and unit elements.

Література.

1. Журавлев В.Ф., Бальмонт В.Б. Механика шарикоподшипников гироскопов. – М.: Машиностроение, 1985. – 272 с.
2. Корн Г., Корн Т. Справочник по математике для научных работников и инженеров. М.: Наука, 1984. – 831 с.
3. Решетов Д.Н., Портман В.Т. Точность металлорежущих станков. – М.: Машиностроение, 1986. – 336 с.

Одержано 02.02.2000 р.