

## МАТЕМАТИЧНЕ МОДЕЛЮВАННЯ ОСНОВНИХ КРИВИХ НАМАГНІЧУВАННЯ ЕЛЕКТРОТЕХНІЧНИХ СТАЛЕЙ

У роботі пропонується використовувати лінійно-параболо-гіперболічну математичну модель для апроксимації основних кривих намагнічування феромагнітних матеріалів. Розглядається можливість відтворення кривих намагнічування баластних дроселів за допомогою даної математичної моделі при наявності в них немагнітного зазору. Подано результати обчислення та експерименту для дроселя броньової магнітної системи з різними значеннями величини немагнітного зазору.

### Умовні позначення:

$B$	– магнітна індукція;
$H$	– напруженість магнітного поля;
$H_{ст}$	– напруженість магнітного поля у магнітопроводі;
$\mu_{поч}$	– початкова абсолютна магнітна проникненість;
$\mu_{макс}$	– максимальна абсолютна магнітна проникненість;
$l_z$	– довжина немагнітного зазору;
$l_{ст}$	– середня довжина шляху магнітних силових ліній у магнітопроводі;
$\gamma$	– коефіцієнт, що враховує вупучування і розсіювання магнітного потоку в зазорі;
$\sigma$	– приведена довжина немагнітного зазору.

Для зменшення трудозатрат, пов'язаних з експериментальними доведеннями електромагнітних пускорегулюючих апаратів для розрядних ламп до вимог держстандартів, необхідно, щоб конструктивні методи обчислення базувалися на використанні таких математичних моделей основних кривих намагнічування феромагнітних матеріалів, які дозволяли б максимально точно відтворювати їхні вольт-амперні характеристики при будь-яких значеннях немагнітних зазорів у магнітопроводі. Комп'ютерна техніка дозволяє не обмежувати складності апроксимуючих виразів математичних моделей.

Відомі математичні моделі основної кривої намагнічування електротехнічних сталей [1, 2] не відтворюють її поведінки у діапазоні напруженостей 0...100 А/м (ділянка *oab*, рис.1). Це ж стосується й найбільш поширеною лінійно-гіперболічної математичної моделі основної кривої намагнічування [1], коли ділянка *ob* апроксимується виразом  $B = \mu_{поч}H$ , а ділянка *bc* – гіперболою з вершиною у точці  $b(H_{3z}, B_{3z})$ . У цьому випадку рівняння гіперболи набирає вигляду:

$$\frac{(B-a)^2}{a^2} - \frac{(H-H_{3z})^2}{b^2} = 1, \quad (1)$$

а апроксимуючий вираз:

$$B = \begin{cases} \mu_{поч}H + a(1 - \sqrt{1 + \frac{(H-H_{3z})^2}{b^2}}), & \text{при } H > H_{3z} \\ \mu_{поч}H, & \text{при } H \leq H_{3z} \end{cases}, \quad (2)$$

де  $a, b$  – дійсна й уявна напіввісі гіперболи;

$B_{3z}, H_{3z}$  – магнітна індукція та напруженість магнітного поля у точці згину відповідно, Тл, А/м;

$B$  – магнітна індукція у магнітопроводі, Тл;

$H$  – напруженість магнітного поля у магнітопроводі, А/м.

Аналіз запропонованої математичної моделі виявив такі її недоліки:

а) не враховано, що основна крива намагнічування електротехнічних сталей має не одну, а дві точки перегину -  $a$  і  $b$  (рис.1) [3];

б) нехтування реальною ділянкою  $oa$ , де  $\operatorname{tg}\alpha$  дійсно пропорційний  $\mu_{\text{ноч}}$ , призвело до неправильного визначення магнітної проникності в точці  $b$ , де  $\operatorname{tg}\beta$  - пропорційний максимальній магнітній проникності  $\mu_{\text{макс}}$ . У результаті при знаходженні значення  $\mu_{\text{ноч}}$  його величина виявилася значно більшою, ніж насправді.

Усунути ці недоліки можна, застосувавши лінійно-параболо-гіперболічну математичну модель основної кривої намагнічування, при якій початкова ділянка  $(0; H_{31})$  (рис.2) апроксимується прямою, для якої  $\operatorname{tg}\alpha$  пропорційний  $\mu_{\text{ноч}}$ . Рівняння прямої запишеться у вигляді  $B = \mu_{\text{ноч}}H$ . Наступна ділянка  $(H_{31}; H_{32})$  апроксимується параболою, вершина якої лежить на вісі  $OB$ :  $B = pH^2 + c$ , де  $p$  - параметр параболи;  $c$  - зсув по вісі  $OB$ . Ділянка  $(H_{32}; \infty)$  апроксимується гіперболою, вершина якої лежить у точці  $(2B_3; H_3)$ . Рівняння такої гіперболи виглядатиме так:

$$\frac{[(H - H_3) + a]^2}{a^2} - \frac{[B - 2\mu_{\text{ноч}}H_3]^2}{b^2} = 1, \quad (3)$$

а апроксимаційний вираз запишемо так:

$$B = 2\mu_{\text{ноч}}H_3 - \mu_{\text{ноч}}H + b\sqrt{\frac{((H - H_3) + a)^2}{a^2} - 1}. \quad (4)$$

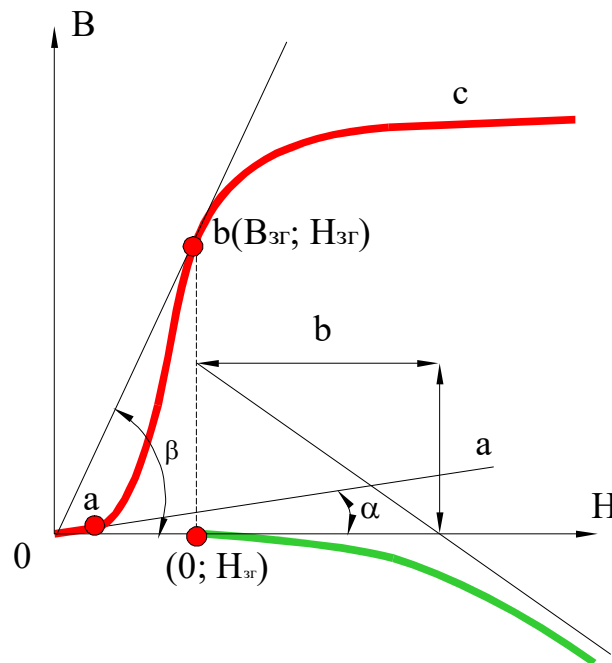


Рис. 1. Загальний вигляд реальної кривої намагнічування та принцип її побудови з використанням лінійно-гіперболічної математичної моделі.

Тоді вершина гіперболи переміститься у точку  $(B_3; H_3)$ . Розв'язуючи систему рівнянь:

$$\left\{ \begin{array}{l} B_1 = \mu_{\text{ноч}}(2H_3 - H_1) + b\sqrt{\frac{((H_1 - H_3) + a)^2}{a^2} - 1}, \quad (5) \\ B_2 = \mu_{\text{ноч}}(2H_3 - H_2) + b\sqrt{\frac{((H_2 - H_3) + a)^2}{a^2} - 1}, \quad (6) \\ B_3 = \mu_{\text{ноч}}(2H_3 - H_3) + b\sqrt{\frac{((H_3 - H_3) + a)^2}{a^2} - 1}, \quad (7) \\ B_4 = \mu_{\text{ноч}}(2H_3 - H_4) + b\sqrt{\frac{((H_4 - H_3) + a)^2}{a^2} - 1}, \quad (8) \end{array} \right.$$

знаходимо значення  $a$ ,  $b$ ,  $H_3$  та  $\mu_{\text{ноч}}$ .

Із (7) визначаємо  $b^2$ :

$$b^2 = \frac{a^2 [B_1 - \mu_{\text{ноч}}(2H_3 - H_1)]^2}{(H_1 - H_3)^2 + 2a(H_1 - H_3)}. \quad (9)$$

Із спільного розв'язку (6) і (9) визначимо  $2a$ :

$$2a = \frac{(H_1 - H_3)^2 [B_2 - \mu_{\text{ноч}}(2H_3 - H_2)]^2 - (H_2 - H_3)^2 [B_1 - \mu_{\text{ноч}}(2H_3 - H_1)]^2}{(H_2 - H_3) [B_1 - \mu_{\text{ноч}}(2H_3 - H_1)]^2 - (H_1 - H_3) [B_2 - \mu_{\text{ноч}}(2H_3 - H_2)]^2} \quad (10)$$

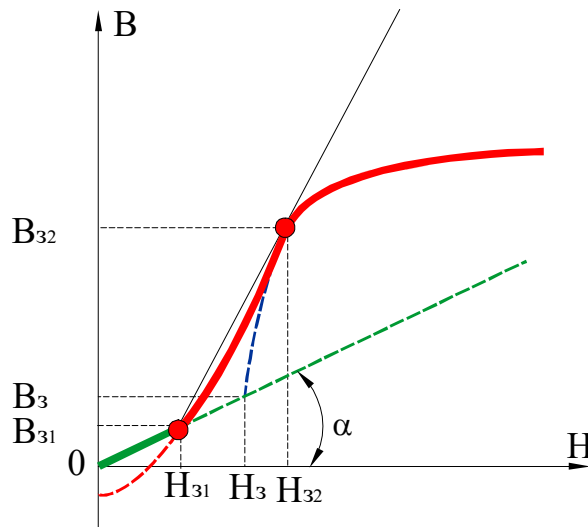


Рис. 2. Принцип побудови основної кривої намагнічування з використанням лінійно-параболо-гіперболічної математичної моделі.

Розв'язуючи (7) і (10) та (8) і (10), отримаємо ще два рівняння:

$$\begin{aligned} & [B_1 - \mu_{\text{поч}}(2H_3 - H_1)]^2 \{ (H_3 - H_3)^2 (H_2 - H_3) - (H_2 - H_3)^2 (H_3 - H_3) \} - \\ & - [B_2 - \mu_{\text{поч}}(2H_3 - H_2)]^2 \{ (H_3 - H_3)^2 (H_1 - H_3) - (H_1 - H_3)^2 (H_3 - H_3) \} + \end{aligned} \quad (11)$$

$$\begin{aligned} & + [B_3 - \mu_{\text{поч}}(2H_3 - H_3)]^2 \{ (H_2 - H_3)^2 (H_1 - H_3) - (H_1 - H_3)^2 (H_2 - H_3) \} = 0 \\ & [B_1 - \mu_{\text{поч}}(2H_3 - H_1)]^2 \{ (H_4 - H_3)^2 (H_2 - H_3) - (H_2 - H_3)^2 (H_4 - H_3) \} - \\ & - [B_2 - \mu_{\text{поч}}(2H_3 - H_2)]^2 \{ (H_4 - H_3)^2 (H_1 - H_3) - (H_1 - H_3)^2 (H_4 - H_3) \} + \end{aligned} \quad (12)$$

$$+ [B_4 - \mu_{\text{поч}}(2H_3 - H_4)]^2 \{ (H_2 - H_3)^2 (H_1 - H_3) - (H_1 - H_3)^2 (H_2 - H_3) \} = 0$$

Розв'язуючи (11) і (12) графічним методом, знаходимо  $H_3$  і  $\mu_{\text{поч}}$ .

За опорні точки приймаємо три значення із вказаних у [4]. Це значення магнітної індукції при напруженостях магнітного поля, що дорівнюють  $H=1000, 2500$  і  $5000$  А/м або  $H=2500, 5000$  і  $10000$  А/м, і одна опорна точка, що лежить на другому перегині кривої намагнічування. Для сталей 2011..2212 - це значення магнітної індукції  $B=0,47$  Тл при  $H=100$  А/м; для сталей 2311..2412 -  $B=0,736$  Тл при  $H=100$  А/м; для сталей 3411..3416 -  $B=0,8$  Тл при  $H=50$  А/м; для сталей марок 2421...2425 значення магнітної індукції вибирається з [4] при  $H=20$  А/м.

Щоб побудувати параболу, що з'єднає лінійну ділянку з гіперболічною, необхідно мати дві точки, одна з яких лежить на прямій, а інша – на гіперболі. Координати першої точки визначимо з рівняння:

$$H_{31} = \frac{1}{3} H_3; \quad (13)$$

$$B_{31} = \mu_{\text{поч}} H_{31}. \quad (14)$$

Щоб визначити координати другої точки  $(B_{32}; H_{32})$ , через точку  $(B_{31}; H_{31})$  проводимо дотичну до гіперболи. Рівняння дотичної запишемо у вигляді:

$$B = kH + d, \quad (15)$$

де

$$d = B_{31} - kH_{31}, \quad (16)$$

$$B = kH + (B_{31} - kH_{31}). \quad (17)$$

Прирівнявши (17) і (4), отримаємо вираз для визначення  $H_{32}$ :

$$\begin{aligned} H_{32} = & \frac{b^2(a - H_3) - a^2(k + \mu_{\text{поч}})\{(B_{31} - 2\mu_{\text{поч}}H_3) - kH_{31}\}}{a^2(k + \mu_{\text{поч}})^2 - b^2} \pm \\ & \pm \sqrt{\frac{\left[ \frac{b^2(a - H_3) - a^2(k + \mu_{\text{поч}})\{(B_{31} - 2\mu_{\text{поч}}H_3) - kH_{31}\}}{a^2(k + \mu_{\text{поч}})^2 - b^2} \right]^2}{\left[ a^2(k + \mu_{\text{поч}})^2 - b^2 \right]^2} - \left[ a^2\{(B_{31} - 2\mu_{\text{поч}}H_3) - kH_{31}\}^2 - b^2H_3(H_3 - 2a) \right]} \end{aligned} \quad (18)$$

Прирівнявши підкореневий вираз у (18) з нулем, одержимо вираз для визначення коефіцієнта  $k$ , при якому пряма  $B=kH+d$  буде дотичною до гіперболи:

$$k^2 \{H_3(H_3 - 2a) + H_{31} \{H_{31} - 2(H_3 - a)\}\} - 2k \{H_{31}(B_{31} - 2\mu_{\text{ноч}}H_3) + \mu_{\text{ноч}}H_3^2\} + \{b^2 + \mu_{\text{ноч}}^2 H_3(H_3 - 2a) + (B_{31} - 2\mu_{\text{ноч}}H_3)^2 + 2\mu_{\text{ноч}}(H_3 - a)(B_{31} - 2\mu_{\text{ноч}}H_3)\} = 0 \quad (19)$$

Знаючи дві точки, проводимо через них параболу

$$B = pH^2 + c, \quad (20)$$

де

$$c = B_{31} - pH_{31}^2, \quad (21)$$

$$p = \frac{B_{32} - B_{31}}{H_{32}^2 - H_{31}^2}. \quad (22)$$

Значення  $B_{32}$  знаходимо з (4) при  $H = H_{32}$ .

Тепер можемо записати апроксимуючі вирази:

$$B = \begin{cases} \mu_{\text{ноч}}(2H_3 - H) + b\sqrt{\frac{[(H - H_3) + a]^2}{a^2} - 1}, & \text{при } H \geq H_{32} \\ pH^2 + c, & \text{при } H_{31} < H < H_{32} \\ \mu_{\text{ноч}}H, & \text{при } H \leq H_{31} \end{cases}, \quad (23)$$

$$H = \begin{cases} \frac{1}{a^2\mu_{\text{ноч}}^2 - b^2} [b^2(a - H_3) - a^2\mu_{\text{ноч}}(B - 2B_3) - ab\sqrt{b^2 + \mu_{\text{ноч}}^2 H_3(H_3 - 2a) - 2\mu_{\text{ноч}}(H_3 - a)(B - 2B_3) + (B - 2B_3)^2}], & \text{при } B \geq B_{32} \\ \sqrt{\frac{B - c}{p}}, & \text{при } B_{31} < B < B_{32} \\ B/\mu_{\text{ноч}}, & \text{при } B \leq B_{31} \end{cases}, \quad (24)$$

де  $B_3 = \mu_{\text{ноч}}H_3$ .

Наші порівняння експериментально знятих на обладнанні ВАТ “Ватра” за методикою [5] основних кривих намагнічування сталей 2212, 2412, 3414 з обчисленими за виразами (23) і (24) з урахуванням теорії, викладеної в [6, 7], виявили, що похибка апроксимації на робочій ділянці не більша за 3 %, а на початковій – 10 %. Тоді як при апроксимації за [1] похибка на початковій ділянці майже 200 %.

Для прикладу розгляньмо зняту нами характеристику сталі 2212, яку найчастіше використовують для виготовлення магнітопроводів баластових дроселів. За опорні точки беремо значення магнітної індукції при напруженостях магнітного поля  $H=100$ ;

1000; 2500 і 5000 А/м. Це  $B=0,76; 1,5; 1,65$  і  $1,76$  Тл відповідно. Тоді коефіцієнти моделі набирають таких значень:  $a = 415,7$  А/м,  $b = 1,517$  Тл,  $\mu_{\text{поч}} = 0,00363$ ,  $H_3 = 56$  А/м,  $B_3 = 0,2$  Тл,  $H_{31} = 18,7$  А/м,  $B_{31} = 0,068$  Тл,  $H_{32} = 73,3$  А/м,  $B_{32} = 0,58$  Тл,  $p = 0,0001025$ ,  $c = 0,032$  Тл, а апроксимуючі вирази для визначення магнітної індукції виглядатимуть:

$$B = \begin{cases} 0.00363 \cdot (112 - H) + 1.517 \cdot \sqrt{\frac{[H + 359.7]^2}{415.7^2} - 1}, & \text{при } H \geq 73.3 \\ 0.0001025 \cdot H^2 + 0.032, & \text{при } 18.7 < H < 73.3 \\ 0.00363 \cdot H, & \text{при } H \leq 18.7 \end{cases} \quad (25)$$

Аналогічно можна записати апроксимуючі вирази математичної моделі і для визначення напруженості магнітного поля за даними значеннями магнітної індукції. У таблиці 1 подані результати вимірювань і обчислення (за виразом (25) і згідно з [1]) магнітних характеристик сталі 2212, а також зроблено оцінку похибки розрахункових значень.

Як відомо [2], степінь нелінійності вольт-амперної характеристики дроселя зумовлений не лише основною кривою намагнічування сталі магнітопроводу і значенням максимальної робочої індукції, але й величиною немагнітного зазору в магнітопроводі. В області зазору магнітна проникність значно менша від магнітної проникності у сталі магнітопроводу, що зумовлює значний спад магнітного потенціалу і випучування магнітного потоку в цій області. Крім того, внаслідок скінченності значень магнітної проникності сталі магнітопроводу частина магнітного потоку замикається не магнітопроводом, а повітрям, не зчеплюючись при цьому з частиною витків обмотки дроселя. Цей потік називається потоком розсіювання, і його величина визначається значенням різниці магнітних потенціалів, під якими є певні ділянки магнітного кола. Для різних конструкцій баластних дроселів інтенсивність випучування і розсіювання магнітного потоку різна, саме тому й не збігаються вольт-амперні характеристики абсолютно ідентичних дроселів броньової, стержньової, просторової та інших магнітних систем. Врахувати вплив інтенсивності випучування і розсіювання магнітного потоку в різних конструкціях дроселів найпростіше за допомогою коефіцієнта  $\gamma$  [8] шляхом зменшення максимальної магнітної індукції в немагнітному зазорі.

Таблиця 1

Результати експерименту та обчислення значень магнітної індукції  $B$  при різних значеннях напруженості магнітного поля  $H$  для сталі 2212.

H, А/м	10	20	40	50	90	400	600	800	1400	1600	2000
B, Тл експ	0,0350	0,0700	0,1800	0,2600	0,6800	1,3100	1,4000	1,4600	1,5500	1,5800	1,6200
B, Тл Розрах	0,0382	0,0764	0,1857	0,2675	0,6998	1,2852	1,3913	1,4565	1,5628	1,5869	1,6250
$\epsilon$ , %	9,14	9,14	3,17	2,88	2,91	1,89	0,6	0,24	0,83	0,31	0,31
B, Тл Розрах по [1]	0,1015	0,1998	0,3753	0,4535	0,7087	0,3413	1,4390	1,4925	1,5743	1,5915	1,6290
$\epsilon$ , %	190,0	185,4	108,5	74,42	4,22	2,39	2,79	2,23	1,57	0,73	0,56

Розгляньмо, як впливає величина немагнітного зазору на магнітні характеристики осердя дроселя. За законом повного струму для магнітних кіл:

$$\sum Hl = 0,7958 \frac{l'_3}{\gamma} 10^6 B + H_{cm} l_{cm}, \quad (26)$$

звідки

$$H = \frac{l'_3}{l_{cm} + l'_3} \cdot \frac{0,7958}{\gamma} 10^6 B + \frac{l_{cm}}{l_{cm} + l'_3} H_{cm}, \quad (27)$$

де  $B$  – значення індукції в повітряному зазорі без урахування випучування і розсіювання магнітного потоку, Тл;

$l'_3$  – розрахункова довжина немагнітного зазору, м, визначається за методикою, поданою у [8];

$l_{cm}$  – середня довжина шляху магнітних силових ліній у магнітопроводі, м;

$H_{cm}$  – значення напруженості магнітного поля у сталі магнітопроводу, А/м;

$H$  – значення напруженості магнітного поля дроселя, А/м;

$\gamma$  – коефіцієнт, що враховує випучування і розсіювання магнітного потоку в зазорі.

Вираз (27) можна переписати у вигляді:

$$H = \sigma B + H_{cm}, \quad (28)$$

де 
$$\sigma = \frac{l'_3}{l_{cm} + l'_3} \cdot \frac{0,7958}{\gamma} 10^6 - \quad (29)$$

подана довжина повітряного зазору,

$$\frac{l_{cm}}{l_{cm} + l'_3} \approx 1 \quad \text{при } l_{cm} \gg l'_3. \quad (30)$$

Отже, отримано апроксимуючий вираз математичної моделі для кривої

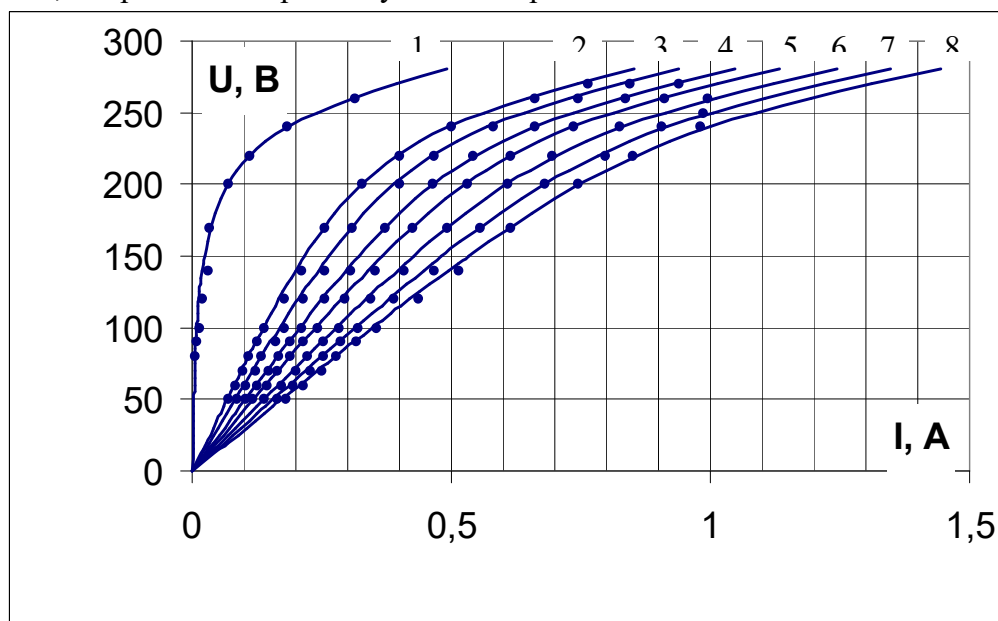


Рис.3. Вольт-амперні характеристики дроселя броньового типу при різних величині немагнітного зазору:

1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 – при  $\sigma=0, 2810, 3481, 4315, 4976, 5840, 6625, 7358$  відповідно;  
 - результати обчислення; •••• - результати експерименту.

намагнічування дроселя:

$$H = \begin{cases} \frac{1}{a^2 \mu_{\text{поч}}^2 - b^2} \left[ B \left\{ \sigma (a^2 \mu_{\text{поч}}^2 - b^2) - a^2 \mu_{\text{поч}} \right\} + b^2 (a - H_3) + 2a^2 \mu_{\text{поч}} B_3 - \right. \\ \left. - ab \sqrt{b^2 + \mu_{\text{поч}}^2 H_3 (H_3 - 2a) - 2\mu_{\text{поч}} (H_3 - a) (B - 2B_3) + (B - 2B_3)^2} \right], \\ \text{при } B \geq B_{32} \\ \sqrt{\frac{B-c}{p}} + \sigma B, \text{ при } B_{31} < B < B_{32} \\ B/\mu_{\text{поч}} + \sigma B, \text{ при } B \leq B_{31} \end{cases} \quad (31)$$

Вираз (31) описує ряд вольт-амперних характеристик дроселів при різних значеннях немагнітного зазору. При  $\sigma=0$  крива намагнічування дроселя збігається з основною кривою намагнічування магнітного матеріалу. На рис.3 подано експериментальні значення і розрахункові вольт-амперні характеристики дроселя броньового типу з різною величиною немагнітного зазору. Оцінка експериментальних і розрахункових даних виявила, що похибка обчислень не більша за 5%.

*In this article we have analyzed the most widespread linear-hyperbolic mathematical model of the main curves of magnetization of ferromagnetic materials. This analysis revealed certain drawbacks of the above mentioned by using the suggested linear-parabolic-hyperbolic mathematical model. This model also enables to take into account the influence of a non-magnetic clearance on the course of volt-ampere characteristics of ballast throttles.*

### Література

1. Краснополский А. Е., Волченко В. А. К вопросу об аппроксимации кривых намагничивания магнитных материалов // Труды МЭИ. - 1972. - Вып. 152.- С. 149-155.



*МАТЕМАТИКА. МАТЕМАТИЧНЕ МОДЕЛЮВАННЯ*

2. Бамдас А. М., Савиновский Ю. А. Дроссели переменного тока радиоэлектронной аппаратуры (катушки со сталью). – М.: Советское радио, 1969. – 248 с.
3. Мишин Д. Д. Магнитные материалы. – М.: Высш. Школа, 1981. – 335 с.
4. ГОСТ 21427.0-75 – 21427.3-75, ГОСТ 21427.4-78. Сталь электротехническая тонколистовая.
5. ГОСТ 12119-80. Сталь электротехническая. Методы определения магнитных и электрических свойств.
6. Адлер Ю. П. Планирование эксперимента при поиске оптимальных условий. – М.: Наука, 1976. – 279 с.
7. Новицкий П. В., Зограф И. А. Оценка погрешностей результатов измерений. – Л.: Энергоатомиздат, 1991. – 301 с.
8. Троицкий А. М. Метод определения воздушного зазора балластного дросселя. //Светотехника. – 1969. - №2. – С. 11-16.

*Одержано 13.02.2000 р.*