МАТЕМАТИКА. МАТЕМАТИЧНЕ МОДЕЛЮВАННЯ

УДК 517.443

М.Ленюк, докт. фіз.-мат. наук; Б. Шелестовський, канд. фіз.-мат. наук
Тернопільський державний технічний університет імені Івана Пулюя

ОБЧИСЛЕННЯ НЕВЛАСНИХ ІНТЕҐРАЛІВ МЕТОДОМ ГІБРИДНОГО ІНТЕҐРАЛЬНОГО ПЕРЕТВОРЕННЯ (КАНТОРОВИЧА - ЛЄБЄДЄВА) 1-ГО РОДУ - ФУР'Є

Методом порівняння розв'язків крайової задачі для системи диференціальних рівнянь Бесселя та Фур'є для модифікованих функцій обчислено поліпараметричну сім'ю невласних інтеґралів, у конструкції підінтегральних функцій яких беруть участь спеціальні функції Бесселя та тригонометричні функції.

Розгляньмо задачу про конструкцію на множині

$$I_1 = \{r{:}\, r \in (0, R_1) \cup (R_1, R_2),\ 0 < R_1 < R_2 < \infty\}$$

розв'язку сепаратної системи диференціальних рівнянь Бесселя та Фур'є для модифікованих функцій

$$\begin{aligned} &(B_\alpha - q_1^2)u_1(r) = -f_1(r),\ r \in (0, R_1) \\ &\left(\frac{d^2}{dr^2} - q_2^2\right)u_2(r) = -f_2(r),\ r \in (R_1, R_2) \end{aligned} \tag{1}$$

за крайовими умовами

$$\lim_{r\to 0}\frac{d}{dr}(r^{\alpha - q_1}u_1(r)) = 0, \quad \left.\left(\alpha_{22}^2\frac{d}{dr} + \beta_{22}^2\right)u_2(r)\right|_{r=R_2} = g_2 \tag{2}$$

та умовами спряження

$$\left[\left(\alpha_{j1}^1 \frac{d}{dr} + \beta_{j1}^1\right)u_1(r) - \left(\alpha_{j2}^1 \frac{d}{dr} + \beta_{j2}^1\right)u_2(r)\right]\Big|_{r=R_1} = 0, j = 1,2 \tag{3}$$

У рівностях (1) - (3) $\alpha_{jk}^m \geq 0, \beta_{jk}^m \geq 0, \quad |\alpha_{22}^2| + |\beta_{22}^2| \neq 0, \quad c_{11}c_{21} > 0,$

$$c_{j1} = \alpha_{2j}^1\beta_{1j}^1 - \alpha_{1j}^1\beta_{2j}^1, \quad j = 1,2; \quad 2\alpha + 1 \geq 0, \quad \lambda \in (0, \infty),$$

$$B_\alpha = r^2\frac{d^2}{dr^2} + (2\alpha + 1)r\frac{d}{dr} + \alpha^2 - \lambda^2 r^2;$$

де B_α- диференціальний оператор Бесселя з виродженням при старшій похідній [1], $q_1 \geq 0, q_2 \geq 0$.

Перше рівняння системи (1) запишемо так:

$$\begin{aligned} (B_{\nu,\alpha} - \lambda^2)u_1 &\equiv \left[\left(\frac{d^2}{dr^2} + \frac{2\alpha+1}{r}\frac{d}{dr} - \frac{\nu^2 - \alpha^2}{r^2}\right) - \lambda^2\right]u_1(r) = \\ &= -r^{-2}f_1(r) \equiv -\bar{f}_1(r),\ \nu = q_1 \end{aligned} \tag{4}$$

Згідно з роботою [2] фундаментальну систему розв'язків для рівняння (4) утворюють узагальнені модифіковані функції $I_{\nu,\alpha}(\lambda r)$ та $K_{\nu,\alpha}(\lambda r)$. Фундаментальну систему розв'язків для рівняння Фур'є $\left({d^2}/{dr^2} - q^2\right)\upsilon = 0$ утворюють функції $\upsilon_1 = exp(qr)$ та $\upsilon_2 = exp(-qr)$ або їх лінійні комбінації $chqr$ та $shqr$ [3].

Наявність фундаментальної системи розв'язків дозволяє будувати розв'язок крайової задачі (1) - (4) методом функцій Коші [4]:

$$u_1(r) = A_1 I_{\nu,\alpha}(\lambda r) + \int_0^{R_1} \varepsilon_{\nu.\alpha;1}(r,\rho)\, \bar{f}_1(\rho)\rho^{2\alpha+1} d\rho,\ \nu \equiv q_1 \ge 0$$
$$u_2(r) = A_2 chq_2 r + B_2 shq_2 r + \int_{R_1}^{R_2} \varepsilon_2(r,\rho)\, f_2(\rho) d\rho. \tag{5}$$

Тут беруть участь функції Коші $\varepsilon_{\nu,\alpha;1}(r,\rho)$ та $\varepsilon_2(r,\rho)$ [4]:

$$\varepsilon_{\nu,\alpha;1}(r,\rho) = \frac{\lambda^{2\alpha}}{U^{11}_{\nu,\alpha;11}(\lambda R_1)} \begin{cases} I_{\nu,\alpha}(\lambda r)\Psi^1_{\nu,\alpha;11}(\lambda R_1, \lambda\rho), 0 < r < \rho < R_1 \\ I_{\nu,\alpha}(\lambda\rho)\Psi^1_{\nu,\alpha;11}(\lambda R_1, \lambda r), 0 < \rho < r < R_1 \end{cases}; \tag{6}$$

$$\varepsilon_2(r,\rho) = -\frac{1}{q_2\Delta_{12}(q_2R_1, q_2R_2)} \begin{cases} \Phi^1_{12}(q_2R_1, q_2r)\Phi^2_{22}(q_2R_2, q_2\rho), R_1 < r < \rho < R_2 \\ \Phi^1_{12}(q_2R_1, q_2\rho)\Phi^2_{22}(q_2R_2, q_2r), R_1 < \rho < r < R_2 \end{cases}. \tag{7}$$

У рівностях (6), (7) беруть участь функції:

$$\Psi^1_{\nu,\alpha;11}(\lambda R_1, \lambda r) = U^{11}_{\nu,\alpha;11}(\lambda R_1)K_{\nu,\alpha}(\lambda r) - U^{12}_{\nu,\alpha;11}(\lambda R_1)I_{\nu,\alpha}(\lambda r);$$
$$\Phi^m_{jk}(q_2R_m, q_2r) = V^{m2}_{jk}(q_2R_m)chq_2r - V^{m1}_{jk}(q_2R_m)shq_2r;$$
$$\Delta_{j2}(q_2R_1, q_2R_2) = V^{11}_{j2}(q_2R_1)V^{22}_{22}(q_2R_2) - V^{12}_{j2}(q_2R_1)V^{21}_{22}(q_2R_2), j = 1,2$$
$$U^{m1}_{\nu,\alpha;jk}(\lambda R_m) = (\alpha^m_{jk}\frac{\nu-\alpha}{R_m} + \beta^m_{jk})I_{\nu,\alpha}(\lambda R_m) + \alpha^m_{jk}\lambda^2 R_m I_{\nu+1,\alpha+1}(\lambda R_m); \tag{8}$$
$$U^{m2}_{\nu,\alpha;jk}(\lambda R_m) = (\alpha^m_{jk}\frac{\nu-\alpha}{R_m} + \beta^m_{jk})K_{\nu,\alpha}(\lambda R_m) - \alpha^m_{jk}\lambda^2 R_m K_{\nu+1,\alpha+1}(\lambda R_m);$$
$$V^{m1}_{jk}(q_2R_m) = \alpha^m_{jk}q_2 shq_2R_m + \beta^m_{jk}chq_2R_m;$$
$$V^{m2}_{jk}(q_2R_m) = \alpha^m_{jk}q_2 chq_2R_m + \beta^m_{jk}shq_2R_m.$$

Умови спряження (3) і крайова умова у точці $r=R_2$ для визначення сталих A_1, A_2, B_2 дають алгебраїчну систему з трьох рівнянь:

$$\begin{aligned} U^{11}_{\nu,\alpha;11}(\lambda R_1)A_1 - V^{11}_{12}(q_2R_1)A_2 - V^{12}_{12}(q_2R_1)B_2 &= 0; \\ U^{11}_{\nu,\alpha;21}(\lambda R_1)A_1 - V^{11}_{22}(q_2R_1)A_2 - V^{12}_{22}(q_2R_1)B_2 &= G_{12}; \\ V^{21}_{22}(q_2R_2)A_2 + V^{22}_{22}(q_2R_2)B_2 &= g_2. \end{aligned} \tag{9}$$

В алгебраїчній системі (9) бере участь функція:

$$G_{12} = \frac{c_{11}}{R_1^{2\alpha+1}} \int_0^{R_1} \frac{I_{\nu,\alpha}(\lambda\rho)}{U^{11}_{\nu,\alpha;11}(\lambda R_1)} \bar{f}_1(\rho)\rho^{2\alpha+1} d\rho + c_{21}\int_{R_1}^{R_2} \frac{\Phi^2_{22}(q_2R_2, q_2\rho)}{\Delta_{12}(q_2R_1, q_2R_2)} f_2(\rho) d\rho.$$

Припустимо, що виконана умова однозначної розв'язності даної крайової задачі (1) - (3): визначник алґебраїчної системи (9)

$$\Delta_\alpha(q_1 q_2) \equiv U^{11}_{\nu,\alpha;21}(\lambda R_1)\Delta_{12}(q_2 R_1, q_2 R_2) - U^{11}_{\nu,\alpha;11}(\lambda R_1)\Delta_{22}(q_2 R_1, q_2 R_2) \neq 0. \tag{10}$$

Визначмо: а) породжені крайовою умовою в точці $r=R_2$ функції Ґріна

$$\begin{aligned} W_{\alpha;21}(r,q) &= \frac{c_{21} q_2}{\Delta_\alpha(q_1,q_2)} I_{\nu,\alpha}(\lambda r), \\ W_{\alpha;22}(r,q) &= \frac{1}{\Delta_\alpha(q_1,q_2)}\left[U^{11}_{\nu,\alpha;11}(\lambda R_1)\Phi^1_{22}(q_2R_2, q_2 r) - U^{11}_{\nu,\alpha;21}(\lambda R_1)\Phi^1_{12}(q_2 R_1, q_2 r)\right]; \end{aligned} \tag{11}$$

б) породжені неоднорідністю системи функції впливу

$$\Xi_{\alpha;11}(r,\rho,q) = \frac{\lambda^{2\alpha}}{\Delta_\alpha(q)}\begin{cases} I_{\nu,\alpha}(\lambda r)[\Delta_{12}(q_2R_1,q_2R_2)\Psi^1_{\nu,\alpha;21}(\lambda R_1,\lambda\rho) - \\ \quad -\Delta_{22}(q_2R_1,q_2R_2)\Psi^1_{\nu,\alpha;11}(\lambda R_1,\lambda\rho)], \quad 0<r<\rho<R_1 \\ I_{\nu,\alpha}(\lambda\rho)\Delta_{12}(q_2R_1,q_2R_2)\Psi^1_{\nu,\alpha;21}(\lambda R_1,\lambda r) - \\ \quad -\Delta_{22}(q_2R_1,q_2R_2)\Psi^1_{\nu,\alpha;11}(\lambda R_1,\lambda r)], \quad 0<\rho<r<R_1 \end{cases}; \quad q=\{q_1;q_2\};$$

$$\begin{aligned} \Xi_{\alpha;12}(r,\rho,q) &= \frac{c_{21}}{\Delta_\alpha(q)} I_{\nu,\alpha}(\lambda r)\,\Phi^2_{22}(q_2R_2, q_2\rho); \\ \Xi_{\alpha;21}(r,\rho,q) &= \frac{c_{11}}{R_1^{2\alpha+1}}\frac{1}{\Delta_\alpha(q)} I_{\nu,\alpha}(\lambda\rho)\,\Phi^2_{22}(q_2R_2, q_2 r); \\ \Xi_{\alpha;22}(r,\rho,q) &= \frac{1}{q_2}\begin{cases}\Phi^2_{22}(q_2R_2,q_2\rho)W_{\alpha;22}(r.q), & R_1<r<\rho<R_2 \\ \Phi^2_{22}(q_2R_2,q_2 r)W_{\alpha;22}(\rho,q), & R_1<\rho<r<R_2.\end{cases} \end{aligned} \tag{12}$$

У результаті однозначного розв'язку алгебраїчної системи (9), підстановки одержаних значень A_1, A_2 та B_2 у формули (5) одержуємо єдиний розв'язок крайової задачі (1) - (3):

$$u_j(r) = W_{\alpha;2j}(r,q)g_2 + \int_0^{R_1}\Xi_{\alpha;1j}(r,\rho,q)f_1(\rho)\rho^{2\alpha-1}d\rho + \int_{R_1}^{R_2}\Xi_{\alpha;2j}(r,\rho,q)f_2(\rho)d\rho, j=1,2. \tag{13}$$

Побудуємо розв'язок крайової задачі (1) - (3) методом гібридного інтеґрального перетворення (Канторовича-Лєбєдєва) 1-го роду - Фур'є [5].

Згідно з роботою [5] визначмо функції:

$$\begin{aligned} V_{\alpha;2}(r,\beta) &= \frac{c_{11} sh\pi\, b_1(\beta)}{\pi\lambda^{2\alpha}R_1^{2\alpha+1}}\left[\upsilon^2_{22}(b_2R_2)\cos b_2 r - \upsilon^{21}_{22}(b_2R_2)\sin b_2 r\right], \\ V_{\alpha;1}(r,\beta) &= \omega_{\alpha;2}(\beta)D_\alpha(\lambda r, b_1(\beta)) - \omega_{\alpha;2}(\beta)C_\alpha(\lambda r, b_1(\beta)); \\ \omega_{\alpha;j}(\beta) &= \delta_{12}(b_2R_1,b_2R_2)\mathrm{X}^{1j}_{\alpha;21}(\lambda R_1, b_1) - \delta_{22}(b_2R_1,b_2R_2)\mathrm{X}^{1j}_{\alpha;11}(\lambda R_1,b_1); \end{aligned} \tag{14}$$

$$b_j = (\beta^2 + k_j^2)^{1/2},\ \beta \in (0,\infty),\ k_j^2 \ge 0,\ \sigma_1 = 1,\ \sigma_2 = \frac{c_{21}}{c_{11}} R_1^{2\alpha+1};$$

$$\Omega_\alpha(\beta) = \frac{\pi\beta\lambda^{2\alpha}}{sh\pi b_1(\beta)} \left(\left[\omega_{\alpha;1}(\beta)\right]^2 + \left[\omega_{\alpha;2}(\beta)\right]^2 \right)^{-1}.$$

У рівностях (14) прийняті позначення:

$$\upsilon_{jk}^{m1}(b_2 R_m) \equiv (\alpha_{jk}^m \, d/dr + \beta_{jk}^m)\cos b_2 r\Big|_{r=R_m} = -\alpha_{jk}^m b_2 \sin b_2 R_m + \beta_{jk}^m \cos b_2 R_m;$$

$$\upsilon_{jk}^{m2}(b_2 R_m) \equiv (\alpha_{jk}^m \, d/dr + \beta_{jk}^m)\sin b_2 r\Big|_{r=R_m} = \alpha_{jk}^m b_2 \cos b_2 R_m + \beta_{jk}^m \sin b_2 R_m;$$

$$\delta_{j2}(b_2 R_1, b_2 R_2) = \upsilon_{j2}^{11}(b_2 R_1)\upsilon_{22}^{22}(b_2 R_2) - \upsilon_{j2}^{12}(b_2 R_1)\upsilon_{22}^{21}(b_2 R_2);\quad j = 1,2;$$

$$X_{\alpha;j1}^{11}(\lambda R_1, b_1) = \left(\alpha_{j1}^1 \, d/dr + \beta_{j1}^1\right) C_\alpha(\lambda r, b_1)\Big|_{r=R_1};$$

$$X_{\alpha;j1}^{12}(\lambda R_1, b_1) = \left(\alpha_{j1}^1 \, d/dr + \beta_{j1}^1\right) D_\alpha(\lambda r, b_1)\Big|_{r=R_1};$$

$$I_{ib_1,\alpha}(\lambda r) = C_\alpha(\lambda r, b_1) - iD_\alpha(\lambda r, b_1); \qquad K_{ib_1,\alpha}(\lambda r) = \frac{\pi D_\alpha(\lambda r, b_1)}{sh\pi b_1}.$$

Наявність вагової функції

$$\sigma(r) = r^{2\alpha-1}\Theta(r)\Theta(R_1 - r) + \sigma_2\Theta(r - R_1)\Theta(R_2 - r),$$

спектральної функції

$$V_\alpha(r,\beta) = \Theta(r)\Theta(R_1 - r)V_{\alpha;1}(r,\beta) + \Theta(r - R_1)\Theta(R_2 - r)V_{\alpha;2}(r,\beta)$$

та спектральної густини $\Omega_\alpha(\beta)$ дозволяє визначити пряме H_α й обернене H_α^{-1} гібридне інтеґральне перетворення (Канторовича-Лєбєдєва) 1-го роду - Фур'є на множині I_1:

$$H_\alpha\left[f(r)\right] = \int_0^{R_2} f(r)V_\alpha(r,\beta)\sigma(r)dr \equiv \tilde{f}(\beta); \tag{15}$$

$$H_\alpha\left[\tilde{f}(\beta)\right] = \frac{2}{\pi}\int_0^\infty \tilde{f}(\beta)V_\alpha(r,\beta)\Omega_\alpha(\beta)d\beta \equiv f(r). \tag{16}$$

При цьому для гібридного диференціального оператора

$$\mathrm{M}_\alpha = \Theta(r)\Theta(R_1 - r)B_\alpha + \Theta(r - R_1)\Theta(R_2 - r)\, d^2/dr^2$$

властива основна тотожність інтегрального перетворення

$$\begin{aligned} H_\alpha\left[M_\alpha\left[f(r)\right]\right] &= -\beta^2\tilde{f}(\beta) + \sigma_2(\alpha_{22}^2)^{-1}V_{\alpha;2}(R_2,\beta)(\alpha_{22}^2 \, d/dr + \beta_{22}^2)f_2(r)\Big|_{r=R_2} - \\ &- k_1^2\int_0^{R_1} f_1(r)V_{\alpha;1}(r,\beta)\sigma_1 r^{2\alpha-1}dr - k_2^2\int_{R_1}^{R_2} f_2(r)V_{\alpha;2}(r,\beta)\sigma_2 dr. \end{aligned} \tag{17}$$

Тут ми брали вектор-функцію $f = \{f_1(r);\, f_2(r)\}$ та одиничну функцію Хевісайда $\Theta(x)$.

Запишемо систему (1) в матричній формі:

$$\begin{bmatrix} (B_\alpha - q_1^2)u_1 \\ (d^2/dr^2 - q_2^2)u_2 \end{bmatrix} = -\begin{bmatrix} f_1(r) \\ f_2(r) \end{bmatrix} \tag{18}$$

Інтеґральний оператор H_α подамо у вигляді операторної матриці-рядка:

$$H_\alpha[\ldots] = \begin{bmatrix} \int\limits_0^{R_1} \ldots V_{\alpha;1}(r,\beta)\, r^{2\alpha-1} dr & \int\limits_{R_1}^{R_2} \ldots V_{\alpha;2}(r,\beta)\,\sigma_2 dr \end{bmatrix}. \tag{19}$$

Нехай max $\{q_1^2; q_2^2\} = q_1^2$. Покладемо $k_1^2 = 0, \quad k_2^2 = q_1^2 - q_2^2 \geq 0.$

Застосуймо за правилом множення матриць операторну матрицю рядок (19) до системи (18). Внаслідок тотожності (17) одержуємо алгебраїчне рівняння:

$$(\beta^2 + q_1^2)\tilde{u}(\beta) = \tilde{f}(\beta) + \frac{\sigma_2}{\alpha_{22}^2} V_{\alpha;2}(R_2,\beta)\, g_2 .$$

Звідси знаходимо, що функція

$$\tilde{u}(\beta) = \frac{\tilde{f}(\beta)}{\beta^2 + q_1^2} + \frac{\sigma_2 V_{\alpha;2}(R_2,\beta)}{\alpha_{22}^2(\beta^2 + q_1^2)}\, g_2 . \tag{20}$$

Обернений до (19) оператор H_α^{-1} подамо у вигляді операторної матриці-стовпчика:

$$H_\alpha^{-1}[\ldots] = \begin{bmatrix} 2/\pi \int\limits_0^\infty \ldots V_{\alpha;1}(r,\beta)\Omega_\alpha(\beta)\, d\beta \\ 2/\pi \int\limits_0^\infty \ldots V_{\alpha;2}(r,\beta)\Omega_\alpha(\beta)\, d\beta \end{bmatrix}. \tag{21}$$

Застосувавши за правилом множення матриць операторну матрицю-стовпчик (21) до матриці елемента $[\tilde{u}]$, де $\tilde{u}(\beta)$ визначена формулою (20), отримуємо єдиний розв'язок крайової задачі (1) - (3):

$$u_j(r) = \int\limits_0^{R_1} \left(\frac{2}{\pi} \int\limits_0^\infty \frac{V_{\alpha;j}(r,\beta) V_{\alpha;1}(\rho,\beta)}{(\beta^2 + q_1^2)} \Omega_\alpha(\beta)\, d\beta \right) f_1(\rho)\rho^{2\alpha-1}\sigma_1 d\rho +$$

$$+ \int\limits_{R_1}^{R_2} \left(\frac{2}{\pi} \int\limits_0^\infty \frac{V_{\alpha;j}(r,\beta) V_{\alpha;2}(\rho,\beta)}{\beta^2 + q_1^2} \Omega_\alpha(\beta)\, d\beta \right) f_2(\rho)\sigma_2 d\rho + \tag{22}$$

$$+ \frac{2}{\pi} \int\limits_0^\infty \frac{\sigma_2 V_{\alpha;j}(r,\beta) V_{\alpha;2}(R_2,\beta)}{\alpha_{22}^2(\beta^2 + q_1^2)} \Omega_\alpha(\beta)\, d\beta\, g_2; \quad j = 1,2$$

Порівнюючи розв'язки (13) і (22) внаслідок єдиності, маємо такі формули обчислення невласних інтегралів:

$$\frac{2}{\pi}\int_0^\infty \frac{\sigma_2 V_{\alpha;j}(r,\beta)V_{\alpha;2}(R_2,\beta)}{\alpha_{22}^2(\beta^2+q_1^2)}\Omega_\alpha(\beta)d\beta = W_{\alpha;2j}(r,q),\quad j=1,2\,; \tag{23}$$

$$\frac{2}{\pi}\int_0^\infty \frac{V_{\alpha;j}(r,\beta)V_{\alpha;k}(\rho,\beta)}{\beta^2+q_1^2}\Omega_\alpha(\beta)d\beta = \frac{1}{\sigma_k}\Xi_{\alpha;jk}(r,\rho,q);\, j,\ k=1,2\,. \tag{24}$$

Функції $W_{\alpha;2j}(r,q)$ обчислюються за формулами (11), а функції $\Xi_{\alpha;jk}$ - за формулами (12).

Оскільки праві частини в (23), (24) не залежать від $q_1^2 - q_2^2 \geq 0$ чи $q_2^2 - q_1^2 \geq 0$ (якщо max $\{q_1^2;q_2^2\} = q_2^2$), то можна покласти $q_1^2 = q_2^2 \equiv q^2 \geq 0$.

Polyparametric family of improper integrals was calculated by the comparison method of the boundary task for the Bessel and Furrier differential equations system. Special Bessel and trigonometric functions take part in the construction of these subintegral functions.

Література

1. Ленюк М.П., Міхалевська Г.І. Гібридні інтегральні перетворення типу Канторовича-Лєбєдєва. -Київ, 1996.
2. Ленюк М.П., Иследование основных краевых задач для диссипативного волнового уравнения Бесселя. -Киев, 1983.
3. Степанов В.В. Курс диференциальных уравнений. -М.: Физматгиз, 1959.
4. Ленюк М.П., Літовченко В.А. Обчислення невласних інтегралів методом гібридних інтегральних перетворень. Том 1. - Київ, 1994.
5. Міхалевська Г.І., Гібридні інтегральні перетворення Канторовича-Лєбєдєва - Фур'є на двоскладовому сегменті // Інтегральні перетворення та їх застосування до крайових задач: Зб. наук.пр.- Київ, 1996. - Вип.13.- С.112-121.

Одержано 31.01.2000 р.