

ОЦІНЮВАННЯ ТОЧНОСТІ ВИМІРЮВАНЬ ПАРАМЕТРІВ ПОЛЯ ЗАБРУДНЕНЬ ПРИРОДНИХ ВОДНИХ СЕРЕДОВИЩ ПРИ ЕКОЛОГІЧНИХ ДОСЛІДЖЕННЯХ

Подано спосіб оцінювання точності вимірювань параметрів полів забруднень водних середовищ, що враховує вплив похибок вимірювання параметра поля, координат точок відбору вхідних даних та параметрів процедури сканування поля.

Особливість вимірювань параметрів поля забруднень природних водних середовищ полягає у необхідності отримання даних не тільки про значення параметрів досліджуваного поля, а також узгоджених у часі відомостей про координати точок, де ці дані отримано [1]. Відомі наукові джерела окремо висвітлюють точність вимірювань параметрів поля і координат об'єктів у водному середовищі [2]. Однак при екологічних дослідженнях такий метод дозволяє обгрунтовано інтерпретувати отримані дані, наприклад, через відсутність відомостей про координати точок, де отримано результати вимірювань параметрів поля забруднень, що практично знецінює ці результати. З'явилася потреба виробити новий метод оцінювання точності вимірювань параметрів полів забруднень водних середовищ, що охоплював би одночасно оцінки точності вимірювань параметра поля забруднень і точності вимірювань координат тих точок, де цей параметр визначений. Розв'язкові цієї задачі присвячена дана стаття.

Результати вимірювань поля забруднень мають використовуватися у розв'язку однієї із задач теорії поля у просторі або на площині [3]. На точність результатів впливають як похибки вимірювання параметра поля забруднення у певних точках водного простору, так і похибки визначення координат цих точок. До оцінки цього впливу і її залежності від параметрів процедури збору даних у вимірювальному експерименті зводиться задача. Параметри процедури збору даних визначаються особливостями застосування гідроакустичної техніки у вимірювальному експерименті, і в різних задачах відрізняються лише частотою дискретизації поля. Принцип вибору цієї частоти у всіх задачах фактично однаковий, тому для отримання конкретних залежностей, які можна звести до числових значень, приймається, що дані вимірювань використовуються для визначення закону розподілу на площині параметра досліджуваного поля з використанням розв'язку відомої оберненої задачі $\text{А}^3\delta^3\delta\epsilon\delta$, отриманого методом Фур'є для круга [3]. При цьому вимірювання виконується шляхом сканування поля забруднень гідроакустичною станцією за допомогою просторово спрямованої звукової антени. Параметр поля визначається за допомогою телеметричної приймальної апаратури від встановлених у полі забруднення первинних вимірювальних перетворювачів (ПВП), здатних вимірювати досліджуваний параметр і передавати відомості про нього на відстань, відповідаючи на звуковий імпульс гідроакустичної станції у процесі визначення координат кожного з ПВП.

Треба пам'ятати, що у строгій математичній постановці задача реконструкції функції розподілу поля на площині або у просторі за даними вимірювань у певних точках (у тому числі й обернена задача Діріхле) некоректна. Однак існують методи розв'язування таких задач [4]. У нашій статті математичні особливості таких розв'язків не розглядаються, а подається лише метрологічний аналіз вимірювального експерименту, що має забезпечувати вхідними даними цей розв'язок.

Застосовуючи для даного випадку відомий формальний розв'язок задачі Діріхле, виміряні значення досліджуваного параметра поля $u(\rho, \varphi_i)$, отримані на колі радіуса ρ при кутах сканування $\varphi_i = \varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_{2N-1}$, можна подати так [3]:

$$\sum_{n=0}^{N+1} \sigma^n (\alpha_n \cos n\varphi_i + \beta_n \sin n\varphi_i) = u(\rho, \varphi_i), \quad (1)$$

де $\sigma = \rho/a$ або $\sigma = a/\rho$ - відповідно, для внутрішньої, або зовнішньої задачі Діріхле, де a - радіус кола, на якому задані початкові умови задачі;

$\alpha_n = \alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_N$ і $\beta_n = \beta_0, \beta_1, \dots, \beta_N$ - коефіцієнти Фур'є-розкладу шуканої функції;

$n = 0, 1, 2, \dots, N$ - номери гармонік розкладу.

Для метрологічного аналізу вираз (1) доцільно подати комплексно:

$$\sum_{n=0}^{N+1} c_n \sigma^n e^{jn\varphi_i} = u(\rho, \varphi_i), \quad (2)$$

де c_n - комплексні коефіцієнти Фур'є-розкладу шуканої функції.

Виміряні значення параметра поля $u(\rho, \varphi_i)$ у правій частині виразу (2) можна подати у традиційних поняттях теорії сигналів [5] як впорядковану за законом сканування поля числову послідовність і трактувати її як вектор сканування $\vec{u}(\rho, \varphi_i)$ у просторі оцінок значень вимірюваної величини. Ліва частина виразу (2) трактується так: впорядкованість числової послідовності у правій частині виразу визначає впорядкованість числових значень коефіцієнтів Фур'є-розкладу c_n шуканої функції у лівій частині виразу (2), що дає підставу подати її у вигляді вектора шуканих невідомих \vec{X}_n у просторі інформативних ознак вимірюваної величини, якими є її гармонічні складові. Від простору інформативних ознак до простору оцінок вимірюваної величини переходимо шляхом застосування оператора M . Оскільки вирази (1) і (2) є лінійними залежностями, то й оператор M має бути лінійним, тому його необхідно подати у вигляді матриці $[M]$. Кожен рядок цієї матриці - це функціонал, що виділяє всі необхідні гармонічні складові шуканої функції для одного з кутів сканування φ_i . Кількість рядків матриці визначає кількість точок сканування, кількість стовпчиків - кількість гармонічних складових, які необхідно виділити за один цикл сканування.

Отже, розв'язування задачі моделюється розв'язуванням матричного рівняння:

$$[\vec{X}][M] = [\vec{U}], \quad (3)$$

$$\text{де } [\vec{X}] = \begin{bmatrix} c_0 \\ c_1 \\ \vdots \\ c_N \end{bmatrix}, [\vec{U}] = \begin{bmatrix} u(\rho, \varphi_1) \\ u(\rho, \varphi_2) \\ \vdots \\ u(\rho, \varphi_{2N-1}) \end{bmatrix},$$

$$[M] = \begin{bmatrix} 1 & \sigma e^{-j\omega_1 \varphi_1} & \sigma^2 e^{-j\omega_2 \varphi_2} & \dots & \sigma^N e^{-j\omega_N \varphi_{2N-1}} \\ 1 & \sigma e^{-j\omega_1 \varphi_2} & \sigma^2 e^{-j\omega_2 \varphi_2} & \dots & \sigma^N e^{-j\omega_N \varphi_{2N-1}} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ 1 & \sigma e^{-j\omega_N \varphi_{2N-1}} & \sigma^2 e^{-j\omega_N \varphi_{2N-1}} & \dots & \sigma^N e^{-j\omega_N \varphi_{2N-1}} \end{bmatrix} \quad (4)$$

Модель (3) дозволяє попередньо проаналізувати властивості шуканого розв'язку.

У даній моделі матриця $[M]$ повністю визначає параметри сканування поля і точність результатів процедури вимірювання в цілому. Ідеальна фільтрація гармонічних складових шуканої функції можлива лише при діагональній матриці $[M]$. Однак в даному випадку ця матриця не діагональна, а за своєю структурою вона подібна до відомої, погано обумовленої матриці Гільберта [6]. Це означає, що при близьких значеннях кутів сканування рядки матриці стають лінійно залежними, матриця - переозначеною, а розв'язок рівняння (3) - невизначеним. Для того, щоб уникнути такої ситуації, потрібно вибрати оптимальні параметри процедури сканування, а такий вибір можливий, якщо пов'язати похибку розв'язку системи (3) з числом обумовленості матриці $[M]$. Цей зв'язок можна подати формулою [7]:

$$\delta \|\vec{X}\| = \nu [\delta \|M\| + \delta \|\vec{u}\|], \quad (5)$$

де $\delta \|\vec{X}\|$ - відносна похибка норми вектора розв'язку системи рівнянь (3);

ν - число обумовленості матриці $[M]$;

$\delta \|M\|, \delta \|\vec{u}\|$ - відповідно відносні похибки норми матриці $[M]$ і вектора сканування \vec{u} .

Вимірювальний експеримент доцільно аналізувати для $\delta \|\vec{u}\| \ll \delta \|M\|$, оскільки $\delta \|\vec{u}\|$ - повністю контрольована і визначається лише похибками ПВП. $\delta \|M\|$ - багатопараметрична функція, що може істотно змінюватися у процесі вимірювань. Формула (6) при такому обмеженні набирає вигляду:

$$\delta \|\vec{X}\| = \nu \delta \|M\| \quad (7)$$

і показує, що число обумовленості фактично масштабує у розв'язку системи рівнянь (3), похибки зумовлені впливом матриці. Процедура сканування поля виконується при умові, що число обумовленості матриці $[M]$ близьке до одиниці. Застосовуючи формулу (7), можна визначити шляхи досягнення такої умови, дослідивши вплив на розв'язок рівняння (3) процедури нарощування порядку матриці $[M]$. Для дальшого аналізу зручніше подати елементи матриці $[M]$ не у комплексній, а у тригонометричній формі. Матриця $[M]$ набере вигляду:

$$[M] = \begin{bmatrix} 1 & \sigma \cos \varphi_1 & \dots & \sigma^N \cos N\varphi_1 & \sigma \sin \varphi_1 & \dots & \sigma^N \sin N\varphi_1 \\ 1 & \sigma \cos \varphi_2 & \dots & \sigma^N \cos N\varphi_2 & \sigma \sin \varphi_2 & \dots & \sigma^N \sin N\varphi_2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1 & \sigma \cos \varphi_{2N-1} & \dots & \sigma^N \cos N\varphi_{2N-1} & \sigma \sin \varphi_{2N-1} & \dots & \sigma^N \sin N\varphi_{2N-1} \end{bmatrix} \quad (8)$$

Формула для вектора шуканих невідомих \vec{u} теж має відповідати цій формі матриці. Виразимо їх через коефіцієнти α і β згідно з рівнянням (1).

Якщо вимірювання виконуються лише в одній точці сканування, то рівняння (3) з урахуванням формули (8) набуде вигляду: $\alpha_0 = u(\rho, \varphi_i)$. Такий розв'язок, фактично, не дає ніякого уявлення про закономірність розподілу параметра поля. Однак з метрологічної точки зору він найточніший, оскільки похибки його не перевищують похибок вхідних даних, отриманих експериментально.

При вимірюваннях у двох точках (тобто при двох значеннях кута сканування поля) рівняння (3) набирає вигляду:

$$\begin{bmatrix} 1 & \sigma \cos \varphi_1 & \sigma \sin \varphi_1 \\ 1 & \sigma \cos \varphi_2 & \sigma \sin \varphi_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha_0 \\ \alpha_1 \\ \beta_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} u(\rho, \varphi_1) \\ u(\rho, \varphi_2) \end{bmatrix}.$$

Прямокутна матриця у лівій частині рівняння не дозволяє отримати розв'язок для невідомих $\alpha_0, \alpha_1, \beta_1$. У даному випадку можна отримати лише псевдорозв'язок, що, однак, не має збіжності.

При вимірюваннях у трьох точках (при трьох значеннях кута сканування поля) система (3) набирає вигляду:

$$\begin{bmatrix} 1 & \sigma \cos \varphi_1 & \sigma \sin \varphi_1 \\ 1 & \sigma \cos \varphi_2 & \sigma \sin \varphi_2 \\ 1 & \sigma \cos \varphi_3 & \sigma \sin \varphi_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha_0 \\ \alpha_1 \\ \beta_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} u(\rho, \varphi_1) \\ u(\rho, \varphi_2) \\ u(\rho, \varphi_3) \end{bmatrix}.$$

У даному випадку вже можна виділити першу гармонічну складову шуканої функції. Очевидно, такий розгляд може тривати. Однак отримані результати дають підставу для певних висновків.

Для того, щоб мати розв'язок, необхідно вимірювати поле в непарному числі точок. Мало того, при нарощуванні порядку матриці $[M]$ отримувані розв'язки відрізнятимуться від розв'язків, отриманих при матрицях менших порядків, що свідчить про систематичну похибку в отримуваному результаті, хоча у вхідних даних її може й не бути. Ще одна особливість полягає в тому, що при збільшенні порядку матриці різницю між кутами сканування φ_i і φ_{i+1} слід підтримувати якомога більшою, інакше рядки матриці стануть лінійнозалежними і вона буде погано обумовленою. При значному збільшенні точок сканування різниця $\varphi_i - \varphi_{i+1}$ стає все меншою, і в результаті матриця $[M]$ обов'язково стане погано обумовленою, що

замість сподіваного підвищення точності визначення шуканої функції призведе до її істотного зниження.

У практичному вимірному експерименті ПВП доводиться розташовувати у досліджуваному полі на колах з різним радіусом ρ . У цьому випадку даватимуться коефіцієнти матриці $[M]$ за рахунок не збільшення кутів сканування φ , а зміни величини σ . При цьому утворюється фактично нова матриця, яка й використовується для аналізу точності вимірювань при новому параметрі σ . Принциповий аспект аналізу нової матриці залишається незмінним.

Отримані дані якісного характеру необхідно перетворити на конкретні числові оцінки. З цією метою проводилися дослідження для типового сканування поля при кутах сканування $0^\circ, 30^\circ, 60^\circ$ і 90° і при $\sigma=1,5$. Порядок матриці $[M]$ змінювався від 1 до 4. Для обчислення співвідношень між похибками $\delta\|\vec{X}\|$ і роздільною здатністю $\delta_{пр}$ на координаті сканування поля використовувалися рівняння (3) і співвідношення (4). Отриманий результат поданий на рис.1.

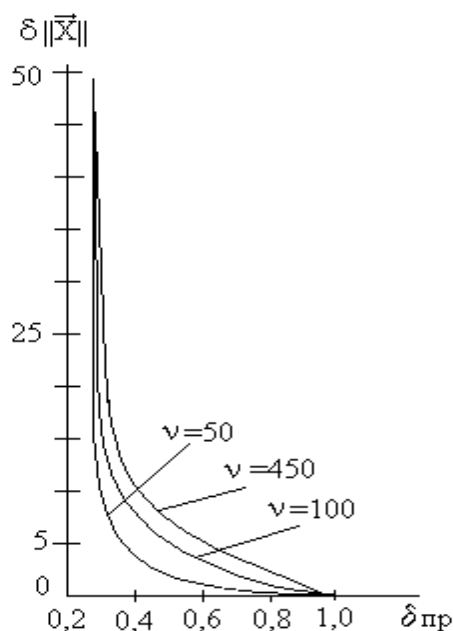


Рис.1. Зв'язок між похибкою визначення параметра поля і роздільною здатністю процедури вимірювання δ .

Рис. 1 підтверджує отриманий раніше висновок, що при заданому значенні норми матриці $[M]$, при підвищенні вимог до рівня деталізації опису шуканої функції, що описує досліджуване поле, зростає похибка вимірювань параметра поля і навпаки. Таким чином, спроба підвищити точність опису досліджуваного поля таким, на перший погляд, очевидним шляхом, як збільшення кількості рівнянь, що його описують, не завжди ефективна. Застосування такого способу треба узгодити з властивостями матриці $[M]$ шляхом побудови залежності, поданої на рис. 1, але адаптованої до умов конкретного вимірального експерименту.

Вироблений метод оцінювання точності вимірювань параметрів поля забруднень природних водних середовищ дозволяє перекласти фактично інтуїтивні уявлення про похибки вимірювального експерименту на мову конкретних числових оцінок.

The method of estimating the accuracy of measurement the parameters of pollution the water environments fields, which takes into account the influence of errors of field parameters measuring, coordinates of the points of input data selection and the parameters of field scanning procedure is given.

Література

1. Євтух П.С. Варіант функціональної схеми вимірювальних засобів для дослідження стану водних середовищ методом біотестування // «Львівська політехніка».- Серія «Автоматика, вимірювання та кодування».-1989.- №366. - С. 93-100.
2. Справочник по гидроакустике / Под ред. Колесникова А.С. - Л.: Судостроение, 1982. - 344 с.
3. Арамонова Н.Г., Левин В.И. Уравнения математической физики. -М.: Наука, 1969. - 288 с.
4. Тихонов А.Н., Самарский А.А. Уравнения математической физики. -М.: Наука, 1972. - 724 с.
5. Фрэнкс Л. Теория сигналов. -М.: Сов. Радио, 1974. - 344 с.
6. Форсайт Дж., Моулер К. Численное решение системы линейных алгебраических уравнений. -М.: Мир, 1969. - 164 с.

Одержано 26.01.2000 р.