УДК 517.9
Шаблій А. – ст. гр. МН-11
Тернопільський національний технічний університет імені Івана Пулюя

МЕТОДИКА НАБЛИЖЕНОГО РОЗВ'ЯЗАННЯ РІВНЯНЬ ГІПЕРБОЛІЧНОГО ТИПУ

Науковий керівник: к.т.н. Габрусєва І. Ю.

Shablii A.
Ternopil Ivan Puluj National Technical University

METHODS OF APPROXIMATE SOLUTION FOR THE HYPERBOLIC PARTIAL DIFFERENTIAL EQUATION

Supervisor: Habrusieva I. Yu.

Ключові слова: коливання, струна, апроксимація, рівняння гіперболічного типу.
Keywords: oscillations, string, approximation, hyperbolic partial differential equation

Розглянемо першу крайову задачу для однорідного рівняння коливання скінченної струни [1]. Вона полягає у визначенні функції $u(x,t)$, яка при $t>0$ задовольняє рівняння

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}=\frac{\partial^2 u}{\partial x^2},\ 0\le x\le a,\ 0\le t\le T, \qquad (1)$$

із початковими умовами

$$u(x,0)=f\left(x\right),\ u_t'\left(x,0\right)=g\left(x\right),\ 0\le x\le a \qquad (2)$$

та граничними умовами

$$u(0,t)=\mu_1\left(t\right),\ u(a,t)=\mu_2\left(t\right),\ 0\le t\le T. \qquad (3)$$

Побудуємо різницеву схему для розв'язання поставленої задачі. Для цього в області $D=\left\{\left(x,t\right),0\le x\le a,0\le t\le T\right\}$ сітку розміром $n\times m$ із кроком h по осі x та τ – по осі y

$$x_i=ih,\ i=0,1,...,n,\ a=nh;$$
$$y_j=j\tau,\ j=0,1,...,m,\ T=m\tau.$$

Апроксимацію рівняння (1) проводитимемо за допомогою трьох точкової схеми скінчених різниць [2]

$$\frac{u_{i,j+1}-2u_{i,j}+u_{i,j-1}}{\tau^2}=\frac{u_{i+1,j}-2u_{i,j}+u_{i-1,j}}{h^2}, \qquad (4)$$

де $u_{i,j}$ – це наближене значення функції $u(x,t)$ у вузлі (x_i,t_j). Останнє співвідношення дає смогу апроксимувати рівняння (1) в кожному внутрішньому вузлі сітки.

Введемо позначення $\lambda=\dfrac{\tau}{h}$, тоді із співвідношення (4) одержимо

$$u_{i,j+1}=2\left(1-\lambda^2\right)u_{i,j}+\lambda^2\left(u_{i+1,j}-u_{i-1,j}\right)-u_{i,j-1},\ i=1,2,...,n-1.$$

Значення функції $u(x,t)$ для вузлів при $i=0$ та $i=n$ задаються граничними умовами (3) поставленої задачі.

Останнє співвідношення носить назву тришарової різницевої схеми, оскільки пов'язує між собою значення $u_{i,j}$ функції $u(x,t)$ на трьох часових шарах із номерами $j-1$, j та $j+1$. Побудована таким чином схема є явною, оскільки дає змогу у явній формі виразити $u_{i,j}$ через значення функції із попередніх двох часових шарів.

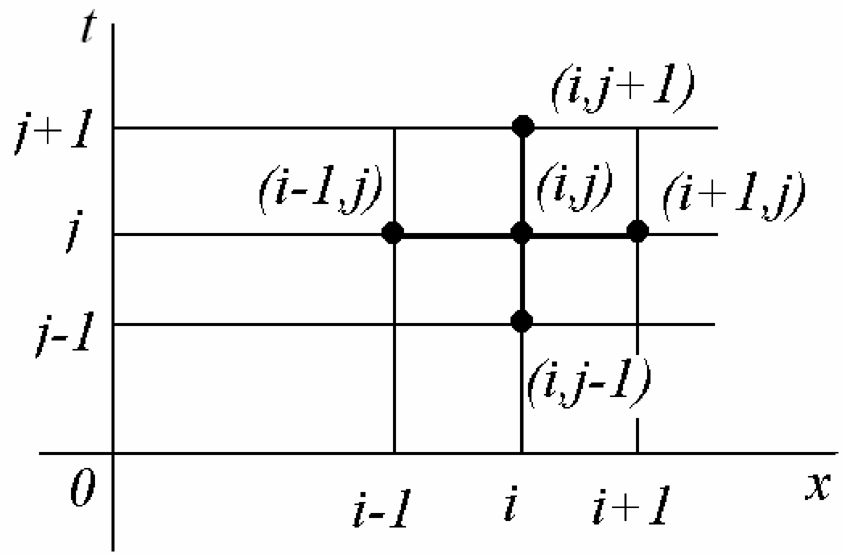

Рис. 1. Вузлова сітка хрестового типу

Числове розв'язання задачі полягає у послідовному обчисленні наближених значень функції $u(x,t)$ у вузлах (x_i,t_j) використовуючи при цьому уже обчислені значення із попередніх двох часових шарів. При цьому значення функції на нульовому шарі при $j=0$ задаються початковими умовами (2) задачі. А для обчислення значень функції $u(x,t)$ при $j=1$ можна скористатись формулою лівих скінчених різниць:

$$u_t'(x,0) \approx \frac{u(x,\tau)-u(x,0)}{\tau}. \qquad (5)$$

Тому на основі (2) матимемо

$$\frac{u(x,\tau)-u(x,0)}{\tau} \approx g\left(x\right),$$

а отже

$$u_{i,j} = u_{i,0} + g\left(x_i\right),\ i=1,2,...,n-1.$$

Описана схема дозволяє побудувати числовий розв'язок поставленої задачі із точністю $O(\tau+h^2)$. Невисокий порядок апроксимації по τ пояснюється застосуванням досить грубої оцінки першого часового шару за формулою (5). Проте описана схема є досить простою в реалізації та залишається стійкою при забезпеченні виконання умови Куранта $\tau<h$. Це означає, що малі похибки обчислень значень функції на «проблемному» першому часовому шарі не будуть необмежено зростати при переході до наступних шарів. При виконанні умови Куранта дана схема є рівномірно збіжною.

Література

1. Габрусєв Григорій. Рівняння математичної фізики. Навчальний посібник / Г.В. Габрусєв. – Тернопіль: Видавництво ТНТУ ім. Івана Пулюя: 2014 – 84 ст.
2. Habrusiev H. Contact interaction of a predeformed plate which lies without friction on rigid base with a parabolic indenter / Hryhorii Habrusiev, Iryna Habrusieva // Scientific Journal of TNTU. — Tern. : TNTU, 2021. — Vol 102. — P. 87–95.