Міністерство освіти і науки України
Тернопільський національний технічний університет
імені Івана Пулюя

Кафедра математичних методів в інженерії

ВИЩА МАТЕМАТИКА В ПРИКЛАДНИХ ЗАДАЧАХ ЕКОНОМІЧНОГО ЗМІСТУ

Навчальний посібник

Частина 2.
Вступ до математичного аналізу.
Диференціальне числення функцій

для студентів економічних спеціальностей
усіх форм навчання

Тернопіль
2022

УДК 51-7
В 55

Укладачі:

Блащак Н.І., канд. фіз.- мат. наук, доцент,
Цимбалюк Л.І., канд. фіз. - мат. наук, доцент,
Бойко А.Р., канд. техн. наук, ст. викладач

Рецензент:

Михайлишин М.С., канд. фіз. - мат. наук, професор

Навчальний посібник розглянуто й затверджено на засіданні
кафедри математичних методів в інженерії
Тернопільського національного технічного університету імені Івана Пулюя
Протокол № 6 від 15.02.2022 р.

Схвалено та рекомендовано до друку на засіданні науково-методичної комісії
факультету комп'ютерно-інформаційних систем і програмної інженерії
Тернопільського національного технічного університету імені Івана Пулюя
Протокол №3 від 17.02.2022 р.

В55 Вища математика в прикладних задачах економічного змісту (Частина 2. Вступ до математичного аналізу. Диференціальне числення): навчальний посібник для студентів економічних спеціальностей усіх форм навчання / Укладачі: Блащак Н.І., Цимбалюк Л.І., Бойко А.Р. – Тернопіль: 2022. – 44 с.

УДК 51-7

ЗМІСТ

РОЗДІЛ 1. НАЙВАЖЛИВІШІ ФУНКЦІЇ, ЩО ЗУСТРІЧАЮТЬСЯ В ЕКОНОМІЧНИХ ДОСЛІДЖЕННЯХ

1.1. ЕКОНОМІЧНА КЛАСИФІКАЦІЯ ФУНКЦІЙ РІВНОВАГА ПОПИТУ ТА ПРОПОЗИЦІЇ

Функція – це одне із основних математичних понять, яке виражає залежність між змінними величинами і дозволяє виразити аналітично взаємозв’язки між різними об’єктами дослідження.

Функції знаходять широке застосування в економічній теорії та практиці. Спектр таких функцій дуже широкий: від простих лінійних функцій, до функцій які можуть бути визначені за допомогою рекурентних співвідношень.

Найчастіше в економічних дослідженнях розглядають такі функції:

- виробнича функція – пов’язує змінні величини затрат (ресурсів) з величинами продукції (випуску). Це, як правило, функція декількох змінних і може бути записана в загальному вигляді:

$$P = kx_1^{\alpha_1}x_2^{\alpha_2}\ldots x_n^{\alpha_n}.$$

Тут коефіцієнт k означає розмірність, він залежить від вибраної одиниці вимірювання затрат та випуску. Співмножники x_i від першого до n-ного можуть мати різний зміст в залежності від того, які чинники впливають на випуск продукції. Наприклад, у виробничій функції можна за аргументи (співмножники) прийняти чисельність зайнятого населення$\left(x_1\right)$, суму основних та оборотних фондів $\left(x_2\right)$, продуктивність праці$\left(x_3\right)$, а за значення функції P прийняти об'єм кінцевого продукту. Степеневі коефіцієнти $\alpha_i\left(i=1,\ldots,n\right)$ показують долю в прирості кінцевого продукту, яку вносить кожен із співмножників. Частковими випадками таких функцій можна вважати функції витрат, залежність необхідних капіталовкладень від виробничої потужності підприємства, тощо;

- функції попиту та пропозицій – в економічній теорії так називають функції, що виражають залежність обсягів попиту та пропозиції від факторів, які їх визначають. Найчастіше розглядають залежність функції попиту (пропозиції) від ціни, вважаючи всі інші фактори сталими. Часто ці функції розглядають одночасно для з’ясування питання про рівновагу попиту та пропозиції;
- функція корисності (функція переваги) – в широкому розумінні функція для якої аргументами є затрати і зусилля, а значенням є результати, що ними породжуються. Це зручний спосіб для кількісного опису корисності, тобто оцінки тих чи інших благ та ресурсів з точки зору споживача чи

виробника.

Розглянемо приклади найважливіших функцій, що зустрічаються в економічних дослідженнях.

Приклад 1.1. Позначимо вартість товару через p, а попит на нього в натуральних одиницях через Q. Відомо, що із збільшенням ціни товару попит на нього спадає, що можна записати у формі $Q = f(p)$, де $f(p)$- спадна функція. Залежність може бути, наприклад, такою:

$$Q = \frac{300}{7 + p^3}.$$

Функціональну залежність між попитом і ціною на товар можна розглянути двояко, як:

1. залежність попиту від ціни;
2. залежність ціни від попиту.

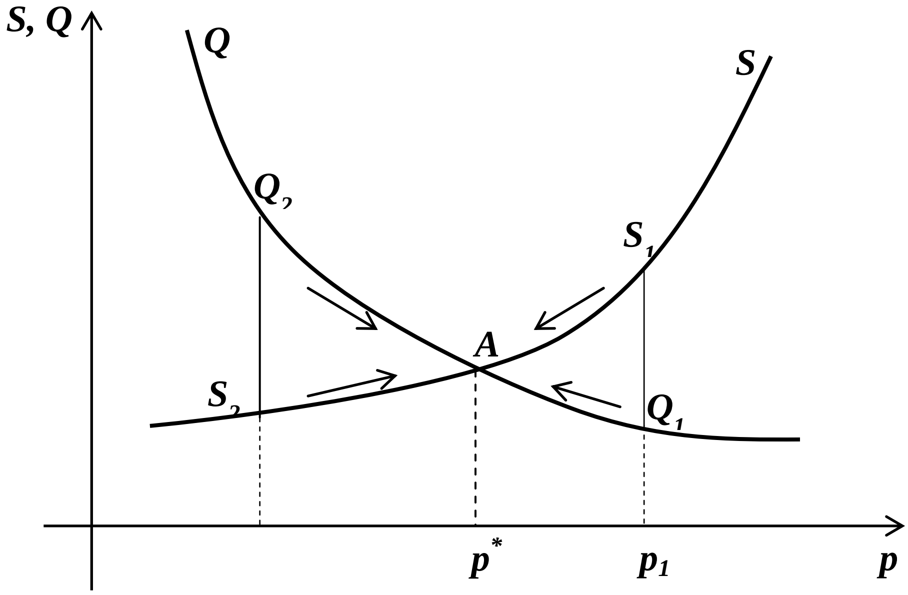
У другому випадку величина Q стає незалежною змінною, а p - залежною. Отже, маємо функцію $p = \varphi(Q)$, що є оберненою до функції $Q = f(p)$.

Легко показати, що $p = \sqrt[3]{\frac{300}{Q} - 7}$

РІВНОВАГА ПОПИТУ ТА ПРОПОЗИЦІЇ

Залежність між ринковою ціною товару і кількістю товару, яку виробники хочуть виробляти і продавати за цією ціною називається функцією пропозиції $S = g(p)$. Практика показує, що $g(p)$ – зростаюча функція.

Нехай маємо функцію пропозиції $S = g(p)$ та функцію попиту $Q = f(p)$ на один вид товару. Зобразимо криві попиту та пропозиції в одній системі координат (рис. 4.1.)



Поєднання обох цих графіків можливе, оскільки вони виконані з використанням однакових одиниць вимірювання на кожній осі.

Рис. 1.1.

Точка A, в якій криві попиту та пропозиції перетинаються, називається точкою рівноваги. Вона визначає таку ціну p^* (рівноважна ціна), за якої величина попиту рівна величині пропозиції.

Покажемо, що саме при рівноважній ціні досягається стан ринкової рівноваги, при якому сфери виробництва та споживання функціонують найкраще.

Візьмемо ціну $p_1 > p^*$. За цієї ціни виробники пропонують на ринок більше товару, чим покупці готові купити. Як результат отримуємо надлишок товару $\left(\left|S_1Q_1\right|\right)$, внаслідок чого ціни на ринку на цей товар падають. На рис. 4.1. стрілками показано напрямок зміни ціни.

Якщо ж $p_2 < p^*$, то величина попиту перевищує величину пропозиції і отримуємо дефіцит товару $\left(\left|S_2Q_2\right|\right)$. В умовах нестачі конкуренція між покупцями за обмежену кількість товару змушує ціну зростати, як показано стрілками.

Тепер бачимо, що збалансованість або рівновага попиту і пропозиції настає саме в точці A; в ній відсутня тенденція до зміни ціни. Інколи кажуть, що рівноважна ціна p^* є ринкоочисною, бо при ній склади не переповнюються і не порожніють і всі замовлення з боку попиту та пропозиції задовольняються.

Якщо в силу яких-небудь факторів рівновага між попитом та пропозицією порушена, то ринкові механізми працюють таким чином, щоб повернутись до стану рівноваги.

Приклад 1.2. Функція пропозиції певного товару є $S = \dfrac{20 + 4p^2}{1 + 10p}$, а функція попиту – $Q = \dfrac{25 - p + 4p^2}{1 + 10p}$. Визначити рівноважну ціну.

Розв'язання. За рівноважної ціни величина попиту дорівнює величині пропозиції, тобто $\dfrac{20 + 4p^2}{1 + 10p} = \dfrac{25 - p + 4p^2}{1 + 10p}$, звідки знаходимо, що $p = 5$.

1.2. ЛІНІЙНА ФУНКЦІЯ

Витрати виробництва на промисловому підприємстві, де виготовляється однорідна продукція, можна розділити на дві групи:

а) змінні витрати, пропорційні обсягу продукції, наприклад, матеріальні затрати;

б) постійні витрати, тобто такі, які не залежать від обсягу продукції, наприклад, затрати на утримання адміністративних будов, їх опалення, тощо.

Якщо постійні витрати позначити b, а змінні витрати на одиницю продукції - a, то при обсязі продукції x одиниць повні витрати виробництва складуть

$$y = ax + b. \qquad (1.1)$$

Якщо лінійна функція виражається формулою

$$y = ax, \qquad (1.2)$$

то кажуть, що вона визначає пряму пропорційність між y та x. Наприклад, вартість товару y пропорційна його кількості. Якщо a - ціна одиниці товару, то вартість x одиниць складе $y = ax$.

Приклад 1.3. Компанія виробляє вироби A та продає їх по 7 грн. за кожний. Керівництво компанії встановило, що сталі щотижневі витрати виробництва складають 1000 грн., а матеріальні витрати на виробництво одиниці продукції в грошовому вираженні становлять 5 грн. Визначити щотижневу кількість виготовлення та продажу виробів A, яка забезпечує рівновагу витрат та доходу.

Розв'язання. Згідно з умовою задачі щотижневі витрати на виготовлення x одиниць виробів A виражаються функцією виду (1.1): $y_в = 5x + 1000$. Дохід від продажі x виробів по ціні 7 грн. за одиницю буде функцією виду (1.2): $y_д = 7x$. Для рівноваги доходу та витрат потрібно, щоб виконувалась рівність $y_д = y_в$, тобто $7x = 5x + 1000$, $x = 500$.

Отже, ця задача має одну точку рівноваги. Компанія може виробляти 500 виробів A з доходом та витратами 3500 грн.

Позначимо щотижневий прибуток P, тоді

$$P = y_д - y_в = 2x - 1000 = 2(x - 500).$$

Ми знайшли, що при $x = 500,\ P = 0$. Із співвідношення $P = 2(x - 500)$ випливає також, що при $x < 500$ будемо мати $P < 0$, тобто компанія несе збитки, а при $x > 500$ $(P > 0)$ компанія одержить прибуток.

Приклад 1.4. Економічним підрозділом заводу встановлено, що при виробництві x одиниць продукції A щоквартальні витрати $V(x)$ виражаються формулою $V(x) = 20000 + 40x$ (гривень), а дохід $D(x)$, отриманий від продажу x одиниць цієї продукції, виражається формулою $D(x) = 100x - 0,01x^2$ (гривень).

Кожного кварталу завод виробляє 3100 одиниць продукції A, але бажає збільшити випуск цієї продукції до 3200 одиниць. Обчислити приріст витрат, доходу та прибутку. Знайти середню величину приросту прибутку на одиницю приросту продукції.

Розв'язання. Запланований приріст продукції

$$\Delta x = 3200 - 3100 = 100 \text{ (одиниць продукції } A\text{)}.$$

Приріст витрат

$$\Delta V(x) = V(3200) - V(3100) = 20000 + 40 \cdot 3100 - (20000 + 40 \cdot 3100) = 4000.$$

Приріст доходу:

$$D(x)=D(3200)-D(3100)=$$
$$=\left(100\cdot 3200-0,01\cdot(3200)^2-100\cdot 3100-0,01\cdot(3100)^2\right)=10000-6300=3700.$$

Позначимо прибуток $P(x)$, тоді

$$P(x)=D(x)-V(x)=100x-0,01x^2-(20000+40x)=60x-0,01x^2-20000.$$

Приріст прибутку буде:

$$\Delta P(x)=P(3200)-P(3100)=\left(60\cdot 3200-0,01(3200)^2-20000\right)-$$
$$-\left(60\cdot 3100-0,01(3100)^2-20000\right)=6000-6300=-300.$$

Отже, прибуток зменшиться на 300 гривень.

Середня величина приросту прибутку на одиницю приросту продукції буде:

$$\frac{\Delta P(x)}{\Delta x}=\frac{-300}{100}=-3.$$

Отже, кожна одиниця додаткової продукції зменшує прибуток на 3 гривні.

Лінійна функція та її графік можуть служити для опису економічних залежностей у тих випадках, коли практикою встановлено, що приріст залежної змінної пропорційний приросту незалежної змінної.

1.3. КРИВІ ЗРОСТАННЯ

Особливо широко застосовуються різні типи функціональних залежностей в економетриці, де кількісні взаємозв’язки між економічними величинами вивчають за допомогою регресійного аналізу. В курсі математики ми звикли маючи задання певної функції знаходити точки, що задовольняють цій залежності, і будувати за ними криву. В регресійному аналізі все навпаки: маючи серію точок (статистичних даних, які відображають невідому нам залежність) треба підібрати відповідне рівняння. Суть регресійного аналізу полягає у тому, щоб знайти рівняння кривої, яке найбільш точно відповідає тій закономірності, яка проглядається через сукупність статистичних даних. Але для цього потрібно знайти типи функцій, їх властивості та графіки. Отримані регресійні моделі використовують потім для прогнозування економічних процесів.

Приклад 1.5. Найбільш поширеною гіпотезою щодо витрат споживачів є припущення залежності цього типу витрат від отриманого прибутку. Нехай R – прибуток, який залишається у розпорядженні держави. Тоді макроекономічний показник споживання може бути поданий за допомогою кількох функцій:

$$c=a_0+a_1R, \tag{1.3}$$

$$c=a_0R^{a_1}, \tag{1.4}$$

$$c = a_0 - a_1 R^{-1}, \tag{1.5}$$

де $a_0, a_1 > 0$ – параметри.

Усі функції (1.3) – (1.4) є зростаючими відносно R. Але, маючи спільні властивості, ці функції описують різні якісні процеси споживання. Якщо розглянути функцію (1.3), то вона описує пряму пропорційність, тобто ситуацію, за якої додатковий прибуток у розмірі 100 гривень викликає завжди однакове зростання витрат споживання, тоді як у випадках (1.4), (1.5) схильність до споживання зменшується в міру зростання доходу. Крім того, у випадках (1.3) – (1.4) споживання нескінченно зростає разом із доходом:

$$\lim_{R\to\infty}\left(a_0 + a_1 R\right) = \infty, \lim_{R\to\infty} a_0 R^{a_1} = \infty;$$

тоді як у (1.5) при дуже великому доході споживання прямує до рівня задоволення, поданого константною a_0:

$$\lim_{R\to\infty}\left(a_0 - a_1 R^{-1}\right) = \lim_{R\to\infty}\left(a_0 - \frac{a_1}{R}\right) = a_0.$$

Отже, при побудові регресійних моделей треба опиратися на знання типів кривих (функцій), на економічну теорію та на експериментальні дані.

Економічна практика вже накопичила певний досвід та певні типи кривих, які найчастіше використовуються в макро та мікроекономічних дослідженнях. До таких кривих відносяться криві, що визначаються такими функціями:

$$y = \alpha\beta^x, \beta > 0 \text{ (показникова)} \tag{1.6}$$

$$y = \alpha x^{\beta} \text{ (степенева або мультиплікативна)} \tag{1.7}$$

$$y = b_0 + b_1 x + b_1 x^2 \text{ (квадратична)} \tag{1.8}$$

$$y = \beta_0 + \beta_1 \frac{1}{x} \text{ (зворотна крива)} \tag{1.9}$$

$$y = \alpha\beta^x + \gamma \text{ (модифікована експонента)} \tag{1.10}$$

$$y = e^{\alpha\beta^x + \gamma} \text{ (крива Гомперця)} \tag{1.11}$$

$$y = \frac{1}{\alpha\beta^x + \gamma} \text{ (логістична крива)} \tag{1.12}$$

Розглянемо ці криві детальніше.

ПОКАЗНИКОВА ФУНКЦІЯ. ПРИКЛАДИ ЗАСТОСУВАННЯ ПОКАЗНИКОВИХ (ЕКСПОНЕНЦІЙНИХ) ФУНКЦІЙ У ФІНАНСАХ

Показниковою функцією називається функція виду $y = a^x$, де $a > 0$, $a \neq 1$. В економічних дослідженнях дана функція зустрічається в таких формах:

$$y = \alpha\beta^x, \beta > 0 \text{ (основна форма)}, \tag{1.13}$$

$$y = \alpha e^{kx} \text{ (експоненціальна форма)}, \tag{1.14}$$

$$y = \alpha\left(1 + r\right)^x, \tag{1.15}$$

які на практиці використовуються для опису різних економічних процесів. Наприклад, формулу (1.15) застосовують у фінансах. Ми зустрічалися з нею в частині 1 (розділ 1) при обчисленні величини капіталу, вкладеного під складний відсоток. Так, згідно з (1.2) $P_t = P(1+i)^t$, де P_t – величина накопиченого капіталу за t років, P – початковий вклад, i – питома процентна ставка.

Приклад 1.6. (Неперервне нарахування відсотків).

При обчисленні величини кінцевої суми процент може добавлятися в кінці кожного року, а також і m раз на рік, наприклад, кожного місяця.

В такому випадку проценти на 1 грошову одиницю по закінченні $\frac{1}{m}$ року складуть $\frac{1}{m}$ ($i = \frac{R}{100}$ - питома процентна ставка), а сума на 1 грошову одиницю разом із процентом складе по закінченні:

$$\frac{1}{m}\text{ року:} \qquad 1+\frac{i}{m},$$

$$\frac{2}{m}\text{ року:} \qquad \left(1+\frac{i}{m}\right)^2,$$

$$\ldots$$

$$1\text{ року:} \qquad \left(1+\frac{i}{m}\right)^i,$$

$$\ldots$$

$$t\text{ років:} \qquad \left(1+\frac{i}{m}\right)^{tm}.$$

Таким чином, кінцева величина початкової суми P через t років у випадку, якщо питома процентна ставка рівна i, а проценти нараховуються m раз на рік складе:

$$P_t = P\left(1+\frac{i}{m}\right)^{tm}.$$

Якщо нарахування процентів проходить неперервно, тобто $m \to \infty$, то отримаємо:

$$P_t = \lim_{m\to\infty} P\left(1+\frac{i}{m}\right)^{tm} = P\lim_{m\to\infty}\left(1+\frac{i}{m}\right)^{\frac{m}{i}\cdot it} = Pe^{it}.$$

При обчисленні використано другу важливу границю.

Отже,

$$P_t = Pe^{it}. \qquad (1.16)$$

Формула (1.16) називається формулою неперервного зростання за складними відсотками і подається через експоненціальну функцію.

Показникові функції використовуються в економіці для опису швидко зростаючих або спадаючих процесів. Зручність їх використання полягає ще й в тому, що шляхом логарифмування показникову функцію можна звести до лінійної $\left(y = \alpha\beta^{x} \Rightarrow \ln y = \ln\alpha + x\ln\beta\right)$, що дає змогу проводити аналіз економічної моделі як і у випадку простої лінійної регресії.

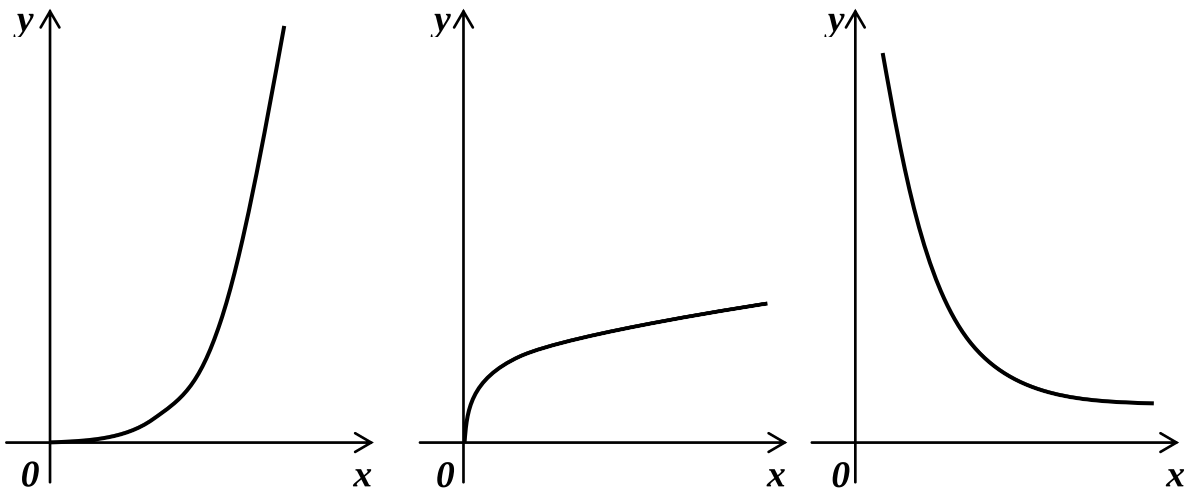
СТЕПЕНЕВА (МУЛЬТИПЛІКАТИВНА) ФУНКЦІЯ

Степенева функція є однією з найпоширеніших у практиці кривих зростання і описує дуже широкий спектр економічних процесів. Вона має такий вигляд:

$$y = \alpha x^{\beta}. \tag{1.17}$$

В економіці розглядають лише випадок, коли параметр $\alpha \geq 0$. Якщо значення параметра β неціле, то розглядають невід'ємні значення аргументу $x \geq 0$, оскільки від'ємне число в нецілій степені може дати уявне значення.

Залежно від значення параметра β степенева функція описуватиме різні економічні процеси: прискорене зростання, уповільнене зростання, спад. Ці випадки зображенні на рисунку 1.2.



$\beta > 1$ *Прискорене зростання* $0 < \beta < 1$ *Уповільнене зростання* $\beta < 0$ *Спад*

Рис. 1.2.

Зауважимо, що шляхом логарифмічного перетворення ми можемо легко звести степеневу функцію до лінійної. Справді,

$$\ln y = \ln\alpha + \beta lnx; \qquad \ln y = y_1,\ \ \ln\alpha = \beta_0,\ \ \ln x = x_1 \Rightarrow y_1 = \beta_0 + \beta x_1.$$

На практиці степеневі функції використовуються для опису попиту на товари різних категорій, представлення виробничих функцій, тощо.

Приклад 1.6. Італійський економіст В. Парето сформулював теорему про розподіл доходів в капіталістичному суспільстві.

Якщо через y позначити число осіб, що мають дохід, не менше x, то

$$y = \frac{a}{x^m}, \quad \text{де} \quad a, m - \text{сталі.}$$

Закон Парето достатньо точно описує розподіл більш високих доходів, однак для низьких прибутків він не справджується.

Нехай в деякій розвиненій країні розподіл доходів визначається рівнянням

$$y = \frac{2\,000\,000\,000}{x^{1,5}}.$$

Знайти: а) число осіб, які володіють доходом, що перевищує 100 000;

б) найнижчий дохід серед 100 найбагатших осіб.

Розв'язання: згідно з умовою задачі $x = 100\,000$, звідки

$$y = \frac{2\,000\,000\,000}{100000^{1,5}} \approx 63,2.$$

Отже, 63 особи мають дохід, що перевищує 100 000.

Для розв'язання другої частини задачі отримаємо рівняння:

$$100 = \frac{2\,000\,000\,000}{x^{1,5}}; \; x^{1,5} = 20\,000\,000; \; 1,5\ln x = \ln 20\,000\,000;$$

$$\ln x = \frac{\ln 20\,000\,000}{1,5}, \qquad \text{звідки } x = 73700.$$

Таким чином, найнижчий дохід серед 100 найбагатших осіб (тобто сотої особи, рахуючи від найбагатшого) складає 73 700.

ІНШІ ТИПИ КРИВИХ ЗРОСТАННЯ

Зворотна функція $y = b_0 + \frac{b_1}{x}$ використовується для опису економічних процесів, які обмежені знизу або зверху.

Справді, $\lim\limits_{x\to\infty} b_0 + \frac{b_1}{x} = b_0$, тобто якщо $x \to \infty$ (в економічних моделях розглядають як правило $x \geq 0$), то y прямує до граничного значення b_0, причому:

при $b_1 > 0$ зворотна крива буде спадати на проміжку $(0;+\infty)$, а, отже, обмежена знизу прямуючи до b_0, (див. рис. 1.3.);

при $b_1 < 0$ зворотна крива буде зростати наближаючись до b_0 а, отже, обмежена зверху (див. рис. 1.4.).

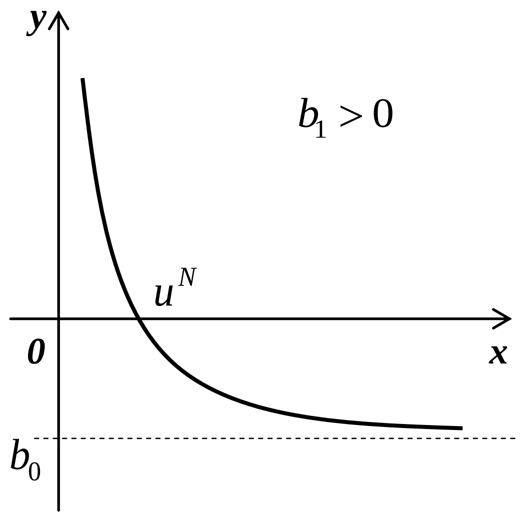


Рис. 1.3.

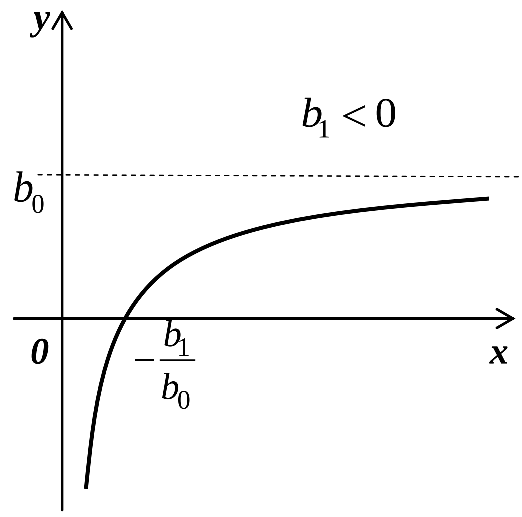


Рис. 1.4.

Яскравим прикладом застосування зворотної функції є крива Філіпса (рис. 1.3.), що пов'язує зміни заробітної плати із зміною процента безробіття. Якщо позначити через y – норми зміни заробітної плати (в %), а через x – норму безробіття (в %), то як показано на рис. 1.3., точка u^N є значенням природної норми безробіття; якщо $x < u^N$, то норма зміни заробітної плати додатна, а якщо $x > u^N$, то y стає від'ємним, тобто заробітна плата зменшується (при високому проценті безробіття роботодавці знижують заробітну плату у зв'язку із перенасиченням ринку робочої сили).

Інший, не менш важливий, випадкок використання зворотної кривої (рис. 1.4.) – крива витрат Енгеля, яка пов'язує споживчі витрати на товари із доходом.

Якщо y – витрати на споживання, x – дохід, то крива Енгеля для певного товару показує:

а) критичний рівень доходу, нижче від якого товар не буде куплено (значення $-\frac{b_1}{b_0}$);

б) «стелю» (межу) насичення, яку не можна збільшити, як би не зростав дохід (значення b_0).

Приклад 1.7. На основі даних про залежність між річною зміною заробітної плати у відсотках і нормою безробіття для Англії 1950-1966 р.р. за допомогою регресійної моделі побудована така функція (крива Філіпса):

$$y = -1,4284 + 8,7243\frac{1}{x}.$$

Визначити природну норму безробіття для Англії цього періоду. Знайти граничну норму зміни заробітної плати якщо x нескінченно зростає.

Розв’язання: природну норму безробіття знайдемо з умови, що $y=0$, звідси

$$-1,4284+8,7243\frac{1}{x}=0, \qquad x=\frac{8,7243}{1,4284}=6,11\%.$$

Граничне значення y (при $x\to+\infty$) дорівнює $-1,4284\approx-1,43$. Тобто, коли x нескінченно зростає, відсоток заробітної плати знижується, але не може переходити межу $1,43\%$ на рік.

Інші типи функцій, що часто застосовуються в економічній теорії, дослідимо методами диференціального числення в наступному розділі.

1.4. ВПРАВИ ДО РОЗДІЛУ 1

Завдання 1.1.

Крива $y=f(x)$ належить до класу кривих, які використовуються для опису широкого спектру економічних процесів. Дослідити поведінку даної кривої при необмеженому зростанні змінної x. Чи описує дана функція процес із насиченням (обмеження зверху)?

а) $y=\dfrac{N}{0.1N+7e^{-2x}}$;

б) $y=N^x+20$;

в) $y=N-\dfrac{5}{Nx}$;

г) $y=\left(\dfrac{1}{N+1}\right)^x+10.$

Завдання 1.2.

Обчислити границі.

1. а) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{3x^3+5x-200}{15+2x-2x^4}$; б); $\lim\limits_{x\to3}\dfrac{2x^2-4x-6}{x^2-9}$

в) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{x(1-\cos4x)}{\sin x-\operatorname{tg}x}$; г) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\dfrac{k}{x}\right)^{mx}$;

2. а) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{2x^2+4x-8}{x+x^2}$; б) $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{x^4-1}{2x^4-x^2-1}$;

в) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{x+3\operatorname{arctg}2x}{4x-\arcsin x}$; г) $\lim\limits_{x\to0}\left(\sin x+cosx\right)\dfrac{1}{\sin^2x}$;

3. а) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x+5x^3+6x^4}{1+x+2x^2}$; б) $\lim\limits_{x\to4}\dfrac{\sqrt{1+2x}-3}{\sqrt{x}-2}$;

в) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{4x^2}{1-\cos^3 2x}$; г) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{3x^2+5x}{3x^2+2x-1}\right)^{5x}$;

4. а) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^2-x-1}{x^2+x+1}$; б) $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^2+3x-10}{x^3-6x^2+12x-8}$;

в) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\sqrt{\cos 2x}}{x\sin 3x}$; г) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{3x+4}{3x+2}\right)^{\frac{x^2}{x+2}}$;

5. а) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{(x+2)^2-x^2}{(x+2)^2+1}$; б) $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{\sqrt{x^2+16}-\sqrt{5x+10}}{x^2-5x+6}$;

в) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\cos 7x-\cos 3x}{1-\cos 4x}$; г) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{1+2x}{3+2x}\right)^{x}$;

6. а) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{5x^5+3x}{1+2x+3x^4+x^5}$; б) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x^3+3x^2+2x}{\sqrt{3+x}-\sqrt{3-x}}$;

в) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{(1-cosx)^2}{\sin^3 x-\operatorname{tg}^3 x}$; г) $\lim\limits_{x\to\infty}(2x-6)^{5/3(x-3)}$;

7. а) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^4+x}{x^2(2x+1)^2}$; б) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\sqrt{x^2+1}-\sqrt{x^2-9}\right)$;

в) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1+\sin x-\cos x}{1-\sin x-\cos x}$; г) $\lim\limits_{x\to\infty}(\dfrac{x+3}{x-4})^{x}$;

8. а) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{4x+x^2+1}{6x-3x-x^2}$; б) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^5+x^2-2x}{3x^2+3x-6}$;

в) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\arcsin x}{\sqrt{2+x}-\sqrt{2}}$; г) $\lim\limits_{x\to 2}(2x-3)^{5/(x-2)}$;

9. а) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^2+3x+2}{(x+1)^3-(x-1)^3}$; б) $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{5x^2-10x-15}{x^3-27}$;

в) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{1+\sin 4x}-1}{\operatorname{arc\,tg}2x}$; г) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{x-1}{x+4}\right)^{3x+2}$;

10. а) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{5x^4+x}{10+4x^3+8x^2}$; б) $\lim\limits_{x\to 7}\dfrac{\sqrt{x-3}-2}{\sqrt{x+2}-3}$;

в) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\operatorname{arc\,tg}^2 7x}{\sin 3x}$; г) $\lim\limits_{x\to 0}\left(6-\dfrac{5}{\cos x}\right)^{ctg^2 x}$;

11. а) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^3-5x^2+7x+3}{(2x-1)^3}$; б) $\lim\limits_{x\to 9}\dfrac{\sqrt{x}-3}{x^2-81}$;

в) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\cos 4x-\cos 2x}{\arcsin^2 x}$; г) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{x^2+8x}{x^2-4x+1}\right)^{3x}$;

12. а) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{(x+2)^2-(x+1)^2}{x^2+3x+8}$; б) $\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{x+2x^2+x^3}{x^3-4x-3}$;

в) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos 4x}{\sin^2 5x}$; г) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{6-x}{7-x}\right)^{(1-x^3)/x^2}$;

13. а) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x+x^3+x^5}{1+x^2+x^4}$; б) $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^2-2x-4}{2x^2+2x-12}$;

в) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos 4x}{1-\cos 6x}$; г) $\lim\limits_{x\to 0}\left(3-\dfrac{2}{\cos x}\right)^{1/\sin^2 x}$;

14. а) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{3x^3+x^2+1}{5+7x^2+x^3}$; б) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{3x^2+x}{\sqrt{9+x^2}-3}$;

в) $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{1}{\sin x}-\dfrac{1}{\operatorname{tg} x}\right)$; г) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{2+3x}{4+3x}\right)^{-x}$;

15. а) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{1+5x^2+10x^4}{\left(x^2+1\right)^2}$; б) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{3x^2-2x-1}{x^4-1}$;

в) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\cos x-\cos^3 x}{2x^2}$; г) $\lim\limits_{x\to 3}(3x-8)^{(x+1)/(x-3)}$;

16. а) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{8-3x^2+5x^4}{1+2x+x^4}$; б) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{x^2-2x+1}-(1+x)}{x}$

в) $\lim\limits_{x\to -2}\dfrac{\arcsin(x+2)}{x^2+2x}$; г) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x^2+5x}{x^2+3x}\right)^{x^2}$;

17. а) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^7-x^5+4x^3}{3x^2+12x-5}$ б) $\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{3x^2+2x-1}{x^3+4x^2+5x+2}$

в) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos 2x+\operatorname{tg}^2 x}{x\sin x}$; г) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x-7}{x}\right)^{2x+1}$;

18. а) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{(x+3)^2-(x+1)^2}{(x+3)^2+(x+1)^2}$ б) $\lim\limits_{x\to-2}\dfrac{\sqrt[3]{x-6}+2}{\sqrt{x^2+5}-\sqrt{3-3x}}$

в) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{1-x\sin x-\cos 2x}{\sin^2 x}$; г) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{4x+3}{4x-3}\right)^{3x-1}$

19. а) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{1+7x-3x^2+x^3}{1-3x^2+x^3}$ б) $\lim\limits_{x\to-3}\dfrac{2x^3+8x^2+6x}{x^3+27}$

в) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{1-\cos^2 3x}{\operatorname{arc\,tg}^2 x}$; г) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{2x^2+3}{2x^2-3}\right)^{x^2/4}$

20. а) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^2+3x+1}{\sqrt{9x^4+2x^2+3}}$; б) $\lim\limits_{x\to16}\dfrac{\sqrt[4]{x}-2}{\sqrt{x}-4}$

в) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\operatorname{tg}x-\sin x}{x^3}$; г) $\lim\limits_{x\to0}\left(1+\sin^2 3x\right)^{1/\ln\cos x}$.

Завдання 1.3.

Функція $Q=f(p)$ виражає залежність споживчого попиту Q від ціни товару $p(p>0)$. Подайте функціональну залежність між попитом і ціною на товар як залежність ціни від попиту.

1. $Q=100+25e^{-p}$;
2. $Q=700/(10+p^2)$;
3. $Q=500arctg\dfrac{1}{p}$;
4. $Q=30e^{5-0,5\sqrt{p}}$;
5. $Q=\dfrac{5}{\sqrt{p}}$;
6. $Q=\dfrac{300}{p^2+2p+6}$;
7. $Q=10\dfrac{1-e^{-p}}{1+e^{-p}}$;
8. $Q=5+25e^{-p}$;
9. $Q=4+3arcsin\dfrac{1}{p}$;
10. $Q=300-2p$;
11. $Q=-\dfrac{1}{16}p^2-p+450$;
12. $Q=50e^{-p^2/4}$;
13. $Q=\dfrac{1000}{p^3+3p^2+3p+26}$;
14. $Q=25e^{-p^2}$;

Функція $S = g(p)$ виражає залежність кількості пропонованого на ринку виробника товару S від ринкової ціни товару $p(p > 0)$. Подайте функціональну залежність між пропозицією і ціною на товар як залежність ціни від пропозиції.

16. $S = 7 + 2\sqrt[3]{p^2 + 6p + 10}$;
17. $S = 5 + 25\sqrt{1 - e^{-p^3}}$;
18. $S = \dfrac{5\left(e^p - e^{-p}\right)}{e^p + e^{-p}}$;
19. $S = 0,25p^2 + p + 27$;
20. $S = 25 + 5arcctg\dfrac{1}{p}$;
21. $S = 3 + 2\sqrt{1 - e^{-p^2}}$;
22. $S = 7 + \dfrac{1}{4}\sqrt[3]{p}$;
23. $S = 3 + 10(p-1)^{2/3}$;
24. $S = 7 + 2(p+1)^{3/4}$;
25. $S = e^{\sqrt[3]{p}} + 1$;
26. $S = \dfrac{1}{8}p^2 + \dfrac{1}{2}p + 4$;
27. $S = 5 + \dfrac{1}{2}\log_2(p+1)$
28. $S = 80/(1 + 2e^{(-p)})$;
29. $S = \dfrac{p}{4} + \dfrac{1}{p+1}$;
30. $S = 5 + 10\sqrt{2p + 3}$.

Завдання 1.4.

Приватне торгівельне підприємство платить продавцю за x одиниць проданого товару $(2x + (N+10))$ грн., якщо продано менше ніж $10N$ одиниць товару та доплату 25% комісійних, якщо товару продано $10N$ та більше. Знайти функцію, що виражає залежність зарплати продавця від кількості проданого товару. Дослідити одержану функцію на неперервність та побудувати її графік

Завдання 1.5.

Знайти точки рівноваги та області прибутку і збитків компанії, що виготовляє щомісяця x виробів вартістю p гривень кожен, а сума загальних щомісячних витрат $y_в$, має таку закономірність:

а) $p = N$, $\quad y_в = \dfrac{N}{2}x + 300N$;

б) $p = N + 10$, $\quad y_в = 9N + 10x + 0.01Nx^2$

РОЗДІЛ 2. ЗАСТОСУВАННЯ ПОХІДНОЇ В ЕКОНОМІЦІ

Застосування диференціального числення в економіці (граничний аналіз) дозволило відображати математично не лише стан економічних об’єктів, але й процеси.

В економіці дуже широко користуються середніми величинами: середні витрати на виготовлення одиниці продукції, середня продуктивність праці, середня собівартість продукції, тощо. Це вагомий інструмент економічного аналізу, Але, плануючи зміни виробництва, наприклад, його розширення, ми зустрічаємось із задачами такого характеру: потрібно оцінити як зміниться результат при зміні фактора, який на нього впливає. Наприклад, як змінюватимуться затрати при зміні обсягу випуску чи прибуток при зміні кількості товару. Середні величини відповіді на такі питання не дадуть. В задачах такого типу потрібно знайти границю відношення приросту ефекту до приросту фактора за умови, що приріст фактора прямує до нуля, що зумовлює ефект, або, як кажуть, граничний ефект. Отже, граничні величини характеризують не стан (як середня величина), а процес зміни економічного об’єкту. Похідна виступає як швидкість зміни деякого економічного об’єкту за часом, або за певним фактором.

Слід зазначити, що економіка не завжди дозволяє використовувати граничні величини в силу неподільності багатьох об’єктів економічних розрахунків і дискретності економічних показників у часі (місячних, квартальних, річних, тощо). Разом із тим, в деяких випадках ми можемо відійти від дискретності показників і ефективно використовувати граничні величини. Наприклад, як зазначалось в розділі 1, за допомогою регресійного аналізу ми можем, на основі дискретних статистичних даних знайти функціональну залежність (неперервну) між економічними величинами і застосовувати до останньої граничний аналіз.

2.1. ЕКОНОМІЧНИЙ ЗМІСТ ПОХІДНОЇ

Витрати виробництва C однорідної продукції розглянемо як функцію кількості продукції x, що випускається, тобто $C = C(x)$.

Припустимо, що кількість продукції збільшується на Δx, продукції $x + \Delta x$ відповідають витрати виробництва $C(x + \Delta x)$. Отже, приросту кількості продукції Δx відповідає приріст витрат виробництва продукції

$$\Delta C = C(x + \Delta x) - C(x).$$

Середній приріст витрат виробництва на одиницю продукції дорівнює $\dfrac{\Delta C}{\Delta x}$.

Границя

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta C}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{C(x+\Delta x)-C(x)}{\Delta x}=C'(x) \qquad (2.1)$$

називається граничними витратами виробництва і характеризує додаткові витрати на виробництво одиниці додаткової продукції.

Зауваження 2.1. В граничному аналізі важливим поняттям є гранична вартість (маргінальна вартість), яка показує вартість додатково виробленої одиниці продукції. Якщо функція витрат підприємства визначає витрати у гривнях (таку функцію часто ще називають функцією вартості), то маргінальна вартість визначається як функція граничних витрат. В економічній теорії прийнято позначати $C'(x)=MC$.

Приклад 2.1. Для функції витрат виробництва x одиниць продукції (у гривнях) вигляду $C(x)=100x-\frac{1}{30}x^3$ знайти маргінальну вартість, якщо обсяг виробництва складає 5 одиниць на 10 одиниць продукції.

Розв'язання. Беручи до уваги зауваження 2.1, для знаходження маргінальної вартості треба знайти похідну функції витрат, тобто

$$C'(x)=\left(100x-\frac{1}{30}x^3\right)'=100-0{,}1x^2.$$

При $x=5$ отримаємо $C'(5)=100-0{,}1\cdot 25=97{,}5$;

при $x=10$ маємо $C'(10)=100-0{,}1\cdot 100=90$.

Це означає, що при обсязі виробництва в 5 одиниць продукції вартість виготовлення наступної (шостої) одиниці продукції складе 97,5 гривень, а вартість виготовлення одинадцятої буде лише 90 гривень.

Аналогічно, якщо ми позначимо через $R(x)$ та $P(x)$ дохід від продажі та прибуток (різницю між доходом та витратами) x одиниць товару, то границі

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta R(x)}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{R(x+\Delta x)-R(x)}{\Delta x}=R'(x)=MR, \qquad (2.2)$$

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta P(x)}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{P(x+\Delta x)-P(x)}{\Delta x}=P'(x) \qquad (2.3)$$

називають граничним (маргінальним) доходом та граничним (маргінальним) прибутком відповідно.

Особливо широко метод маргінального або граничного аналізу застосовується мікроекономічною теорією, в якій часто економічні закони формулюються в термінах граничних величин. Проілюструємо це на прикладі наступної задачі.

МАКСИМІЗАЦІЯ ПРИБУТКУ

Постановка задачі.

Нехай задано функцію попиту від ціни $x = f(p)$, де x - попит, p - ціна, та функцію витрат виробництва x одиниць продукції у гривнях (функція вартості) $C = C(x)$.

Потрібно визначити такий обсяг випуску продукції, який забезпечує виробникові максимальний прибуток.

Розв'язання. Позначимо обернену функцію ринкового попиту через $p = f^{-1}(x)$, тоді дохід від продажу x одиниць продукції складає

$$R(x) = x \cdot p = x \cdot f^{-1}(x) \qquad (2.4)$$

Функцію прибутку отримаємо як різницю між доходом від продажу x одиниць продукції та витратами на їх виробництво, тобто

$$P(x) = R(x) - C(x). \qquad (2.5)$$

Отже, задача звелася до відшукання максимуму функції (2.5). Для знаходження точки екстремуму обчислимо першу похідну функції прибутку (2.5) та прирівняємо її до нуля:

$P'(x) = R'(x) - C'(x) = 0 \Rightarrow R'(x) - C'(x)$ або, використовуючи введені позначення,

$$MR = MC \qquad (2.6)$$

Якщо б граничний дохід був більшим граничних витрат $MR > MC$ $\left(P'(x) > 0\right)$, то підприємству вигідно було б збільшити випуск продукції; якщо б граничний дохід був меншим граничних витрат $MR < MC$ $\left(P'(x) < 0\right)$, підприємству вигідно було б зменшити випуск продукції, оскільки економія на витратах компенсувала б втрату доходу. Єдина точка, в якій у підприємства немає стимулу міняти обсяг випуску, це точка, в якій граничний дохід рівний граничним витратам (умова (2.6)).

Даний закон широко застосовується в мікроекономіці при аналізі ефективності роботи підприємства.

Зазначимо, також, що описані міркування відповідають випадку зміни знаку похідної функції прибутку при переході зліва направо через критичну точку x_0, в якій $MR = MC$ з «+» на «-», що з точки зору диференціального числення доводить, що в точці x_0 функція прибутку досягає максимуму.

Приклад 2.2. Приватне підприємство планує випускати електронагрівачі. На основі проведеного дослідження було встановлено залежність попиту від ціни p за прилад: $x = 120000 - 140p,$ де x - кількість приладів в рік.

Витрати виробництва x одиниць продукції у гривнях становлять

$$C(x) = 150000 + 150x + 0{,}0005x^2.$$

Знайти оптимальний обсяг випуску продукції та відповідний прибуток?

Розв'язання. Знайдемо функцію, обернену до функції попиту $400p = 120000 - x$, звідки $p = 300 - 0,0025x$ і дохід від продажу x одиниць продукції складе $R(x) = x \cdot p = 300x - 0,0025x^2.$

В силу умови (2.6) оптимальності для цієї задачі отримаємо:

$$MR = \left(300x - 0,0025x^2\right)' = 300 - 0,005x;$$

$$MC = \left(150000 + 150x + 0,0005x^2\right)' = 150 + 0,001x;$$

$$MR = MC \text{, то } 300 - 0,005x = 150 + 0,001x,$$

$$\text{звідки } 150 = 0,006x, \ \ x = 25000 \text{ одиниць продукції.}$$

Отже, оптимальний обсяг випуску продукції становить 25000 одиниць електронагрівачів в рік, при цьому підприємство отримає прибуток:

$$P(x) = R(x) - C(x) = 300x - 0,0025x^2 - \left(150000 + 150x + 0,0005x^2\right) =$$

$$= -0,003x^2 + 150x - 150000, P(25000) = 1725000 \ \textit{грн.}$$

2.2. ЕЛАСТИЧНІСТЬ. ЗАСТОСУВАННЯ КОЕФІЦІЄНТІВ ЕЛАСТИЧНОСТІ В ЕКОНОМІЧНИХ РОХРАХУНКАХ

Необхідність введення поняття еластичності

Розглянемо функцію попиту від ціни на певний вид продукції $q = x(p)$, де $q -$попит, $p -$ціна. Часто виникає потреба мати міру «чутливості» попиту до зміни ціни. Перше, що природно спадає на думку, використати за міру чутливості похідну від функції попиту, що за означенням дорівнює границі відношення зміни кількості попиту до зміни ціни:

$$\lim_{\Delta p \to 0} \frac{\Delta x}{\Delta p} = x'(p).$$

Це безсумнівно є мірою чутливості, але проблема полягає у тому, що ця міра залежить від одиниць виміру ціни і кількості попиту. Якщо ми будемо вимірювати попит не в квартах, а галонах (1 галон містить 4 кварти речовини), то вказана границя (або нахил кривої попиту) стає в чотири рази менша. Замість того, щоб кожного разу уточнювати з якими одиницями вимірювання ми маємо справу, зручніше розглянути міру чутливості попиту, яка не залежить від одиниць вимірювання. Економісти вибрали за таку міру чутливості попиту до зміни ціни **еластичність**. Так цінова еластичність попиту визначається як процентна зміна кількості попиту, що ділиться на процентну зміну ціни. Тоді 90% -- не збільшення ціни залишається тим же самим процентним збільшенням ціни, незалежно від того чи вимірюємо ми ціну в американських доларах чи в гривнях.

Отже, зміна приростів в процентах (відносні прирости) робить поняття еластичності незалежним від одиниць вимірювання.

Означення еластичності функції

Нехай задано функцію попиту від ціни $y = f(x)$. Надамо незалежній змінній x приросту Δx, тоді відносний приріст незалежної змінної x буде дорівнювати $\frac{\Delta x}{x}$. Відповідний приріст залежної змінної стане $\Delta y = f(x + \Delta x) - f(x)$, а відносний приріст залежної змінної складе $\frac{\Delta y}{y}$.

Відношення відносного приросту функції до відносного приросту аргументу запишемо в такому вигляді:

$$\frac{\Delta y}{y} : \frac{\Delta x}{x} = \frac{\Delta y}{\Delta x} \cdot \frac{x}{y}$$

Припустимо, що функція $y = f(x)$ диференційовна. Тоді границя

$$\lim_{\Delta x \to 0} \left(\frac{\Delta y}{y} : \frac{\Delta x}{x} \right) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{x}{y} \cdot \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{x}{y} \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{x}{y} \cdot f'(x) = \frac{x}{y} \cdot \frac{dy}{dx} \quad (2.7)$$

відношення відносного приросту функції до відносного приросту аргументу при $\Delta x \to 0$ називається **еластичністю функції** $y = f(x)$ **відносно змінної** x. Еластичність функції $y = f(x)$ позначається $E_x(y)$. Отже

$$E_x(y) = \frac{x}{y} \cdot \frac{dy}{dx} \quad (2.8)$$

Згідно з означенням, еластичність допускає таку економічну інтерпретацію: еластичність функції – це наближений процентний приріст функції, що відповідає приросту незалежної змінної на 1%.

Приклад 2.3. Розрахувати еластичність функції $y = 3x - 6$.

Розв'язання. Згідно з означенням еластичності маємо:

$$E_x(x) = \frac{x}{y} \cdot \frac{dy}{dx} = \frac{x}{3x-6} \cdot (3x-6)' = \frac{3x}{3x-6} = \frac{x}{x-2}.$$

Якщо, наприклад, $x = 10$, то еластичність функції дорівнює $\frac{10}{10-2} = \frac{5}{4}$.

Це означає, що, якщо x зросте на 1%, то y зросте на $\frac{5}{4}\%$.

Теорема 2.1. Еластичність добутку двох функцій (u та v) дорівнює сумі показників еластичності співмножників, тобто

$$E_x(u \cdot v) = E_x(u) + E_x(v) \quad (2.9)$$

Доведення. За доведенням еластичності (2.8), маємо

$$E_x(u \cdot v) = \frac{x}{u \cdot v}(u \cdot v)' = \frac{x}{u \cdot v}(uv' + u'v) = \frac{x}{u \cdot v}uv' + \frac{x}{u \cdot v}u'v = \frac{x}{v}v' + \frac{x}{u}u' =$$

$$= E_x(u) + E_x(v),$$

що і потрібно було довести.

Приклад 2.4. Розрахувати еластичність функції $y = xe^x$.

Розв'язання. Позначимо $u = x, v = e^x$, тоді $y = u \cdot v$ і, використовуючи формулу (2.9), отримаємо:

$$E_x(y) = E_x(u \cdot v) = \frac{x}{x}(x)' + \frac{x}{e^x} \cdot \left(e^x\right)' = 1 + x.$$

Теорема 2.2. Еластичність частки двох функцій (u та v) дорівнює різниці показників еластичності діленого і дільника, тобто

$$E_x\left(\frac{u}{v}\right) = E_x(u) - E_x(v) \tag{2.10}$$

Доведення. В силу (2.8) маємо:

$$E_x\left(\frac{u}{v}\right) = \frac{x}{\frac{u}{v}}\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{vx}{u} \cdot \frac{vu' - uv'}{v^2} = \frac{x}{u} \cdot \frac{vu' - uv'}{v} = \frac{x}{u}\left(u' - \frac{uv'}{v}\right) =$$

$$= \frac{x}{u} \cdot u' - \frac{x}{v} v' = E_x(u) - E_x(v),$$

що і потрібно було довести.

Еластичність попиту відносно ціни

Нехай залежність попиту від ціни задана функцією $q = f(p)$.

Згідно з означенням, еластичністю попиту відносно ціни на продукцію будемо називати функцію $E_p(q) = \frac{p}{q}\frac{dq}{dp}$, яка вказує на скільки процентів зміниться попит, якщо ціна зросте на 1%.

Як правило, функція попиту є спадна функція, оскільки з підвищенням ціни на товар попит на нього знижується, тому

$$f'(p) = \frac{dq}{dp} < 0.$$

Щоб уникнути від'ємних чисел, при вивченні еластичності попиту приймемо, що

$$E_p(q) = -\frac{p}{q}\frac{dq}{dp} \tag{2.11}$$

Якщо $E_p(q) > 1$, тобто підвищенню ціни на 1% відповідає зниження попиту більш ніж на 1%, то кажуть, що попит еластичний.

Якщо $E_p(q) = 1$, тобто підвищенню ціни на 1% відповідає зниження попиту також на 1%, то кажуть, що попит нейтральний.

Якщо $0 < E_p(q) < 1$, тобто підвищенню ціни на 1% відповідає зниження попиту менш ніж на 1%, то кажуть, що попит нееластичний.

Приклад 2.6. Якщо функція попиту є $q=10-p$, то еластичність попиту дорівнює

$$E_p(q)=-\frac{p}{q}\frac{dq}{dp}=-\frac{p}{10-p}\cdot(-1)=\frac{p}{10-p}.$$

Якщо, наприклад, $p=2$, то $E_p(q)=\frac{2}{8}=\frac{1}{4}$. Це означає, що при ціні 2 її збільшення на 1% призведе до зниження попиту на $1/4\%$.

Приклад 2.6. Якщо функція попиту $q=\frac{c}{p}$ $(c=const)$, то еластичність попиту дорівнює: $E_p(q)=-\frac{p}{q}\frac{dq}{dp}=-\frac{p}{\frac{c}{p}}\cdot\left(-\frac{c}{p^2}\right)=1.$

Отже, якщо попит обернено пропорційний ціні, що для будь-якої ціни еластичність попиту дорівнює 1.

Приклад 2.7. Припустимо, що функція попиту на певний товар дорівнює $q=f(p)$ де $p-$ ціна товару, $q-$відповідний попит. Загальні витрати населення на даний товар (виручка від його продажі) складає $u=pq$, а гранична виручка складає $u'=q+q'\cdot p=q\left(1+\frac{p}{q}q'\right)$.

Оскільки еластичність попиту відносно ціни дорівнює $E_p(q)=-\frac{p}{q}q'$, то отримаємо: $u'=q\left(1-E_p(q)\right)$.

Дане рівняння визначає залежність між виручкою від продажі товару і попитом.

Із отриманого рівняння можна зробити такі висновки:

1) Якщо $E_p(q)>1$, то $u'<0$, тобто, якщо попит еластичний, то, з підвищенням ціни, виручка від продажі товару знижується.
2) Якщо $E_p(q)=1$, то $u'=0$, звідси u константа; це означає, що при нейтральному попиті виручка від продажу товару не залежить від зміни ціни. В цьому випадку $q\cdot p=c,$ звідки $q=\frac{c}{p}, c=const.$ (Порівняйте з прикладом 2.6).
3) Якщо $0<E_p(q)<1,$ то $u'>0$, тобто якщо попит нееластичний, то з підвищенням ціни виручка зростає.

Інтуїтивний зміст цих математичних фактів запам'ятати не складно.

Якщо попит високочутливий до ціни (тобто дуже еластичний), то зростання ціни зменшить попит настільки сильно, що загальний дохід знизиться. Якщо попит практично не реагує на ціну (дуже нееластичний) то збільшення ціни слабо змінить попит і загальний дохід зросте. Якщо ж $E_p(q)=1$, то при зростанні ціни на 1% продана кількість товару зменшиться на 1%, так що загальний дохід залишиться без змін.

Отже, знання еластичності попиту на даний товар дозволяє визначити суму виручки під впливом зміни ціни.

Зауваження 2.2. Слід звернути увагу на те, що еластичність попиту – також функція а, отже, різним цінам відповідають неоднакові показники еластичності попиту.

Еластичність попиту відносно доходу. Якщо фактори, від яких залежить попит на даний товар, не змінюється, а змінюється лише дохід споживачів, то попит q є функцією доходу r : $q = f(r)$.

Еластичністю попиту відносно доходу називається вираз

$$E_r(q) = \lim_{\Delta r \to 0}\left(\frac{\Delta q}{q} : \frac{\Delta r}{r}\right) = \frac{r}{q} \cdot \frac{dq}{dr} \qquad (2.12)$$

Еластичність попиту відносно доходу є мірою реакції попиту на зміну доходу споживачів.

Еластичність попиту відносно доходу різна для різних товарів – аж до від’ємної (хліб, продукти низьких сортів). Товари, для яких $E_r(q) < 0$ називаються малоцінними. Від’ємне значення еластичності означає, що із зростанням доходів споживання таких товарів не збільшується, а зменшується.

Приклад 2.8. Шведський економіст Герман Волд розрахував еластичність попиту на деякі продовольчі товари для періоду після першої світової війни (1933 р.) в Швеції. Він одержав результати, наведені в таблиці.

Продукти харчування	Еластичність попиту відносно доходу	
	по групі робітників	по всьому населенню
Молоко і сметана	0,25	0
Молоко	0,20	0
Масло і маргарин	0,25	0,6
Масло	0,4	0,55
Сир	0,35	0,50
Яйце	0,5	0,6-0,7
М'ясо (з свининою)	0,25	0,3
М'ясо без свинини	0,30	0,3
Свинина	0,1	0,3
Мука	-0,5	-0,55
Цукор	0,25	0,3
Картопля	-	-0,2

Наприклад, для муки еластичність попиту відносно доходу робітників складає – 0,50, а відносно доходів усього населення складає – 0,55. Це означає, що із зростанням доходу попит на муку знижується, причому серед непрацюючої частоти населення це відбувається в більшій мірі. Якщо дохід збільшується, то споживання муки зменшується внаслідок заміни її іншими продуктами харчування. Згідно з даними таблиці подібну тенденцію має і споживання картоплі.

Приклад 2.9. Припустимо, що держава планує підвищити ціни на певний вид товару на 10%. Відомо, що еластичність попиту відносно ціни на цей товар складає 0,2, тому слід очікувати, що таке підвищення зумовить зниження попиту на даний товар на 2%.

Отже, в результаті такого рішення доходи держави збільшилися би на 8%.

2.3. ЗАСТОСУВАННЯ ПОХІДНИХ ДЛЯ ДОСЛІДЖЕННЯ ДИНАМІКИ ФУНКЦІЙ

Маючи функції, що описують економічні закони з допомогою диференціального числення, ми можемо провести дослідження цих функцій. Це дозволяє встановити в яких інтервалах ці функції, зростають чи спадають, в яких точках набувають екстремальних значень. Подібні дослідження дозволяють пізнати динаміку економічних явищ.

Приклад 2.10. Попит на певний вид товару визначається функцією $P=\dfrac{600}{x+20}$, де $p-$ ціна, $x-$попит. Дослідити як змінюється виручка в залежності від попиту.

Розв'язання. Визначимо функцію виручки $u=xp=\dfrac{600x}{x+20}$, звідки

$$u'=\frac{(x+20)\cdot 600-600x}{(x+20)^2}=\frac{12000}{(x+20)^2}>0,$$

Так як, $u'>0$, то із зростанням попиту виручка зростає. Знайдемо другу похідну від функції виручки

$$u''=\left(12000(x+20)^{-2}\right)'=-24000\cdot(x+20)^3=-\frac{24000}{(x+20)^3}<0.$$

Оскільки $u''<0$, то крива функції виручки буде опуклою вверх, тому із зростанням попиту виручка зростає все повільніше.

Приклад 2.11. Нехай $K-$розміри основних фондів в період t, $Q-$ обсяг виробництва предметів споживання з допомогою основних фондів K.

Припустимо також, що розміри основних фондів пропорційні обсягу виробництва предметів споживання.

Отже,

$$K = \beta Q, \tag{2.13}$$

де $\beta -$ коефіцієнти пропорційності.

Із співвідношення (2.13) випливає, що

$$\frac{dK}{dt} = \beta \frac{dQ}{dt}. \tag{2.14}$$

Враховуючи, що приріст основних фондів за одиницю часу $\frac{dK}{dt}$ є результат капіталовкладень $I,$ остаточно отримаємо

$$I = \beta \frac{dQ}{dt}. \tag{2.15}$$

Припустимо, що обсяг виробництва предметів споживання в період $(0;t_1)$ зростає все швидше (крива опукла вниз), а з моменту t_1 починає зростати повільніше (крива опукла вверх). Таким чином, крива виробництва предметів споживання має вигляд, зображений на рис. 2.1.

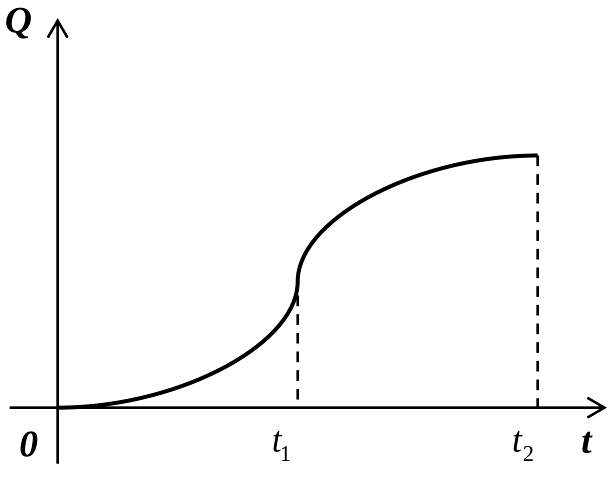


Рис. 2.1.

На інтервалі $(0;t_1)$ крива виробництва опукла вниз, тобто $\frac{\partial^2 Q}{\partial t^2} > 0,$ а це означає, що функція $\frac{dQ}{dt}$ зростає; на інтервалі $(t_1;t_2)$ крива виробництва опукла вверх, тобто $\frac{\partial^2 Q}{\partial t^2} < 0,$ а значить функція $\frac{dQ}{dt}$ спадає.

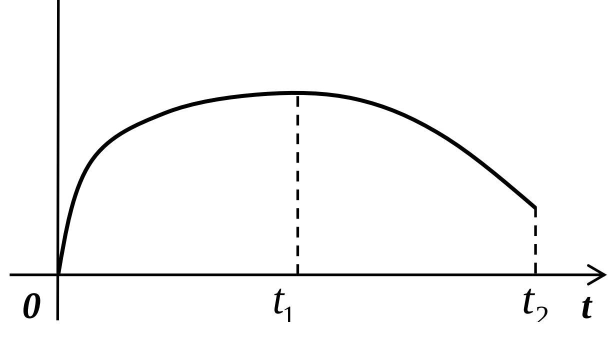


Рис. 2.2.

Отже, функцію $I = \beta \frac{d\theta}{dt}$ можна зобразити кривою, яка зображена на рис. 2.2.

Динаміка кривих виробництва предметів споживання і капіталовкладень (інвестицій), необхідних для збільшення випуску продукції, дозволяють зробити наступні висновки:

1. Якщо попит, а отже виробництво предметів споживання зростає в якомусь періоді все швидше, то зростають і капіталовкладення, а отже, і попит на засоби виробництва, необхідні для збільшення випуску предметів споживання.

Наведене положення називають принципом прискорення або принципом акселератора.

2. Якщо попит, а значить і виробництво предметів споживання з певного моменту починають зростати все повільніше, то це викликає зменшення розмірів капіталовкладень, тобто падіння попиту і на засоби виробництва.

Приклад 2.12. Через пункт A (див. рис.2.3) проходить прямолінійний залізничний шлях l. Пункт B знаходиться на відстані $d_{км}$ від шляху, причому $d < |AB|$. Планується побудувати пряму шосейну дорогу із п. B до залізничного шляху. До якої точки залізниці потрібно прокласти шосейну дорогу, щоб витрати на перевезення вантажу з п. B в п. A були мінімальними, якщо відомо, що транспортні витрати на один кілометр по перевезенню тони вантажу автотранспортом втричі більші, ніж залізницею

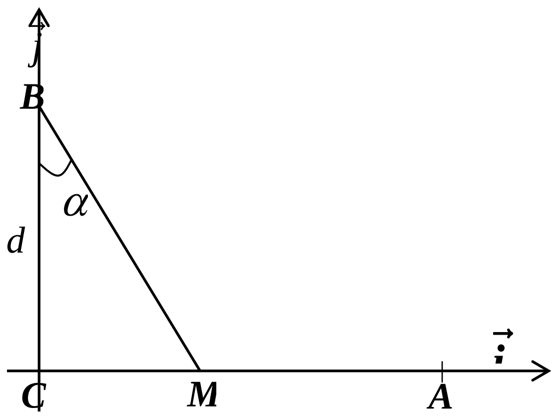


Рис.2.3

Розв'язання. Проведемо $BC \perp l, C \in l.$ Нехай відстань від A до C становить a *км*. Прямокутну систему координат виберемо так, як показано на рис. 2.3. Тоді точки A, B, C мають координати $A(a,0), B(0,b), C(0,0)$. Припустимо, що ми перевеземо вантаж автотранспортом від п. B до $M(x,0)$ – якого-небудь пункту на залізничному шляху, а потім від M до A по колії.

Якщо витрати на перевезення тони вантажу залізницею становлять k гривень за 1 км, то для автотранспорту – $3k$ гривень за 1 км.

Сумарні витрати на доставку тони вантажу з п. B в п. A складуть:

$$V = 3k \cdot |BM| + k|MA| = 3k\sqrt{d^2 + x^2} + k(a - x).$$

Дослідимо побудовану функцію $V(x)$ на мінімум.

Обчислимо першу і другу похідні:

$$V'(x)=\frac{3kx}{\sqrt{d^2+x^2}}-k=k\frac{3x-\sqrt{d^2+x^2}}{\sqrt{d^2+x^2}};$$

$$V''(x)=\left(\frac{3x-\sqrt{d^2+x^2}}{\sqrt{d^2+x^2}}\right)'=\frac{\sqrt{d^2+x^2}\left(3-\frac{x}{\sqrt{d^2+x^2}}\right)-\left(3x-\sqrt{d^2+x^2}\right)\frac{x}{\sqrt{d^2+x^2}}}{d^2+x^2}=$$

$$=\frac{3d^2}{\left(d^2+x^2\right)\sqrt{d^2+x^2}}.$$

Бачимо, що $V''(x)>0,$ тому в тих точках, де $V'(x)=0$ функція $V(x)$ досягає мінімуму. Розв'язуючи рівняння $V'(x)=0$ або $3x-\sqrt{d^2+x^2}=0,$ маємо

$$x=\frac{d}{\sqrt{8}}=\frac{d\sqrt{2}}{4}.$$

Отже, транспортні витрати будуть мінімальними, якщо шосейну дорогу прокладуть до п. M, що розташований на відстані $\frac{d\sqrt{2}}{4}$ км від п. C.

Зауваження 2.3. В розв`язанні відсутній параметр a; це означає, що завжди вигідно везти вантаж до залізничного шляху під певним кутом, незалежно від того, на яку відстань він перевозиться. Цей кут залежить лише від співвідношення витрат перевезення на 1 км автомобільним і залізничним транспортом, оскільки

$$tg\alpha=\frac{|CM|}{|BC|}=\frac{x}{d}=\frac{\frac{d\sqrt{2}}{4}}{d}=\frac{\sqrt{2}}{4}.$$

Якщо із пункту B вивозяться великі партії вантажів і до нього неможливо провести залізничного шляху (наприклад до кар'єру чи каменоломні, то в пункті M доцільно побудувати перевантажувальну станцію для обслуговування перевезень з місцевості B.

Зауваження 2.4. При розв`язанні даної задачі використано метод координат (аналітична геометрія) для побудови моделі і методи диференціального числення для її аналізу.

Приклад 2.13. Припустимо, що вантаж необхідно перевезти від A до B причому перевезення здійснюється від A до берега моря $\left(A_1B_1\right)$ по суходолу, а від узбережжя – морем до B. Відстань від A до узбережжя $\left(AA_1\right)$ дорівнює a км, а від B до берега моря $\left(BB_1\right)$ b км, відстань A_1B_1 – c км. (рис. 2.4).

Нехай витрати по сухопутних перевезеннях складають m гривень на 1 км, а по морським – n гривень на 1 км, причому $n < m$. Розрахувати якою дорогою слід везти вантаж, щоб транспортні видатки були найменшими.

Розв`язання. Як і в попередній задачі введемо прямокутну декартову систему координат, так як показано на рис. 2.4., тоді $A(0,a)$, $B(c,-b)$, $B_1(c,0)$. Виберемо на узбережжі пункт $M(x,0)$ і запишемо транспортні видатки при перевезенні вантажу шляхом AMB у вигляді функції від x та дослідимо цю функцію на мінімум.

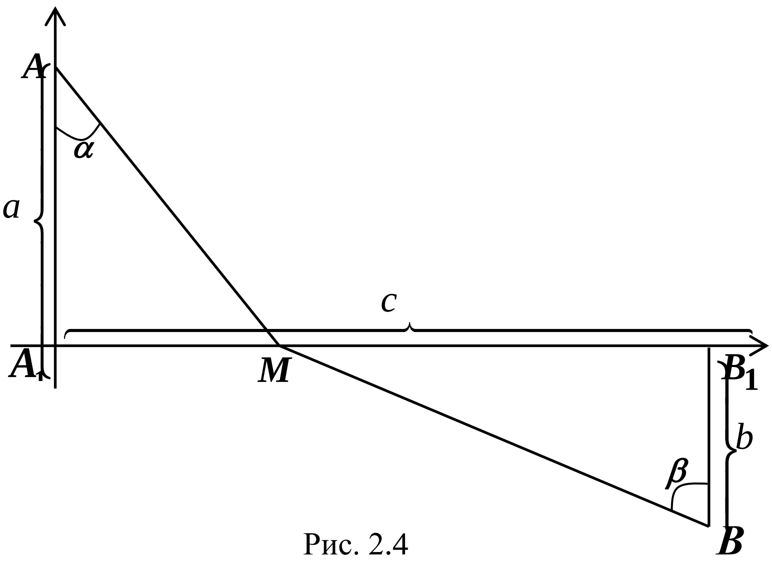


Рис. 2.4

Отже, транспортні видатки складають:

$$V(x) = m|AM| + n|MB| = m\sqrt{a^2 + x^2} + n\sqrt{(c-x)^2 + b^2}.$$

Застосовуємо вже знайомі нам методи розрахунку і отримаємо:

$$V'(x) = \frac{mx}{\sqrt{x^2 + a^2}} + \frac{-n(c-x)}{\sqrt{(c-x)^2 + b^2}}, \qquad V'(x) = 0,$$

тоді

$$\frac{mx}{\sqrt{x^2 + a^2}} = \frac{n(c-x)}{\sqrt{(c-x)^2 + b^2}};$$

звідки

$$\frac{x}{\sqrt{x^2 + a^2}} : \frac{c-x}{\sqrt{(c-x)^2 + b^2}} = \frac{n}{m},$$

або (див. рис. 2.4) $\sin\alpha : \sin\beta = n : m.$

Оскільки $V''(x) = m\dfrac{a^2}{(a^2 + x^2)^{3/2}} + n\dfrac{b^2}{((c-x)^2 + b^2)^{3/2}} > 0$, то в точці, де перша похідна дорівнює нулю, функція витрат $V(x)$ досягає мінімуму.

Отже, ми прийшли до висновку, що вартість змішаних сухопутно–морських перевезень мінімальна у випадку, якщо маршрут вибрано так, що синуси кутів нахилу ліній маршруту до ліній, які перпендикулярні берегу, обернено пропорційні транспортним витратам.

Зауваження 2.5. Якщо б задача формулювалась не про мінімум витрат, а про мінімум часу на перевезення, розв`язок був би аналогічний з тією лише різницею, що замість відношення транспортних витрат n/m слід було б взяти відношення часу перевезення на 1 км по морю і по суші. Оскільки час обернено пропорційний швидкості, то позначивши V_A – швидкість руху по суші, а через V_B – по морю можна було б записати: $\sin\alpha : \sin\beta = V_A : V_B$.
Це відомий фізичний закон швидкості проходження світла через два різних середовища.

2.4. ДОСЛІДЖЕННЯ ФУНКЦІЇ ТА ПОБУДОВА ЇЇ ГРАФІКА

Приклад 2.14. Дослідити функцію $y = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}$ і побудувати її графік.

(Дана функція широко використовується в теорії ймовірностей, для неї прийняте позначення $\varphi(x)$, а її графік називають кривою Гауса).

Розв'язання.

1) Функція визначена в інтервалі $(-\infty;+\infty)$. Для $\forall x \in R \quad y(x) > 0$ (як і для будь-якої показникової), тому графік функції розміщений вище осі OX.

2) Функція парна, оскільки $y(-x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(-x)^2}{2}} = y(x)$, отже, графік функції симетричний відносно осі OY. Тому дослідження можна проводити тільки для $x \in [0;+\infty)$.

3) Знаходимо першу похідну:

$y' = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}, (-x) = y(x)\cdot(-x)$. Із рівняння $y'(x) = 0$ маємо $x = 0 \left(e^{-\frac{x^2}{2}} \neq 0 \right)$. При переході через т. $x = 0$ y' змінює знак з “+” на “-“, отже, в цій точці функція досягає максимуму: $y_{\max} = y(0) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \approx 0.4$; в інтервалі $(-\infty;0)$ функція зростає, $(0;+\infty)$ – спадає.

4) Знаходимо $y''(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\left(x^2 - 1\right) e^{-\frac{x^2}{2}}$. Із рівняння $y'' = 0$ маємо $x^2 - 1 = 0$, тобто $x = \pm 1$.

$y''(x) < 0$, якщо $x^2 - 1 < 0, -1 < x < 1,$ а, значить, на цьому інтервалі графік функції опуклий вверх; $y'' > 0$, якщо $x^2 - 1 > 0$, тобто при $x < -1$ або $x > 1-$ графік функції опуклий вниз.

Отже, для $x = \pm 1$ графік функції має точку перегину, ордината якої дорівнює $y = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}} \approx 0{,}242$.

5) Вертикальних асимптот графік немає, оскільки функція неперервна на всій числовій осі. Вісь OX є горизонтальною асимптотою, оскільки $\lim\limits_{x \to \pm\infty} y(x) = \lim\limits_{x \to \pm\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \lim\limits_{x \to \pm\infty} \frac{1}{e^{\frac{x^2}{2}}} = 0.$

Так як крива має двосторонню горизонтальну асимптоту $y = 0$ (при $x \to -\infty$ та $x \to +\infty$), то в неї не може бути похилих асимптот.

6) Графік не перетинає осі OX, оскільки він розміщений вище неї. Точку перетину графіка з віссю OY знайдемо, покладаючи $x = 0$, звідки $y = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}$.
7) Використовуючи результати дослідження, будуємо графік функції (рис.2.5).

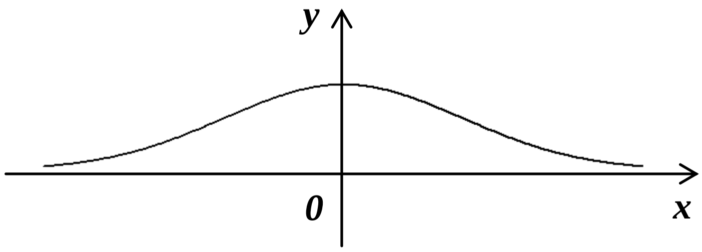


Рис. 2.5

2.5. ОПТИМІЗАЦІЯ ОПОДАТКУВАННЯ ПІДПРИЄМСТВА

Розглянемо економічну ситуацію щодо дій уряду держави з оподаткування підприємств і фірм та визначимо, як пов'язані прибуток фірми та обсяг податків, що надходять державі від заданої податкової ставки. Нехай ціна на продукцію $p(q) = a - bq, a > 0$ та $b > 0,$ тобто лінійно зменшується зі збільшенням обсягу готової продукції на ринку, а витрати $C = C(q)$ залежать від обсягу продукції q, таким чином: $C(q) = cq^2 + dq + e,$ де $a, b, c, d, e -$ деякі додатні числа. Нехай податок є акцизом зі ставкою $t,$ тобто з кожної проданої одиниці товару держава отримує податок $t,$ і податкова сума становить $T = tq.$

Тоді фірма має прибуток

$$P(q) = pq - C(q) - T = q(a - bq) - cq^2 - dq - e - tq.$$

Для того щоб максимізувати прибуток, фірма шукає оптимальний обсяг виробництва. Обчислимо похідну функції прибутку:

$$P'(q) = a - 2bq - 2cq - d - t = a - d - t - 2q(b + c).$$

Перевіримо необхідні умови екстремуму. Для цього прирівняємо до нуля похідну функції прибутку: $P'(q) = 0,\ 2q(b + c) = a - d - t.$ Дістанемо критичну точку:

$$q^* = \frac{a - d - t}{2(b + c)}.$$

Оскільки $P''(q) = -2(b + c) < 0,$ то згідно з достатніми умовами локального екстремуму, q^* – справді точка максимуму.

Оскільки $t > 0,$ то така податкова ставка призводить до зниження оптимального випуску продукції.

Для прогнозування дій уряду зі встановлення податкової ставки t обчислимо податковий дохід держави:

$$T = tq = \frac{t(a - d - t)}{2(b + c)} = \frac{-t^2}{2(b + c)} = \frac{(a - d)t}{2(b + c)} = \frac{1}{2(b + c)}\left[-t^2 + (a - d)t\right],$$

тобто в даній країні крива доходів держави є параболою вітки якої напрямлені вниз (див. рис. 2.6).

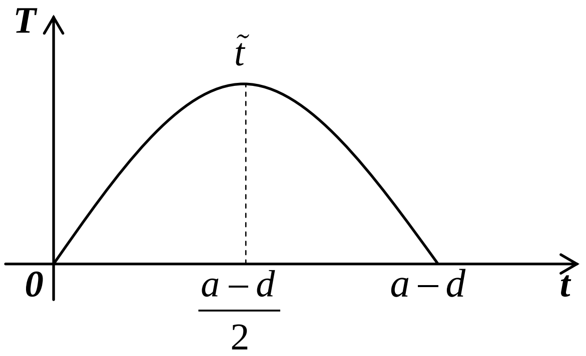


Рис. 2.6

Знайшовши похідну $T' = \frac{1}{2(b + c)}\left[-2t + (a - d)\right],$ визначимо критичні точки з умови $T' = 0,$ тобто $2t = a - d,\ t = \frac{a - d}{2}.$

Оскільки друга похідна $T'' = \frac{-1}{(b + c)} < 0,$ то максимум досягається при $t^* = \frac{a - d}{2}$ і становить

$$T^* = t^* q^* = \frac{1}{2(b + c)}\left[-\frac{(a - d)^2}{4} + \frac{(a - d)^2}{2}\right] = \frac{(a - d)^2}{8(b + c)}.$$

Оптимальний випуск продукції при цьому значенні t^* становить $q_1 = \dfrac{a-d}{4(b+c)}$, і відповідний прибуток фірми $P(q_1) = \dfrac{(a-d)^2}{16(b+c)} - e.$

Взагалі прибуток фірми за податкової ставки t дорівнює

$$P(q^*) = \frac{(a-d-t)^2}{4(b+c)} - e,$$

звідки випливає, що зі збільшенням податкової ставки t прибуток фірми зменшується, якщо $0 \le t \le a-d,$ та існує область значень податкової ставки при $t \ge \tilde{t} = a-d-\sqrt{4e(b+c)},$ в якій прибуток фірми від'ємний, хоча доходи держави додатні. Це відбувається тому, що за критерії вибору обсягу випуску було взято максимум прибутку фірми, але не було обумовлено, що цей максимум має бути додатним.

Якщо вважати, що при $t \ge \tilde{t}$ випуск продукції справді стане нульовим, то дохід держави при $t \ge \tilde{t}$ також дорівнюватиме нулю. Тому зрозуміло, що вже біля $\tilde{t}$ відбувається різке скорочення ділової активності.

Приклад 2.15. Нехай $t-$ податкова ставка. Відомі функція доходу $R(q) = 16q - q^2$ і функція витрат $C(q) = q^2 + 1$ фірми. Визначимо, яким має бути податок $t,$ щоб сумарний податок T з усієї продукції був найбільшим.

Запишемо функцію прибутку фірми $P(q) = R(q) - C(q) - T.$ У нашому випадку

$$P(q) = 16q - q^2 - q^2 - 1 - tq = 16q - 2q^2 - tq - 1.$$

З'ясуємо, при якому значенні q функція прибутку набуває максимального значення. Оскільки необхідна умова максимуму прибутку $P'(q) = 0,$ то $P'(q) = 16 - 4q - t.$ Розв'яжемо рівняння $16 - 4q - t = 0,$ або $4q = 16 - t.$ Отже, $q^* = 4 - \dfrac{t}{4}.$ Оскільки $P''(q) = -4 < 0,$ то q^*- точка максимуму. Отже, оптимальний обсяг $q^* = q_{\text{опт}}.$

Підставимо добуте значення обсягу продукції у вираз сумарного доходу:

$$T = q^* t = t\left(4 - \frac{4}{t}\right) = 4t - \frac{1}{4}t^2.$$

і, своєю чергою, знайдемо умови, за яких T буде максимальним.

Обчислимо похідну: $T' = 4 - \dfrac{1}{2}t.$ Знаходимо стаціонарні точки: $T' = 0.$ Дістанемо $4 - \dfrac{1}{2}t = 0, t = 8.$ Тоді $q^* = 4 - \dfrac{8}{4} = 4 - 2 = 2.$

Обчислимо максимальний прибуток фірми:

$$P_{\max} = P(q_{\text{опт}}) = 16\cdot 2 - 2\cdot 2^2 - 8\cdot 2 - 1 = 32 - 8 - 16 - 1 = 7.$$

Оптимальний з погляду податкового законодавства акцизний податок $T_{\text{опт}} = 2\cdot 8 = 16.$

Цікаво порівняти ці цифри з цифрами в разі відсутності оподаткування. При $t = 0$ розв'язок задачі на знаходження максимуму функції прибутку дав би такі результати: $q_{\text{опт}} = 4, P_{\max} = 31.$

Отже, зменшення оподаткування стимулює збільшення випуску продукції й сприяє збільшенню прибутку від її реалізації. Зрозуміло, чому виробники докладають стільки зусиль, щоб знизити податкову ставку.

2.6. ВПРАВИ ДО РОЗДІЛУ 2

Завдання 2.1.

Підприємство планує освоїти випуск нового виду продукції. Маркетинговою службою підприємства було встановлено залежність споживчого попиту x на цю продукцію (в місяць) стосовно ціни p за виріб*:* $x = f(p)$. Витрати виробництва x одиниць продукції в місяць визначаються функцією $C = C(x)$. Знайти оптимальний місячний обсяг випуску нового виду продукції підприємства та який прибуток при цьому слід очікувати та визначити ціну одиниці продукції при такому обсязі виробництва.

1. $f(p) = 30000 - 80p;\ C(x) = 120000 + 205x + 0{,}0075x^2.$
2. $f(p) = 20000 - 125p;\ C(x) = 15000 + 120x + 0{,}002x^2.$
3. $f(p) = 6000 - 20p;\ C(x) = 25000 + 120x + 0{,}04x^2.$
4. $f(p) = 40000 - 100p;\ C(x) = 150000 + 250x + 0{,}0025x^2.$
5. $f(p) = 60000 - 400p;\ C(x) = 10500 + 130x + 0{,}0015x^2.$
6. $f(p) = 145000 - 250p;\ C(x) = 1500000 + 230x + 0{,}001x^2.$
7. $f(p) = 15500 - 50p;\ C(x) = 3270 + 275x + 0{,}015x^2.$
8. $f(p) = 180000 - 160p;\ C(x) = 850000 + 835x + 0{,}00375x^2.$
9. $f(p) = 155000 - 200p;\ C(x) = 1000000 + 325x + 0{,}003x^2.$
10. $f(p) = 12000 - 40p;\ C(x) = 7000 + 218x + 0{,}016x^2.$
11. $f(p) = 120000 - 320p;\ C(x) = 580000 + 175x + 0{,}001875x^2.$
12. $f(p) = 5425 - 25p;\ C(x) = 27500 + 107x + 0{,}01x^2.$
13. $f(p) = 3200 - 16p;\ C(x) = 2100 + 155x + 0{,}0275x^2.$
14. $f(p) = 4000 - 32p;\ C(x) = 400 + 105x + 0{,}01875x^2.$
15. $f(p) = 2400 - 10p;\ C(x) = 240 + 200x + 0{,}025x^2.$

16. $f(p)=140000-400p;\ C(x)=150000+270x+0{,}0015x^2.$

17. $f(p)=12000-80p;\ C(x)=4000+120x+0{,}0025x^2.$

18. $f(p)=4800-16p;\ C(x)=2000+240x+0{,}0125x^2.$

19. $f(p)=6400-32p;\ C(x)=500+160x+0{,}00875x^2.$

20. $f(p)=16000-125p;\ C(x)=1500+88x+0{,}012x^2.$

21. $f(p)=64000-160p;\ C(x)=20000+260x+0{,}00075x^2.$

22. $f(p)=1200-10p;\ C(x)=500+70x+0{,}15x^2.$

23. $f(p)=10400-50p;\ C(x)=4500+158x+0{,}005x^2.$

24. $f(p)=3425-25p;\ C(x)=1500+87x+0{,}01x^2.$

25. $f(p)=10500-20p;\ C(x)=25000+325x+0{,}05x^2.$

26. $f(p)=16400-40p;\ C(x)=2000+350x+0{,}025x^2.$

27. $f(p)=125000-250p;\ C(x)=145000+370x+0{,}001x^2.$

28. $f(p)=64000-320p;\ C(x)=10000+140x+0{,}006875x^2.$

29. $f(p)=175000-200p;\ C(x)=205000+525x+0{,}02x^2.$

30. $f(p)=30000-100p;\ C(x)=35000+220x+0{,}0025x^2.$

Завдання 2.2.

Крива повних витрат задається формулою $K=f(x)$ ($x-$ обсяг виробництва).

1. Обчислити при якому обсязі виробництва середні витрати будуть мінімальними.
2. Знайти еластичність повних витрат і еластичність середніх витрат та оцінити різницю між ними.
3. Довести (для загального випадку), що еластичність середніх витрат на одиницю менше еластичності повних витрат.

Вказівка. Функцією середніх або питомих витрат називається функція виду

$$\Pi(x)=\frac{K}{x}=\frac{f(x)}{x}.$$

1. $f(x)=x^3-6x^2+15x$.
2. $f(x)=x^3-4x^2+10x$.
3. $f(x)=2x^3-12x^2+35x$.
4. $f(x)=x^3-8x^2+26x$.
5. $f(x)=0.5x^3-7x^2+30x$.
6. $f(x)=3x^3-12x^2+20x$.
7. $f(x)=0.25x^3-4x^2+25x$.
8. $f(x)=2x^3-32x^2+135x$.
9. $f(x)=x^3-10x^2+30x$.
10. $f(x)=0.0625x^3-x^2+40x$.
11. $f(x)=4x^3-32x^2+67x$.
12. $f(x)=0.3x^3-3x^2+15x$.

13. $f(x)=5x^3-10x^2+8x$.
14. $f(x)=0.125x^3-3x^2+25x$.
15. $f(x)=x^3-16x^2+70x$.
16. $f(x)=0.75x^3-3x^2+5x$.
17. $f(x)=4x^3-32x^2+145x$.
18. $f(x)=0.1x^3-3x^2+27x$.
19. $f(x)=3x^3-24x^2+50x$.
20. $f(x)=0.5x^3-9x^2+47x$.
21. $f(x)=x^3-14x^2+55x$.
22. $f(x)=0.25x^3-5x^2+37x$.
23. $f(x)=1.1x^3-11x^2+34x$.
24. $f(x)=0.7x^3-14x^2+75x$.
25. $f(x)=2x^3-16x^2+35x$.
26. $f(x)=3x^3-18x^2+32x$.
27. $f(x)=0.125x^3-2x^2+12x$.
28. $f(x)=x^3-4x^2+5x$.
29. $f(x)=4x^3-24x^2+45x$.
30. $f(x)=5x^3-20x^2+40x$.

Завдання 2.3.

1. Завод D потрібно сполучити шосейного дорогою з прямолінійним відрізком залізниці, на якій розташоване місто A. Віддаль від заводу до найближчої точки B на залізниці дорівнює 40 км. Відстань від міста до цієї точки B на залізниці дорівнює 200 км. Вартість перевезення по шосе в $\sqrt{5}$ разів вища, ніж залізницею. В яку точку C залізниці слід прокласти шосейну дорогу, щоб вартість перевезення була найменшою?
2. Посудина, яка складається з циліндра, що закінчується знизу півсферою, повинна вміщувати 18 л води. Знайти розміри посудини, при яких на її виготовлення піде найменше матеріалу.
3. Із листкового заліза з найменшою витратою матеріалу виготовлено бак циліндричної форми (без кришки) місткість V. Які розміри бака?
4. Поперечний переріз відкритого каналу має форму рівнобедреної трапеції. При якому нахилі φ боків «мокрий периметр» перерізу буде найменшим, якщо площа «живого перерізу» води в каналі рівна S, а рівень води дорівнює h?
5. Якими мають бути розміри ящика з кришкою місткістю $V=1764см^3$, сторони основи якого відноситься як 3:4, щоб на його виготовлення пішло найменше матеріалу?
6. Довжина відкритого басейну об'ємом 288 м^2 вдвічі більша за ширину. Якими мають бути розміри басейну, щоб його облицювання пішло найменше матеріалу?
7. Ціна алмаза, за інших однакових умов, пропорційна квадрату його маси. Ціна алмаза в 1 карат становить a грн. Показати, що найменша вартість двох алмазів загальною масою в 4 карати становить за тих самих умов $8a$ грн.
8. Канал, ширина якого a м, під прямим кутом впадає в другий канал завширшки b м. Якої найбільшої довжини банки можна сплавляти цією системою каналів?
9. Селища A та B розташовані по різні сторони річки (на певних відстанях від неї) з прямими паралельними берегами. Де треба збудувати міст MN

(перпендикулярно до берегів річки), щоб дорога *AMNB* була найкоротшою?

10. На прямому березі моря треба відгородити парканом прямокутну ділянку під ігровий майданчик. Є матеріал для огорожі завдовжки 300 м. Як відгородити ділянку найбільшої площі?
11. Треба побудувати кілька однакових житлових будинків загальною площею 40000 $м^2$. Витрати на будівництво одного будинку житловою площею S складаються з вартості фундаменту, пропорційної $\sqrt{S}$, і вартості наземної частини пропорційної $S\sqrt{S}$. При будівництві будинку житловою площею 400 $м^2$ 80% витрат йде на будівництво фундаменту. Скільки треба збудувати будинків, щоб витрати були найменшими?
12. Знайти найкращий варіант виготовлення консервної банки заданого об'єму V, що має форму прямого кругового циліндра і найменшу поверхню (на її виготовлення має піти найменша кількість матеріалу).
13. Для конструкторського бюро будується зал у формі прямокутного паралелепіпеда, одна з граней якого повинна бути виготовлена із скла, а решта із звичайного матеріалу. Висота залу повинна складати 4 м, а площа – 80 $м^2$. Відомо, що 1 $м^2$ скляної стіни коштує 75 грн., а звичайної 50 грн. Якими повинні бути розміри залу, щоб загальна вартість всіх стін була найменшою?
14. Прямокутну ділянку площею 900 $м^2$ необхідно обгородити парканом, дві суміжні сторони якого камінні, а дві інші – дерев'яні. Один погонний метр дерев'яного паркану коштує 40 грн., а кам'яного – 100грн. На будівництво огорожі виділено 8000 грн. Чи вистачить цих коштів?
15. Потрібно виготовити відкритий циліндричний бак місткістю V $м^3$.Вартість1 $м^2$матеріалу, з якого виготовляється дно бака, становить p_1 грн., а вартість 1 $м^2$ матеріалу, який йде на стінки бака $-p_2$ грн. Приякому відношенні радіуса дна до висоти бака витрати на матеріал будуть мінімальними?
16. На сторінці книги надрукований текст (разом з проміжками між рядками) повинен займати 216 $см^2$. Верхня і нижня основи поля мають бути по 3 см, праве і ліве поле по 2 см. Якими повинні бути розміри сторінки для того, щоб її площа була найменшою?
17. Треба поставити намет заданого об’єму , який має форму прямого кругового конуса. Знайти відношення висоти конуса до радіуса його основи, при якому на намет піде найменше матеріалу.
18. Витрати на паливо для пароплава діляться на дві частини. Перша із них не залежить від швидкості і рівна 480 грн. на годину. А друга частина витрат пропорційна кубу швидкості,при швидкості 10 км/год ця частина витрат рівна 30 грн. на годину. При якій швидкості загальна сума витрат на 1 км шляху буде найменшою?

19. Із відходів основного виду виробництва, якими є бляшані листи прямокутної форми з сторонами 80 см і 50 см, роблять відкриті зверху

ящики, вирізавши по кутах ріні квадратики і загнувши смужки, що залишились. При яких розмірах вирізаних квадратиків виготовляють ящики найбільшого об'єму?

20. Промислове підприємство необхідно розмістити над річкою з прямим берегом. Сировинна база підприємства та пункт збуту розташовані по одну сторону річки на відстанях a та b від неї відповідно. Відома також відстань c між сировинною базою та пунктом збуту. Розрахувати, в якій точці над річкою слід розмістити підприємство, щоб транспортні витрати були мінімальним.
21. Вікно магазину має форму прямокутника, що закінчується півкругом. Периметр фігури рівний 15 м. При якому радіусі півкруга вікно буде пропускати максимальну кількість світла.
22. Знайти найменшу зовнішню поверхню котла, що складається з циліндра, який закінчується двома півсферами, із стінками сталої товщини при заданому об’ємі .
23. На відстані $AB = b$ від прямолінійної магістралі ON водопроводу знаходиться будинок B. Точка A є проекцією точки В на пряму MN, $OA = a$. Від якого пункту P магістралі треба зробити прямолінійне відгалуження PB, щоб провести воду в будинок якомога дешевше вважаючи ,що вартість одиниці довжини водопроводу за напрямками OP і PB буде відповідно k_1 і k_2 грн.(k_2>k_1).
24. Два міста з числом жителів 150 тис. і 100 тис., розташовані відповідно на 10-му та 18-му кілометрах автостради слід побудувати медичний заклад по обслуговуванню населення цих міст, щоб загальні витрати по перевезенню людей були мінімальними, якщо ці витрати пропорційні як кількості населення, так і відстані від міста до медичного закладу?
25. Колода довжиною 20 м має форму зрізаного конуса, діаметри основ якого дорівнюють 2 м і 1 м. Потрібно вирубати із колоди балку з квадратним поперечним перерізом, вісь якої співпадала б з віссю колоди, а об’єм був би найбільшим. Якими повинні бути розміри балки?
26. Довести, що з усіх прямокутних земельних ділянок заданої площі a^2 квадратна має найменший периметр.
27. При n вимірюваннях невідомої величини A одержано n значень: $x_1, x_2, \ldots, x_n$. Часто покладають за значення невідомої величини A таке число x,що сума квадратів відхилень його від : $x_1, x_2, \ldots, x_n$, має найменше значення. Знайти x, яке задовольняє цій вимозі.
28. Потрібно виготовити конічну воронку з твірною що дорівнює 20 см. Якою повинна бути висота воронки, щоб її об’єм був найбільшим?
29. Довести, що конічне шатро даного об’єму потребує найменшої кількості матерії, якщо його висота в $\sqrt{2}$ рази більша радіуса основи.
30. Смуга бляхи шириною a , яка має прямокутну форму, повинна бути зігнута у вигляді відкритого кругового циліндричного жолоба так, щоб його переріз мав форму сегмента. Яким повинен бути центральний кут φ, який

спирається на дугу цього сегмента, щоб місткість жолоба була найбільшою?

Завдання 2.4.

Дослідити функції та побудувати їх графіки.

1) а) $y=\dfrac{2x^2+x+3}{x+6}$; б) $y=\dfrac{1}{3e^{-x}+0.1}$ (логістична крива);

2) а) $y=\dfrac{x^3}{2(x+1)^2}$; б) $y=\dfrac{1}{5e^{-2x}+0.7}$ (логістична крива);

3) а) $y=\dfrac{x^3}{x^2+2x+3}$; б) $y=\dfrac{8}{7e^{-3x}+1}$ (логістична крива);

4) а) $y=\dfrac{x^2-2x+2}{x-1}$; б) $y=\dfrac{16}{2e^{-x}+4}$ (логістична крива);

5) а) $y=\dfrac{x^2-1}{x^4}$; б) $y=\dfrac{5}{3e^{-x}+1}$ (логістична крива);

6) а) $y=\dfrac{x^3}{3-x^2}$; б) $y=\dfrac{1}{5e^{-4x}+0.25}$ (логістична крива);

7) а) $y=\dfrac{x^2-5}{x-3}$; б) $y=\dfrac{12}{e^{-0.5x}+4}$ (логістична крива);

8) а) $y=\dfrac{x^2+2x-3}{x}$; б) $y=\dfrac{15}{2e^{-2x}+5}$ (логістична крива);

9) а) $y=\dfrac{1+x^2}{1-x^2}$; б) $y=\dfrac{14}{4e^{-x}+2}$ (логістична крива);

10) а) $y=\dfrac{8-x^3}{x^2}$; б) $y=\dfrac{25}{2e^{-2x}+5}$ (логістична крива);

11) а) $y=\dfrac{x^2-6x+3}{x-3}$; б) $y=\dfrac{1}{3\sqrt{2\pi}}\,e^{-\frac{(x-1)^2}{18}}$ (крива Гауса);

12) а) $y=\dfrac{x^5}{x^4-1}$; б) $y=\dfrac{1}{2\sqrt{2\pi}}\,e^{-\frac{(x-3)^2}{8}}$ (крива Гауса);

13) а) $y=\dfrac{2x^2-9}{x+2}$; б) $y=\dfrac{1}{\sqrt{2\pi}}\,e^{-\frac{(x-5)^2}{2}}$ (крива Гауса);

14) а) $y=\dfrac{x^2-1}{x^2-5x+6}$; б) $y=\dfrac{1}{2\sqrt{2\pi}}\,e^{-\frac{(x-2)^2}{32}}$ (крива Гауса);

15) а) $y=\dfrac{x^4}{(1+x)^3}$; б) $y=\dfrac{1}{\sqrt{6\pi}}\,e^{-\frac{(x-4)^2}{6}}$ (крива Гауса);

16) а) $y=\dfrac{4x}{x^2+1}$; б) $y=\dfrac{1}{\sqrt{4\pi}}\,e^{-\frac{(x-2.5)^2}{4}}$ (крива Гауса);

17) а) $y=\dfrac{x^2-4x-5}{(x-2)^2}$; б) $y=\dfrac{1}{\sqrt{10\pi}}\,e^{-\frac{(x-3)^2}{10}}$ (крива Гауса);

18) а) $y=\dfrac{1}{x^2-9}$; б) $y=\dfrac{1}{\sqrt{2\pi}}\,e^{-\frac{(x-7)^2}{2}}$ (крива Гауса);

19) а) $y=\dfrac{1-x^3}{x^2}$; б) $y=\dfrac{1}{2\sqrt{\pi}}\,e^{-\frac{(x-5,5)^2}{4}}$ (крива Гауса);

20) а) $y=\dfrac{4}{x^2-2x+1}$; б) $y=\dfrac{1}{\sqrt{12\pi}}\,e^{-\frac{(x-3)^2}{12}}$ (крива Гауса);

21) а) $y=\dfrac{3x^3}{x^2-9}$; б) $y=e^{-12(0,1)^x+2}$ (крива Гомперця);

22) а) $y=\dfrac{x^2+4x-4}{x^2-3x+2}$; б) $y=5\,e^{-6(0,2)^x}$ (крива Гомперця);

23) а) $y=\dfrac{3x^3}{3x^2+2x+1}$; б) $y=7\,e^{-4(0,3)^x}$ (крива Гомперця);

24) а) $y=\left(\dfrac{x-1}{x+1}\right)^3$; б) $y=e^{-3(0,9)^x+3}$ (крива Гомперця);

25) а) $y=\dfrac{x}{-2x^2+x+1}$; б) $y=e^{-5(0,4)^x+ln7}$ (крива Гомперця);

26) а) $y=\dfrac{x^2+x+1}{x^2-x+1}$; б) $y=e^{-7(0,2)^x+ln5}$ (крива Гомперця);

27) а) $y=\dfrac{3x^3-1}{x^2-4}$; б) $y=e^{-10(0,7)^x+ln9}$ (крива Гомперця);

28) а) $y=\dfrac{8(x^3+x)}{(2x+1)^3}$; б) $y=e^{-7(0,2)^x+ln4}$ (крива Гомперця);

29) а) $y=\dfrac{x^2+x}{x^2-3x+2}$; б) $y=e^{-8(0,3)^x+1}$ (крива Гомперця);

30) а) $y=\dfrac{2x^2-1}{x^2-1}$; б) $y=9\,e^{-3(0,5)^x}$ (крива Гомперця).

ЛІТЕРАТУРА

1. Барковський В.В., Барковська Н.В. Математика для економістів: Вища математика. – К.: Національна академія управління, 1997. – 397с.
2. Бугір М.К. Математика для економістів. – Навчальний посібник. Тернопіль: Підручники і посібники, 1998. – 192с.
3. Лук'яненко І.Г., Красникова Л.А. Економетрика. — Київ: Знання, 1998. – 494с.
4. Васильченко І. П. Вища математика для економістів. – К.: Кондор, 2012. – 607 с.
5. Вэриан Х. Р. Микроэкономика. Промежуточныйуровень. Современныйподход. М.: ЮНИТИ, 1997. – 768с.
6. Грисенко М. В. Математика для економістів: Методи й моделі, приклади й задачі. – К.: Либідь, 2007. – 720 с.
7. Дубовик В. П., Юрик І. І. Вища математика. – К: А.С.К., 2005. – 648 с.
8. Неміш В.М., Процик А.І., Березька К.М. Вища математика (практикум): Навчальний посібник, – Тернопіль: Економічна думка, 2001. – 258с.
9. Рудницький В.Б. Вища математика у вправах і задачах: Навчальний посібник для студентів економічних та технологічних спеціальностей вузів. – Хмельницький: ТУП, 1999. – 104с.
10. Рудницький В.Б., Делей В.І. Вища математика: Навчальний посібник. – Хмельницький: Поділля, 1999. – 310с.

ДЛЯ НОТАТОК