Міністерство освіти і науки України
Тернопільський національний технічний університет
імені Івана Пулюя

Кафедра математичних методів в інженерії

ВСТУП ДО МАТЕМАТИЧНОГО АНАЛІЗУ В КУРСІ ВИЩОЇ МАТЕМАТИКИ

Навчальний посібник

для студентів інженерних спеціальностей
денної та заочної форм навчання
галузі знань 12 «Інформаційні технології»
освітнього рівня «бакалавр»

Тернопіль
2022

УДК 51-3
В 84

Укладачі:

Кривень В.А., доктор фіз.- мат. наук, професор,
Цимбалюк Л.І., канд. фіз. - мат. наук, доцент,
Валяшек В.Б., канд. фіз. - мат. наук, доцент

Рецензент:

Михайлишин М.С., канд. фіз. - мат. наук, професор

Навчальний посібник розглянуто й затверджено на засіданні
кафедри математичних методів в інженерії
Тернопільського національного технічного університету імені Івана Пулюя
Протокол № 7 від 15.03.2022 р.

Схвалено та рекомендовано до друку на засіданні науково методичної комісії
факультету комп'ютерно-інформаційних систем і програмної інженерії
Тернопільського національного технічного університету імені Івана Пулюя
Протокол №4 від 14.04.2022 р.

В 84 Вступ до математичного аналізу в курсі вищої математики: навчальний посібник для студентів інженерних спеціальностей усіх форм навчання галузі знань 12 «Інформаційні технології» освітнього рівня «бакалавр» / Укладачі: Кривень В.І., Цимбалюк Л.І., Валяшек В.Б.. – Тернопіль : 2022. – 48 с.

УДК 51-3

З М І С Т

1. ОСНОВИ МАТЕМАТИКИ

Математика, як і інші науки, не могла виникнути і не може розвиватися без мови людини. Але строгість жодної з мов не є достатньою для математики. Потребам забезпечення коректності викладу міркувань, однозначності та несуперечливості тверджень служить **математична логіка**[1], виклад елементів якої подаємо у цьому розділі.

1.1. Елементи математичної логіки

Первісними поняттями математики, які не вводяться за допомогою означення, є **множина**, **істинність**, **хибність**. Їх вважатимемо зрозумілими інтуїтивно.

Під **висловлюванням** розуміють фразу, виражену мовою людини (українською, англійською, іншою), щодо якої однозначно можна зробити висновок про її істинність чи хибність.

Наприклад, «2>1», «Серет – річка » – істинні висловлювання, а «$\sqrt{2}$ – раціональне число», «Тернопіль – столиця України» – хибні. Фрази «котра година?», «Намалюй мені море!» – не є висловлюваннями.

Подібно, як з чисел за допомогою арифметичних дій складають числові вирази, із висловлювань за допомогою логічних операцій утворюють логічні вирази. Основними логічними операціями є: **заперечення** ($\neg A$ «не А»), **диз'юнкція** ($A \vee B$ – логічне „або”), **кон'юнкція** ($A \wedge B$ – логічне „і”), **імплікація** ($A \Rightarrow B$ – логічне слідування), **еквіваленція** ($A \Leftrightarrow B$ – логічна рівність). Означення цих понять подано в таблицях, у яких істинність та хибність позначено літерами «*і*» та «*х*» відповідно.

A	B	$A \vee B$
i	*i*	*i*
i	*x*	*i*
x	*i*	*i*
x	*x*	*x*

A	B	$A \wedge B$
i	*i*	*i*
i	*x*	*x*
x	*i*	*x*
x	*x*	*x*

A	B	$A \Rightarrow B$
i	*i*	*i*
i	*x*	*x*
x	*i*	*i*
x	*x*	*i*

A	B	$A \Leftrightarrow B$
i	*i*	*i*
i	*x*	*x*
x	*i*	*x*
x	*x*	*i*

A	$\neg A$
i	*x*
x	*i*

[1] Основи математичної логіки заклав Буль (Boole) Джордж – ірландський математик (1815 – 1864). Математичну логіку повсюдно застосовують у прикладних науках, зокрема у програмуванні.

Для логічних операцій уведено такий порядок (пріоритет) їхнього виконання: заперечення, кон'юнкції, диз'юнкції, імплікації, еквіваленції. Операції однакового рангу виконують зліва направо. За потреби зміни порядку виконання використовують дужки, операції у яких мають найвищий пріоритет.

Логічні вирази називають тотожними, якщо вони приймають однакові значення (є одночасно істинними чи хибними) для усіх можливих наборів значень висловлювань. Наприклад,

$$A \Leftrightarrow B = (A \Rightarrow B) \wedge (B \Rightarrow A).$$

Предикатом називають висловлювання, що містить змінну, належну певній множині. Наприклад, $P(x)$ – «натуральне число x, що ділиться на 3» – предикат, який приймає істинне значення для чисел $x = 3n \, (n \in \mathbb{N})$, і хибне, коли x не ділиться на 3.

Імплікацію $A \Rightarrow B$ або еквіваленцію $A \Leftrightarrow B$, у якій одне твердження істинне, а істинність другого належить встановити, називають **теоремою**. Істинне твердження, як правило, називають умовою теореми, друге – її висновком.

Нехай A – істинне твердження – умова теореми $A \Rightarrow B$. Тоді, за означенням імплікації, теорема правильна, коли її висновок B істинний, і неправильна, коли він хибний. За тим же означенням висновок B і теорема $A \Rightarrow B$ можуть бути правильними навіть тоді, коли A – хибне. Таким чином, виконання умови A достатнє для правильності теореми $A \Rightarrow B$ та її висновку B. Теорему $A \Rightarrow B$ «з A слідує B» можна формулювати також так: «A **достатньо** для B». Достатність слід розуміти так, що виконання умови є, можливо, надто сильною вимогою. У цьому випадку умову A можна ослабити (замінити іншою A_1, що з неї випливає $A \Rightarrow A_1$), не порушуючи істинності висновку B.

Наприклад, у теоремі «число, що ділиться на вісім, є парним» умова «число, що ділиться на вісім» – достатня і може бути замінена слабшою: «число, що ділиться на чотири».

За означенням імплікації, коли теорема $A \Rightarrow B$ правильна, A істинне тільки тоді, коли істинне B. Інакше кажучи, в правильній теоремі $A \Rightarrow B$ твердження A не може бути істинним без істинності B. Таким чином, отримуємо ще одне формулювання теореми $A \Rightarrow B$: «B **необхідно** для A».

Теорему $B \Rightarrow A$ називають **оберненою** щодо $A \Rightarrow B$, яку тоді називають **прямою**. Не завжди, коли пряма теорема правильна, правильна й обернена. А коли вони обидві правильні, то $A \Leftrightarrow B$. Твердження A, B одночасно істинні чи хибні. У цьому випадку кажуть: «A **необхідно і достатньо** для B» або «B виконується **тоді й тільки тоді**, коли виконується A», або «A виконується тоді й тільки тоді, коли виконується B».

Доведення теореми $B \Rightarrow A$ є ланцюжком очевидних та істинних імплікацій $A \Rightarrow A_1 \Rightarrow \ldots \Rightarrow A_{i-1} \Rightarrow A_i \Rightarrow \ldots \Rightarrow B$, який починається з умови теореми, закінчується її висновком та містить тільки істинні, раніше доведені твердження або аксіоми[2].

Доведення теореми $A \Leftrightarrow B$ складається з двох етапів: 1) доведення необхідності A для B, тобто доведення $B \Rightarrow A$; 2) доведення достатності A для B, тобто доведення $A \Rightarrow B$.

Приклад 1. Довести теорему «Трикутник правильний тоді й тільки тоді, коли два його кути рівні й дорівнюють $60°$».

Уведемо твердження A – «два кути трикутника рівні й дорівнюють $60°$», B – «трикутник правильний».

Доведення.

Необхідність. Слід довести $B \Rightarrow A$. Нехай B – істинне. За теоремою синусів усі кути трикутника рівні, бо рівні усі його сторони. Оскільки сума усіх кутів трикутника дорівнює $180°$, то кожен його кут дорівнює $60°$. Трикутник має два рівні кути, рівні $60°$. A – істинне. Необхідність доведено.

Достатність. Слід довести $A \Rightarrow B$. Нехай A – істинне. Якщо два кути трикутника рівні і дорівнюють $60°$, то, оскільки сума усіх кутів трикутника дорівнює $180°$, третій кут трикутника також дорівнює $60°$. Отже, усі кути трикутника рівні. За теоремою синусів усі сторони трикутника також рівні. Трикутник правильний. B – істинне. Достатність доведено.

Необхідність і достатність доведено. Теорему доведено.

Обидва твердження теореми $A \Leftrightarrow B$ однакові за суттю і, оскільки $A \Leftrightarrow B$ і $B \Leftrightarrow A$ мають тотожний зміст, виділення умови та наслідку в теоремі $A \Leftrightarrow B$ не є принциповим. Таким способом лише підкреслюють, що твердження B значиміше чи менш очевидне, ніж A.

Наприклад, теорему Піфагора можна формулювати так. Квадрат однієї із сторін трикутника дорівнює сумі квадратів двох інших його сторін тоді й тільки тоді, якщо трикутник прямокутний. Але оскільки на практиці частіше виявляється, що трикутник прямокутний, ніж, що довжини його сторін задовольняють вказане співвідношення, то теорему Піфагора, як правило, формулюють у формі достатності прямого кута в трикутнику для виконання відповідного співвідношення між довжинами його сторін.

На завершення параграфа обґрунтуємо хід доведення «методом від супротивного».

Нехай слід довести, що $A \Rightarrow B$.

Переконаємося, що $A \Rightarrow B$ істинне, якщо $A \wedge \neg B$ хибне, і навпаки $A \Rightarrow B$ хибне, коли $A \wedge \neg B$ істинне.

Справді, це випливає з такої таблиці істинності:

[2] Твердження, як правило, має багато наслідків, але тільки один чи кілька з них уможливлюють побудову результативного ланцюжка, тому доведення теорем потребує математичних знань, навиків та здібностей. Воно може виявитися складним і навіть надзвичайно складним. Наприклад, дуже проста за формулюванням велика теорема Ферма (рівняння $x^n + y^n = z^n$ не має цілих додатних розв'язків для $n > 2$) залишалася недоведеною понад три з половиною століття, незважаючи на зусилля найвидатніших математиків світу. І тільки у 1995 р., після майже 20 років напруженої праці, це вдалося талановитому американському математику Ендрю Уайлсу.

A	B	$A \Leftrightarrow B$	$A \wedge \neg B$
i	i	i	x
i	x	x	i
x	i	i	x
x	x	i	x

Таким чином, доведення істинності $A \Rightarrow B$ рівнозначно доведенню хибності $A \wedge \neg B$. Але не завжди доведення обох цих тверджень однакові за складністю. Коли доведення хибності $A \wedge \neg B$ є простішим за доведення істинності $A \Rightarrow B$, для доведення $A \Rightarrow B$доцільно застосувати «метод від супротивного».

Приклад 2. Методом від супротивного довести твердження «Число кратне 4 – парне».

Уведемо висловлювання: A – «x – кратне 4»; B – «x – парне» і подамо твердження так: $A \Rightarrow B$.

Згідно з методом від супротивного приймаємо, що x – кратне 4 і, разом з тим, припускаємо, що воно непарне. Оскільки x – кратне 4, x ділиться на 2. Отже, непарне число ділиться на 2. Отримане хибне висловлювання (протиріччя) дає підставу для заміни прийнятого припущення на протилежне: x – парне.

Твердження доведено методом від супротивного.

Теорему $\overline{B} \Rightarrow \overline{A}$ називають **протилежною** до $A \Rightarrow B$, яку тоді називають прямою.

Вправа 1. Довести, що протилежна теорема $\overline{B} \Rightarrow \overline{A}$ істинна (хибна) тоді й тільки тоді, коли істинна (хибна) вихідна теорема $A \Rightarrow B$.

1.2. Множина. Операції з множинами

Під множиною розуміють сукупність предметів (елементів), які вважають одним цілим[3]. Множину вважають заданою, коли задано ознаку, за якою для кожного предмета однозначно визначено його приналежність цій множині.

Уведемо спеціальну множину, яка не містить жодного елемента, яку називають **порожньою** і позначають $\varnothing$.Особливу роль у математиці відіграють числові множини. Ми вважатимемо відомими поняття натурального, цілого, раціонального і дійсного чисел. Множини усіх чисел цих типів позначають $\mathbb{N}, \mathbb{Z}, \mathbb{Q}, \mathbb{R}$ відповідно. Множину можна задати за допомогою предиката, яким однозначно визначено приналежність множині будь-якого елемента.

[3] Поняття множини не є таким прозорим, як може здатися на перший погляд. Для прикладу наведемо множину, пов'язану з відомим парадоксом про сілезького цирульника. Сілезький цирульник голить усіх мужчин, які не голять самих себе. На запитання, чи належить до них сам цирульник, тобто чи голить він себе, не можливо дати ані ствердної, ані заперечної відповіді. Цей та йому подібні парадокси призвели на початку XX ст. до розуміння потреби переглянути основи математики Гільберт (Hilbert) Давид – видатний німецький математик (1862 – 1943), Рассел – (Russell) Бертран Артур Вільґельм – англійський математик (1872 – 1970), Ґйодель (Gödel) Курт – австрійський математик (1906 – 1978)).

Факт, що елемент x належить множині M, записують так: $x \in M$. Запис $x \notin M$ означає, що x не належить множині M.

Приклади множин: $M = \{2, 5, 6, -8\}$ – множина з чотирьох елементів, вказаних переліком; $S = \{x : x = 5k, k \in \mathbb{N}\}$ – множина натуральних чисел, кратних 5; $[a; b] = \{x \in \mathbb{R} : a \le x \le b\}$ – відрізок, точніше відрізок числової прямої; $(a; b) = \{ x \in \mathbb{R} : a < x < b\}$ – інтервал. Справа від двокрапки записані ознаки належності.

Для множин встановлено відношення **рівності** та **включення**. Множини S і T називають рівними ($S = T$), якщо

$$x \in S \Leftrightarrow x \in T.$$

Кажуть, що множина S включає множину T, і записують $T \subset S$, якщо

$$x \in T \Rightarrow x \in S,$$

тобто коли кожен елемент множини T є елементом множини S.

Аналогічно $T \supset S$ (множина T включає множину S), якщо $S \subset T$.

Очевидно, що

$$S = T \Leftrightarrow (S \subset T) \wedge (T \subset S).$$

Деколи множину зручно вважати частиною певного цілого. Наприклад, дійсні числа x, що задовольняють умові $-1 < x < 1$ є частиною числової прямої, точки круга радіуса R – частиною площини, одна з граней піраміди – частиною усіх її граней. Тоді усе ціле називають **унітарною** або **основною** множиною E. Таким чином, $M \subset E$ для кожної множини M.

Уведемо означення **суми** (об'єднання), **добутку** (перетину) та **різниці** (доповнення) множин.

Нехай S і T – задані множини.

Сумою (об'єднанням) множин S і T називають і позначають $S \bigcup T$ множину $D = \{x : x \in S \vee x \in T\}$.

Добутком (перетином) множин S і T називають і позначають $S \bigcap T$ множину $D = \{x : x \in S \wedge x \in T\}$.

Різницею множин S і T (доповненням множини T до S) називають і позначають $S \setminus T$ множину $D = \{x : x \in S \wedge x \notin T\}$.

Доповнення множини M до унітарної позначають $\overline{M}$, тобто $\overline{M} = \{x : x \in E \wedge x \notin M\}$. Наприклад, якщо $M = [a; b]$, то $\overline{M} = (-\infty; a) \bigcup (b; +\infty)$. Очевидно, що $\overline{E} = \varnothing$ і $\overline{\varnothing} = E$.

Вправа 2. Переконатися у справедливості таких властивостей операцій з множинами для довільних заданих множин S, T, D.

1. $S \bigcup T = T \bigcup S$ – комутативність суми;
2. $S \bigcap T = T \bigcap S$ – комутативність добутку;
3. $(S \bigcup T) \bigcup D = S \bigcup (T \bigcup D)$ – асоціативність суми;
4. $(S \bigcap T) \bigcap D = S \bigcap (T \bigcap D)$ – асоціативність добутку;
5. $S \bigcup \varnothing = S$ – існування нейтрального елемента для суми;
6. $S \bigcap \varnothing = \varnothing$;

7. $(S\bigcup T)\bigcap D=(S\bigcap D)\bigcup(T\bigcap D)$ – дистрибутивність суми відносно добутку;

8. $(S\bigcap T)\bigcup D=(S\bigcup D)\bigcap(T\bigcup D)$ – дистрибутивність добутку відносно суми;

9. $S\bigcup S=S$ – ідемпотентність суми;

10. $S\bigcap S=S$ – ідемпотентність добутку;

11. $\overline{\overline{M}}=M$ – закон подвійного заперечення;

12. $M\bigcap\overline{M}=\varnothing$ – закон виключення третього.

Операції суми і перерізу множин мають спільні (1 – 7) і відмінні (8 – 10) властивості порівняно з операціями суми і добутку чисел, тому загалом є суттєво іншими. Так, на противагу числам, не існує протилежної множини: для непорожної множини S немає відповідної множини M такої, аби $S\bigcup M=\varnothing$. Рівняння $X\bigcup M=\varnothing$ відносно множини X не має розв'язку, коли M непорожна множина.

Вправа 3. Довести, що $\overline{S\bigcup T}=\bar{S}\bigcap\bar{T}$ (правило де Моргана).

►Згідно з означенням рівних множин слід довести істинність еквіваленції $x\in\overline{S\bigcup T}\Leftrightarrow x\in\bar{S}\bigcap\bar{T}$. Нехай $x\in\overline{S\bigcup T}$. Тоді $x\in\overline{S\bigcup T}\Leftrightarrow x\notin(S\bigcup T)\Leftrightarrow(x\notin S)\wedge(x\notin T)\Leftrightarrow(x\in\bar{S})\wedge(x\in\bar{T})\Leftrightarrow x\in\bar{S}\bigcap\bar{T}$.
Отже, $\overline{S\bigcup T}=\bar{S}\bigcap\bar{T}$. ◄

Вправа 4. Довести самостійно, що $\overline{S\bigcup T}=\bar{S}\bigcap\bar{T}$ (друге правило де Морґана)

Операції з множинами можна наочно ілюструвати на діаграмах Віна – Єйлера, у яких множини зображають сукупностями точок площини. Для прикладу на рис. 1.1 подано пояснення властивості 8 – дистрибутивності добутку множин відносно суми.

На завершення уведемо поняття кванторів – спеціальних позначень для часто вживаних фраз:

$\forall$ – квантор загальності, читається «для будь-якого»;

$\exists$ – квантор існування, читається «існує», «знайдеться»;

$\exists!$ – квантор існування і єдиності, читається «існує тільки один», «знайдеться і тільки один»; : – читається «такий, що».

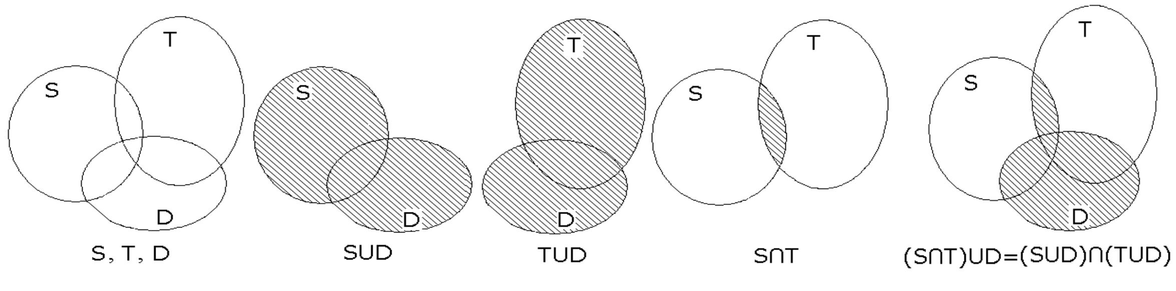


Рис. 1.1.

Наприклад, властивість щільності раціональних чисел, яка означає, що для двох нерівних раціональних чисел завжди можна вказати раціональне число, більше за менше з них і менше за більше з них, за допомогою кванторів записують так: $(\forall q_1 \in \mathbb{Q})(\forall q_2 \in \mathbb{Q}, q_2 > q_1)\, \exists q \in \mathbb{Q} : q_1 < q < q_2$.

У логічних конструкціях квантори підпорядковуються певним правилам, на роз’ясненні яких тут не будемо зупинятися.

2. ФУНКЦІЯ

2.1. Поняття функції

Означення (*функції*). Нехай X і Y – непорожні множини. Функцією, визначеною на множині X, називають правило (закон відповідності), за яким кожному $x \in X$ відповідає рівно одне $y \in Y$.

Як рівнозначний з поняттям функції вживається термін відображення.

Змінну y називають **залежною змінною**, або функцією, x – **незалежною**, або **аргументом**. Позначивши закон відповідності літерою f, під $f(x)$ розумітимемо елемент множини Y, відповідний елементу $x \in X$. Будемо також говорити, що $f(x)$ – значення функції f у точці x. Позначення $y = f(x)$ використовують також для функції f за потреби явно вказати залежну та незалежні змінні. Множину X, для елементів якої визначено $f(x)$, називають **областю визначення** цієї функції і позначають $D(f)$. Якщо $D(f)$ не вказано явно, вважають, що областю визначення функції f є множина усіх значень x, для яких $f(x)$ має сенс.

Функції $y = f_1(x)$ і $y = f_2(x)$ рівні тоді й тільки тоді, коли їхні області визначення збігаються: $D(f_1) = D(f_2)$ і для усіх $x \in D(f_1)$ виконується рівність $f_1(x) = f_2(x)$.

Основним способом задання функції у математичному аналізі є аналітичний спосіб з допомогою формул. Наприклад, запис $y = x^2 + 1$ означає, що для знаходження значення функції у будь-якій точці x слід число x піднести до квадрата і додати одиницю. Функція може задаватися кількома аналітичними виразами. Наприклад, $|x| = \begin{cases} x, x \ge 0; \\ -x, x < 0. \end{cases}$

Якщо область визначення утворена невеликою кількістю елементів, то функцію можна задати таблично, вказавши відповідне значення для кожної точки її області визначення. У такий спосіб ми ввели раніше означення заперечення – функцію, визначену на двоелементній множині. Множину $M = \{y : y = f(x), x \in D(f)\}$ – усіх значень функції $f(x)$ називають **областю значень** і позначають $E(f)$.

Не обов'язково, щоб $E(f)=Y$, але необхідно, аби $E(f)\subset Y$. Якщо функція $y=f(x)$ визначена на множині X і $E(f)\subset Y$, $E(f)\neq Y$, кажуть, що функція f відображає X в Y. Якщо $E(f)=Y$, кажуть, що функція $f(x)$ відображає X на Y. Відображення множини X на множину Y (кожен елемент з Y є значенням функції) називають **сур'єкцією** або **сур'єктивним відображенням**.

Нехай тепер на множині D задано функцію $y=f(x)$ і $E(f)=G$. Кожному $x\in D$ відповідає єдине $y\in G$, але різним елементам області визначення може відповідати один і той же елемент з області значень функції. З того, що $x_1\in D$, $x_2\in D$ і $x_1\neq x_2$, взагалі кажучи, не випливає, що $f(x_1)\neq f(x_2)$. Довільна функція може приймати одне і те ж значення у двох чи більше точках своєї області визначення. Наприклад, $y=\sin x$ приймає нульове значення в усіх точках $x=n\pi$ $(n\in\mathbb{Z})$.

Якщо визначена на множині X функція $y=f(x)$ є такою, що різним значенням $x_1,x_2\in X$ відповідають різні значення функції – $f(x_1)\neq f(x_2)$, відображення $f(x)$ називають **ін'єктивним** або **взаємно - однозначним**.

Відображення, що є одночасно ін'єктивним і сур'єктивним, називають **бієктивним** або **бієкцією**.

Наприклад, $y=x^2$, $x\in[-1;2]$, відображення відрізка $[-1;2]$ в $\mathbb{R}_+$, але не сур'єкція (не кожне додатне число є значенням функції). Функція $y=x^2$, $x\in[-1;2]$ задає сур'єктивне, але не ін'єктивне відображення відрізка $[-1;2]$ на відрізок $[0;4]$ (на відрізку $[-1;2]$ існують різні точки, у яких функція приймає однакове значення). Функція $y=tg\dfrac{\pi x}{2}$ – сур'єктивне відображення інтервала $(-1;1)$ на множину дійсних чисел $\mathbb{R}$.

Нехай функція $y=f(x)$ визначена на множині D. В області $M\subset D$ її називають:

- **зростаючою**, якщо $f(x_2)>f(x_1)$;
- **неспадною**, якщо $f(x_2)\geq f(x_1)$;
- **спадною**, якщо $f(x_2)<f(x_1)$;
- **незростаючою**, якщо $f(x_2)\leq f(x_1)$

для усіх $x_1\in M$, $x_2\in M$, $x_2>x_1$.

Кожну з чотирьох вказаних типів функцій називають **монотонною**.
Наприклад, $y=x^2$, $x\in[0;5]$ зростаюча в усій області визначення, а $y=x^2$, $x\in[-5;1]$ не монотонна в області свого визначення.

Функцію $y=f(x)$ називають **обмеженою зверху** в області $M\subset D(f)$, якщо для деякого числа C і $x\in M$ виконується нерівність $f(x)\leq C$. Коли для усіх $x \in M$ і деякого числа C_1 виконується нерівність $f(x) \geq C_1$, кажуть, що функція $f(x)$ **обмежена знизу** в області M. Якщо функція $f(x)$ в області M обмежена як зверху, так і знизу, її називають **обмеженою** в M.

Наприклад, функція $y = \dfrac{1}{1-x}$ $(x \in \mathbb{R}, x \neq 1)$ обмежена на відрізку $[-1;0]$, бо для $x \in [-1;0]$ справджується нерівність $\dfrac{1}{2} \leq y \leq 1$. Ця функція обмежена зверху в області $(1;\infty)$, бо $y \leq 0$, але не обмежена знизу: яке б не було велике за модулем від'ємне число K, знайдеться $x \in (1;\infty)$, для якого $f(x) < K$.

Уведемо поняття оберненої функції. Нехай $y = f(x)$ бієктивне відображення $D(f)$ на $E(f)$. Кожен елемент $y \in E(f)$ є значенням функції $y = f(x)$. Кожному $y \in E(f)$ в області $D(f)$ відповідає єдине $x \in D(f)$. І, таким чином, визначено відображення $E(f)$ на $D(f)$, яке позначимо $x = f^{-1}(y)$. Функцію $y = f^{-1}(x)$, визначену на множині $E(f)$, областю значень якої є $D(f)$, називають **оберненою** до функції $y = f(x), x \in D(f)$. Очевидно, що для усіх $x \in E(f)$ $f\left(f^{-1}(x)\right) = x$ і для усіх $x \in D(f)$ $f^{-1}\left(f(x)\right) = x$, що може слугувати іншим означенням оберненої функції. Наприклад, функції $y = 1 + \dfrac{x}{2}, \quad x \in [2;10]$ і $y = 2x - 2, \quad x \in [2;6]$ є взаємно - оберненими.

Очевидно, що зростаюча та спадна функції мають обернені. Функція, що не має оберненої, не є строго монотонною.

Звузивши область визначення немонотонної функції можна отримати монотонну функцію, яка має обернену. Наприклад, функція $y = x^2$ на усій числовій осі не має оберненої, як така, що не визначає взаємно - однозначної відповідності. Але функції $y = x^2 \in [0; +\infty)$ та $y = x^2 \in (-\infty; 0]$ обернені мають: $y = \sqrt{x}$ та $y = -\sqrt{x}$. Також не має оберненої функція $y = \sin x$, але кожна з функцій $y = \sin x \left(x \in -\dfrac{\pi}{2} + k\pi; \dfrac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z} \right)$ має її. Обернену до одної з них $y = \sin x, \quad x \in \left[-\dfrac{\pi}{2}; \dfrac{\pi}{2} \right]$ позначають $y = \arcsin x$.

Означення (*графіка функції*). Множину точок $\Gamma = \{(x, y) : x \in D(f), y = f(x)\}$ декартової системи координат називають графіком функції.

На координатній площині Oxy графік функції – це точка, система точок, лінія або система точок і ліній. Наприклад, графіком функції $y = 2x + 1$ є пряма лінія, що проходить через точки $A(0;1)$ і $B(1;3)$.

Уведемо поняття парної, непарної та періодичної функцій.

Якщо для усіх $x \in D(f)$ виконується співвідношення, то

а) $f(-x) = f(x)$ функцію $f(x)$ називають **парною**;

б) $f(-x) = -f(x)$ **непарною**;

в) $f(x) = f(x+T)$, де $T > 0$ – **періодичною**, а найменше число T, для якого ця умова виконується, називають **періодом** функції.

Функцію, що не є парною чи непарною, називають **ні парною, ні непарною**.

Зауважимо, що область визначення парної чи непарної функції симетрична відносно точки $x = 0$. Область визначення періодичної функції не може бути обмеженою.

Наприклад, функція $y = x^2, \quad x \in [-1; 2]$ є ні парною, ні непарною, оскільки для $x_0 = 1,5$ не виконується жодне із співвідношень: $f(x_0) = f(-x_0),\ f(x_0) = -f(x_0)$.

Функція $y = x^2, x \in (-5; 5)$ парна, $y = x^3$ – непарна.

Графік парної функції симетричний відносно осі ординат, непарної – відносно початку координат.

Уведемо поняття складеної функції. Нехай задано функцію $x = \varphi(t)$, для якої $D(\varphi) = T, \quad E(\varphi) = X$. Нехай $y = f(x)$ функція, для якої $D(f) = X_1$ і $E(f) = Y_1$. Якщо $X_1 = X$ – область значень функції $\varphi(t)$ збігається з областю визначення функції $f(x)$, то кожному $t \in T$ за правилом $x = \varphi(t), y = f(x)$ відповідає єдине значення $y \in E(f)$. Цю відповідність записують $y = f(x(t)), t \in T$ і називають **складеною функцією**, або **композицією**.

Наприклад, функція $y = \sqrt{2x+1}$ – складена і є композицією двох функцій: $z = 2x+1, x \in [-0,5; +\infty]$ і $y = \sqrt{z}, z \in \mathbb{R}_+$.

2.2. Елементарні функції. Властивості й графіки

Нехай X – *n*-елементна множина, а Y – m-елементна. Легко переконатись, що існує n^m функцій $y = f(x)$, для яких X – область визначення, а Y – область значень. Коли ж області $D(f)$ і $E(f)$ нескінченні множини, усіх функцій f є нескінченно багато.

Серед усіх функції $y = f(x)$ умовно виділено невелику їх частину, які називають **основними елементарними функціями**:

1. $y = ax + b, \quad a \in \mathbb{R}, \quad a \neq 0; \quad b \in \mathbb{R}$ – **лінійна**;
2. $y = x^n, \quad n \in \mathbb{Z}, \quad n \neq 0$ – **степенева**;
3. $y = a^x, \quad a > 0, \quad a \neq 1$ – **показникова**;

4. $y = \sqrt[n]{x}, \quad n \in \mathbb{N}, \quad n > 1$ – **коренева** (обернена до відповідної степеневої);
5. $y = \log_a x \quad a > 0, \quad a \neq 1$ – **логарифмічна** (обернена до відповідної показникової);
6. $y = \sin x$ – **синус** x;
7. $y = \cos x$ – **косинус** x;
8. $y = \operatorname{tg} x$ – **тангенс** x;
9. $y = \operatorname{ctg} x$ – **котангенс** x;
10. $y = \arcsin x$ – обернена до $y = \sin x, \quad x \in [-\pi/2; \pi/2]$;
11. $y = \arccos x$ – обернена до $y = \cos x, \quad x \in [0; \pi]$;
12. $y = \operatorname{arctg} x$ – обернена до $y = \operatorname{tg} x, \; x \in [-\pi/2; \pi/2]$;
13. $y = \operatorname{arcctg} x$ – обернена до $y = \operatorname{ctg} x, \quad x \in [0; \pi]$.

Елементарними функціями називають функції, утворені з основних елементарних шляхом скінченного числа арифметичних операцій і композицій. Наприклад, функція $y = \sin^2 x$ елементарна як композиція (одна) основних елементарних: синуса і степеневої – $z = \sin x$ і $y = z^2$.

Зауважимо, що функції 8–9 можна отримати з 6–7 відповідно. Наприклад, $\operatorname{tg} x = \dfrac{\sin x}{\cos x}$. Таблиця основних елементарних функцій не є мінімально можливою, вона побудована з міркувань зручності й вживаності.

Для часто вживаних функцій, які не вважають основними елементарними, також уведено спеціальні позначення. До таких, зокрема, належать:

$y = \operatorname{sh} x$ – **гіперболічний синус** $\left(\operatorname{sh} x = \dfrac{1}{2}(e^x - e^{-x} \right)$;

$y = \operatorname{ch} x$ – **гіперболічний косинус** $\left(\operatorname{ch} x = \dfrac{1}{2}(e^x + e^{-x} \right)$;

$y = \operatorname{th} x$ – **гіперболічний тангенс** $\left(\operatorname{th} x = \dfrac{\operatorname{sh} x}{\operatorname{ch} x} \right)$;

$y = \operatorname{cth} x$ – **гіперболічний котангенс** $\left(\operatorname{cth} x = \dfrac{\operatorname{ch} x}{\operatorname{sh} x} \right)$,

а також низка інших функцій, на поясненні яких не будемо зупинятися.

Розглянемо властивості та графіки основних елементарних функцій.

1. Лінійна функція ($y = ax + b$).

$D(f) = \mathbb{R}$, $E(f) = \mathbb{R}$ зростаюча, якщо $a > 0$, спадна, коли $a < 0$. Непарна, якщо $b = 0$, а коли $b \neq 0$ – ні парна, ні непарна. Неперіодична.

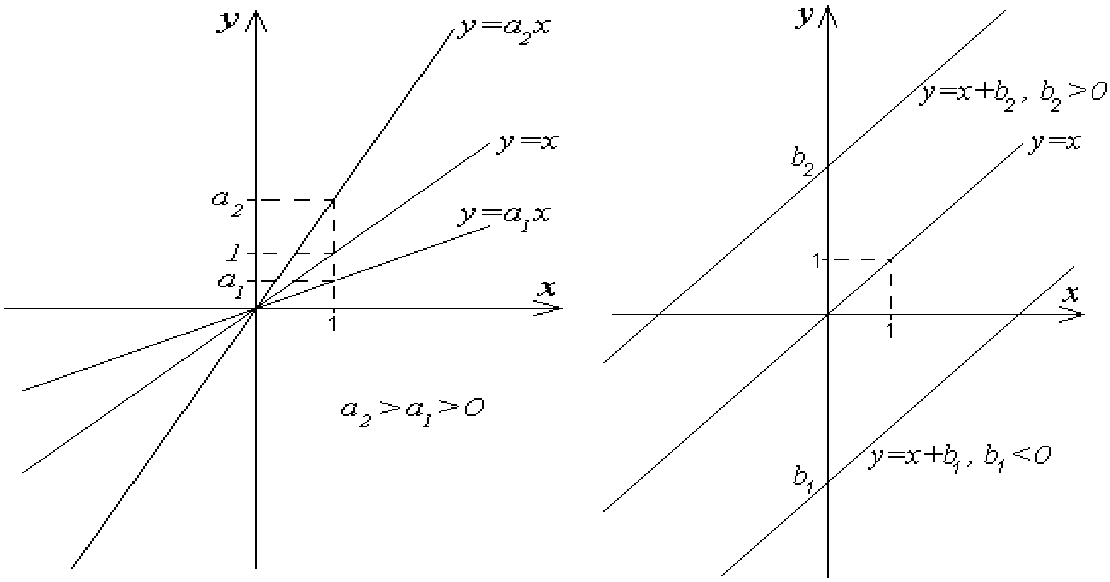
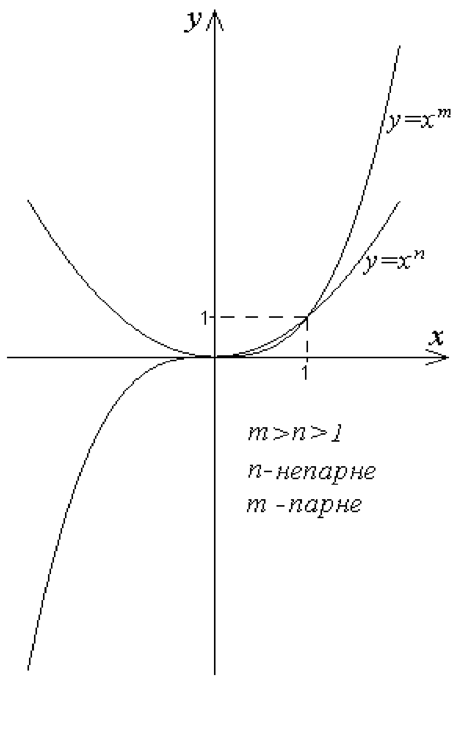


Рис. 2.1. Графіки лінійних функцій

2. Степенева функція ($y = x^n, \quad n \in \mathbb{Z}, \quad n \neq 0$**).**

Якщо $n > 0$, то $D(f) = \mathbb{R}$, а $E(f) = \mathbb{R}$, коли n – непарне та $E(f) = [0; +\infty)$, коли парне. Якщо $n < 0$, то $D(f) = \mathbb{R} \setminus \{0\}$ і $E(f) = \mathbb{R} \setminus \{0\}$, коли n – непарне та



Ри

$E(f)=(0;+\infty)$, коли парне. Функція парна, якщо n – парне, і непарна, коли n – непарне. Якщо n – непарне і додатне, функція зростає у $D(f)$ і спадає у $D(f)$, коли n – непарне і від'ємне. Якщо n – парне і додатне, функція зростає в області $[0;+\infty)$ і спадає у $(-\infty;0]$. Вона зростає в області $(-\infty;0)$ і спадає у $(0;+\infty)$, коли n – парне і від'ємне. Неперіодична.

3. Коренева функція ($y=\sqrt[n]{x}$ $(n\in\mathbb{N}, n>1)$).

Коренева функція обернена до степеневої $y=x^n$. Якщо n непарне, $D(f)=\mathbb{R}$, $E(f)=\mathbb{R}$, коли парне, $D(f)=E(f)=[0;+\infty)$. Зростаюча. Непарна, коли n непарне; ні парна, ні непарна, якщо n парне. Неперіодична.

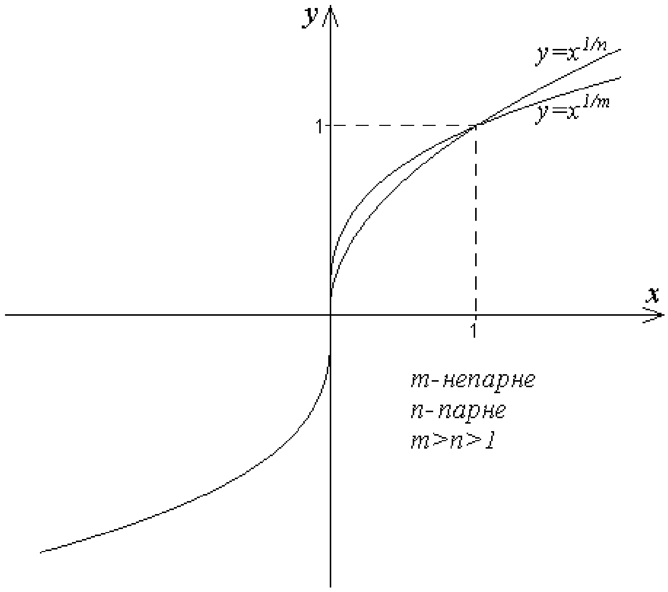


Рис. 2.3. Графіки кореневих функцій

4. Показникова функція ($y=a^x, a>0, a\neq1$).

$D(f)=\mathbb{R}$; $E(f)=(0;+\infty)$. Функція зростаюча, якщо $a>1$, і спадна, коли $0<a<1$. Ні парна, ні непарна. Неперіодична.

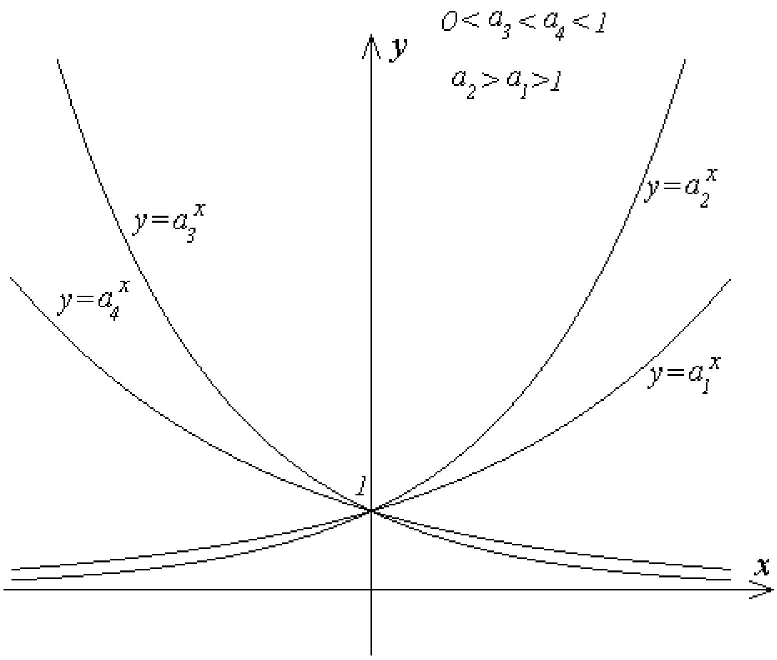


Рис. 2.4. Графіки показникових функцій

5. Логарифмічна функція ($y = \log_a x, \quad a > 0, \quad a \neq 1$**).**

Обернена до функції $y = a^x$, $D(f) = (0; +\infty)$; $E(f) = \mathbb{R}$. Зростаюча, якщо $a > 0$, і спадна, коли $0 < a < 1$. Ні парна, ні непарна. Неперіодична.

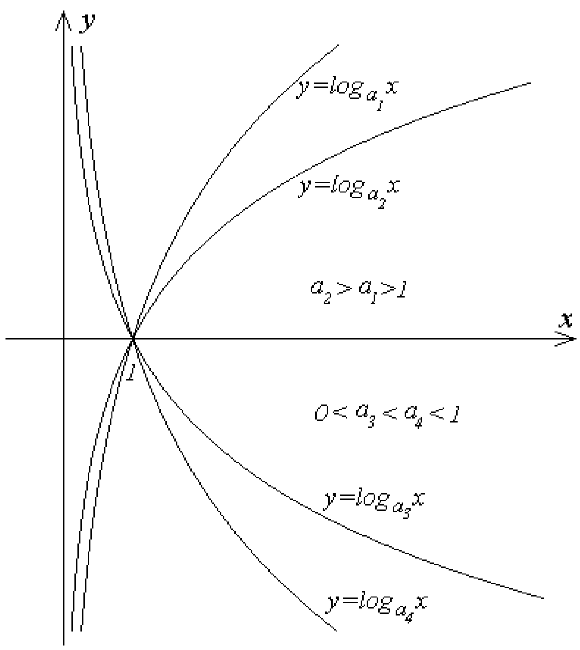


Рис. 2.5. Графіки логарифмічних функцій

6. Синус ($y=\sin x$).

$D(f)=\mathbb{R}$; $E(f)=[-1;1]$. Зростаюча для $x\in\left[-\frac{\pi}{2}+2k\pi;\frac{\pi}{2}+2k\pi\right]$ $k\in\mathbb{Z}$ і спадна для $x\in\left[\frac{\pi}{2}+2k\pi;\ \frac{3\pi}{2}+2k\pi\right]$ $k\in\mathbb{Z}$. Непарна. Періодична з періодом $T=2\pi$.

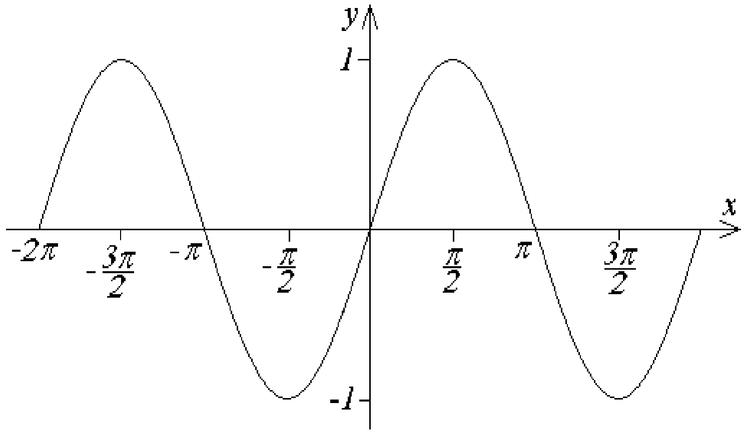


Рис. 2.6. Графік функції $y=\sin x$

7. Косинус ($y=\cos x$).

$D(f)=\mathbb{R}$; $E(f)=[-1;1]$. Спадна для $x\in\left[2k\pi;(2k+1)\pi\right]$ $k\in\mathbb{Z}$ і зростаюча для $x\in\left[(2k-1)\pi;\quad 2k\pi\right]$ Парна. Періодична з періодом $T=2\pi$.

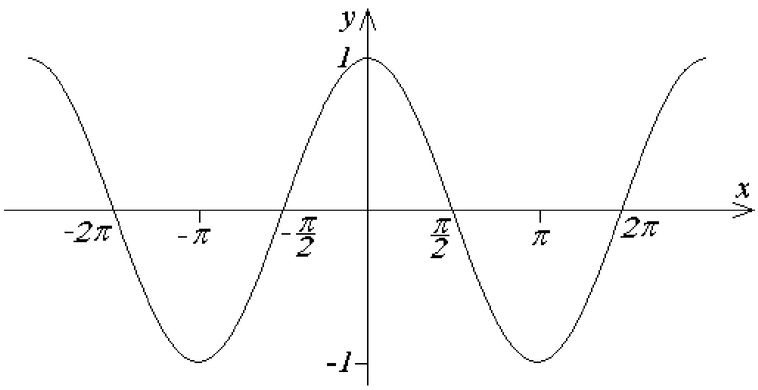


Рис. 2. 7. Графік функції $y=\cos x$

8. Тангенс ($y=\operatorname{tg} x$).

$D(f)=\left(-\frac{\pi}{2}+k\pi;\frac{\pi}{2}+k\pi\right)$ $k\in\mathbb{Z}$; $E(f)=\mathbb{R}$. Непарна. Зростаюча на кожному з інтервалів $\left(-\frac{\pi}{2}+k\pi;\frac{\pi}{2}+k\pi\right)$ $k\in\mathbb{Z}$. Періодична з періодом $T=\pi$.

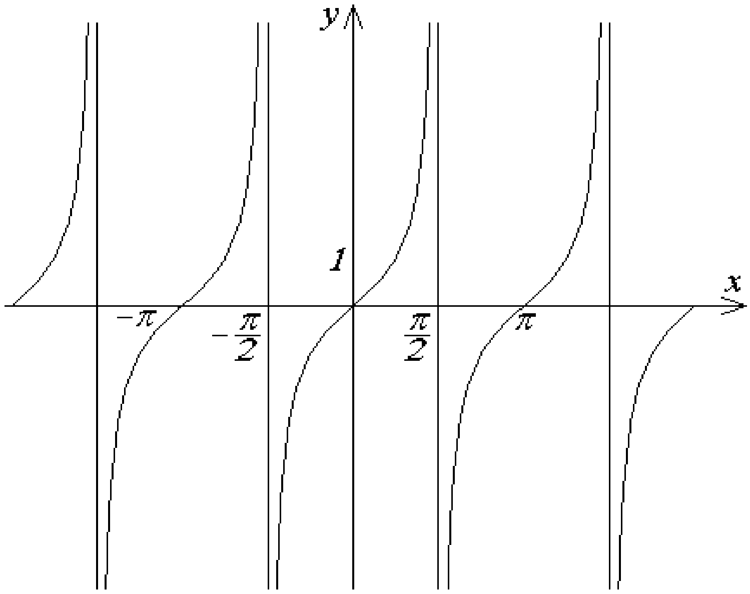


Рис. 2. 8. Графік функції $y = \mathrm{tg}\, x$

9. Котангенс ($y = \mathrm{ctg}\, x$).

$D(f) = (k\pi; (k+1)\pi)$ $k \in \mathbb{Z}$; $E(f) = \mathbb{R}$. Спадна на кожному з інтервалів $(k\pi; (k+1)\pi)$ $k \in \mathbb{Z}$. Непарна. Періодична з періодом $T = \pi$.

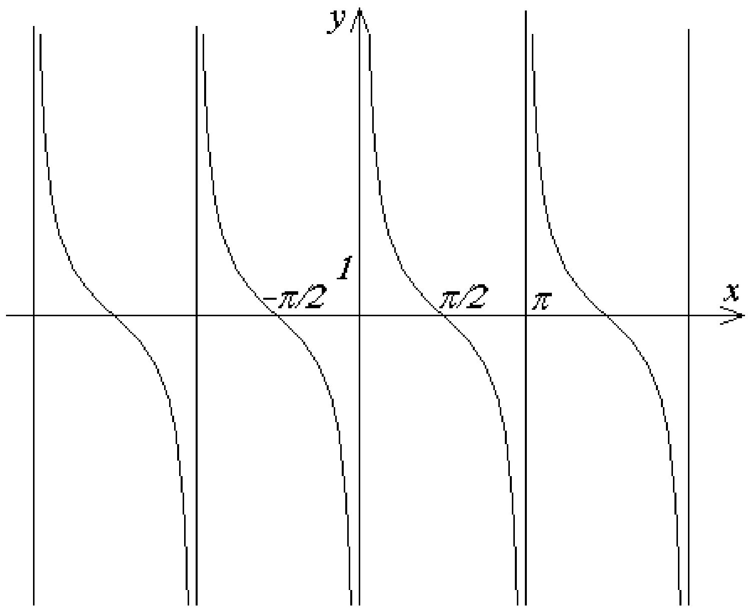


Рис. 2. 9. Графік функції $y = \mathrm{ctg}\, x$

10. Арккосинус ($y = \arccos x$).

Обернена до $y = \cos x$, $x \in [0; \pi]$. $D(f) = [-1; 1]$; $E = (f) = [0; \pi]$. Спадна. Ні парна, ні непарна. Неперіодична.

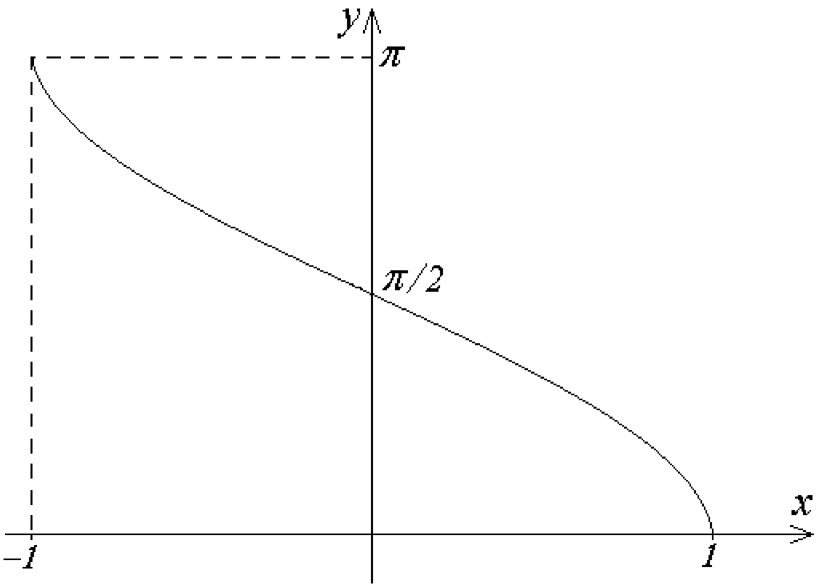


Рис. 2. 10. Графік функції $y = \arccos x$

11. Арксинус ($y = \arcsin x$).

Обернена до $y = \sin x$, $x \in \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2} \right]$.

$D(f) = [-1; 1]$; $E = (f) = \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2} \right]$. Зростаюча. Непарна. Неперіодична.

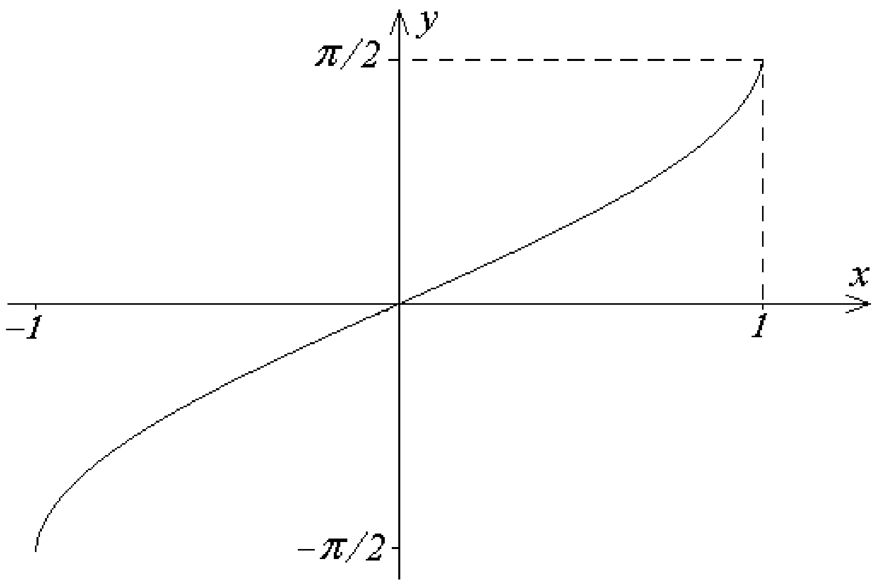


Рис. 2. 11. Графік функції $y = \arcsin x$

12. Арктангенс ($y = \operatorname{arctg} x$).

$D(f) = \mathbb{R}$; $E = (f) = \left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2} \right)$. Зростаюча. Непарна. Неперіодична.

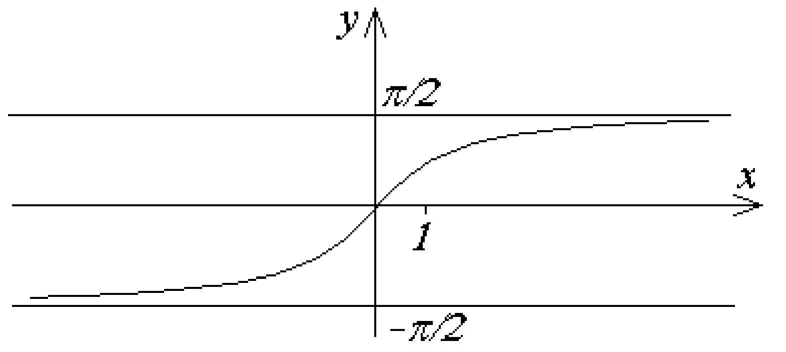


Рис. 2. 12. Графік функції $y = \operatorname{arctg} x$

13. Арккотангенс ($y = \operatorname{arcctg} x$).

$D(f) = \mathbb{R}$; $E(f) = (0; \pi)$. Спадна. Ні непарна, ні парна. Неперіодична.

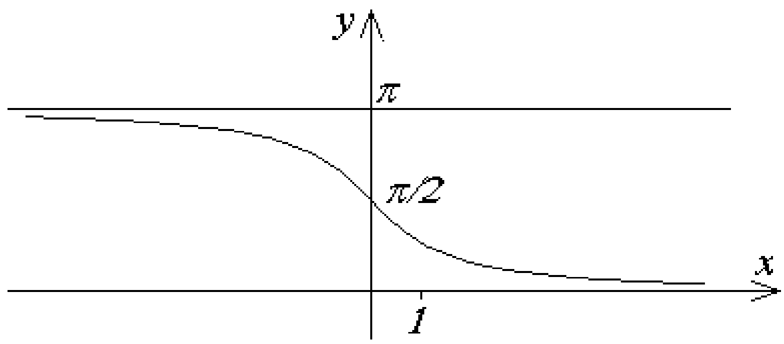


Рис. 2. 13. Графік функції $y = \operatorname{arcctg} x$

2.3. Побудова графіка функції способом елементарних перетворень

Графік функції $y = Af(ax+b) + B$ $a \neq 0$, $A \neq 0$ можна отримати паралельними перенесеннями і стисками (розтягами) графіка функції $y = f(x)$.

Нехай криві L і Γ графіки функцій $y = f(x)$ і $y = Af(ax+b) + B$, а $M(x, y)$ і $N(x^*, y^*)$ – біжучі точки ліній L і Γ.

Якщо $ax^* + b = x$, то $Ax + B = y^*$, тому координати точок M і N пов'язані лінійним перетворенням

$$\begin{cases} x^* = \dfrac{1}{a}(x - b), \\ y^* = Ay + B. \end{cases}$$

Від точки M до точки N можна перейти такими послідовними перетвореннями:

1) $M(x,y) \to M_1(x-b,y)$ переміщення, паралельне осі абсцис на $|b|$ вліво, якщо $b>0$, і вправо, якщо $b<0$;

2) $M_1(x-b,y) \to M_2\left(\frac{1}{a}(x-b),y\right)$ стиск до лінії $x=b$ в a разів, якщо $a>1$, розтяг відносно неї в $\frac{1}{a}$ разів, якщо $0<a<1$. Якщо $a<0$, замінюємо a на $|a|$ і дзеркально відображаємо отриману точку відносно лінії $x=b$;

3) $M_2\left(\frac{1}{a}(x-b),y\right) \to M_3\left(\frac{1}{a}(x-b),Ay\right)$ – стиск (розтяг) в A разів відносно осі абсцис, коли $A>0$, і, якщо $A<0$, додаткове дзеркальне відображення відносно цієї осі за схемою аналогічною описаній у попередньому пункті;

4) $M_3\left(\frac{1}{a}(x-b),Ay\right) \to N\left(\frac{1}{a}(x-b),Ay+B\right)$ – переміщення, паралельне осі ординат, вверх на відстань B, якщо $B>0$, і вниз на $|B|$, коли $B<0$.

Приклад. Побудувати графік функції $y=3\sin\left(2x+\frac{\pi}{3}\right)-2$.

Графік отримуємо такими перетвореннями графіка функції $y=\sin x$:

1) зміщення вліво на $\frac{\pi}{6}$;

2) стиск до прямої $x=-\frac{\pi}{6}$ у два рази;

3) розтяг відносно осі абсцис у три рази;

4) паралельне перенесення вниз на 2.

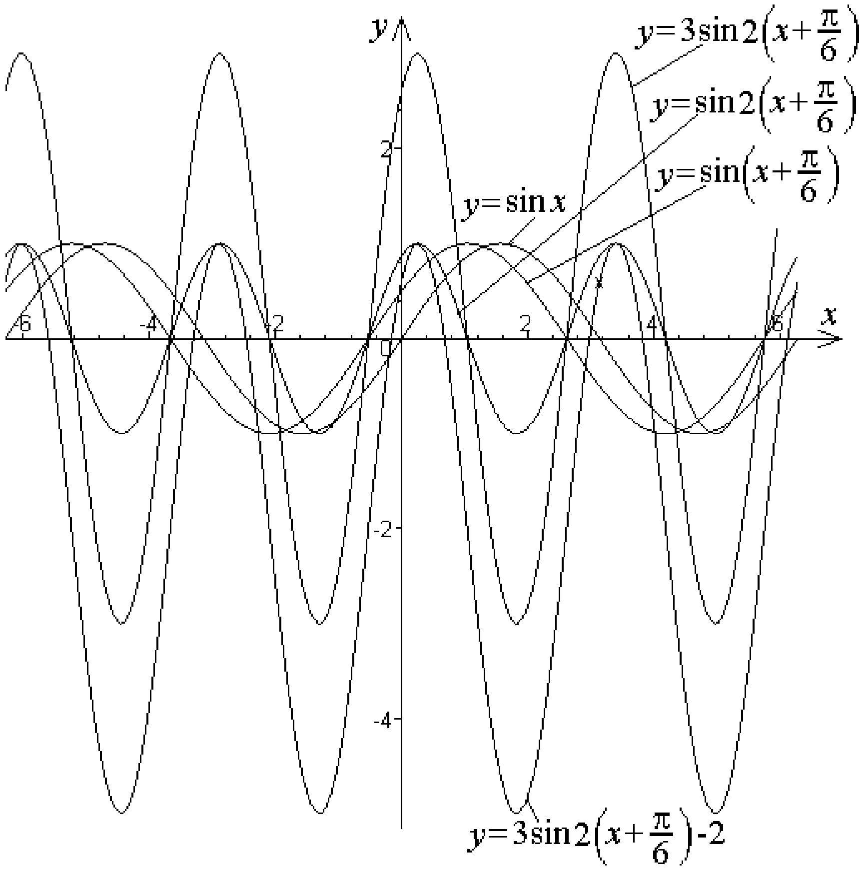


Рис. 2. 14. Графік функції $y = 3\sin\left(2x+\dfrac{\pi}{3}\right)-2$

2.4. Поняття про параметричне і неявне задання функції

Якщо для $t \in [\alpha;\beta]$, за правилом

$$\begin{cases} x = \varphi(t); \\ y = \psi(t) \end{cases} \tag{2.1}$$

кожному значенню $x \in E(\varphi) = X$ відповідає єдине $y \in E(\psi)$, то кажуть, що рівняння (2.1) на множині X визначають функцію y від x **параметричним** способом. Змінну t називають **параметром**.

Наприклад, рівності

$$\begin{cases} x = \cos t; \\ y = \sin t, \end{cases}$$

у яких $t \in [0;\pi]$, параметрично визначають функцію $y(x)$, яку можна подати у явному вигляді: $y = \sqrt{1-x^2}$. Ці самі рівності, у яких параметр $t \in \left[-\dfrac{\pi}{2};\dfrac{\pi}{2}\right]$, функції не визначають.

Явно задану функцію завжди і неєдино можна подати параметричним способом. Наприклад, функцію $y = f(x)$ виглядатиме так

$$\begin{cases} x = t; \\ y = f(t), t \in D(f), \end{cases} \text{ або так } \begin{cases} x = t^3; \\ y = f(t^3), t \in D(f). \end{cases}$$

Навпаки, параметрично задану функцію далеко не завжди можна подати явно. Аби перейти від параметричного задання функції до явного, необхідно виключити параметр із системи (2.1), що не завжди можливо.

Якщо для $x \in D$ рівність

$$F(x, y) = 0 \tag{2.2}$$

задовольняється тільки для одного $y \in \mathbb{R}$, то рівняння (2.2) визначає функцію $y(x)$ в області D. Такий спосіб задання функції називають **неявним**.

Неявний спосіб задання функції є, очевидно, теж більш загальним за явний. Функцію $y = f(x)$ завжди і до того ж неєдино можна подати в неявному вигляді. Наприклад,

$$y - f(x) = 0 \text{ та } y^5 - (f(x))^5 = 0$$

– два способи неявного задання функції $y = f(x)$.

Основним питанням неявного задання функції є її існування – питання для яких $x \in \mathbb{R}$ рівняння (2.2) має єдиний розв'язок. Воно потребує окремого, непростого дослідження, на якому ми не будемо зупинятися. Зауважимо тільки, що рівність (2.2) не завжди визначає функцію $y(x)$, а коли й визначає то, її далеко не завжди можливо подати в явному вигляді. Наприклад, рівність $x^2 + y^2 + 1 = 0$ фукції не визначає, бо рівняння $x^2 + y^2 + 1 = 0$ не має розв'язку для жодного $x \in \mathbb{R}$. Рівняння $y + e^y - x = 0$ має єдиний розв'язок для усіх $x \in \mathbb{R}$ а отже, визначає на усій числовій осі функцію $y(x)$, яку неможливо подати явно.

Параметрично та неявно задані функції вартують уваги вже тому, що охоплюють ширший клас функціональних залежностей, ніж явні. Існує багато задач на знаходження функції, розв'язок яких можна подати параметричним чи неявним способом, але неможливо явним. Багато таких прикладів побачимо, вивчаючи диференціальні рівняння.

3. ГРАНИЦЯ І НЕПЕРЕРВНІСТЬ

3.1. Числова послідовність. Границя послідовності

Числовою послідовністю називають функцію натурального аргументу. Послідовність $\{x_n\}$ є заданою, коли задано x_n – її n-й член.

Приклади послідовностей:

1) 1, 1,…, 1…

2) $1,\ \frac{1}{2},\dots,\frac{1}{n},\dots$

3) $-1,\ 1,\dots,\ (-1)^n,\dots$

4) $2,\ \left(\frac{4}{3}\right)^3,\dots,\ \left(1+\frac{1}{n}\right)^n,\dots$

Перша з них – стала послідовність: усі її елементи однакові; елементи другої поступово зменшуються, наближаючись до нуля; елементи третьої почергово приймають значення –1, 1, і тому, при необмеженому збільшенні номера елемента, не зближаються з певним значенням. Виявлення тенденції у зміні членів останньої послідовності зі збільшенням n не є таким прозорим: основа степеня наближається до одиниці, а показник необмежено зростає. Оскільки будь-який степінь одиниці є одиницею, а степінь числа більшого за одиницю зростає необмежено зі збільшенням степеня, неможливо зробити висновок про поведінку елементів цієї послідовності зі зростанням їхнього номера без додаткового дослідження.

Для з'ясування поведінки елементів послідовності при необмеженому збільшенні індекса елемента введемо поняття границі послідовності.

Далі будемо часто використовувати нерівність $|x-b|<\varepsilon,\ \varepsilon>0$. Для зручності нагадаємо, що вона рівносильна нерівностям $-\varepsilon<x-b<\varepsilon$ та $b-\varepsilon<x<b+\varepsilon$.

Означення (*границі послідовності*). Число b називають границею числової послідовності $\{x_n\}$ при $n\to\infty$, якщо для будь-якого додатного числа $\varepsilon>0$ знайдеться такий номер $N(\varepsilon)$, що для усіх $n>N(\varepsilon)$ виконується нерівність: $|x_n-b|<\varepsilon$. Послідовність, що має границю, називають **збіжною**. Факт, що число b є границею послідовності $\{x_n\}$, записують так:

$$\lim_{n\to\infty}x_n=b \text{ або } x_n\to b, \text{ при } n\to\infty.$$

Якщо послідовність збігається до числа b, то для будь-якого як завгодно малого додатного числа ε можна вказати такий номер N, що усі елементи з індексом, більшим за N, відрізнятимуться за модулем від числа b менш, ніж на ε.

Означення (ε-околу точки числової осі). ε-околом точки a називають інтервал $(a-\varepsilon;a+\varepsilon)$, $\varepsilon>0$.

Якщо послідовність $\{x_n\}$ збіжна до числа b, то яким би малим не було додатне число ε, знайдеться такий номер N, що усі елементи послідовності, починаючи з $N+1$ потрапляють в ε окіл точки b. У кожному околі точки b міститься нескінченно багато елементів послідовності, поза ним може бути тільки обмежена їх кількість (рис. 3.1).

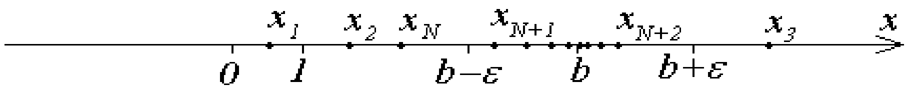


Рис. 3.1.

Приклад. Переконатися, що $b=0$ є границею числової послідовності $x_n = \frac{1}{n}$.

Розглянемо нерівність $|x_n - b| < \varepsilon$.

$$\left|\frac{1}{n}\right| < \varepsilon \Leftrightarrow \frac{1}{n} < \varepsilon \Leftrightarrow n > \frac{1}{\varepsilon}.$$

Поклавши $N(\varepsilon) = \left[\frac{1}{\varepsilon}\right] + 1$, де $[x]$ – ціла частина числа x, отримуємо $n > N(\varepsilon) \Rightarrow \left|\frac{1}{n} - 0\right| < \varepsilon$.

Зауваження. Означення границі не дає змоги знайти границю послідовності. Виходячи з нього, можна тільки перевірити, чи вибране число b є границею заданої послідовності. У разі негативної відповіді послідовність може не мати границі або мати границю, що не дорівнює числу b.

Запишемо тепер означення границі послідовності, скориставшись кванторами так:

$$\lim_{n\to\infty} x_n = b \Leftrightarrow (\forall \varepsilon > 0)(\exists N(\varepsilon) \in \mathbb{N}) : (\forall n \in \mathbb{N}, n > N) \Rightarrow |x_n - b| < \varepsilon$$

або надалі компактніше так

$$\lim_{n\to\infty} x_n = b \Leftrightarrow (\forall \varepsilon > 0)(\exists N \in \mathbb{N}) : n > N \Rightarrow |x_n - b| < \varepsilon. \qquad (2.3)$$

Залежно від співвідношення між наступним і попереднім членами послідовність називають:

а) **зростаючою**, якщо $x_{i+1} > x_i \, (\forall i)$;

б) **неспадною**, якщо $x_{i+1} \ge x_i \, (\forall i)$;

в) **спадною**, якщо $x_{i+1} < x_i \, (\forall i)$;

г) **незростаючою**, якщо $x_{i+1} \le x_i \, (\forall i)$.

Кожну з чотирьох типів послідовностей називають **монотонною**, інші – немонотонними.

Послідовність називають:

а) **обмеженою зверху**, якщо знайдеться таке число M, що $x_n < M \ (\forall n)$;

б) **обмеженою знизу**, якщо знайдеться таке число M, що $x_n > M \ (\forall n)$;

в) **обмеженою**, коли вона обмежена і зверху, і знизу, тобто, якщо знайдеться таке число $M > 0$, що $|x_n| < M \ (\forall n)$.

Розглянемо деякі властивості абсолютного значення числа (модуля), що використовують у теорії границь. Для довільних дійсних чисел a,b,c виконують нерівності:

а) $|a+b| \le |a| + |b|$; (2.4)

б) $|b-a| \ge |a| + |b|$; (2.5)

в) $|b-a| \le |c-a| + |b-c|$. (2.6)

У їхній справедливості легко переконатись, безпосередньо перевіривши. Доведемо останню нерівність. Розглянемо можливі випадки.

Якщо $a = b$, формула (2.6) очевидна.

Нехай $a < b$.

Якщо $c \in [a;b]$, то $|b-a| = b-a$; $|c-a| = c-a$; $|b-c| = b-c$. Тому $|b-a| = |c-a| + |b-c|$

Якщо $c > b$, то $|b-a| = b-a$; $|c-a| = c-a$; $|b-c| = c-b$. Тому $|c-a| + |b-c| = (c-a)+(c-b) > b-a = |b-a|$.

Якщо $c < a$, то $|b-a| = b-a$; $|c-a| = a-c$; $|b-c| = b-c$. Тому $|c-a| + |b-c| = (a-c)+(b-c) > b-a = |b-a|$.

Аналогічно доводимо співвідношення (2.6) для випадку $b < a$.

Теорема (*про єдиність границі*). Границя єдина, якщо вона існує.

► Доведемо методом від супротивного.

Нехай послідовність $\{x_n\}$ має дві границі: числа a і b, $a \ne b$. Приймемо, що $b > a$.

Покладемо $\varepsilon = \dfrac{b-a}{3}$. За означенням границі

$$\left(\exists N_1 \in \mathbb{N}\right): n > N_1 \Rightarrow |x_n - a| < \varepsilon = \frac{b-a}{3};$$

$$\left(\exists N_2 \in \mathbb{N}\right): n > N_2 \Rightarrow |x_n - a| < \varepsilon = \frac{b-a}{3}.$$

Тому, якщо $n > N_1$ і $n > N_2$, то

$$|x_n - a| < \frac{b-a}{3}, \quad |x_n - b| < \frac{b-a}{3}.$$

Додамо дві останні нерівності: $|x_n - a| + |x_n - b| < \dfrac{2}{3}(b-a)$.

За властивостями модуля $|x_n - a| + |x_n - b| \ge (b-a)$ для виконання цієї нерівності необхідно, аби

$$b-a<\frac{2}{3}(b-a)\Rightarrow b-a<0\Leftrightarrow b<a.$$

Отримана суперечність означає, що припущення про існування двох різних границь – помилкове. Границя єдина.◄

Теорема (*про границю проміжної послідовності*). Якщо, починаючи з деякого номера $N\in\mathbb{N}$, послідовності $\{x_n\}$, $\{y_n\}$, $\{z_n\}$ задовольняють нерівності $x_n\le y_n\le z_n$ і $\{x_n\}$ і $\{z_n\}$ збіжні до числа b, то й послідовність $\{y_n\}$ – збіжна і має границею число b.

► Оскільки $x_n\to b$ і $z_n\to b$ при $n\to\infty$, то

$$(\forall\varepsilon>0)(\exists N_1\in\mathbb{N}):n>N_1\Rightarrow|x_n-b|<\varepsilon$$

і

$$(\forall\varepsilon>0)(\exists N_2\in\mathbb{N}):n>N_2\Rightarrow|z_n-b|<\varepsilon.$$

Для $N=\max\{N_1,N_2\}$ і $n>N$ виконуватиметься система нерівностей

$$\begin{cases}|x_n-b|<\varepsilon\\|z_n-b|<\varepsilon\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x_n-b>-\varepsilon\\z_n-b<\varepsilon\end{cases}.$$

Тому, що $x_n\le y_n\le z_n$, для $n>N$ виконуватимуться нерівності $-\varepsilon<x_n-b\le y_n-b\le z_n-b<\varepsilon$, а значить, $-\varepsilon<y_n-b<\varepsilon$. Отже, $|x_n-b|<\varepsilon$ і $\lim\limits_{n\to\infty}y_n=b$. ◄

Теорема (*про обмеженість збіжної послідовності*). Кожна збіжна послідовність є обмеженою.

Доведіть самостійно.

Вправа 1. Навести приклад і переконатися, що обернене твердження, взагалі кажучи, неправильне.

Теорема (*про границю обмеженої і монотонної послідовності*). Кожна обмежена і монотонна послідовність має границю.

Приймемо цю теорему без доведення.

Використовуючи це твердження, можна довести таку формулу:

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n=e, \tag{2.7}$$

де e – трансцендентне число, яке з точністю 0,00001 дорівнює 2,71828.

Остання рівність має назву другої важливої границі й відіграє велику роль у теорії границь та математичному аналізі в цілому. Логарифми за основою e називають **натуральними:** $\log_e x=\ln x$. Ця функція, а також e^x, мають особливі властивості, які будуть з'ясовані пізніше.

Означення (*нескінченно малої послідовності*). Послідовність називають нескінченно малою, коли вона збіжна і має границею число 0.

Теорема (*про розклад послідовності, що має границю, на суму сталої і нескінченно малої*). Послідовність $\{x_n\}$ має границею число b тоді і тільки тоді, коли її можна подати сумою сталої b і нескінченно малої α_n.

► Необхідність (доведемо, що $x_n \to b \Rightarrow x_n = b + \alpha_n$). Нехай $x_n \to b$, коли $n \to \infty$. За означенням границі $(\forall \varepsilon > 0)$ $(\exists N \in \mathbb{N}): n > N \Rightarrow |x_n - b| < \varepsilon$. Це означає, що $x_n - b \to 0$. Позначимо нескінченно малу $x_n - b$ через α_n. Тоді $x_n - b = \alpha_n$ і $x_n = b + \alpha_n$. Необхідність доведено.

Достатність (доведемо, що $x_n = b + \alpha_n \Rightarrow x_n \to b$). Оскільки $x_n = b + \alpha_n$, то $\alpha_n = x_n - b$. За означенням границі $(\forall \varepsilon > 0)(\exists N \in \mathbb{N}): n > N \Rightarrow |\alpha_n| < \varepsilon$. А значить, $|x_n - b| < \varepsilon$. Тобто $x_n \to b$. Достатність доведено ◄

Теорема (*про суму нескінченно малих*). Сума (різниця) двох нескінченно малих є нескінченно малою.

► Нехай $\{x_n\}$ і $\{y_n\}$ збіжні до нуля послідовності.

Нехай $\varepsilon > 0$, тоді $\dfrac{\varepsilon}{2} > 0$. За означенням границі:

$$(\exists N_1 \in \mathbb{N}): n \in \mathbb{N}, n > N_1) \Rightarrow |x_n| < \frac{\varepsilon}{2}; \quad (\exists N_2 \in \mathbb{N}): n > N_2 \Rightarrow |y_n - b| < \frac{\varepsilon}{2}$$

Нехай $N = \max\{N_1, N_2\}$. Тоді

$$n > N \Rightarrow \begin{cases} |x_n| < \varepsilon / 2; \\ |y_n| < \varepsilon / 2. \end{cases} ◄$$

За властивостями модуля $|x_n + y_n| \le |x_n| + |y_n| < \dfrac{\varepsilon}{2} + \dfrac{\varepsilon}{2} < \varepsilon$.

Будемо говорити, що послідовність $\{x_n\}$ прямує до $+\infty$ і писати $\lim\limits_{n \to \infty} x_n = +\infty$, якщо для будь-якого $M > 0$ знайдеться таке натуральне число N, що для усіх $n > N$ виконується нерівність $x_n > M$. Або за допомогою кванторів: $(\forall M > 0)(\exists N \in \mathbb{N}): n > N \Rightarrow x_n > M$.

Аналогічно вводиться поняття послідовності, що прямує до $-\infty$: $(\forall M < 0)(\exists N \in \mathbb{N}): n > N \Rightarrow x_n < M$.

Кажуть, що послідовність прямує до ∞, якщо вона прямує до $+\infty$ або $-\infty$.

Означення (*нескінченно великої послідовності*). Безмежно великою називають послідовність, яка прямує до $+\infty$, або до $-\infty$.

Теорема (*про необмеженість нескінченно великої послідовності*) Нескінченно велика послідовність необмежена.

► Для нескінченно великої послідовності для будь-якого числа $M > 0$ знайдеться таке $N \in \mathbb{N}$, що для усіх $n > N$ виконується нерівність $|x_n > M|$. Отже, $\{x_n\}$ – необмежена. ◄

Обернене твердження не завжди правильне. Наприклад, послідовність $x_n = (-1)^n n$ необмежена, але не прямує ні до $+\infty$, ні до $-\infty$.

Теорема (*про зв'язок нескінченно малих і безмежно великих послідовностей*). Якщо $\{x_n\}$ нескінченно велика послідовність, то $\left\{\dfrac{1}{x_n}\right\}$ є безмежно малою і навпаки – за умови, що $x_n \neq 0$.

►Нехай $x_n \to +\infty$ при $n \to \infty$. Тоді $(\forall M > 0)(\exists N \in \mathbb{N}) : n > N \Rightarrow x_n > M$. Але $x_n > M \Leftrightarrow x_n^{-1} < \dfrac{1}{M}$, бо $M > 0$. Тому $n > N \Rightarrow \left|\dfrac{1}{x_n}\right| < \dfrac{1}{M}$ для $\forall M > 0$. Отже, $\left\{\dfrac{1}{x_n}\right\}$ – нескінченно мала.

Аналогічно доводемо це твердження для $x_n \to \infty$ ◄

Розглянемо властивості послідовностей.

В л а с т и в і с т ь 1. Границя сталої послідовності $x_n = c$ дорівнює c.

►Оскільки $|x_n - c| = 0$, нерівність $|x_n - c| < \varepsilon$ виконується для усіх $n \in \mathbb{N}$ і $\varepsilon > 0$. ◄

В л а с т и в і с т ь 2. Якщо $\{x_n\}$ збіжна і має границею число b, то й $\{cx_n\}$ ($c = \text{const}$) – збіжна і

$$\lim_{n\to\infty} cx_n = cb.$$

Доведіть самостійно.

Наслідок. Добуток сталої і нескінченно малої є нескінченно малою.

В л а с т и в і с т ь 3. Якщо послідовність $\{x_n\}$ – обмежена, а $\{\alpha_n\}$ – нескінченно мала, то $\{x_n\alpha_n\}$ є нескінченно малою.

Доведіть самостійно.

В л а с т и в і с т ь 4. (Теорема про границю суми, добутку і частки). Нехай $\{x_n\}$ і $\{y_n\}$ – збіжні послідовності з границями a і b відповідно, тоді

$x_n \pm y_n \to a \pm b$; $x_n y_n \to ab$; $\dfrac{x_n}{y_n} \to \dfrac{a}{b}$, якщо $b \neq 0$.

Ці властивості можна довести аналочічно доведенню теореми про суму нескінченно малих, виходячи із означення границі. Доведемо її для суми послідовностей, опираючись на теорему про розклад послідовності, що має границю на суму сталої і нескінченно малої.

► Нехай $x_n \to a$, $y_n \to b$. За теоремою про розклад послідовності, що має границю на суму сталої і нескінченно малої $x_n = a + \alpha_n$ і $y_n = b + \beta_n$, де α_n, β_n – нескінченно малі. Тоді $x_n + y_n = (a+b) + (\alpha_n + \beta_n)$. Оскільк $a + b = const$, $\alpha_n + \beta_n$ – нескінченно мала, то, за тією ж теоремою, $x_n + y_n \to a + b$.◄

Цілком аналогічно виглядають доведення для добутку та частки, що пропонуємо виконати самостійно.

Вправа 2. Довести, що останнє твердження справедливе для суми довільної скінченної кількості послідовностей.

Доведіть самостійно.

Вправа 3. Довести, що послідовності-доданки необов'язково збіжні, коли їхня сума – збіжна послідовність (вказівка: наведіть приклад двох розбіжних послідовностей, сума яких – збіжна).

В л а с т и в і с т ь 5. При граничному переході у нерівностях знак строгої нерівності слід заміняти нестрогим: якщо для збіжних послідовностей $x_n > y_n$ виконується для $n > N \in \mathbb{N}$, то $\lim\limits_{n\to\infty} x_n \ge \lim y_n$. Аналогічно, коли $x_n < y_n$, то $\lim\limits_{n\to\infty} x_n \le \lim y_n$. Наприклад, усі члени послідовності $x_n = \frac{1}{n}$ додатні $(x_n > 0)$, але $x_n \to 0$ при $n \to \infty$.

3.2. Границя функції та її властивості

Розглянемо задачу про наближення значень функції до числа b, коли її аргумент наближається до значення a. Зауважимо, що це питання не завжди має сенс. Наприклад, не має сенсу питання, до якого числа наближаються значення функції $y = \lg x$, коли x наближається до –1, оскільки x не може стати як завгодно близьким до точки $x = -1$, належачи області визначення функції $y = \lg x$.

Щоб виділити випадки, для яких це питання змістовне, введемо поняття точки скупчення множини.

Означення (*точки скупчення множини*). Точку $a \in \mathbb{R}$ називаємо точкою скупчення множини $M \subset \mathbb{R}$, якщо для будь-якого $\varepsilon > 0$ знайдеться $x \in M$, $x \ne a$ таке що $|x - a| < \varepsilon$.

Точка скупчення множини M може належати множині й може їй не належати. Але у множині M повинен знайтися елемент x, такий що $|x - a| < \varepsilon$ для будь-якого $\varepsilon > 0$.

Наприклад, кожна точка відрізка $[a;b]$ є точкою скупчення інтервалу $M = (a;b)$.

Справедливе і менш очевидне твердження. Якщо $x = a$ є точкою скупчення множини M, то існує безліч послідовностей $\{x_n\}$, усі елементи яких належать M і які збігаються до a.

Про наближення значень функції $f(x)$ до певного числа, коли x наближається до a, можна говорити лише, коли a – точка скупчення області визначення функції $D(f)$.

Відповідь на це питання не завжди проблематична.

Наприклад, можна стверджувати, що значення функції $y=2x+1$ наближаються до числа 5, коли x наближається до 2, бо значення цієї функції відрізнятимуться від числа 5 менше, ніж на довільне як завгодно мале число $\varepsilon>0$ для усіх досить близьких від 2 значень аргументів: $2-\frac{\varepsilon}{2}<x<2+\frac{\varepsilon}{2} \Rightarrow |y-5|<\varepsilon$. Це бачимо також із графіка функції.

Дамо строге означення того, що значення функції $f(x)$ як завгодно мало відрізнятимуться від числа b для усіх досить близьких до a значень її аргументу.

Означення (*границі функції у точці за Коші*[4]). Нехай $x=a$ точка скупчення області визначення функції $f(x)$. Число b називають границею функції $f(x)$ у точці a (при $x \to a$), якщо для будь-якого $\varepsilon>0$ знайдеться таке $\delta>0$, що для усіх $0<|x-a|<\delta$, $x \in D(f)$ виконується нерівність $|f(x)-b|<\varepsilon$.

Факт, що число b є границею функції $f(x)$ у точці $x=a$, записують так: $\lim\limits_{x \to a} f(x)=b$ або $f(x) \to b$ при $x \to a$.

Дане означення називають також означенням границі функції у точці «на мові $\varepsilon-\delta$».

Оскільки $x=a$ точка скупчення $D(f)$, в області визначення функції $D(f)$ можна вибрати безліч збіжних до a послідовностей $\{x_n\}$. Існує також і безліч послідовностей, утворених значеннями функцій на елементах послідовностей $\{x_n\}$. Це послідовності $\{f(x_n)\}$.

Границя функції у точці й границя послідовностей $\{f(x_n)\}$ взаємопов'язані. Справедлива така

Теорема. Число b є границею функції в точці $x=a$ тоді й тільки тоді, коли для кожної послідовності $\{x_n\}$ з області визначення функції $f(x)$, збіжної до a, відповідна послідовність значень функції $\{f(x_n)\}$ збіжна до числа b.

Приймемо цю теорему без доведення.

Сформульована теорема має характер необхідної й достатньої. Тому вона дає інше означення границі в точці, рівносильне раніше даному «на мові $\varepsilon-\delta$ ».

Означення (*границі функції у точці за Гейне*[5]). Число b називають границею функції $f(x)$ при $x \to a, a$ – точка скупчення множини $D(f)$, якщо для кожної послідовності $\{x_n\}$ із області визначення функції, збіжної до a, відповідна послідовність значень функції $\{f(x_n)\}$ збіжна до числа b.

---

[4] Коші (Cauchy) Огюстен Луї – видатний французький математик (1789 – 1857).
[5] Гейне (Heine) Генріх Едуард – німецький математик (1821 – 1881).

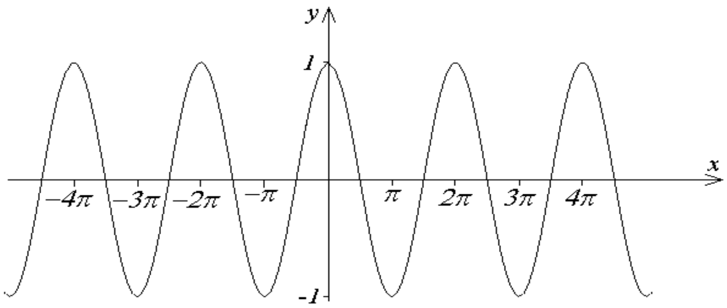


Рис.3.2 *а*. $y = \cos x$

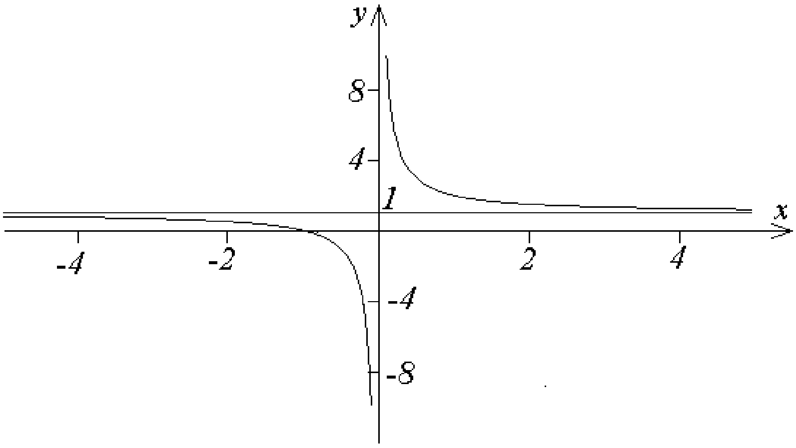


Рис. 3.2 *б* $f_2(x) = 1 + 1/x$.

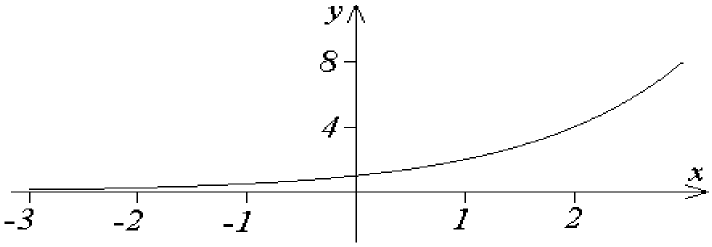


Рис. 3.2 *в* $y = 2^x$.

Функція $f(x)$ не має границі в точці a у випадках: хоча б для однієї послідовності $\{x_n\}$, $x_n \to a$, відповідна послідовність $\{f(x_n)\}$ не має границі; хоча б для двох послідовностей $\{x_n'\} \in D(f)$, $\{x_n''\} \in D(f)$ відповідні послідовності $\{f(x_n')\}$, $\{f(x_n'')\}$ мають різні границі.

Уведемо поняття границі функції у нескінченності.

Для прикладу розглянемо три функції

$f_1(x) = \cos x$; $f_2(x) = \dfrac{x+1}{x}$; $f_3(x) = 2^x$ (рис. 3.2 *а* – *в*).

Для першої з них: яке б не було великим $|x|$ для ще більших значень $|x|$, функція $f(x)$ прийматиме усі значення з відрізка $[-1;1]$. Можна стверджувати, що для цієї функції не спостерігаємо тенденції зближення значень до певного числа, коли аргумент необмежено зростає. Значення другої функції будуть як завгодно близькими до одиниці, коли її аргумент достатньо великий за модулем. Третя функція необмежено зростає, коли аргумент приймає необмежено великі додатні значення і приймає як завгодно близькі до нуля значення, коли аргумент набуває необмежено великих за модулем від'ємних значень.

Для строгого опису тенденції у зміні значень функції під час необмеженого зростання за модулем її аргументу введемо поняття границі функції у нескінченності. Це поняття також не завжди має сенс. Так, воно позбавлене змісту для функції $y=\sqrt{1-x^2}$, аргумент якої не може приймати значень більших за модулем, ніж 1 ($|x|>1$).

Поширимо поняття точки скупчення на нескінченно віддалені точки $+\infty$ та $-\infty$. числової осі. Безмежно віддалену точку $+\infty$ називають **точкою скупчення** множини $M\subset\mathbb{R}$, якщо для будь-якого $K>0$ знайдеться число x: $x>K, x\in M$. Аналогічно даємо означення точки скупчення $-\infty$.

Означення (*границі функції у* $+\infty$). Нехай $+\infty$ – точка скупчення $D(f)$. Число b називаємо границею функції $f(x)$ при $x\to+\infty$, якщо для будь-якого $\varepsilon>0$ знайдеться таке $N>0$, що для усіх $x>N$, $x\in D(f)$ виконується рівність $|f(x)-b|<\varepsilon$.

Означення (*границі функції у* $-\infty$). Нехай функція $-\infty$ – точка скупчення $D(f)$. Число b називається границею $f(x)$ при $x\to-\infty$, якщо для будь-якого $\varepsilon>0$ знайдеться число $N<0$ таке, що для усіх $x<N$ і $x\in D(f)$ виконується нерівність $|f(x)-b|<\varepsilon$.

Факт, що $f(x)\to b$, коли $x\to+\infty(x\to-\infty)$, записують так:

$$\lim_{x\to+\infty} f(x)=b \qquad \left(\lim_{x\to-\infty} f(x)\right).$$

Якщо $f(x)\to b$, коли $x\to+\infty$ і коли $x\to-\infty$, то кажуть, що число b є границею функції $f(x)$ у нескінченності й пишуть

$$\lim_{x\to\infty} f(x)=b \qquad .$$

Приклад 1. Довести, що $f(x)=\dfrac{x+1}{x}$ прямує до 1, коли $x\to\infty$.

Розглянемо нерівність $\left|\dfrac{x+1}{x}-1\right|<\varepsilon$.

$$\left|\frac{x+1}{x}-1\right|<\varepsilon \Leftrightarrow \frac{1}{|x|}<\varepsilon \Leftrightarrow |x|>\frac{1}{\varepsilon}.$$

Покладемо $N=\dfrac{1}{\varepsilon}$ і отримаємо

$$|x|>N \Rightarrow \left|f(x)-1\right|<\varepsilon.$$

Будемо казати, що функція, усі значення якої перевищують будь-яке наперед задане додатне число N для усіх досить великих значень аргументу, прямує до $+\infty$, коли $x\to+\infty$. Дамо відповідне означення.

$$\Big(\big(\forall M>0\big)\big(M;+\infty\big)\cap D\big(f\big)\neq\varnothing\Big)\wedge\Big(\big(\forall K>0\big)\big(\exists N>0\big): x>N\Rightarrow f\big(x\big)>K\Big).$$

Тоді пишуть $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$. Аналогічно вводимо поняття границь $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=-\infty$ $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=\infty$ та безмежних границь для $x\to-\infty$.

Поняття безмежно малої функції вводимо аналогічно як послідовності.

Означення (*безмежно малої функції*). Функцію $f(x)$ називають безмежно малою при $x\to a$ (в околі точки a), якщо $f(x)\to 0$, при $x\to a$.

Функцію називають нескінченно малою також при $x\to\infty$ $\big(x\to-\infty,\quad x\to+\infty\big)$, коли її відповідна границя дорівнює 0.

Властивість функції бути безмежно малою є локальною, залежить від точки, у якій цю властивість розглядаємо. Так, наприклад, функція $f(x)=1-\cos x$ є безмежно малою в околі точки $x=0,$ але не є такою при $x\to\dfrac{\pi}{2}$.

У зв'язку з еквівалентністю обох означень границі (за Коші та Гейне) властивості границі функції при $x\to a$ $(x\to\infty)$ повторюють відповідні властивості границі послідовності.

Теорема (*про єдиність границі*). Границя функції єдина, якщо вона існує.

Теорема (*про розклад функції, що має границю на суму сталої і нескінченно малої*). Число b є границею функції $f(x)$ при $x\to a$ $(x\to\infty)$ тоді й тільки тоді, якщо $f(x)=b+\alpha(x)$, $\alpha(x)$ – нескінченно мала величина при $x\to a$ $(x\to\infty)$.

Теорема (*про границю проміжної функції*). Якщо при $x\to a$ $(x\to\infty)$ $f(x)\to b$ і $h(x)\to b$, в деякому околі точки a (при $x\to\infty$) виконується нерівність $f(x)\le q(x)\le h(x)$, то $q(x)\to b$ при $x\to a$ $(x\to\infty)$.

Результатом теореми про границю проміжної функції та другої важливої границі для числових послідовностей є твердження

$$\lim_{x\to 0}\big(1+x\big)^{\frac{1}{x}}=e, \tag{2.8}$$

яке також називають **другою важливою границею**.

Опираючись на теорему про границю проміжної функції, доведемо твердження:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1, \tag{2.9}$$

відоме як перша важлива границя.

►Виходячи з геометричної інтерпретації функцій $\sin x,\quad \operatorname{tg} x$ маємо

$$\sin x < x < \operatorname{tg} x, \text{ якщо } x \in \left(0; \frac{\pi}{2}\right).$$

Або, поділивши на $\sin x$,

$$1 < \frac{x}{\sin x} < \frac{1}{\cos x}.$$

Перейшовши до обернених величин, отримуємо

$$\cos x < \frac{\sin x}{x} < 1.$$

Останні нерівності виконуються в області $\left(-\frac{\pi}{2}; 0\right) \cup \left(0; \frac{\pi}{2}\right)$.

Для доведення формули (2.9) досить показати, що $\lim\limits_{x \to 0} \cos x = 1$.

Оскільки

$$|\cos x - 1| < \varepsilon \Leftrightarrow 2\sin^2 \frac{x}{2} < \varepsilon \Leftarrow 2\sin\left|\frac{x}{2}\right| < \varepsilon \Leftarrow |x| < \varepsilon,$$

то, поклавши $\delta = \varepsilon$, отримуємо

$$|x| < \delta \Rightarrow |\cos x - 1| < \varepsilon$$

для будь-якого $\varepsilon < \frac{\pi}{2}$. Це й означає, що $\lim\limits_{x \to 0} \cos x = 1$. ◄

Теорема (*про обмеженість функції, що має границю*). Функція $f(x)$, що має границю при $x \to a$ $(x \to \infty)$, обмежена у деякому околі точки a (при $x \to \infty$).

Теорема (*про границю складеної функції*). Нехай при $t \to c$ функція $\varphi(t) \to a$ і тотожно не дорівнює сталій a у кожному околі точки c. Нехай c – точка скупчення множини $D(f)$. Якщо $f(x) \to b$ ($f(x) \to \pm\infty$) при $x \to a$, то складена функція $f(\varphi(t)) \to b$ ($f(\varphi(t)) \to \pm\infty$) при $t \to c$.

Зауваження. Теорема справедлива і у більш загальному випадку, коли одна чи більше точок a, b, c числової осі є безмежно віддаленими.

Функція $\varphi(t)$ не має бути тотожно рівною сталій a у деякому околі точки c, бо інакше, для невизначеної у точці a функції $f(x)$, c не є точкою скупчення області визначення функції $f(\varphi(t))$.

Теорема про границю складеної функції обґрунтовує можливість заміни змінної при обчисленні границі.

Приклад 2. Знайти границю $\lim\limits_{x \to \pi} \frac{\sin(x-\pi)}{(x-\pi)}$.

$$\lim_{x \to \pi} \frac{\sin(x-\pi)}{(x-\pi)} = \begin{bmatrix} y = x - \pi \\ y \to 0 \end{bmatrix} = \lim_{y \to 0} \frac{\sin y}{y} = 1.$$

Приклад 3. Знайти границю $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{2^x-1}{x}$.

$$\lim_{x\to 0}\frac{2^x-1}{x}=\begin{bmatrix}2^x-1=y\\ y\to 0\end{bmatrix}=\lim_{y\to 0}\frac{y}{\log_2(1+y)}=\ln 2\lim_{y\to 0}\frac{y}{\ln(1+y)}=\ln 2\lim_{y\to 0}\frac{1}{\frac{1}{y}\ln(1+y)}=$$

$$\ln 2\lim_{y\to 0}\frac{1}{\ln(1+y)^{\frac{1}{y}}}=\frac{\ln 2}{\ln e}=\ln 2.$$

Способом заміни змінної легко переконатися у справедливості таких формул, споріднених з першою важливою границею (2.9):

$$\lim_{x\to 0}\frac{x}{\arcsin x}=1,\quad \lim_{x\to\infty}\frac{\sin\frac{1}{x}}{\frac{1}{x}}=1$$

та, споріднених з другою (2.8):

$$\lim_{x\to 0}(1-x)^{-\frac{1}{x}}=e,\ \lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^{x}=e,\ \lim_{x\to\infty}\left(1-\frac{1}{x}\right)^{-x}=e.$$

Теорема (*про границю суми, добутку та частки функцій*). Якщо при $x\to a$ ($x\to\infty$) функції $f(x)$ і $g(x)$ мають границями числа b і c відповідно, то при $x\to a$ ($x\to\infty$) $f(x)+g(x)\to b+c$, $f(x)g(x)\to bc$ і $\dfrac{f(x)}{g(x)}\to\dfrac{b}{c}$, якщо $c\neq 0$.

Наслідок. Якщо $c=const$, а $f(x)\to b$ при $x\to a$ ($x\to\infty$), то $cf(x)\to cb$ при $x\to a$ ($x\to\infty$).

3.3. Однобічні границі функції у точці

Дамо поняття границі функції $f(x)$, коли x наближається до точки $x=a$, залишаючись більшим (меншим) за a.

Означення (*правобічної границі функції у точці*). Нехай для будь-якого $\delta>0$ функція $f(x)$ визначена хоча б в одній точці інтервалу $(a;a+\delta)$.Число b називають границею функції $f(x)$ при x що прямує до точки a справа, якщо для будь-якого $\varepsilon>0$ знайдеться таке $\delta(\varepsilon)>0$, що нерівність $|f(x)-b|<\varepsilon$ виконується для усіх $a<x<a+\delta$ з області визначення функції $f(x)$.

Перефразуємо дане означення, використовуючи квантори:

$$\left((\forall\delta>0)(a;a+\delta)\cap D(f)\neq\varnothing\right)\wedge(\forall\varepsilon>0)(\exists\delta>0):a<x<a+\delta\Rightarrow\left|f(x)-b\right|<\varepsilon.$$

Цей факт записують так:

$$\lim_{x\to a+0}f(x)=b.$$

Аналогічно вводимо поняття лівобічної границі в функції у точці:

$$\left(\left(\forall\delta>0\right)\left(a-\delta;a\right)\cap D\left(f\right)\neq\varnothing\right)\wedge\left(\forall\varepsilon>0\right)\left(\exists\delta>0\right): a-\delta<x<a\Rightarrow\left|f\left(x\right)-b\right|<\varepsilon$$

$$\lim_{x\to a-0} f(x)=b.$$

Приклад. Переконатись, що функція $f\left(x\right)=\dfrac{|x|}{x}$ при $x\to+0$ прямує до 1, а при $x\to-0$ до -1.

Нерівність $\left|f\left(x\right)-1\right|<\varepsilon,\quad \varepsilon>0$ виконується для усіх $x>0$. Тому для будь-якого $\varepsilon>0$ взявши, наприклад, що $\delta=1$, отримуємо

$$0<x<\delta\Rightarrow\left|f\left(x\right)-1\right|<\varepsilon.$$

Отже, $\lim\limits_{x\to+0} f(x)=1$.

Так само, оскільки $\left|f\left(x\right)+1\right|<\varepsilon\Leftrightarrow x<0$, то, взявши $\delta=1$, маємо

$$-\delta<x<0\Rightarrow\left|f\left(x\right)+1\right|<\varepsilon.$$

Тобто $\lim\limits_{x\to-0} f(x)=1$.

Зауважимо, що функція $f\left(x\right)=\dfrac{|x|}{x}$ не має границі в точці $x=0$, бо яким би малим не було число $\delta>0$ в кожному околі $\left(-\delta;\delta\right)$ точки 0, різниця значень функції $f\left(x\right)$ дорівнює 2 і не може стати як завгодно малою.

Виникає запитання, чи пов'язані певним способом однобічні границі функції в точці a з границею у цій точці?

Теорема (*про зв'язок границі функції у точці й її однобічних границь у цій точці*). Якщо існують обидві однобічні границі функції у точці, які рівні між собою і дорівнюють числу b, то границя функції у цій точці існує і дорівнює числу b.

►Нехай $\lim\limits_{x\to a-0} f(x)=b$ і $\lim\limits_{x\to a+0} f(x)=b$. Тобто нехай для кожного додатного числа δ функція $f\left(x\right)$ визначає хоча б у одній точці інтервалів $\left(a-\delta;a\right)$ та $\left(a;a+\delta\right)$ і

$$\left(\forall\varepsilon>0\right)\left(\exists\delta_1>0\right): a<x<a+\delta_1\Rightarrow\left|f\left(x\right)-b\right|<\varepsilon;$$

$$\left(\forall\varepsilon>0\right)\left(\exists\delta_2>0\right): a-\delta_2<x<a\Rightarrow\left|f\left(x\right)-b\right|<\varepsilon.$$

Виберемо $\delta=\min\left\{\delta_1;\delta_2\right\}$; Тоді $0<\left|x-a\right|<\delta\Rightarrow\left|f\left(x\right)-b\right|<\varepsilon$

Тобто $\lim\limits_{x\to a} f(x)=b$.◄

Існування обох однобічних границь функції у точці не гарантує границі функції у цій точці, а є лише необхідною для цього умовою.

3.4. Неперервність функції в точці

Лівобічна (правобічна) границя функції $f(x)$ у точці $x=a$ не залежить від визначеності функції у цій точці, а коли $f(a)$ визначене, його значення не впливає на границю у точці a. Так, наприклад, усі три функції $f_1(x)=\dfrac{x^2}{x}$, $f_2(x)=x$, $f_3(x)=\begin{cases} x, x\neq 0 \\ 1, x=0 \end{cases}$ мають при $x\to+0$ границею число 0.

Ураховуючи співвідношення між однобічними границями в точці a і значення у цій точці, приходимо до поняття однобічної неперервності функції у точці.

Означення (*однобічної неперервності функції у точці*). Функцію $f(x)$ називають неперервною у точці $x=a$ справа (зліва), якщо виконуються такі три умови:

– функція $f(x)$ визначена в точці $x=a$;

– існує границя функція $f(x)$ при $x\to a+0\,(x\to a-0)$;

– однобічна границя у точці a дорівнює $f(a)$.

Нехай для будь-якого $\delta>0$ $\quad (a;a+\delta)\cap D(f)\neq\varnothing$. Будемо говорити, що $f(x)$ розривна (терпить розрив) справа у точці $x=a$, якщо $f(x)$ не є неперервною справа у цій точці.

Аналогічно, якщо $f(x)$ не є неперервною у точці a зліва, кажуть, що $f(x)$ розривна у точці a зліва.

Точку скупчення $D(f)$, у якій $f(x)$ не є неперервною, називають **точкою розриву** функції $f(x)$.

Приклад. Дослідити функцію $f(x)=\begin{cases} 1, x\geq 0; \\ -1, x<0 \end{cases}$ на неперервність у точці 0 зліва та справа.

У точці $x=0$ функція визначена: $f(0)=1$. Знаходимо однобічні границі:

$\lim\limits_{x\to+0} f(x)=\lim\limits_{x\to+0}1=1.$

Отже, $f(x)$ неперервна у точці $x=0$ справа.

$$\lim_{x\to-0} f(x)=\lim_{x\to-0}(-1)=-1\neq f(0).$$

Отже, $f(x)$ розривна у точці $x=0$ зліва.

Функцію, неперервну в точці $x=a$ зліва і справа називають **неперервною** у цій точці. Тобто $f(x)$ неперервна в точці a тоді й тільки тоді, якщо

$$\lim_{x\to a} f(x)=f(a). \tag{2.10}$$

Оскільки $\lim\limits_{x\to a} x = a$, останню формулу можна подати так:

$$\lim_{x\to a} f\left(x\right) = f\left(\lim_{x\to a} x\right). \qquad (2.11)$$

Найтиповішим є випадок, коли для точки a існує $\delta > 0$ таке, що $\left(a-\delta;\quad a+\delta\right) \subset D\left(f\right)$. Тоді для достатньо малих $|\Delta x|$ визначено $f(a+\Delta x)$.

Означення (*приросту функції*). Нехай функція $f\left(x\right)$ визначена у точці a і деякому її околі. Величину $\Delta f(a) = f(a+\Delta x) - f(a)$, визначену для достатньо малих $|\Delta x|$, називають приростом функції у точці a.

Приріст функції у точці a є функцією від $|\Delta x|$ і володіє такою властивістю.

Теорема (*про приріст неперервної у точці функції*). Нехай функція $f\left(x\right)$ визначена в точці a і деякому її околі. Функція $f\left(x\right)$ неперервна в точці a тоді і тільки тоді, коли $\Delta f(a)$ – нескінченно мала величина.

► Необхідність. Нехай $f\left(x\right)$ неперервна при $x = a$. Тоді $\lim\limits_{x\to a} f\left(x\right) = f\left(a\right)$. І, отже, $\lim\limits_{x\to a} f\left(x\right) - f\left(a\right) = 0$. Уведемо нову змінну: $\Delta x = x - a$. Тоді $x = a + \Delta x$ і $\lim\limits_{x\to a} f(x) = \lim\limits_{\Delta x\to 0} f(a+\Delta x)$. Звідси $\lim\limits_{\Delta x\to 0}(f(a+\Delta x) - f(a)) = 0$. Тобто $\lim\limits_{\Delta x\to 0} \Delta f(a) = 0$. Приріст $f\left(x\right)$ у точці a є нескінченно малою величиною. Необхідність доведено.

Достатність. Нехай $\Delta f(a)$ – нескінченно мала величина. Тобто нехай $\lim\limits_{\Delta x\to 0}(f(a+\Delta x) - f(a)) = 0$. Тоді $\lim\limits_{\Delta x\to 0} f(a+\Delta x) = f(a)$. Уведемо нову змінну: $a + \Delta x = x$. $\lim\limits_{\Delta x\to 0} f(a+\Delta x) = \lim\limits_{x\to a} f(x)$. Тобто $\lim\limits_{x\to a} f(x) = f(a)$. Функція $f\left(x\right)$ неперервна в точці $x = a$. Достатність доведено. Теорему доведено.◄

3.5. Властивості неперервних функцій

В л а с т и в і с т ь 1 (*неперервність суми, добутку і частки функції*). Сума (різниця), добуток і частка двох неперервних у точці a функцій є неперервною у цій точці функцією (знаменник у точці a вважаємо відмінним від нуля).

В л а с т и в і с т ь 2 (*неперервність складеної функції*). Якщо функція $f\left(x\right)$ неперервна в точці a, $\varphi\left(t\right)$ неперервна в точці c і $\varphi\left(c\right) = a$, то складена функція $f\left(\varphi\left(t\right)\right)$ неперервна у точці c.

Властивості 1,2 довести самостійно.

Означення (*неперервної на інтервалі функції*). Функцію $f\left(x\right)$ називають неперервною на інтервалі $\left(a;b\right)$, якщо вона неперервна в кожній точці цього інтервалу.

Означення (*неперервної на відрізку функції*). Функцію $f\left(x\right)$ називають неперервною на відрізку $\left[a;b\right]$, коли вона неперервна на інтервалі $\left(a;b\right)$ та неперервна у точці b зліва і у точці a справа.

В л а с т и в і с т ь 3 (*про неперервність основних елементарних функцій*). Кожна основна елементарна функція неперервна в області свого визначення.

Доведемо неперервність функції $y=\sin x$. Покажемо, що коли $\Delta x\to 0$, то $\Delta y\left(a\right)\to 0$ для $a\in\mathbb{R}$.

$$\Delta y(a)=\sin(a+\Delta x)-\sin a=2\sin\frac{\Delta x}{2}\cos\left(a+\frac{\Delta x}{2}\right).$$

Оскільки

$\left|\Delta y\left(a\right)\right|\le\left|2\sin\frac{\Delta x}{2}\right|\le\left|\Delta x\right|$, то коли $\varepsilon=\delta>0$ $\left|\Delta x\right|<\delta\Rightarrow\left|\Delta y\left(a\right)\right|<\varepsilon$. І, отже, $\Delta y\left(a\right)\to 0$, якщо $\Delta x\to 0$. Для решти функцій доведення аналогічне.

Наслідок. Усі елементарні функції неперервні у області свого визначення.

Останнє твердження має особливе практичне значення для обчислення границь, бо дозволяє замінити задачу знаходження границі функції обчисленням її значення.

Приклад 1. Знайти границю $\lim\limits_{x\to 1}\frac{2^{\sqrt{x}}}{\log_3 x+1}$. Оскільки функція $f\left(x\right)=\frac{2^{\sqrt{x}}}{\log_3 x+1}$ неперервна в точці $x=0$, то $\lim\limits_{x\to 1}\frac{2^{\sqrt{x}}}{\log_3 x+1}=2$.

Приклад 2. Знайти границю $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\arcsin\left(tg2x\right)}{2^x-1}$. Оскільки в точці $x=0$ знаменник дорівнює 0, то функція, границю якої слід знайти, не є неперервною у точці $x=0$. Пряме використання властивостей неперервної функції не застосовне. Зробимо перетворення, використовуючи властивості границь.

$$\lim_{x\to 0}\frac{\arcsin\left(tg2x\right)}{2^x-1}=\lim_{x\to 0}\frac{\arcsin\left(tg2x\right)}{tg2x}\lim_{x\to 0}\frac{tg2x}{2^x-1}=\lim_{x\to 0}\frac{\arcsin\left(tg2x\right)}{tg2x}\lim_{x\to 0}\frac{2x}{2^x-1}\lim_{x\to 0}\frac{tg2x}{2x}.$$

Обчислимо кожну границю окремо.

$$\lim_{x\to 0}\frac{\arcsin\left(tg2x\right)}{tg2x}=\begin{bmatrix} tg2x=y \\ y\to 0\end{bmatrix}=\lim_{y\to 0}\frac{\arcsin y}{y}=\begin{bmatrix} y=\sin t \\ t\to 0\end{bmatrix}=\lim_{t\to 0}\frac{t}{\sin t}=1.$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{2x}{2^x-1}=\begin{bmatrix}2^x-1=y, & y\to 0\\ x=\log_2(1+y) & \end{bmatrix}=2\lim_{y\to 0}\frac{\log_2(1+y)}{y}=2\lim_{y\to 0}\log_2(1+y)^{\frac{1}{y}}=$$

$$=2\log_2\left(\lim_{y=0}(1+y)^{\frac{1}{y}}\right)=2\log_2 e$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{tg2x}{2x}=\lim_{x\to 0}\frac{1}{\cos^2 x}\lim_{x\to 0}\frac{\sin 2x}{2x}=\lim_{x\to 0}\frac{\sin(2x)}{(2x)}=1.$$

Отже,

$$\lim_{x\to 0}\frac{\arcsin(tg2x)}{2^x-1}=2\log_2 e.$$

Розглянемо тепер властивості неперервних на відрізку функцій.

Теорема (*Веєрштраса*[6] *про обмеженість неперервної функції*).
Кожна неперервна на відрізку $[a;b]$ функція обмежена на цьому відрізку.

Теорема (*Веєрштраса про найбільше і найменше значення неперервної функції*).
Кожна неперервна на відрізку $[a;b]$ функція приймає у деяких точках цього відрізка своє найбільше і найменше значення. Тобто

$$(\exists x' \in [a;b])(\forall x\in[a;b]): f(x')\geq f(x)$$

і

$$(\exists x'' \in [a;b])(\forall x\in[a;b]): f(x'')\leq f(x).$$

Теорема (*Больцано*[7]*-Коші про проміжне значення функції*) .
Якщо функція $f(x)$ неперервна на відрізку $[a;b]$ і $A=\min\{f(a), f(b)\}$, $B=\max\{f(a), f(b)\}$, то для будь-якого $C\in[A;B]$ знайдеться $c\in[a;b]$ таке, що $f(c)=C$.

Зокрема, якщо $f(x)$ неперервна на $[a;b]$ і $f(a)<0$, а $f(b)>0$, то рівняння $f(x)=0$ на відрізку $[a;b]$ має принаймні один корінь.

При обчисленні границі функцій у точці корисно пам'ятати, що для неперервної на $[a;b]$ функції $f(x)$ допустима перестановка значків функції і границі:

$$\lim_{x\to c} f(x)= f\left(\lim_{x\to c} x\right)\qquad c\in[a;b].$$

[6] Веєрштрас (Weierstrass) Карл Теодор Вільгельм – знаменитий німецький математик (1815 – 1897).
[7] Больцано (Bolzano) Бернард – знаменитий чеський математик, теолог, філософ (1781 – 1848).

3.6. Точки розриву і їхня класифікація

Нехай $x = a$ – точка розриву функції $f(x)$.

Означення (*усувної точки розриву*). Усувною точкою розриву називають точку, у якій функція $f(x)$ невизначена і у якій існують обидві, рівні між собою, однобічні границі.

Наприклад, $x = 0$ усувна точка розриву функції $f(x) = \dfrac{\sin 2x}{x}$, бо $0 \notin D(f)$, $f(x) \to 2$ при $x \to +0$ і при $x \to -0$.

В усувній точці розриву завжди можна так довизначити функцію, що довизначена функція стане неперервною.

Наприклад, функція $f(x) = \begin{cases} \dfrac{\sin 2x}{x}, & x \neq 0 \\ 2, & x = 0 \end{cases}$ неперервна в $\mathbb{R}$.

Означення (*точки розриву першого роду*). Точкою розриву першого роду або точкою стрибка називають точку, у якій існують обидві не рівні між собою однобічні границі.

Наприклад, точка $x = 0$ – точка розриву першого роду функції $f(x) = \dfrac{\sin x}{|x|}$, бо $f(x) \to 1$ при $x \to +0$ і $f(x) \to -1$ при $x \to -0$.

Означення (*точки розриву другого роду*). Точкою розриву другого роду називають точку, у якій хоча б одна з однобічних границь безмежна або не існує.

Наприклад, функція $y = \sin\dfrac{1}{x}$ не має границі ні при $x \to +0$, ні при $x \to -0$, тому $x = 0$ її точка розриву другого роду; функція $y = \begin{cases} 1, & x \leq 0 \\ \dfrac{1}{x}, & x > 0 \end{cases}$ прямує до ∞ при $x \to +0$, тому $x = 0$ її точка розриву другого роду.

Схема дослідження функції на неперервність:

1) визначаємо $D(f)$;

2) визначаємо точки $x_i \in D(f)$, у яких функція змінює аналітичний вираз;

3) визначаємо точки y_i, у яких функція не визначена і які є точками скупчення $D(f)$;

4) досліджуємо неперервність функції у точках x_i, y_i.

Приклад 1. Дослідити на неперервність функцію $f(x) = \operatorname{arctg}\dfrac{1}{x}$.

Функція не визначена у точці $x=0$, яка є точкою скупчення $D(f)$. Оскільки $f(x)\to\frac{\pi}{2}$ при $x\to+0$ і $f(x)\to-\frac{\pi}{2}$ при $x\to-0$, то $x=0$ точка розриву першого роду. В областях $(-\infty;0)$, $(0;+\infty)$ функція неперервна.

Приклад 2. Дослідити на неперервність функцію $y=2^{\frac{1}{x}}$. Функція визначена $\mathbb{R}/\{o\}$, $x=0$ – точка скупчення $D(f)$. Оскільки $f(x)\to+\infty$ при $x\to+0$, $x=0$ – точка розриву другого роду. В областях $(-\infty;0)$, $(0;+\infty)$ функція неперервна.

3.7. Порівняння нескінченно малих

Нагадаємо, що нескінченно малою в околі точки a називають функцію $f(x)$, що прямує до 0, коли $x\to a$ $(x\to\infty)$. Не усі нескінченно малі при $x\to a\,(x\to\pm\infty)$ варто вважати однаковими. Справді, $\alpha(x)=x$, $\beta(x)=x^2$ і $\gamma(x)=\sqrt{|x|}$ нескінченно малі при $x\to 0$. Але $\frac{\beta(x)}{\alpha(x)}\to 0$, а $\frac{\gamma(x)}{\alpha(x)}\to\infty$, коли $x\to 0$. Це дає підстави вважати , що $\beta(x)$ прямує до нуля швидше, а $\gamma(x)$ повільніше за $\alpha(x)$. Дамо строгі означення для порівняння нескінченно малих.

Означення (*нескінченно малих однакового порядку*). Нескінченно малі величини $\alpha(x)$ і $\beta(x)$ при $x\to a$ $(x\to\pm\infty)$ називають однакового порядку, якщо $\frac{\alpha(x)}{\beta(x)}$ має скінченну нульову границю при $x\to a$ $(x\to\pm\infty)$.

Тут і далі у цьому параграфі вважаємо, що знаменник не перетворюється у нуль в усіх точках жодного околу точки a (для усіх $|x|>M$, M – будь-яке додатне число).

Приклад 1. Функції $\alpha(x)=\sqrt{1+x}-1$ і $\beta(x)=x$ при $x\to 0$ є нескінченно малими однакового порядку, бо $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sqrt{1+x}-1}{x}=2$.

Означення (*еквівалентних нескінченно малих*). Нескінченно малі величини $\alpha(x)$ і $\beta(x)$ при $x\to a$ $(x\to\pm\infty)$ називають еквівалентними, якщо $\frac{\alpha(x)}{\beta(x)}\to 1$.

Означення (*порядку нескінченно малої k-того порядку*). Нехай $\alpha(x)$ і $\beta(x)$ нескінченно малі величини при $x\to a$ $(x\to\pm\infty)$. Якщо $(\alpha(x))^n$ і $\beta(x)$ є величинами однакового порядку, то $\beta(x)$ називають величиною k-того порядку відносно $\alpha(x)$.

Приклад 2. При $x \to \infty$ $\beta(x) = \dfrac{1}{x^2}$ є нескінченно малою другого порядку відносно $\sin\dfrac{1}{2x}$, бо $\dfrac{\sin^2 \frac{1}{2x}}{\frac{1}{x^2}} \to \dfrac{1}{4}$, коли $x \to \infty$.

Якщо нескінченно мала $\alpha(x)$ має порядок $k\ (k > 1)$ проти нескінченно малої $\beta(x)$, то кажуть, що $\alpha(x)$ є величиною вищого порядку малості, ніж $\beta(x)$. Цей факт записують так: $\alpha(x) = o(\beta(x))$ і читають «$\alpha(x)$ є o маленьке порівняно з $\beta(x)$ при $x \to a\ (x \to \pm\infty)$».

Символ o використовують також, коли знаменник не є нескінченно малою величиною. Тоді запис $\alpha(x) = o(\beta(x))$ означає, що $\dfrac{\alpha(x)}{\beta(x)} \to 0$. Наприклад, $x = o(1)$ при $x \to 0$.

Наприклад, $\mathrm{tg}^2 x = o(\sin x)$ при $x \to 0$, бо $\dfrac{\mathrm{tg}^2 x}{\sin x} \to 0$, при $x \to 0$.

Запис $o(f(x))$ означає не одну, а цілий клас функцій. Тому з рівності $f + o(f) = g + o(g)$ при $x \to a$ аж ніяк не випливає, що $f(x) = g(x)$ для $x \neq a$.

Різниця (сума) нескінченно малих однакового порядку може мати той же або вищий порядок. Наприклад, при $x \to 0$ $tg2x - \sin x$ має однаковий порядок і з $\sin x$ і з $\mathrm{tg}\, x$, але $\mathrm{tg}\, x - \sin x = o(\sin x)$.

Усі нижче наведені нескінченно малі при $x \to 0$ є еквівалентними:

$$x \sim \sin x \sim \mathrm{tg}\, x \sim \arcsin x \sim \mathrm{arctg}\, x \sim e^x - 1 \sim \ln(1+x) \sim 2\left(\sqrt{1+x} - 1\right).$$

При обчисленні границі дробу, чисельник та знаменник якого є добутком скінченної кількості нескінченно малих величин, кожен співмножник знаменника і чисельника можна замінювати еквівалентною нескінченно малою величиною.

Приклад 3. Обчислити границю $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\mathrm{arctg}\left(e^{x^3} - 1\right)}{\ln\left(1 + x^2\right) \sin 5x}$.

Оскільки $e^{x^3} - 1 \sim x^3$, $\mathrm{arctg}\, x^3 \sim x^3$, $\ln\left(1 + x^2\right) \sim x^2$, $\sin 5x \sim 5x$ при $x \to 0$, то, замінивши усі співмножники на їм еквівалентні нескінченно малі, отримуємо: $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\mathrm{arctg}\left(e^{x^3} - 1\right)}{\ln\left(1 + x^2\right) \sin 5x} = \lim\limits_{x \to 0} \dfrac{x^3}{x^2 5x} = \dfrac{1}{5}$.

ЛІТЕРАТУРА

1.Дубовик В.П. Вища математика: навч. посіб. для студ. вищ. навч. зак. / В.П. Дубовик, І.І Юрик. – К.: А.С.К., 2009. – 648с.

2. Дороговцев А.Я. Математичний аналіз: Підручник у двох частинах. Частина 1. /Дороговцев А.Я. – К.: Либідь, 1993. – 320с.

НОТАТКИ

НОТАТКИ