

УДК. 531.374; 539.213; 539.3

М.Михайлишин, канд.фіз.-мат.наук; І.Капаціла

Тернопільський державний технічний університет імені Івана Пулюя

ВИКОРИСТАННЯ ДЕФОРМАЦІЙНОЇ ТЕОРІЇ ПЛАСТИЧНОСТІ ДЛЯ МОДЕЛЮВАННЯ ПРОЦЕСІВ ЗВАРЮВАННЯ ТОНКИХ ЕЛЕМЕНТІВ КОНСТРУКЦІЙ

В роботі застосовано теорію малих термопружнопластичних деформацій для моделювання процесів зварювання тонких пластин. Розроблено алгоритм, який дозволяє відслідковувати процес деформування кожної точки конструкції на протязі всього технологічного процесу і враховує розвантаження з виникненням повторних пластичних деформацій.

Розглянемо задачу математичного моделювання процесу зварювання двох нескінченно довгих полос шириною b кожна. Вважаємо, що забезпечуються такі умови зварювання, при яких зберігається симетрія процесу відносно серединної поверхні пластин. Це рівнозначно припущенню, що температура, напруження і переміщення рівномірно розподілені по товщині пластин. Будемо також вважати, що зварюються пластини однакової товщини h з одного і того ж матеріалу і зварювання здійснюється одночасно по всій довжині шва. Якщо вздовж шва направити вісь x , то останнє припущення еквівалентне тому, що всі величини, які характеризують процес, не залежать від координати x .

Нехай в початковий момент часу обидві полоси знаходяться при постійній температурі зовнішнього середовища і розміщені впритик одна до одної вздовж осі x (лінії майбутнього шва). Перпендикулярно до осі x направимо вісь y з початком на осі x , так що $-b \leq y \leq b$. Вважаємо, що нагрівання в області зварювання здійснюється з допомогою внутрішніх джерел, потужність яких рівномірно розподілена по області $|y| \leq \delta$ і по всій товщині пластини. Густина потужності залишається постійною за величиною протягом деякого часу τ_n і рівною заданій величині w_0 . В момент часу $\tau = \tau_n$ джерела відключаються. Полоси по границях $y = \pm b$ вільні від закріплення і навантаження.

Будемо надалі наближено вважати, що областю розплаву є та область, де температура вища за температуру плавлення металу і впливом процесів кристалізації на формування полів залишкових напружень і деформацій будемо нехтувати.

Спочатку розглянемо задачу теплопровідності. На поверхнях пластин $z = \pm h/2$ і $y = \pm b$ здійснюється конвективний теплообмін з зовнішнім середовищем, температура якого вважається постійною і рівною t_c і коефіцієнт теплообміну α однаковий для всіх поверхонь. Вважаємо, що товщина h пластин мала порівняно з іншими розмірами і використовуємо наближені рівняння теплопровідності [1] для випадку, коли приймається лінійний розподіл температури по товщині. В нашому випадку внаслідок симетрії процесу відносно серединної площини приходимо до такого рівняння теплопровідності

$$\frac{\partial^2 T_1^*}{\partial y^2} - \frac{1}{a} \frac{\partial T_1^*}{\partial \tau} = \frac{2\alpha}{\lambda h} T_1^* - \frac{W_1}{\lambda}, \quad (1)$$

де $T_1^* = T_1 - t_c$; $T_1 = \frac{1}{h} \int_{-h/2}^{h/2} t(y, z, \tau) dz$, $W_1 = \frac{1}{h} \int_{-h/2}^{h/2} w_1(y, z, \tau) dz$ - середні по товщині пластин температура і густина інтенсивності джерел, λ - коефіцієнт теплопровідності, a - коефіцієнт температуропровідності.

Потрібно знайти розв'язок рівняння (1), який задовольняє умовам:

$$T_1 = t_c = \text{const} \quad (T_1^* = 0) \quad \text{при} \quad \tau = 0; \quad (2)$$

$$\pm \frac{\partial T_1^*}{\partial y} + \frac{\alpha}{\lambda} T_1^* = 0 \quad \text{при} \quad y = \pm b. \quad (3)$$

Точний аналітичний розв'язок задачі (1) – (3), знайдений з використанням інтегрального перетворення по координаті y , має такий вигляд

$$T^*(y, \tau) = T_1^*(y, \tau) - T_1^*(y, \tau - \tau_n) s_+(\tau - \tau_n), \quad (4)$$

де позначено

$$T_1^* = \frac{2\alpha w_0}{\lambda} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin \mu_n \delta}{\mu_n \psi_n^2 (\alpha b + \lambda \sin^2 \mu_n b)} \left(1 - e^{-\alpha \psi_n^2 \tau}\right) \cos \mu_n y, \quad (5)$$

$$\psi_n^2 = \mu_n^2 + \frac{2\alpha}{\lambda h}; \quad s^+(x) = \begin{cases} 0, & x \leq 0 \\ 1, & x > 0 \end{cases}$$

і власні числа μ_n ($n=1,2,\dots$) - всі додатні (в порядку зростання) корені рівняння

$$\text{tg} \mu b = \frac{\alpha}{\lambda \mu}. \quad (6)$$

Розглянемо тепер механічну частину задачі. Припустимо, що з достатньою для інженерної практики точністю для розв'язування задачі термопластичності можна використати теорію малих пружно-пластичних деформацій з врахуванням розвантаження [2]. Нагадаємо основні припущення теорії пружно-пластичних деформацій [2,3].

Девіаторні компоненти повної деформації $e_{ij} = \varepsilon_{ij} - \delta_{ij} \varepsilon_0$ можуть бути представлені у вигляді суми пружної і пластичної складових

$$e_{ij} = e_{ij}^{(e)} + e_{ij}^{(p)}. \quad (7)$$

Зміна об'єму носить практично пружний характер у всьому діапазоні зміни напружень

$$\varepsilon_0 = \frac{\sigma_0}{K} + \varepsilon^T, \quad (8)$$

де $K = \frac{2G(1+\nu)}{1-2\nu} = \frac{E}{1-2\nu}$ - модуль всестороннього об'ємного стиску; $\sigma_0 = \frac{1}{3} \sigma_{ii}$,

$\varepsilon_0 = \frac{1}{3} \varepsilon_{ii}$ - середнє нормальне напруження і середня об'ємна деформація;

$\varepsilon^T = \alpha_t (T - T_0)$ - температурне розширення; α_t - коефіцієнт лінійного температурного розширення; G, E, ν - модуль зсуву, модуль пружності та коефіцієнт Пуассона,

причому $G = \frac{E}{2(1+\nu)}$. Температурне розширення, як і пружна частина деформації,

носить зворотний характер.

Із співвідношення (8) випливає, що середня пластична деформація рівна нулю ($\varepsilon_0^{(p)} = 0$) і компоненти пластичної деформації співпадають з компонентами девіатора пластичної деформації $\varepsilon_{ij}^{(p)} = e_{ij}^{(p)}$.

Девіаторні компоненти деформацій пропорціональні девіаторним компонентам напружень $s_{ij} = \sigma_{ij} - \delta_{ij} \sigma_0$

$$e_{ij} = \frac{\psi}{2G} s_{ij}, \quad (9)$$

причому параметр пластичності ψ знаходиться за формулою

$$\psi = 3G \frac{\varepsilon_i}{\sigma_i}. \quad (10)$$

Пружні складові деформацій зв'язані з напруженнями законом Гука

$$s_{ij} = 2G(T)e_{ij}^{(e)}. \quad (11)$$

Інтенсивність напружень σ_i є функцією інтенсивності деформацій ε_i і температури T .

$$\sigma_i = F(\varepsilon_i, T). \quad (12)$$

Функція $F(\varepsilon_i, T)$ не залежить від виду напруженого стану і визначається експериментально при простому розтягу циліндричних зразків, нагрітих до різних температур. В просторі $\sigma_i, \varepsilon_i, T$ ця функція визначає деяку поверхню (рис. 1) [2]. На пружному участку деформування ця поверхня являє собою лінійчату поверхню $OO'A'$, рівняння якої

$$\sigma_i = 3G(T)\varepsilon_i; \quad 0 \leq \varepsilon_i \leq \varepsilon_T(T) = \frac{\sigma_T(T)}{3G(T)}, \quad (13)$$

$\sigma_T(T)$ - залежна від температури границя пропорціональності ($\sigma_T(T_{nl}) = 0$).

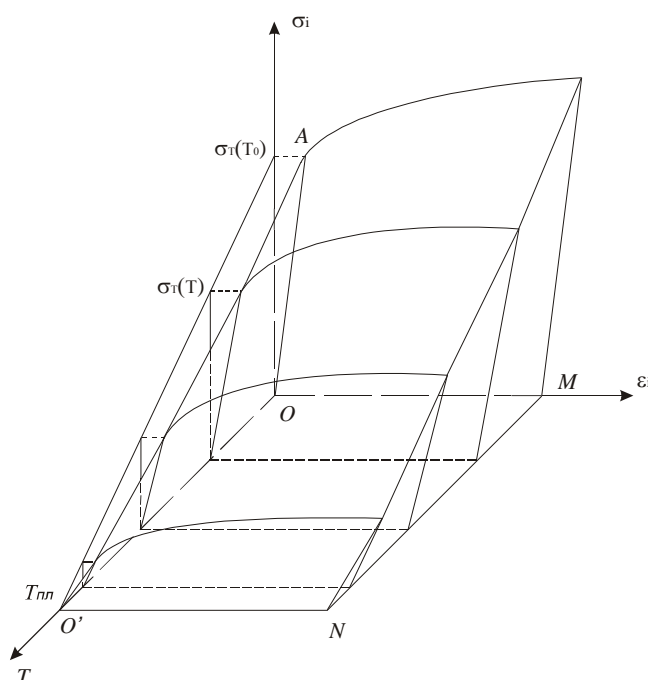


Рис. 1. Миттєва термомеханічна поверхня.

Інтенсивності напружень і деформацій для плоского напруженого стану ($\sigma_{zz} = \sigma_{zx} = \sigma_{zy} = 0; \varepsilon_{xz} = \varepsilon_{yz} = 0$) визначаються за формулами

$$\sigma_i = \sqrt{\sigma_{xx}^2 - \sigma_{xx}\sigma_{yy} + \sigma_{yy}^2 + 3\sigma_{xy}^2}; \quad (14)$$

$$\varepsilon_i = \frac{\sqrt{2}}{3} \sqrt{(\varepsilon_{xx} - \varepsilon_{yy})^2 + (\varepsilon_{yy} - \varepsilon_{zz})^2 + (\varepsilon_{zz} - \varepsilon_{xx})^2 + \frac{3}{2}\varepsilon_{xy}^2}. \quad (15)$$

Надалі залежність (12) приймаємо у вигляді

$$\sigma_i = F(\varepsilon_i, T) = \begin{cases} 3G(T)\varepsilon_i; & \varepsilon_i \leq \varepsilon_T(T) = \frac{\sigma_T(T)}{3G(T)}; \\ \sigma_T(T) \cdot \left\{ 1 + [\varepsilon_i - \varepsilon_T(T)]^{\gamma(T)} \right\}; & \varepsilon_i > \varepsilon_T(T), \end{cases} \quad (16)$$

Вважаємо, що σ_T, G і E залежать від температури, а коефіцієнт Пуассона ν не залежить. З метою більш наглядного представлення процесу деформування використаємо його геометричну інтерпретацію [2] (рис.2)

Процес початкового деформування з недеформованого стану кожного елемента тіла в просторі $\sigma_i, \varepsilon_i, T$ можна зобразити розміщеною на поверхні $OO'A'B'BA$ просторовою кривою, причому лінійчата поверхня $OO'A'A$ описується першим

$$\begin{aligned}\varepsilon_{yy}^{(e)} &= \frac{1}{E}(\sigma_{yy} - \nu\sigma_{xx}) + \alpha_t T^* ; \\ \varepsilon_{zz}^{(e)} &= \frac{\nu}{E}(\sigma_{xx} + \sigma_{yy}) + \alpha_t T ; \\ \varepsilon_{xy}^{(e)} &= \frac{(1+\nu)}{E}\sigma_{xy} .\end{aligned}\tag{21}$$

Пластичні складові деформацій на основі співвідношень (7) в будь-який момент часу на етапі початкового навантаження отримуються в результаті віднімання відповідних компонент, знайдених за формулами (19) і (21).

$$\begin{aligned}\varepsilon_{xx}^{(p)} &= \frac{1}{E^*} \left(1 - \frac{E^*}{E} \right) \left(\sigma_{xx} - \frac{1}{2}\sigma_{yy} \right) ; \\ \varepsilon_{yy}^{(p)} &= \frac{1}{E^*} \left(1 - \frac{E^*}{E} \right) \left(\sigma_{yy} - \frac{1}{2}\sigma_{xx} \right) ; \\ \varepsilon_{zz}^{(p)} &= -(\varepsilon_{xx}^{(p)} + \varepsilon_{yy}^{(p)}) = -\frac{1}{E^*} \left(1 - \frac{E^*}{E} \right) \left(\frac{\sigma_{xx} + \sigma_{yy}}{2} \right) ; \\ \varepsilon_{xy}^{(p)} &= \frac{3}{2E^*} \left(1 - \frac{E^*}{E} \right) \sigma_{xy} .\end{aligned}\tag{22}$$

Неважко переконатися, що аналогічні результати отримуються і за формулами (18), причому справедливі такі залежності

$$\frac{1+\nu}{3E}(\psi - 1) = \frac{\nu^*}{E^*} - \frac{\nu}{E} = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{E^*} - \frac{1}{E} \right) ; \quad \frac{E^*}{E} = \frac{1-2\nu^*}{1-2\nu} .\tag{23}$$

Інтенсивність пластичних деформацій, внаслідок умови $\varepsilon_0^{(p)} = 0$, визначається за формулою

$$\varepsilon_i^{(p)} = \frac{2}{\sqrt{3}} \sqrt{(\varepsilon_{xx}^{(p)})^2 + \varepsilon_{xx}^{(p)}\varepsilon_{yy}^{(p)} + (\varepsilon_{yy}^{(p)})^2} .\tag{24}$$

При $d\varepsilon_i \leq 0$ має місце розвантаження. Якщо в деякому елементі тіла, температура якого відповідає точці O' на рис.2, процес розвантаження починається в точці B' , то розвантаження описується кривою, розміщеною на лінійчастій поверхні $BB'NM$, що задається рівнянням

$$\sigma_i = 3G(T)(\varepsilon_i - \varepsilon_i^{(p)l}) .\tag{25}$$

Очевидно, що якщо при цьому температура зростає вище точки O' , то весь рисунок потрібно продовжити в область вищих температур.

Компоненти девіаторів напружень і деформацій при розвантаженні, згідно з (25), зв'язані залежностями

$$s_{ij} = 2G(T)(e_{ij} - e_{ij}^{(p)l}) ,\tag{26}$$

де $e_{ij}^{(p)l}$ - значення пластичних складових девіатора деформацій в момент початку розвантаження, а $\varepsilon_i^{(p)l}$ - їхня інтенсивність. Ці величини потрібно обчислювати за формулами (22) і (24) для цього моменту часу.

Так як в теорії малих пружно-пластичних деформацій використовується припущення (9), запишемо аналогічно співвідношення (26) у вигляді

$$e_{ij} - e_{ij}^{(p)l} = \frac{\psi}{2G} s_{ij} = \frac{1}{2G^*} s_{ij} ,\tag{27}$$

де параметр пластичності ψ будемо обчислювати за формулою

$$\psi = 3G(T) \frac{\varepsilon_i''}{\sigma_i} , \quad \varepsilon_i'' = \varepsilon_i - \varepsilon_i^{(p)l} .\tag{28}$$

Легко бачити, що інтенсивності напружень і деформацій є додатними величинами і процес деформування в просторі $\sigma_i, \varepsilon_i, T$ не може описуватися точкою, яка розміщена нижче площини $\sigma_i = 0$. Разом з тим при пружному деформуванні в процесі розвантаження величина $\varepsilon_i - \varepsilon_i^{(P)}$ може виявитися від'ємною і тоді в (25) потрібно було б поміняти знак величини $\varepsilon_i - \varepsilon_i^{(P)}$ на протилежний. З другого боку, ми бачимо, що змінні параметри пружності визначаються через параметр пластичності ψ , у вираз (28) для якого входить відношення величин $\varepsilon_i - \varepsilon_i^{(P)}$ і σ_i і тому формально можна залишити залежність (25) і при $\varepsilon_i < \varepsilon_i^{(P)}$. Дійсно, тоді при $\varepsilon_i'' = \varepsilon_i - \varepsilon_i^{(P)} < 0$ отримуємо $\sigma_i = 3G(T)(\varepsilon_i - \varepsilon_i^{(P)}) < 0$ і з (28) маємо $\psi = 1$, тобто дістаємо закон розвантаження у формі закону Гука з початковими деформаціями (26). Лінійчата поверхня при $\varepsilon_i < \varepsilon_i^{(P)}$ показана на рис. 2 нижче площини $\sigma_i = 0$ і позначена $MND'D$.

Приведені співвідношення справедливі до тих пір, поки при розвантаженні не виникають повторні пластичні деформації. Якщо такі деформації виникають, то можна узагальнити приведені вище міркування і на ці області. При цьому вважається, що в області повторних пластичних деформацій функція пластичності ψ і далі визначається із співвідношення (28), але інтенсивність напружень при цьому в загальному випадку визначається функцією

$$\sigma_i = F'(\varepsilon_i'', T). \quad (29)$$

В роботі [4] детально проаналізовані можливі форми запису цієї функції для ізотермічного випадку. Показано, що ця функція не залежить від виду напруженого стану і визначається в кожному окремому випадку експериментально. На рис. 2 функція (29) визначає поверхню $CDC'D'$ і процес деформування з розвитком повторних пластичних деформацій при розвантаженні (або при навантаженні в протилежному до початкового навантаження напрямку) описується кривою, що лежить на цій поверхні.

Для матеріалів з ідеальним ефектом Баушінгера в роботах Ю.М.Шевченка пропонується рівняння поверхні (29) записувати з використанням так званої трансформованої функції (12), а саме

$$\sigma_i = \sigma_i^{(1)} - \sigma_T(T) - F\left(\varepsilon_i^{(P)} + \frac{\sigma_i^{(1)} - \sigma_T(T)}{3G(T)} - \varepsilon_i, T\right), \quad \varepsilon_i \leq \varepsilon_{is}, \quad (30)$$

де ε_{is} - значення інтенсивності деформацій, при якому починається повторне пластичне деформування при розвантаженні; індексом "1" позначено величини в момент початку розвантаження.

Практично поверхню (30) будують так. Для кожного значення T криву $O'A'B'$ паралельно переносять в точку O'' з координатами

$$\varepsilon_i = \varepsilon_i^{(P)} + \frac{\sigma_i^{(1)} - \sigma_T(T)}{3G(T)}; \quad \sigma_i = \sigma_i^{(1)} - \sigma_T(T) \quad (31)$$

і повертають навколо точки O'' на кут π так щоб точка A' попала в точку D' , а точка B' - в точку C' . Якщо таку побудову виконувати для різних T то в результаті отримаємо поверхню $C'CDD'$ повторного пластичного деформування. Зауважимо, що якщо функція $F(\varepsilon_i, T)$ визначається формулою (16) і обмеження $\varepsilon_i \leq \varepsilon_{is}$ в (30) замінити на $\varepsilon_i \leq \varepsilon_i^{(1)}$, то функція (30) буде описувати як поверхню $CDC'D'$ так і лінійчату поверхню $BB'D'D$. Рівняння (30) при цьому запишеться так

$$\sigma_i = \sigma_i^{(1)} - \sigma_T(T) - \begin{cases} 3G(T)(\varepsilon_i^{(1)} - \varepsilon_T - \varepsilon_i), & \varepsilon_{is}^{(1)} = \varepsilon_i^{(1)} - 2\varepsilon_T \leq \varepsilon_i \leq \varepsilon_i^{(1)} \\ \sigma_T(T)[1 + (\varepsilon_{is}^{(1)} - \varepsilon_i)^{\gamma(T)}], & \varepsilon_i < \varepsilon_{is}^{(1)} \end{cases}, \quad (32)$$

причому легко перевірити, що перше рівняння в (32) співпадає з рівнянням (25).

Отже залежності (27), (28) повністю визначають співвідношення між напруженнями і деформаціями при розвантаженні, якщо σ_i в (28) обчислювати за формулою (32). В декартовій системі координат залежності (27) запишуться тепер так

$$\begin{aligned}\varepsilon_{xx} &= \frac{1}{E^*}(\sigma_{xx} - \nu^* \sigma_{yy}) + \alpha_i T^* + \varepsilon_{xx}^{(p)1}; \\ \varepsilon_{yy} &= \frac{1}{E^*}(\sigma_{yy} - \nu^* \sigma_{xx}) + \alpha_i T^* + \varepsilon_{yy}^{(p)1}; \\ \varepsilon_{zz} &= -\frac{\nu^*}{E^*}(\sigma_{xx} + \sigma_{yy}) + \alpha_i T^* - (\varepsilon_{xx}^{(p)1} + \varepsilon_{yy}^{(p)1}); \\ \varepsilon_{xy} &= \frac{(1 + \nu^*)}{E^*} \sigma_{xy} + \varepsilon_{xy}^{(p)1},\end{aligned}\tag{33}$$

причому змінні параметри пружності і далі визначаються за формулами (20).

Очевидно, що співвідношення (33) і (28) можна використовувати і на етапі початкового деформування, якщо покласти в них пластичні складові деформацій з індексом "1" рівними нулю і σ_i в (28) обчислювати за формулою (16).

Після розвантаження з виникненням повторних пластичних деформацій в деяких елементах тіла може здійснюватися повторне навантаження $d\varepsilon_i > 0$. Всі величини в момент початку повторного навантаження позначимо індексом "2". Пластичні складові деформацій для цього моменту можна знайти шляхом віднімання пружних складових (21) від компонент повної деформації (33). В результаті знайдемо

$$\begin{aligned}\varepsilon_{xx}^{(p)2} &= \varepsilon_{xx}^{(p)1} + \frac{1}{E_2^*} \left(1 - \frac{E_2^*}{E_2}\right) \left(\sigma_{xx}^{(2)} - \frac{1}{2} \sigma_{yy}^{(2)}\right); \\ \varepsilon_{yy}^{(p)2} &= \varepsilon_{yy}^{(p)1} + \frac{1}{E_2^*} \left(1 - \frac{E_2^*}{E_2}\right) \left(\sigma_{yy}^{(2)} - \frac{1}{2} \sigma_{xx}^{(2)}\right); \\ \varepsilon_{zz}^{(p)2} &= -(\varepsilon_{xx}^{(p)1} + \varepsilon_{yy}^{(p)1}) - \frac{1}{E_2^*} \left(1 - \frac{E_2^*}{E_2}\right) \left(\frac{\sigma_{xx}^{(2)} + \sigma_{yy}^{(2)}}{2}\right); \\ \varepsilon_{xy}^{(p)2} &= \varepsilon_{xy}^{(p)1} + \frac{3}{2E_2^*} \left(1 - \frac{E_2^*}{E_2}\right) \sigma_{xy}^{(2)}.\end{aligned}\tag{34}$$

В тензорному вигляді аналогічні формули на основі (11) і (27) такі

$$e_{ij}^{(p)2} = e_{ij}^{(p)1} + \frac{\psi_2 - 1}{2G} s_{ij}^{(2)}.\tag{35}$$

Проводячи аналогічні міркування, як і для етапу розвантаження, можна показати, що на цьому етапі залежності між напруженнями і деформаціями запишуться у вигляді

$$\begin{aligned}\varepsilon_{xx} &= \frac{1}{E^*}(\sigma_{xx} - \nu^* \sigma_{yy}) + \alpha_i T^* + \varepsilon_{xx}^{(p)2}; \\ \varepsilon_{yy} &= \frac{1}{E^*}(\sigma_{yy} - \nu^* \sigma_{xx}) + \alpha_i T^* + \varepsilon_{yy}^{(p)2}; \\ \varepsilon_{zz} &= -\frac{\nu^*}{E^*}(\sigma_{xx} + \sigma_{yy}) + \alpha_i T^* - (\varepsilon_{xx}^{(p)2} + \varepsilon_{yy}^{(p)2}); \\ \varepsilon_{xy} &= \frac{(1 + \nu^*)}{E^*} \sigma_{xy} + \varepsilon_{xy}^{(p)2},\end{aligned}\tag{36}$$

причому змінні модулі пружності обчислюються за формулами (20), а функція пластичності ψ визначається так

$$\psi = 3G(T) \frac{\varepsilon_i''}{\sigma_i}, \quad \varepsilon_i'' = \varepsilon_i - \varepsilon_i^{(p)2}.\tag{37}$$

Інтенсивність напружень у формулі (37) визначається тепер виразом

$$\sigma_i = F''(\varepsilon_i'', T). \quad (38)$$

Як і в попередньому випадку, ця функція теж не залежить від виду напруженого стану і визначається експериментально при різних температурах. По аналогії з (30) рівняння трансформованої функції (12) записується тепер так [2]

$$\sigma_i = \sigma_i^{(2)} + \sigma_T(T) + F\left(\varepsilon_i - \varepsilon_i^{(p)2} - \frac{\sigma_i^{(2)} + \sigma_T(T)}{3G(T)}, T\right). \quad (39)$$

Якщо функція $F(\varepsilon_i, T)$ визначається формулою (16), то рівняння (39) переписується так

$$\sigma_i = \sigma_i^{(2)} + \sigma_T(T) + \begin{cases} 3G(T)(\varepsilon_i - \varepsilon_{is}^{(2)} + \varepsilon_T), & \varepsilon_i^{(2)} \leq \varepsilon_i \leq \varepsilon_{is}^{(2)} = \varepsilon_i^{(2)} + 2\varepsilon_T \\ \sigma_T(T)[1 + (\varepsilon_i - \varepsilon_{is}^{(2)})^{\gamma(T)}], & \varepsilon_i > \varepsilon_{is}^{(2)}. \end{cases} \quad (40)$$

На рис. 3 приведені графіки залежності $\sigma_i(\varepsilon_i)$ при деякому значенні температури. Криві початкового деформування (16), розвантаження (32) і повторного навантаження (40) відмічені різними маркерами.

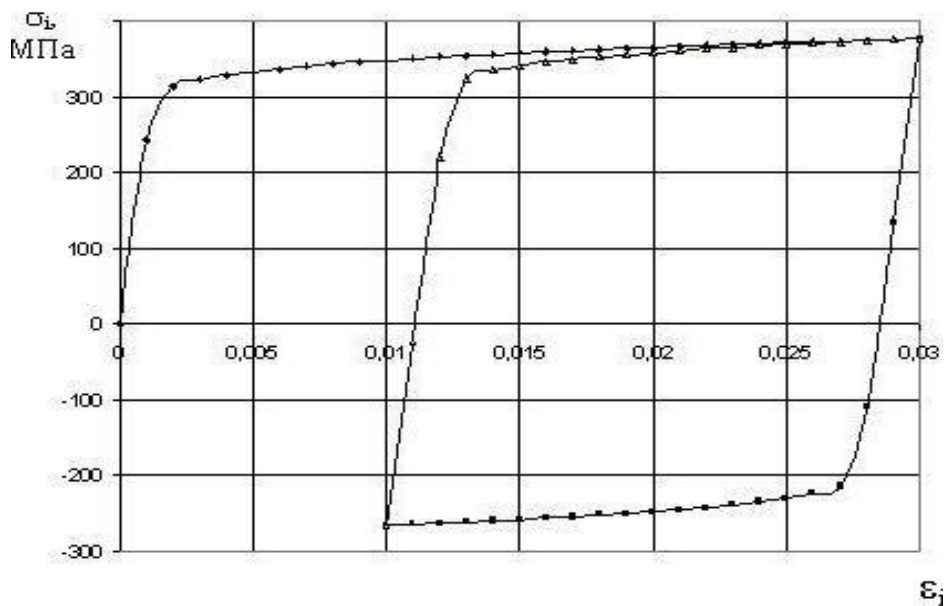


Рис. 3. Умовні криві деформування.

Перш ніж використовувати отримані рівняння для практичних розрахунків зробимо таке зауваження. В рівняння (30) входять величини $\sigma_i^{(1)}, \varepsilon_i^{(1)}$, які визначають значення інтенсивностей напружень і деформацій в момент початку розвантаження в деякому елементі тіла. Нехай розвантаження почалося при деякому значенні температури T_1 і значення $\sigma_i^{(1)}, \varepsilon_i^{(1)}$ і $\varepsilon_i^{(p)1}$ визначаються цим значенням температури. В процесі пружного розвантаження, коли крива деформування лежить на лінійчатій поверхні $BB'D'D$ (рис. 2) температура продовжує змінюватися і вихід на поверхню повторного пластичного деформування в даному елементі здійснюється при деякому іншому значенні температури. Очевидно, що значення $\sigma_i^{(1)}$ і $\varepsilon_i^{(1)}$ при цьому значенні температури відрізнятимуться від тих значень, які вони мали в момент початку розвантаження. Таким чином $\sigma_i^{(1)}$ і $\varepsilon_i^{(1)}$ в рівнянні (30) потрібно вважати функціями температури і ми повинні вміти їх визначати при довільному значенні T . Для цього скористаємося тим фактом, що при розвантаженні (як пружному так і з виникненням повторних пластичних деформацій) величина $\varepsilon_i^{(p)1}$ для даного елемента залишається незмінною (див. рис. 4) і при довільному значенні температури величини $\sigma_i^{(1)}$ і $\varepsilon_i^{(1)}$ зв'язані в нашому випадку залежностями

$$\sigma_i^{(1)}(T) = 3G(T)[\varepsilon_i^{(1)}(T) - \varepsilon_i^{(p)1}]; \quad (41)$$

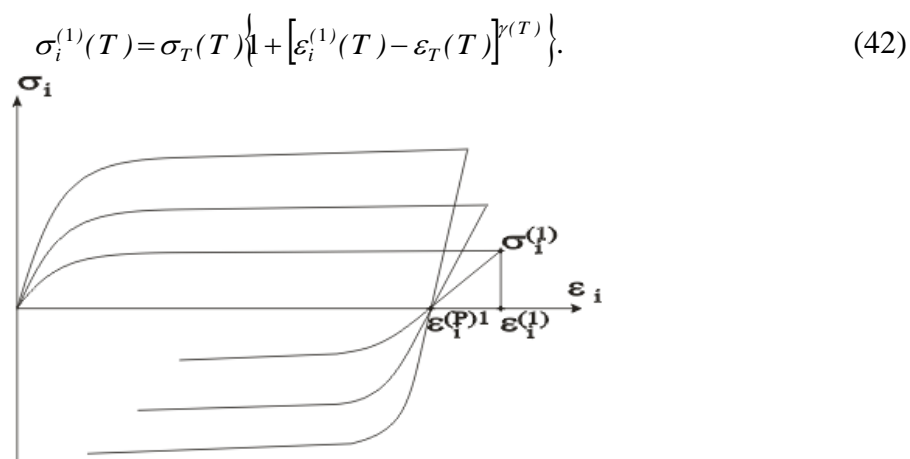


Рис. 4. Ілюстрація зміни термомеханічної поверхні із зміною температури.

Отже для знаходження $\varepsilon_i^{(1)}$ при довільному значенні температури і заданому значенні $\varepsilon_i^{(p)1}$ отримуємо трансцендентне рівняння

$$x = \varepsilon_i^{(p)1} + \varepsilon_T(T)x^{\gamma(T)}, \quad (43)$$

де позначено

$$x = \varepsilon_i^{(1)}(T) - \varepsilon_T(T). \quad (44)$$

Розв'язавши рівняння (43) будь-яким з числових методів (наприклад методом ітерацій), значення $\sigma_i^{(1)}(T)$ обчислюємо за формулою (41).

Аналогічні міркування щодо поверхні повторного навантаження (40) приводять до такого трансцендентного рівняння для обчислення $\varepsilon_i^{(2)}(T)$

$$x = \varepsilon_i^{(p)1} - \varepsilon_i^{(p)2} + \varepsilon_T(T)x^{\gamma(T)}, \quad (45)$$

в якому

$$x = \varepsilon_i^{(1)}(T) - 2\varepsilon_T(T) - \varepsilon_i^{(2)}(T). \quad (46)$$

Відповідне значення $\sigma_i^{(2)}(T)$ обчислюємо за формулою

$$\sigma_i^{(2)}(T) = 3G(T) [\varepsilon_i^{(2)}(T) - \varepsilon_i^{(p)2}]. \quad (47)$$

Внаслідок симетрії процесу відносно площини $y=0$ досить розглянути лише область $0 \leq y \leq b$. Рівняння рівноваги вільних від зовнішнього навантаження і закріплення вздовж контурів $y = \pm b$ пластин в нашому випадку зводяться до рівнянь

$$\frac{\partial \sigma_{yy}}{\partial y} = 0; \quad \frac{\partial \sigma_{xy}}{\partial y} = 0. \quad (48)$$

Це означає, що в пластинах реалізується одномірний напружений стан.

$$\sigma_{xx} \neq 0; \quad \sigma_{yy} = \sigma_{xy} = 0. \quad (49)$$

Загальний розв'язок задачі при цьому через змінні параметри пружності можна записати так

$$\sigma_{xx} = -E^* (\alpha_t T^* + \varepsilon_p^* - \varepsilon_{xx}); \quad (50)$$

$$\varepsilon_{yy} = \varepsilon_{zz} = -\nu^* \varepsilon_{xx} + (1 + \nu^*) \alpha_t T^* - \frac{1}{2} \varepsilon_p^* (1 - 2\nu^*); \quad (51)$$

$$\varepsilon_i = \frac{2}{3} |\varepsilon_{xx} - \varepsilon_{yy}|; \quad \sigma_i = |\sigma_{xx}|; \quad (52)$$

$$\varepsilon_{xx}^{(p)} = \frac{1}{(1 - 2\nu^*)} \left[(1 - 2\nu^*) \varepsilon_p^* + 2(\nu^* - \nu) (\varepsilon_{xx} - \alpha_t T^*) \right]; \quad (53)$$

$$\varepsilon_{yy}^{(p)} = \varepsilon_{zz}^{(p)} = -\frac{1}{2}\varepsilon_{xx}^{(p)}; \varepsilon_i^{(p)} = \left| \varepsilon_{xx}^{(p)} \right|. \quad (54)$$

Величини $\varepsilon_{xx}^{(p)1}$, $\varepsilon_{xx}^{(p)2}$ визначаються у моменти зміни напрямку деформування за формулою (53), а відповідні інтенсивності пластичних деформацій згідно (54). Величина ε_p^* приймає значення 0, $\varepsilon_{xx}^{(p)1}$ або $\varepsilon_{xx}^{(p)2}$ в залежності від того, який етап деформування здійснюється в даному елементі – процес початкового активного навантаження, процес розвантаження з виникненням повторних пластичних деформацій, чи повторне активне навантаження.

Розглянемо надалі два випадки:

- 1) коли в будь-якому січенні $x = const$ поздовжня деформація відсутня ($\varepsilon_{xx} = 0$);
- 2) коли справедлива гіпотеза плоских перерізів ($\varepsilon_{xx} = cy + d, 0 \leq y \leq b$).

В другому випадку коефіцієнти c і d знаходимо з умов відсутності зовнішнього навантаження, які виглядають так

$$\int_0^b \sigma_{xx} dy = 0; \int_0^b \sigma_{xx} y dy = 0. \quad (55)$$

Підставляючи в рівняння (55) вираз (50) для напруження σ_{xx} , отримаємо таку систему рівнянь для знаходження c і d

$$\begin{cases} dI_0 + cI_1 = F_1 \\ dI_1 + cI_2 = F_2, \end{cases}$$

де позначено

$$I_k = \int_0^b E^* y^k dy; k = 0,1,2; \quad F_i = \int_0^b E^* (\varepsilon_p^* + \alpha T^*) y^{(i-1)} dy; i = 1,2.$$

Процес послідовних наближень згідно методу змінних параметрів пружності будується так. Початково вважається, що у всіх точках конструкції має місце закон (17) і інтенсивності напружень і деформацій зв'язані залежністю (13). Тоді параметр пластичності ψ за формулою (10) у всіх точках стає рівним одиниці і змінні параметри пружності на першому етапі рівні пружним модулям для біжучої температури

$$E^* = E(T^*) \quad \text{і} \quad \nu^* = \nu. \quad (56)$$

Отже на першому етапі розв'язується пружна задача. В результаті її розв'язування знаходяться напруження і деформації в першому наближенні. По знайденій інтенсивності деформацій в першому наближенні на основі реальної діаграми деформування матеріалу (16) при тому значенні температури, яку досягнуто на даний момент в даній точці конструкції, знаходиться відповідне значення інтенсивності напружень в другому наближенні і відповідне значення параметра пластичності ψ за формулою (10). По нових значеннях параметра пластичності у всіх точках конструкції за формулами (23) обчислюються нові значення змінних параметрів пружності E^* і ν^* і знову розв'язується пружна задача для неоднорідного нерівномірно нагрітого тіла. Такий процес послідовних наближень продовжується до тих пір, поки результати двох послідовних наближень не співпадут з заданою точністю.

Зауважимо, що описаний вище процес справедливий тільки для випадку, коли у всіх точках конструкції здійснюється активне навантаження. Якщо в деяких точках при охолодженні здійснюється розвантаження, то там параметр пластичності ψ знаходиться за формулами (25), в яких інтенсивність напружень в процесі послідовних наближень уточнюється згідно з (32). Аналогічно для тих точок, в яких після розвантаження з виникненням вторинних пластичних деформацій буде відбуватися повторне навантаження, процес уточнення змінних параметрів пружності проводиться за формулами (37), (40).

Обчислення проводилось для випадку зварювання двох вузьких полос із сталі 3 товщиною 3мм.і шириною 5 і 20 см. На рис.5 приведені залежності модулів E , σ_T і α_t від температури, які використовувались при обчисленнях.

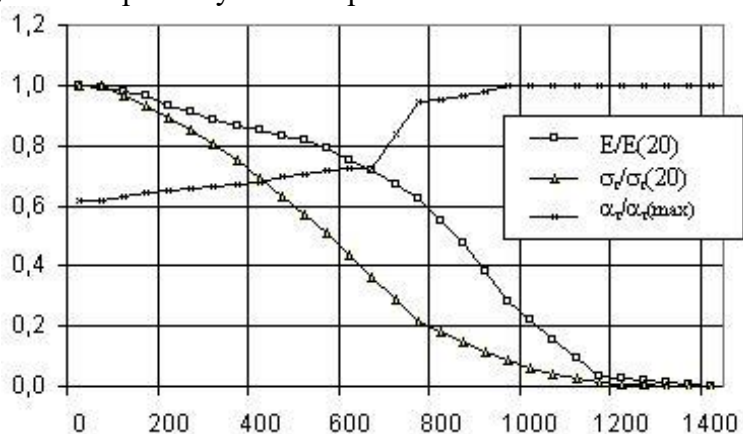


Рис.5. Залежності модулів матеріалу від температури.

Густина потужності джерел задавалася рівною $w_0 = 1.0 \cdot 10^{10}$ вт/м³ і залишалася постійною в області $|y| \leq 0.002$ м. протягом $\tau_n = 5$ с. Розподіл температур в пластинах для різних моментів часу показана на рис.6. Ширина області розплаву при таких параметрах досягала 8 мм.

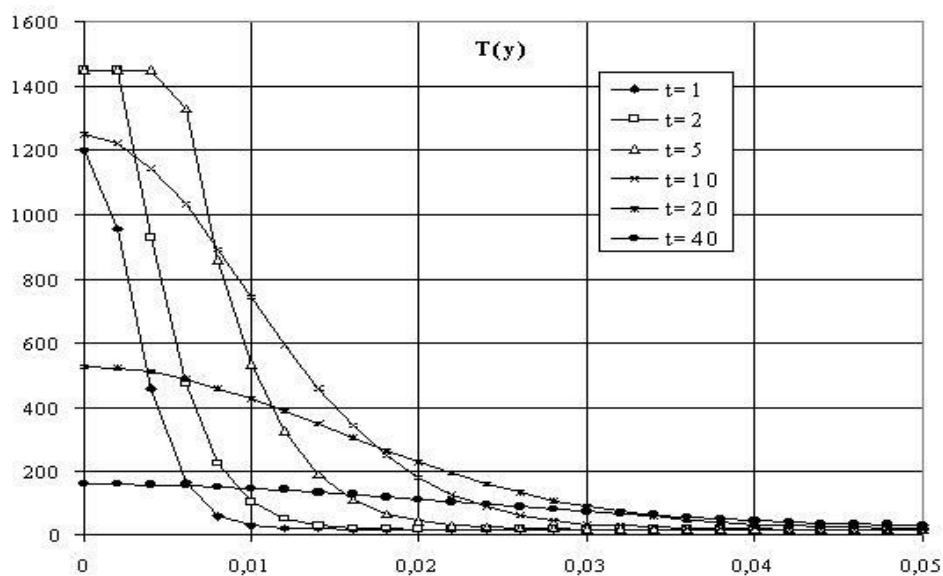


Рис.6. Розподіл температур для різних моментів часу.

На рис.7 приведено розподіл поздовжнього напруження σ_{xx} по ширині пластини для різних моментів часу.

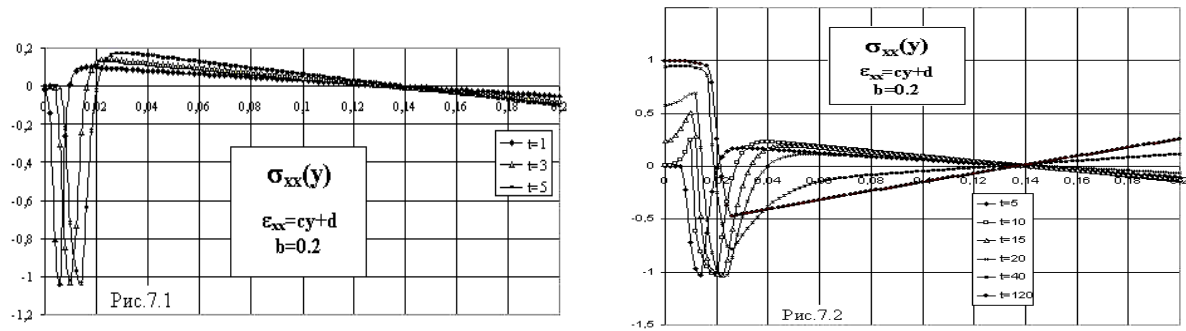


Рис. 7. Розподіл напруження σ_{xx} для різних моментів часу.

Остання крива при $t = 120c$ описує розподіл залишкового напруження $\sigma_{xx}^{(зал)}$ в звареній конструкції, так як цей розподіл з подальшим ростом часу практично не змінюється.

На рис.8. приведені траєкторії деформування окремих точок в просторі σ_i, ϵ_i .

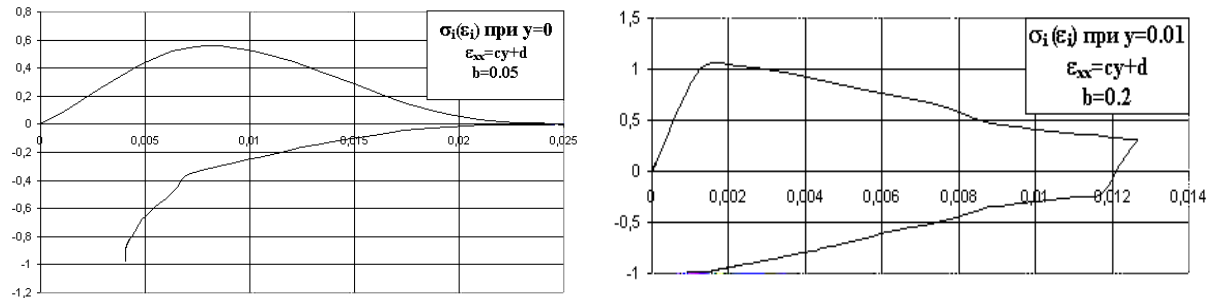


Рис.8. Траєкторії деформування в просторі σ_i, ϵ_i .

Звертає увагу на себе той факт, що якщо в процесі розвантаження виникають повторні пластичні деформації, то наступний процес деформування аж до повного розвантаження описується кривою, яка повністю лежить на миттєвій термомеханічній поверхні (тобто пружного деформування більше не спостерігається). Таким чином в тих точках, де матеріал був розплавлений, після початку кристалізації і до повного остигання конструкції точка (σ_i, ϵ_i) знаходиться весь час на цій поверхні. Аналіз цих результатів також показує, що для вузьких полос в таких точках на останніх етапах охолодження відбувається нейтральне навантаження, тобто інтенсивність деформацій практично не змінюється, а напруження росте внаслідок розширення миттєвої термомеханічної поверхні із зменшенням температури.

Розподіл залишкових напружень по ширині пластини показаний на рис. 9.

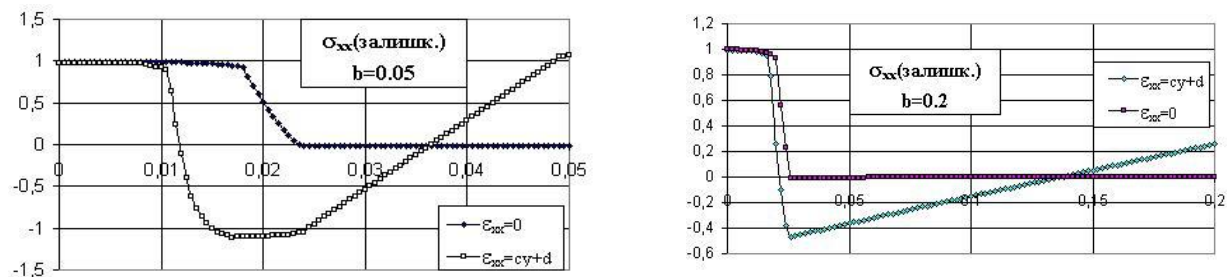


Рис. 9. Розподіл залишкового поздовжнього напруження σ_{xx} по ширині пластини.

Відповідні залишкові деформації зображені на рис. 10. Характер розподілу залишкових деформацій для випадку $\varepsilon_{xx}=0$ і $b=0.05$ майже такий же, як і при $b=0.2$ і тому ми їх не приводимо.

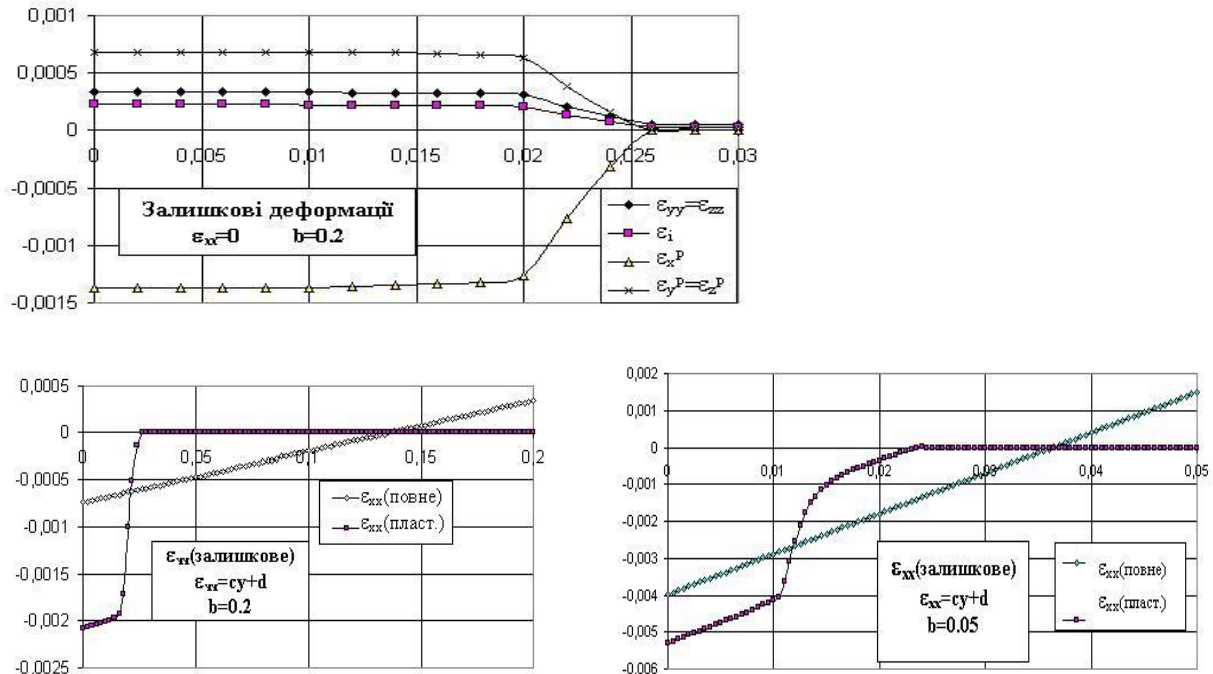


Рис. 10. Розподіл залишкових деформацій по ширині пластин.

Зазначимо, що подібна задача розв’язувалась в роботах [5,6] з використанням теорії течіння.

Application of the theory of small thermo-elasto-plastic deformations for simulation of processes of welding of the thin plates is demonstrated. The algorithm, which allows to control the process of deformation of each point of a design during all manufacturing process and takes into account unloading with initiation of the repeated plastic deformations, developed.

Література

1. Подстригач Я.С., Швец Р.Н. Термоупругость тонких оболочек. –К.: Наукова думка, 1978. -344с.
2. Шевченко Ю.Н. Термопластичность при переменных нагружениях. –К.:Наукова думка, 1970.-287с.
3. Биргер И.А., Шорр Б.Ф. Термопрочность деталей машин. -М.:Машиностроение, 1975.-455с.
4. Москвитин В.В. Пластичность при переменных нагружениях. Изд-во МГУ, М.,1965.-263с.
5. Махненко В.И., Великоиваненко Е.А. Кинетика образования напряжений и деформаций при дуговой сварке узких пластин. В кн.: Тепловые напряжения в элементах конструкций, 6. Наукова думка, К.,1966
6. Махненко В.И. Расчетные методы исследования кинетики сварочных напряжений и деформаций. -К.: Наук.думка,1976.-320 с.

Одержано 14.12.2001 р.