УДК 519.21

Н. Марченко, канд.техн.наук
Інститут електродинаміки НАН України

ЛІНІЙНІ СУБГАУССОВІ ПРОЦЕСИ

Досліджується зв'язок класу лінійних випадкових процесів з класом субгауссових випадкових процесів.

Умовні позначення

ξ – випадкова величина;
$\xi(t)$– випадкововий процес;
$f(u)$ – характеристична функція;
$F(x)$ – функція розподілу;
$\tau(\xi)$ – субгауссовий стандарт випадкової величини ξ ;
$Sub(\Omega)$ – клас субгауссових випадкових величин;
S – коефіцієнт субгауссовості;
$\eta(t)$ – процес з незалежними приростами;
T – інтервал часу, область визначення процесу, період;
t – поточний час, аргумент процесу;
$\varphi(\tau,t)$ – імпульсна реакція лінійної системи, ядро лінійного процесу інтегрального зображення лінійного процесу.

Вступ

Часто при побудові моделі гільбертового випадкового процесу використовують різні моделі лінійних формуючих систем. В дискретному випадку це можуть бути моделі типу ковзного середнього, а в неперервному - це різні фільтри. Тобто системи, які формують згортку породжуючих процесів, в якості яких найчастіше беруть білий шум і деякі вагові функції, ядра перетворення або імпульсні реакції формуючого фільтра. Такі моделі дістали назву лінійних випадкових процесів [4, 5]. Основна їх привабливість і широке використання зумовлюються тим фактом, що у випадку породжуючого процесу з незалежними значеннями або приростами отримується процес з безмежно-подільною функцією розподілу, для якої, як відомо [5], існує канонічна форма характеристичної функції загального виду. Такі процеси не завжди є субгауссовими, але в багатьох випадках вони є гільбертовими.

В тому випадку, коли лінійний процес є субгауссовим, розроблений вище апарат дозволяє оцінити якість їх моделювання або оцінити точність роботи ІВС, тому задача дослідження лінійних процесів на субгауссовість є актуальною і має практичний вихід при оцінювані точності роботи ІВС.

Короткі відомості стосовно моделі субгауссових лінійних процесів

Наведемо деякі позначення, які співпадають з [6,8,9].

Трійка $\{\Omega, \mathsf{F}, \mathbf{P}\}$, де Ω – простір елементарних подій, F – деяка алгебра підмножин Ω, $\mathbf{P} = \{\mathbf{P}(A), \quad A \in \mathsf{F}\}$ задає деяку ймовірнісну модель, яку будемо надалі називати ймовірнісним простором [2].

Позначимо через $f(u)$ характеристичну функцію випадкової величини ξ

$$f(u) = \mathbf{M}\exp(iu\xi) = \int_{-\infty}^{\infty} \exp(iux) dF(x), \quad u \in \mathbf{R},$$

де $F(x)$ – функція розподілу випадкової величини ξ .

Позначимо експоненційну генератрису (твірну функцію) кумулянт випадкової величини ξ

$$g(y) = \ln \mathbf{M}\, e^{y\xi} = \ln\, f(-yi), \quad y \in \mathbf{R}. \tag{1}$$

Нагадаємо, що випадкову величину ξ називають *субгауссовою*, якщо знайдеться таке дійсне число $\alpha \ge 0$, що для всіх $y \in \mathbf{R}$ виконується нерівність

$$e^{g(y)} \le e^{\frac{\alpha^2 y^2}{2}},$$

де $g(y)$ визначається згідно з (1).

Характеристика субгауссової випадкової велечини

$$\tau(\xi) = \inf\left\{\alpha \ge 0 : \mathbf{M}e^{y\xi} \le e^{\frac{\alpha^2 y^2}{2}}, y \in \mathbf{R}\right\}$$

називається *субгауссовим стандартом випадкової величини* ξ.

Клас субгауссових величин позначається $Sub(\Omega)$ [6,8,9].

Тепер перейдемо до питань застосування отриманих вище характеристик елементів класу $Sub(\Omega)$ до лінійних процесів.

Лінійний процес визначається наступним чином [4,5]:

$$\xi(t) = \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(\tau,t)\, d\eta(\tau), \; t \in T, \tag{2}$$

де T – область визначення процесу (2) в часі; $\varphi(\tau,t)$ – функція, інтегровна з квадратом по τ при всіх $t \in T$, яка зветься ядром лінійного процесу, а $\eta(\tau)$, $\tau \in (-\infty,\infty)$ – процес з незалежними приростами, який зветься породждуючим процесом.

Для того, щоб функція $f_\eta(u;t)$ була одновимірною характеристичною функцією гільбертового процесу $\eta(\tau)$ з безмежно подільним одновимірним законом розподілу, необхідно і достатньо, щоб вона допускала зображення [2,3]

$$\ln f_\eta(u;t) = im_t u + \int_{-\infty}^{\infty} \left[\frac{e^{iux} - 1 - iux}{x^2}\right] d_x K_\eta(x,t), \tag{3}$$

де m_t – дійсна стала; $K_\eta(x,t)$ – неспадна неперервна зліва обмежена функція, яка носить назву пуасонівського спектру стрибків у формулі Колмогорова, а підінтегральна функція при $x = 0^+$ рівна $-\frac{u^2}{2}$.

Функція $K_\eta(x,t)$, що входить у формулу (3), визначається однозначно за заданою характеристичною функцією $f_\eta(u;t)$ безмежно подільного розподілу зі скінченною дисперсією, як перетворення Фур'є-Стілтьєса із співвідношення [4]

$$\frac{\partial^2}{\partial u^2} \ln f(u;t) = -\int_{-\infty}^{\infty} e^{iux} dK_\eta(x,t), \tag{4}$$

звідки в усіх точках неперервності по x при всіх $t \in T$ $K_\eta(x,t)$ маємо [1, 2]

$$K_\eta(x,t) = \frac{1}{2\pi} \lim_{y\to\infty} \lim_{c\to\infty} \int_{-c}^{c} \frac{e^{-iux} - e^{-iuy}}{iu} \frac{\partial^2}{\partial u^2} \ln f_\eta(u;t)\, du, \tag{5}$$

а в точках розриву права частина (5) дорівнює $0.5\left[K_\eta(x+0;t)+K_\eta(x-0;t)\right]$.

Вираз (2) має місце як для однорідних, так і для неоднорідних процесів з незалежними приростами і носить досить загальний характер.

Одновимірна характеристична функція гільбертового лінійного випадкового процесу (2) визначається виразом [4]

$$\ln f_\xi(u;t) = ium\int_{-\infty}^{\infty}\varphi(\tau,t)d\tau + \\ + \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\left[\frac{e^{iux\varphi(\tau,t)}-1-iux\varphi(\tau,t)}{x^2}\right]d_xK_\eta(x,t)d\tau, \tag{6}$$

де m – дійсна стала; $K_\eta(x,t)$ при всіх $t\in(-\infty,\infty)$ визначається згідно з (5) і є неспадною, неперервною зліва, обмеженою функцією по x, а підінтегральна функція при $x=0$ рівна $-\frac{u^2}{2}\varphi^2(\tau,t)$.

Якщо в (6) замість $\varphi(\tau,t)$ взяти $\varphi(t\text{-}\tau)$, а $\eta(\tau)$ вважати однорідним процесом з незалежними приростами, то лінійний процес (1) буде стаціонарним у вузькому розумінні.

Так як цей процес безмежно подільний, то для нього теж існує канонічна форма характеристичної функції, для якої, аналогічно до (4), маємо [4]

$$\frac{\partial^2}{\partial u^2}\ln f_\xi(u;t) = -\int_{-\infty}^{\infty}e^{iux}d_xK_\xi(x;t) = -\mathbf{D}\xi(t)\int_{-\infty}^{\infty}e^{iux}d_x\hat{K}_\xi(x;t), \tag{7}$$

де $\hat{K}_\xi(x,t)$ - при кожному фіксованому t є деякою функцією розподілу, тому

$$-\frac{\partial^2}{\partial u^2}\ln f_\xi(u;t)/\mathbf{D}\xi(t)$$

є характеристичною функцією розподілу $\hat{K}_\xi(x,t)$.

Це значить, що нормовані відхилення процесу $\xi(t)$ мають функцію стрибків $\hat{K}_\xi(x,t)$, що є звичайною функцією розподілу.

Тому, якщо існує похідна по x для $K_\xi(x,t)$ і вона абсолютно неперервна, то тоді відразу одержуємо

$$K'_\xi(x,t) = -\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}e^{-iux}\frac{\partial^2}{\partial u^2}\ln f_\xi(u;t)du, \tag{8}$$

і $K'_\xi(x,t)$ неперервна по x і по заданій $\frac{\partial^2}{\partial u^2}\ln f_\xi(u;t)$ встановлюється однозначно. Надалі функція $K_\xi(x,t)$ – пуассонівських стрибків лінійного процесу не використовується, а буде використовуватися лише пуассонівський спектр стрибків породжуючого процесу $K_\eta(x,t)$.

Для гільбертового процесу $\eta(t)$ з незалежними однорідними приростами мають місце наступні символічні співвідношення

$$\mathbf{M}d\eta(\tau) = \kappa_1 d\tau,$$
$$\mathbf{M}\left[d\eta(\tau)-\kappa_1 d\tau\right]^2 = \mathbf{M}\left[d\left(\eta(\tau)-\kappa_1\tau\right)\right]^2 = \kappa_2 d\tau,$$

де $\kappa_1 = \mathbf{M}\eta(1)$ та $\kappa_2 = \mathbf{M}\eta^2(1) - \kappa_1^2$.

З іншого боку, якщо $\xi(t)$ – центрований лінійний процес, то його кореляційна функція визначається за допомогою виразу [4]

$$R(t_1,t_2) = \kappa_2 \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(\tau,t_1)\varphi(\tau,t_2)d\tau . \tag{9}$$

Особливості дослідження ЛВП на субгауссовість

Перейдемо тепер до застосування методики перевірки гільбертових лінійних випадкових процесів на субгауссовість [8]. Позначимо експоненційну генератрису (твірну функцію) кумулянт випадкової величини $\xi(t)$ як значення лінійного процесу в точці t через

$$g_\xi(y,t) = \ln \mathbf{M}\, e^{y\xi(t)} = \ln f_\xi(-yi;t) - y\cdot\mathbf{M}\xi, \quad y \in \mathbf{R} . \tag{10}$$

Як було показано вище, для перевірки на субгауссовість, необхідно, щоб випадкові величини були центрованими, тому у формулі (10) і виникла потреба відняти початковий момент.

З врахуванням (6), маємо

$$g_\xi(y,t) = \ln f_\xi(u;t) = \ln f_\xi(-yi;t) = \\ = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\left[\frac{e^{yx\varphi(\tau,t)} - 1 - yx\varphi(\tau,t)}{x^2}\right] d_x K_\eta(x,t)d\tau. \tag{11}$$

Зауваження 1. Згідно з [6], можна легко провести перевірку, що для (11) $\mathbf{M}\xi(t) \equiv 0$:

$$\mathbf{M}\xi^k = \left.\frac{d^k g_\xi(y,t)}{dy^k}\right|_{y=0} = \\ = \left.\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\left[\frac{x\varphi(\tau,t)e^{yx\varphi(\tau,t)} - x\varphi(\tau,t)}{x^2}\right] d_x K_\eta(x,t)d\tau\right|_{y=0} = 0.$$

А це означає, що в (3) $m = 0$.

Таким чином, для гільбертового субгауссового лінійного процесу $\xi(t)$ має місце наступна формула субгауссового стандарту:

$$\tau(\xi) = \\ = \sup_{\substack{y\neq 0\\ y\in R}}\left[\frac{2}{y^2}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\left[\frac{e^{yx\varphi(\tau,t)} - 1 - yx\varphi(\tau,t)}{x^2}\right] d_x K_\eta(x,t)d\tau\right]^{1/2}. \tag{12}$$

де ξ – значення лінійного процесу в точці t.

Нагадаємо, що при $\xi \in Sub(\Omega)$ випливає, що $\mathbf{M}\xi = 0$ і виконується нерівність $\mathbf{M}\xi^2 \le \tau^2(\xi)$, тобто $\mathbf{D}\xi \le \tau^2(\xi)$. Тому можна вивести коефіцієнт субгауссовості [8] з урахуванням (9) та (12) в момент t

$$S_t = \frac{\tau^2(\xi)}{R(t,t)} = \frac{\tau^2(\xi)}{\kappa^2 \int_{-\infty}^{\infty} \varphi^2(\tau,t)d\tau} . \tag{13}$$

У [8] розроблена методика перевірки різних випадкових величин на субгауссовість. Основна задача на практиці при оцінюванні точності моделювання і при аналізі похибок ІВС діагностики полягає у встановленні субгауссовості процесу, який досліджується.

Зупинимося на деяких прикладах з використанням описаної вище схеми дослідження процесів на субгауссовість.

Розглянемо випадок, коли $\xi(t)$ – лінійний випадковий субгауссовий процес виду

$$\xi(t)=\int_{-\infty}^{\infty}\varphi(t-\tau)d\pi(\tau),\quad t\in T,$$

ядро якого визначається функцією $\varphi(\tau)\tau\in(-\infty,\infty)$, а породжуючий процес $\eta(t)$ – однорідний з незалежними приростами, що входять в (1) є пуассонівський $\eta(t)=\pi(t)$.

Тобто це стаціонарний процес у вузькому сенсі, який залежить від ядра. Використовуючи характеристичну функцію цього процесу, ми можемо дослідити його на субгауссовість. Відповідь буде залежати від характеристик породжуючого процесу, а більш конкретно від пуассонівського спектру стрибків породжуючого процесу.

$$\tau(\xi)=\sup_{\substack{y\neq 0\\ y\in R}}\left[\frac{2}{y^2}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\left[\frac{e^{yx\varphi(\tau)}-1-yx\varphi(\tau)}{x^2}\right]d_xK_{\pi(1)}(x)d\tau\right]^{1/2}. \tag{14}$$

де $K_\eta(x,t)\equiv K_{\pi(1)}(x)=\begin{cases}0, & x<1,\\ \lambda, & x\geq 1.\end{cases}$

Враховуючи останній вираз, (14) можна представити у вигляді:

$$\tau(\xi)=\sup_{\substack{y\neq 0\\ y\in R}}\left[\frac{2}{y^2}\int_{-\infty}^{\infty}\left(e^{y\varphi(\tau)}-1-y\varphi(\tau)\right)d\tau\right]^{1/2}. \tag{15}$$

Модель процесу будується у вигляді згортки або тільки наближено у вигляді дискретної згортки породжуючого процесу з дискретним ядром, як це описано в [4]. Отримавши формулу (15), при відповідних ядрах, можна дослідити відповідний лінійний процес на приналежність його до $Sub(\Omega)$.

Таким чином, якщо в (15) існує права частина, то для такого процесу ми будемо принаймні теоретично мати субгауссовий стандарт, дисперсію, коефіцієнт субгауссовості. Це дає можливість порівнювати між собою різні моделі імпульсних процесів, наприклад, такі, як модель RC-шуму – дискретну і неперервну, модель RLC-шуму, різні моделі імпульсних потоків.

В тому випадку, коли теоретичні дослідження моделей є складними, доводиться застосовувати чисельні методи, як це було показано в [8]. Коли вихідний лінійний процес, що моделюється, не є субгауссовим, то переходять до зрізаних розподілів, тобто до обмежених випадкових значень лінійного процесу. А відповідно до наведеної вище теорії, обмежена випадкова величина є субгауссова і для неї легко знайти її субгауссовий стандарт або принаймні його оцінку зверху, яка буде дорівнювати обмежуючій константі.

Висновки

1. В роботі одержано і обгрунтовано теоретично формулу (12) для **субгауссового стандарту** гільбертового ЛВП.

2. Вперше досліджено зв'язок класу субгауссових випадкових процесів та класу лінійних випадкових процесів, з якого видно, при яких умовах лінійні випадкові процеси можна досліджувати на субгауссовість. Останнє дає змогу використати лінійні субгауссові процеси в задачах оцінок точності ІВС.

In this paper a problem of bonding between classes of linear random processes and classes of subgassian random processes is considered.

Література

1. Дюге Д. Теоретическая и прикладная статистика. Пер. с франц. / Под ред. Ю.В. Линника. – М.: Наука, 1972. – 383с.
2. Колмогоров А.Н. Теория вероятностей и математическая статисика. – М.: Наука, 1986. – 535с.
3. Лукач Е. Характеристические функции. Пер. с англ. / Под ред. В.М. Золотарьова. – М.: Наука, 1979.– 424с.
4. Марченко Б.Г. Метод стохастических интегральных представлений и его приложения в радиотехнике. – Киев: Наукова думка, 1973. – 192с.
5. Марченко Б.Г., Щербак Л.М. Линейные случайные процессы и их приложения. – Киев: Наукова думка, 1975. – 186с.
6. Марченко Н.Б. Використання моделей субгауссівських процесів при моделюванні інформаційних сигналів // Технічна електродинаміка. Тематичний випуск: "Проблеми сучасної електротехніки". – 2004. – Ч. 5. –С.117-120.
7. Марченко Н.Б., Мислович М.В. Особливості використання нестаціонарних лінійних випадкових процесів для моделювання процесів в електроенергетиці // Технічна електродинаміка. Тематичний випуск: "Силова електроніка та енергоефективність". – 2004. – Ч. 3. – С.97-100.
8. Марченко Н.Б. Деякі особливості використання субгауссових випадкових процесів в інформаційно-вимірювальних системах // Вісник Тернопільського державного технічного університету. – 2004. – Т.9, №4. – С. 139-146.
9. Марченко Н.Б. Анализ точностных характеристик при моделировании линейных субгауссовых случайных процессов и их использование в информационно-измерительных системах // Электронное моделирование. –2004. – Т. 26, №6. – С. 63-71.

Одержано 15.11.2005 р.