УДК 519.246

С. Лупенко, канд. техн. наук
Тернопільський державний технічний університет імені Івана Пулюя

ЦИКЛІЧНІ ТА ПЕРІОДИЧНІ ВИПАДКОВІ ПРОЦЕСИ ІЗ ЗОННОЮ ЧАСОВОЮ СТРУКТУРОЮ ТА ЇХ ЙМОВІРНІСНІ ХАРАКТЕРИСТИКИ

В роботі введено класи випадкових процесів, що поєднують у собі властивості циклічних (періодичних) випадкових процесів та випадкових процесів із зонною часовою структурою. Доведено теорему про умови циклічності випадкового процесу із зонною часовою структурою. Записано ймовірнісні характеристики циклічних (періодичних) випадкових процесів із зонною часовою структурою та запропоновано підхід до їх класифікації.

Вступ

Значний науковий інтерес становлять класи випадкових процесів, які є перетином деяких інших класів випадкових процесів. Такі класи можуть поєднувати властивості як одного, так і іншого класу випадкових процесів, як це, наприклад, показано в [1]. Крім того, таке комбінування різних властивостей випадкових функцій дозволяє застосовувати різні підходи до їх обробки та аналізу.

У роботі [2] введено клас випадкових процесів із зонною часовою структурою, що дало змогу моделювати сигнали, які на різних інтервалах часу мають суттєво різні ймовірнісні характеристики, породжуються за різними принципами, законами, як це є, наприклад, в роботах [3, 4]. Також, широко використовується клас стохастично періодичних випадкових процесів, тобто таких процесів, в яких ймовірнісні характеристики є періодичними за сукупністю часових аргументів, наприклад, як це є в працях [5, 6]. В роботах [7-9] дано поняття циклічного випадкового процесу, що узагальнює та розширює поняття періодичних випадкових процесів.

В даній статті дано означення новим класам випадкових процесів, що є перетином класу циклічних (періодичних) випадкових процесів та процесів із зонною часовою структурою. Такий клас випадкових процесів характеризується як зонною часовою структурою, так і стохастичною циклічністю (періодичністю). Записано ймовірнісні характеристики циклічних та періодичних випадкових процесів із зонною часовою структурою.

Основна частина

Згідно з [2], дамо означення випадкового процесу із зонною часовою структурою.

Означення 1. Нехай маємо вектор K довільних випадкових процесів

$$\Xi_{\xi}(\omega,t)=\left\{\xi_k(\omega,t),\ \ k=\overline{1,K},\ \ \omega\in\mathbf{\Omega},\ \ t\in\mathbf{R}\right\} \tag{1}$$

та невипадкове розбиття $\mathbf{W}=\left\{\mathbf{W}_k,\ k=\overline{1,K}\right\}$ множини дійсних чисел $\mathbf{R}$, з яким пов'язані індикаторні функції $\left\{I_{\mathbf{W}_k}(t),\ \ k=\overline{1,K}\right\}$, що означуються, згідно з виразом,

$$I_{\mathbf{W}_k}(t)=\begin{cases}1, & t\in\mathbf{W}_k\\ 0, & t\notin\mathbf{W}_k\end{cases},\ \ k=\overline{1,K}, \tag{2}$$

причому, часові підобласті $\left\{\mathbf{W}_k,\ k=\overline{1,K}\right\}$ задовольняють умовам:

$$\bigcup_{k=1}^{K}\mathbf{W}_k=\mathbf{R},\ \ \mathbf{W}_{k_1}\bigcap\mathbf{W}_{k_2}=\varnothing,\ \ \forall k_1\neq k_2,\ \ k_1,k_2=\overline{1,K}, \tag{3}$$

тоді випадковий процес

$$\xi(\omega,t)=\sum_{k=1}^{K}\xi_k(\omega,t)I_{\mathbf{W}_k}(t),\quad \omega\in\mathbf{\Omega},\quad t\in\mathbf{R} \tag{4}$$

будемо називати випадковим процесом із детермінованою зонною часовою структурою (із K зонами).

Функції розподілу випадкового процесу (4) мають вигляд [2]:

$$F_{p_\xi}(x_1,...,x_p;t_1,...,t_p)=\sum_{k_1=1}^{K}{}_{(p)}\sum_{k_p=1}^{K}F_{p_{\xi_{k_1}...\xi_{k_p}}}(x_1,...,x_p;t_1,...,t_p)\cdot\prod_{j=1}^{p}I_{\mathbf{W}_{k_j}}(t_j),\ p\in\mathbf{N}, \tag{5}$$

де $\left\{F_{p_{\xi_{k_1}...\xi_{k_p}}}(x_1,...,x_p;t_1,...,t_p)\right\}$ - множина p-вимірних функцій розподілу компонент вектора (1).

Відзначимо, що випадковий процес (4) із зонною часовою структурою може бути поданий і так:

$$\xi(\omega,t)=\sum_{k=1}^{K}\tilde{\xi}_k(\omega,t),\ \omega\in\mathbf{\Omega},\ t\in\mathbf{R}, \tag{6}$$

де $\left\{\tilde{\xi}_k(\omega,t),\ k=\overline{1,K},\ \omega\in\mathbf{\Omega},\ t\in\mathbf{R}\right\}$ - множина випадкових процесів, що рівні:

$$\tilde{\xi}_k(\omega,t)=\xi(\omega,t)I_{\mathbf{W}_k}(t),\quad \omega\in\mathbf{\Omega},\quad t\in\mathbf{R}. \tag{7}$$

Компоненти $\left\{\tilde{\xi}_k(\omega,t),\ k=\overline{1,K},\ \omega\in\mathbf{\Omega},\ t\in\mathbf{R}\right\}$ конструкції (6) та компоненти $\left\{\xi_k(\omega,t),\ k=\overline{1,K},\ \omega\in\mathbf{\Omega},\ t\in\mathbf{R}\right\}$ конструкції (4) є пов'язаними такими співвідношеннями:

$$\tilde{\xi}_k(\omega,t)=\begin{cases}\xi_k(\omega,t),\ t\in\mathbf{W}_k,\\ 0,\ t\notin\mathbf{W}_k.\end{cases},\ k=\overline{1,K},\ \omega\in\mathbf{\Omega},\ t\in\mathbf{R}, \tag{8}$$

або, що аналогічно

$$\tilde{\xi}_k(\omega,t)=\xi_k(\omega,t)I_{\mathbf{W}_k}(t),\ k=\overline{1,K},\ \omega\in\mathbf{\Omega},\ t\in\mathbf{R}. \tag{9}$$

Тобто, в конструкції (6) відповідні k-ті компоненти на відповідних k-тих множинах $\mathbf{R}\setminus\mathbf{W}_k$ тотожно рівні нулеві.

Функції розподілу випадкового процесу конструкції (6) мають структуру, що аналогічна структурі функцій розподілу (5) конструкції (4) і, відповідно, мають вигляд:

$$F_{p_\xi}(x_1,...,x_p;t_1,...,t_p)=\sum_{k_1=1}^{K}{}_{(p)}\sum_{k_p=1}^{K}F_{p_{\tilde{\xi}_{k_1}...\tilde{\xi}_{k_p}}}(x_1,...,x_p;t_1,...,t_p)\cdot\prod_{j=1}^{p}I_{\mathbf{W}_{k_j}}(t_j),\ p\in\mathbf{N}, \tag{10}$$

де $\left\{F_{p_{\tilde{\xi}_{k_1}...\tilde{\xi}_{k_p}}}(x_1,...,x_p;t_1,...,t_p)\right\}$ - множина p-вимірних функцій розподілу компонент вектора $\left\{\tilde{\xi}_k(\omega,t),\ k=\overline{1,K},\ \omega\in\mathbf{\Omega},\ t\in\mathbf{R}\right\}$.

Тепер дамо означення стохастично періодичного випадкового процесу за Слуцьким [5, 6].

Означення 2. Сепарабельний випадковий процес $\{\xi(\omega,t),\ t\in\mathbf{R},\ \omega\in\mathbf{\Omega}\}$, називається T-періодичним, якщо існує таке число $T>0$, що скінченновимірні вектори ($\xi(\omega,t_1)$, $\xi(\omega,t_2)$, ... , $\xi(\omega,t_p)$) і ($\xi(\omega,t_1+T)$, $\xi(\omega,t_2+T)$, ... , $\xi(\omega,t_p+T)$), де $\{t_1,\ t_2,\ ...,t_p\}$ - множина сепарабельності процесу $\xi(\omega,t)$, при всіх цілих $p\geq1$ є стохастично еквівалентними у широкому розумінні.

Для стохастично T-періодичного випадкового процесу p-вимірна функція розподілу є періодичною з періодом T за сукупністю часових аргументів

$$F_{p_\xi}\left(x_1,...,x_p;t_1,...,t_p\right)=F_{p_\xi}\left(x_1,...,x_p;t_1+T,...,t_p+T\right),\ \ T>0\,. \tag{11}$$

Випадковий процес, що одночасно має властивості процесу із зонною часовою структурою та стохастично періодичного випадкового процесів, будемо називати стохастично періодичним процесом із зонною часовою структурою.

Згідно з роботами [7-9], дамо означення неперервного циклічного випадкового процесу, що є підкласом циклічних функцій.

Означення 3. Сепарабельний випадковий процес $\{\xi(\omega,t),\omega\in\mathbf{\Omega},t\in\mathbf{R}\}$, називається циклічним випадковим процесом, якщо існує така функція $T(t,n)$, яка задовольняє умовам функції ритму, тобто умовам (12), (13), що скінченновимірні вектори ($\xi(\omega,t_1)$, $\xi(\omega,t_2)$,.. , $\xi(\omega,t_p)$) і ($\xi(\omega,t_1+T(t_1,n))$, $\xi(\omega,t_2+T(t_2,n))$),..., $\xi(\omega,t_p+T(t_p,n))$), $n\in\mathbf{Z}$, де $\{t_1,\ t_2,...,t_p\}$ - множина сепарабельності процесу $\{\xi(\omega,t),\omega\in\mathbf{\Omega},t\in\mathbf{R}\}$, при всіх цілих $p\geq 1$ є стохастично еквівалентними у широкому розумінні.

Функція $T(t,n)$ відображає закон зміни ритму циклічної функції і, відповідно, її будемо називати функцією ритму циклічної функції. Функція ритму визначає закон зміни часових інтервалів між однофазними значеннями циклічної функції.

Функція $T(t,n)$ повинна задовольняти такі умови.

1. Вона задана на всій дійсній осі $t\in\mathbf{R}$ і на всій множині цілих чисел і дорівнює нулю, коли $n=0$. В решта випадках вона або додатна або від'ємна, тобто:

   a) $T(t,n)>0$, якщо $n>0$;

   b) $T(t,n)=0$, якщо $n=0$;

   c) $T(t,n)<0$, якщо $n<0$. (12)

2. Для будь-яких $t_1\in\mathbf{R}$ та $t_2\in\mathbf{R}$, для яких $t_2>t_1$ для функції $T(t,n)$ виконується нерівність:

$$t_1+T(t_1,n)<t_2+T(t_2,n),\ \forall n\in\mathbf{Z}. \tag{13}$$

Властивості (12) витікають із фізичного змісту функції ритму. Властивість (13) відображає факт строгої впорядкованості фаз, факт збереження типу впорядкування фаз циклічної функції в рамках кожного із її циклів.

Так, для циклічного випадкового процесу сімейство його функцій розподілу задовольняє наступні рівності:

$$F_{1_\xi}(x,t)=F_{1_\xi}(x,t+T(t,n)),\ \ x,t\in\mathbf{R},\ \ n\in\mathbf{Z},...,$$

$$F_{p_\xi}(x_1,...,x_p,t_1,...,t_p)=$$

$$=F_{p_\xi}(x_1,...,x_p,t_1+T(t_1,n),...,t_p+T(t_p,n)),\ \ x_1,...,x_p,t_1,...,t_p\in\mathbf{R},\ \ n\in\mathbf{Z},\ p\in\mathbf{N}. \tag{14}$$

Якщо $T(t,n)=n\cdot T, T=const, T>0$, то будемо мати випадковий циклічний процес із стабільним ритмом або так званий стохастично T-періодичний процес за Слуцьким. Якщо $T(t,n)\neq n\cdot T$, то будемо мати випадковий циклічний процес із змінним ритмом.

Випадковий процес, що одночасно має властивості процесу із зонною часовою структурою, тобто його можна подати у вигляді конструкцій (4) чи (6) та є циклічним випадковим процесом, будемо називати циклічним випадковим процесом із зонною структурою.

Нехай маємо випадковий циклічний процес із K зонами на кожному його циклі. Розглянемо додаткові умови, яким повинні задовольняти елементи (вектор процесів

$\left\{\xi_k(\omega,t),\ k=\overline{1,K}\right\}$ та множина індикаторних функцій $\left\{I_{\mathbf{W}_k}(t),\ k=\overline{1,K}\right\}$) конструкції (4) процесу із зонною часовою структурою, щоб він був циклічним (періодичним) випадковим процесом. Для цього сформулюємо таку теорему.

Теорема 1. Якщо в конструкції (4) випадкового процесу $\{\xi(\omega,t),\omega\in\mathbf{\Omega},t\in\mathbf{R}\}$ із зонною часовою структурою компоненти вектора $\left\{\xi_k(\omega,t),\ k=\overline{1,K}\right\}$ є :

1) сукупністю стаціонарних та стаціонарно пов'язаних випадкових процесів у вузькому розумінні, тобто для його сумісних багатовимірних функцій розподілу виконується рівність:

$$F_{p_{\xi_{k_1}\ldots\xi_{k_p}}}(x_1,\ldots,x_p;t_1,\ldots,t_p)=F_{p_{\xi_{k_1}\ldots\xi_{k_p}}}(x_1,\ldots,x_p;t_1+L,\ldots,t_p+L),$$
$$\forall L\in\mathbf{R},\ k_1,\ldots,k_p=\overline{1,K},t_1,\ldots,t_p\in\mathbf{R}; \tag{15}$$

2) сукупністю циклічних ритмічно пов'язаних випадкових процесів із функціями ритму $T(t,n)$, тобто процесів, для сумісної p - вимірної функції розподілу яких має місце рівність:

$$F_{p_{\xi_{k_1}\ldots\xi_{k_p}}}(x_1,\ldots,x_p;t_1,\ldots,t_p)=$$
$$=F_{p_{\xi_{k_1}\ldots\xi_{k_p}}}(x_1,\ldots,x_p;t_1+T(t_1,n),\ldots,t_p+T(t_p,n)),n\in\mathbf{Z},\ k_1,\ldots,k_p=\overline{1,K},t_1,\ldots,t_p\in\mathbf{R}, \tag{16}$$

а індикаторні функції $\left\{I_{\mathbf{W}_k}(t),\ k=\overline{1,K}\right\}$ в конструкції (4) є циклічними детермінованими функціями із функціями ритму $T(t,n)$, тобто:

$$I_{\mathbf{W}_k}(t)=I_{\mathbf{W}_k}(t+T(t,n)),\quad k=\overline{1,K},\ t\in\mathbf{R},\ n\in\mathbf{Z}, \tag{17}$$

то випадковий процес $\{\xi(\omega,t),\omega\in\mathbf{\Omega},t\in\mathbf{R}\}$ буде циклічним із функцією ритму $T(t,n)$.

Доведення. Розглянемо лише випадок, коли компоненти вектора $\left\{\xi_k(\omega,t),\ k=\overline{1,K}\right\}$ є сукупністю циклічних ритмічно пов'язаних випадкових процесів із функціями ритму $T(t,n)$, оскільки ця умова є сильнішою у порівнянні із умовою стаціонарності та стаціонарної пов'язаності випадкових компонент, а тому доведення теореми для цього випадку автоматично поширюється і на випадок, коли компоненти вектора $\left\{\xi_k(\omega,t),\ k=\overline{1,K}\right\}$ є стаціонарними та стаціонарно пов'язаними.

Згідно з формулою (5) p-вимірна функція розподілу процесу $\{\xi(\omega,t),\omega\in\mathbf{\Omega},t\in\mathbf{R}\}$ із зонною часовою структурою буде дорівнювати:

$$F_{p_\xi}(x_1,\ldots,x_p;t_1,\ldots,t_p)=\sum_{k_1=1}^{K}{}_{(p)}\sum_{k_p=1}^{K}F_{p_{\xi_{k_1}\ldots\xi_{k_p}}}(x_1,\ldots,x_p;t_1,\ldots,t_p)\cdot\prod_{j=1}^{p}I_{\mathbf{W}_{k_j}}(t_j)=$$
$$=\sum_{k_1=1}^{K}{}_{(p)}\sum_{k_p=1}^{K}F_{k_{\xi_{k_1}\ldots\xi_{k_p}}}(x_1,\ldots,x_p;t_1+T(t_1,n),\ldots,t_p+T(t_p,n))\cdot\prod_{j=1}^{p}I_{\mathbf{W}_{k_j}}(t_j+T(t_j,n))=$$
$$=F_{p_\xi}(x_1,\ldots,x_p;t_1+T(t_1,n),\ldots,t_p+T(t_p,n)),\ t_1,\ldots,t_p\in\mathbf{R},\ n\in\mathbf{Z}.$$

Тобто, функція розподілу процесу $\{\xi(\omega,t),\omega\in\mathbf{\Omega},t\in\mathbf{R}\}$ є циклічною за сукупністю аргументів із функцією ритму $T(t,n)$.

Теорему 1 доведено.

Відзначимо, що у випадку виконання умов (15), процес (4) буде циклічним випадковим процесом із розладками (циклічний кусково-стаціонарний випадковий процес).

У частинному випадку, якщо припустити, що індикаторні функції $\left\{I_{\mathbf{W}_k}(t),\ k=\overline{1,K}\right\}$ в конструкції (4) є періодичними детермінованими функціями з періодом T, тобто:

$$I_{\mathbf{W}_k}(t)=I_{\mathbf{W}_k}(t+T),\ \ k=\overline{1,K}\,, \tag{18}$$

а компоненти вектора $\left\{\xi_k(\omega,t),\ \ k=\overline{1,K}\right\}$ в конструкції (4) є:

1) сукупністю стаціонарних та стаціонарно пов'язаних випадкових процесів у вузькому розумінні, тобто для його сумісних багатовимірних функцій розподілу виконується рівність (15);

2) сукупністю T-періодичних та T-періодично пов'язаних випадкових процесів, тобто процесів, для яких сумісні багатовимірні функції розподілу є T-періодичими за сукупністю аргументів, тобто:

$$F_{p_{\xi_{k_1}\ldots\xi_{k_p}}}\left(x_1,\ldots,x_p;t_1,\ldots,t_p\right)=F_{p_{\xi_{k_1}\ldots\xi_{k_p}}}\left(x_1,\ldots,x_p;t_1+T,\ldots,t_p+T\right),T>0\,, \tag{19}$$

то процес $\{\xi(\omega,t),\omega\in\mathbf{\Omega},t\in\mathbf{R}\}$ буде стохастично періодичним з періодом T.

Відзначимо, що властивість (15) повинна виконуватися для довільного дійсного L, а у властивості (19) вимагається, щоб число T було періодом, тобто було додатне, найменше і лише одне. У випадку, коли компоненти вектора $\left\{\xi_k(\omega,t),\ \ k=\overline{1,K}\right\}$ є стаціонарними та стаціонарно пов'язаними випадковими процесами, то процес (4) буде стохастично періодичним процесом із розладками [10].

Доведена теорема дає змогу обгрунтувати можливість застосування двох методів обробки циклічних (періодичних) випадкових процесів із зонною часовою структурою: окремо по зонах та усереднюючи відліки, взяті із процесу через інтервали, що визначаються функцією ритму $T(t,n)$ для циклічного процесу або через період T для періодичного процесу.

Циклічний (періодичний) випадковий процес можна подати у вигляді дещо відмінної від (4) та (6) конструкції, а саме такої, яка відображає той факт, що циклічний випадковий процес – це сукупність слідуючих один за одним циклів, тобто:

$$\xi(\omega,t)=\sum_{m\in\mathbf{Z}}\tilde{\xi}_m(\omega,t),\ \omega\in\mathbf{\Omega},\ t\in\mathbf{R}\,, \tag{20}$$

де $\tilde{\xi}_m(\omega,t)$ - випадковий процес, що відповідає m-му циклу циклічного випадкового процесу $\xi(\omega,t)$, який визначається так:

$$\tilde{\xi}_m(\omega,t)=\xi(\omega,t)\cdot I_{\tilde{\mathbf{W}}_m}(t),\ m\in\mathbf{Z},\ t\in\mathbf{R}\,. \tag{21}$$

де $I_{\tilde{\mathbf{W}}_m}(t)$ - індикаторна функція m-го циклу, що дорівнює:

$$I_{\tilde{\mathbf{W}}_m}(t)=\begin{cases}1,\ t\in\tilde{\mathbf{W}}_m,\\ 0,\ t\notin\tilde{\mathbf{W}}_m.\end{cases} \tag{22}$$

Області $\left\{\tilde{\mathbf{W}}_m=[t_m,\,t_{m+1})\subset\mathbf{R},\,m\in\mathbf{Z}\right\}$ є множинами, на яких задані відповідні цикли циклічного процесу $\xi(\omega,t)$ і для них мають місце співвідношення:

$$\bigcup_{m\in\mathbf{Z}}\widetilde{\mathbf{W}}_m=\mathbf{R},\ \ \widetilde{\mathbf{W}}_{m_1}\bigcap\widetilde{\mathbf{W}}_{m_2}=\varnothing,\ \ \forall m_1\neq m_2,\ \ m_1,m_2\in\mathbf{Z}. \tag{23}$$

Множина $\{t_m, m\in\mathbf{Z}\}$ є множиною початків відповідних циклів циклічного випадкового процесу $\xi(\omega,t)$. Оскільки випадковий процес $\xi(\omega,t)$ є циклічним (періодичним), ритмічна структура якого визначається функцією ритму $T(t,n)$(періодом T), то для множини початків циклів $\{t_m, m\in\mathbf{Z}\}$ мають місце такі співвідношення:

1) $t_{m+n}=t_m+T(t_m,n), \forall n\in\mathbf{Z}$, якщо $T(t,n)\neq n\cdot T$; (24)

2) $t_{m+n}=t_m+n\cdot T, \forall n\in\mathbf{Z}$, якщо $T(t,n)=n\cdot T, T=const, T>0$. (25)

Відповідно до вищенаведеного, в конструкції (20) відповідні m-ті компоненти на відповідних m-тих множинах $\mathbf{R}\setminus\widetilde{\mathbf{W}}_m$ тотожно рівні нулеві.

Функції розподілу циклічного випадкового процесу $\xi(\omega,t)$ можуть бути записані, аналогічно (10), через функції розподілу компонент $\{\tilde{\xi}_m(\omega,t), m\in\mathbf{Z}\}$ конструкції (20), тобто:

$$F_{p_\xi}(x_1,...,x_p;t_1,...,t_p)=\sum_{m_1\in\mathbf{Z}}{}^{(p)}\sum_{m_p\in\mathbf{Z}}F_{p_{\tilde{\xi}_{m_1}...\tilde{\xi}_{m_p}}}(x_1,...,x_p;t_1,...,t_p)\cdot\prod_{j=1}^{p}I_{\mathbf{W}_{m_j}}(t_j),\ p\in\mathbf{N}, \tag{26}$$

де $\left\{F_{p_{\tilde{\xi}_{m_1}...\tilde{\xi}_{m_p}}}(x_1,...,x_p;t_1,...,t_p), m_1,...,m_p\in\mathbf{Z}\right\}$ - множина p-вимірних функцій розподілу компонент вектора, $\{\tilde{\xi}_m(\omega,t), m\in\mathbf{Z}\}$.

Ще одним способом зображення циклічного випадкового процесу $\xi(\omega,t)$, який враховує наявність у ньому зонної часової структури (цикл процесу складається із послідовності певних зон, які є присутніми у кожному його циклі) є така конструкція:

$$\xi(\omega,t)=\sum_{m\in\mathbf{Z}}\sum_{k=1}^{K}\bar{\xi}_{mk}(\omega,t),\ \omega\in\mathbf{\Omega},\ t\in\mathbf{R}, \tag{27}$$

де $\left\{\bar{\xi}_{mk}(t), t\in\mathbf{R}, m\in\mathbf{Z}, k=\overline{1,K}\right\}$ - матриця випадкових процесів, що зображають k-ті зони в m-тих циклах циклічного випадкового процесу, і які дорівнюють:

$$\bar{\xi}_{mk}(\omega,t)=\xi(\omega,t)\cdot I_{\overline{\mathbf{W}}_{mk}}(t)=\tilde{\xi}_m(\omega,t)\cdot I_{\overline{\mathbf{W}}_{mk}}(t)=\xi_k(\omega,t)\cdot I_{\overline{\mathbf{W}}_{mk}}(t),\ t\in\mathbf{R}. \tag{28}$$

$I_{\overline{\mathbf{W}}_{mk}}(t)$ - індикаторна функція k-ї зони в m-му циклі, що дорівнює:

$$I_{\overline{\mathbf{W}}_{mk}}(t)=\begin{cases}1,\ t\in\overline{\mathbf{W}}_{mk},\\0,\ t\notin\overline{\mathbf{W}}_{mk}.\end{cases} \tag{29}$$

Області $\left\{\overline{\mathbf{W}}_{mk}=[t_{m,k}, t_{m,k+1})\subset\widetilde{\mathbf{W}}_m, m\in\mathbf{Z}, k=\overline{1,K}\right\}$ є множинами, на яких задані відповідні (k-і) зони у відповідних (m-их) циклах процесу $\xi(\omega,t)$. Дані області задовольняють таким співвідношенням:

$$\bigcup_{m\in\mathbf{Z}}\bigcup_{k=1}^{K}\overline{\mathbf{W}}_{mk}=\mathbf{R},\ \overline{\mathbf{W}}_{mk_1}\bigcap\overline{\mathbf{W}}_{mk_2}=\varnothing,\ k_1\neq k_2. \tag{30}$$

Між областями $\left\{\overline{\mathbf{W}}_{mk}, m\in\mathbf{Z}, k=\overline{1,K}\right\}$, $\{\widetilde{\mathbf{W}}_m, m\in\mathbf{Z}\}$ та $\left\{\mathbf{W}_k, k=\overline{1,K}\right\}$ існують такі залежності:

$$\widetilde{\mathbf{W}}_m=\bigcup_{k=1}^{K}\overline{\mathbf{W}}_{mk},\ m\in\mathbf{Z},\ \mathbf{W}_k=\bigcup_{m\in\mathbf{Z}}\overline{\mathbf{W}}_{mk}=\bigcup_{m\in\mathbf{Z}}[t_{m,k}, t_{m,k+1}),\ k=\overline{1,K}. \tag{31}$$

Також має місце таке співвідношення між відповідними компонентами $\tilde{\xi}_m(\omega,t)$ та $\bar{\xi}_{mk}(t), t\in\mathbf{R}$:

$$\tilde{\xi}_m(\omega,t)=\sum_{k=1}^{K}\bar{\xi}_{mk}(\omega,t),\ \omega\in\mathbf{\Omega},\ t\in\mathbf{R},\ \forall m\in\mathbf{Z}. \qquad (32)$$

Отже, зонна структура циклічного випадкового процесу, що поданий у вигляді конструкції (27), задається множиною моментів часу, що відповідають початкам зон циклічного процесу:

$$\mathbf{D}=\left\{t_{m,k},\ m\in\mathbf{Z},\ k=\overline{1,K}\right\},\ t_m=t_{m,1},\ \forall m\in\mathbf{Z}. \qquad (33)$$

Легко показати, що за заданою множиною початків зон можна визначити дискретну функцію ритму $T(t_{m,k},n)$ циклічного випадкового процесу $\xi(\omega,t)$, що є вкладеною в неперервну $T(t,n)$, а саме:

$$T(t_{m,k},n)=t_{m+n,k}-t_{m,k},\ \forall n\in\mathbf{Z},\ m\in\mathbf{Z},\ k=\overline{1,K}. \qquad (34)$$

У випадку, якщо найдрібнішою зоною циклічного випадкового процесу є його цикл, то дискретна функція ритму буде визначатися, як це випливає з (24), через моменти початків циклів випадкового процесу $\xi(\omega,t)$:

$$T(t_m,n)=t_{m+n}-t_m,\ \forall n\in\mathbf{Z},\ m\in\mathbf{Z}. \qquad (35)$$

Отже, знаючи моменти початку зон циклічного процесу, можна визначити дискретну функцію ритму $T(t_{m,k},n)$, що є вкладеною в неперервну функцію ритму $T(t,n)$ неперервного циклічного випадкового процесу. Дискретна функція ритму $T(t_{m,k},n)$ визначає дискретну ритмічну структуру циклічного випадкового процесу.

Запишемо функцію розподілу випадкового процесу, який задано конструкцією (27).

$$F_{p_\xi}(x_1,...,x_p;t_1,...,t_p)=\sum_{m_1\in\mathbf{Z}}\sum_{k_1=1}^{K}{}^{(p)}\sum_{m_p\in\mathbf{Z}}\sum_{k_p=1}^{K}F_{p_{\bar{\xi}_{m_1,k_1}...\bar{\xi}_{m_p,k_p}}}(x_1,...,x_p;t_1,...,t_p)\cdot$$
$$\cdot\prod_{j=1}^{p}I_{\mathbf{W}_{m_j,k_j}}(t_j),\ p\in\mathbf{N}, \qquad (36)$$

де $\left\{F_{p_{\bar{\xi}_{m_1,k_1}...\bar{\xi}_{m_p,k_p}}}(x_1,...,x_p;t_1,...,t_p),\ p\in\mathbf{N},\ m_1,...,m_p\in\mathbf{Z},\ k_1,...,k_p\in\overline{1,K}\right\}$ - множина p-вимірних функцій розподілу компонент матриці $\left\{\bar{\xi}_{mk}(t),\ t\in\mathbf{R},\ m\in\mathbf{Z},\ k=\overline{1,K}\right\}$ випадкових процесів.

В залежності від типу компонент вектора (1) можна класифікувати циклічні (періодичні) процеси із зонною часовою структурою. Так, зокрема, можна виділити циклічні (періодичні) білі шуми із зонною структурою, марковські циклічні (періодичні) процеси із зонною структурою, циклічні (періодичні) випадкові процеси із розладками і т.д.

Висновок

У роботі, базуючись на результатах доведення теореми, введено нові класи випадкових процесів – клас стохастично періодичних процесів із зонною часовою структурою та клас циклічних випадкових процесів із зонною часовою структурою, що поєднують у собі властивості випадкових процесів із зонною часовою структурою та циклічних (періодичних) випадкових процесів. Записано різні варіанти конструкції циклічного випадкового процесу із зонною часовою структурою та встановлено взаємозв'язки між ними. Записано ймовірнісні характеристики циклічного випадкового процесу із зонною часовою структурою.

Виділено підклас циклічних (періодичних) процесів із зонною часовою структурою – циклічні (періодичні) випадкові процеси із розладками (циклічні (періодичні) кусково-стаціонарні випадкові процеси). Запропоновано підхід до класифікації введених випадкових процесів.

Дані випадкові процеси можуть бути плідно використані для моделювання реальних циклічних сигналів технічного та біологічного походження, якщо протягом циклу умови їх породження є різними на різних ділянках циклу, зокрема, такі процеси можуть бути використані при моделюванні циклічних сигналів серця різної фізичної природи.

The classes of random processes which combine the properties of cyclic (periodical) stochastic process and stochastic processes with zone time structure are introduced. The probability characteristics of cyclic (periodical) stochastic processes with zone time structure are given and the approach to its classification are proposed.

Література

1. Приймак М.В. Дослідження взаємозв'язку лінійних і періодичних випадкових процесів // Вимірювальна та обчислювальна техніка в технологічних процесах. - Хмельницький: Навчальна книга. – 1999. - №2. – С. 167-169.
2. Лупенко С.А. Випадковий процес із зонною часовою структурою та сімейство його функцій розподілу // Вісник Тернопільського державного технічного університету. - 2005. – Т.6, №4. - С. 103-111.
3. Лупенко С.А. Математичне моделювання та методи обробки циклічних сигналів серця в діагностичних системах кардіометрії // Вісник Тернопільського державного технічного університету. - 2001. – Т.6, №3. - С. 103-111.
4. Лупенко С.А., Щербак Л.М. Конструктивна математична модель сигналів серця в технічних системах кардіометрії // Вимірювальна та обчислювальна техніка в технологічних процесах. - Хмельницький: Навчальна книга. – 2000. - №2. - С. 133-136.
5. Гладышев Е.Г. Переодически и почти переодически коррелированные случайные процессы с непрерывным временем // Теория вероятностей и её применение. -1963. - С. 654.
6. Марченко Б.Г. Лінійні періодичні процеси // Пр. Ін.-ту електродинаміки НАН України. Електротехніка. - 1999. - С. 165-182.
7. М. Приймак., І. Боднарчук, С. Лупенко. Умовно періодичні випадкові процеси із змінним періодом //Вісник Тернопільського державного технічного університету.- 2005.-Т. 10, №2. -С.143-152.
8. Лупенко С. Циклічний випадковий процес із змінним ритмом. // Тези доповідей дев'ятої наук.-техн. конф. ТДТУ. Тернопіль. – 2005. – С.61.
9. Лупенко С. Циклічні функції та їх класифікація в задачах моделювання циклічних сигналів та коливних систем // Вимірювальна та обчислювальна техніка в технологічних процесах. - Хмельницький: Навчальна книга. – 2005. - №1. - С. 177-185.
10. Ширяев А. Н. К обнаружению разладок производственного процесса.— Теория вероятностей и ее применения.- 1963, Т. VIII.- Вып. 3.- С. 254-281.

Одержано 02.03.2006 р.