УДК 519.217.1

О.Мацюк, канд.техн.наук, М.Приймак, докт.техн.наук
Тернопільський державний технічний університет імені Івана Пулюя

ПЕРІОДИЧНО КОРЕЛЬОВАНІ ВИПАДКОВІ ПРОЦЕСИ ІЗ МОДУЛЬОВАНИМИ ЧЕРЕЗ ПЕРІОД ЗНАЧЕННЯМИ ЙМОВІРНІСНИХ ХАРАКТЕРИСТИК

Введено новий клас випадкових процесів – клас періодичних корельованих випадкових процесів із модульованими через період значеннями їх ймовірнісних характеристик. Наведено приклади сигналів (навантаження енергосистем, температура навколишнього середовища, якщо їх розглядати на достатньо тривалих інтервалах часу, співрозмірних із сезоном, роком), для опису яких може бути використаний цей клас процесів. Розглянуто також деякі прикладні задачі, розв'язок яких отримано на базі цих процесів. Наголошено на перспективних напрямках дослідження введеного класу процесів аналітичними і статистичними методами.

Добре відомо, що першочерговою умовою успішного вивчення реальних сигналів, явищ, систем, процесів навколишнього світу є вибір (чи побудова нової) їх моделі. Наявність моделі дозволяє звести дослідження «нематематичного» об'єкта до розв'язку математичної задачі, розробляти на базі моделі відповідні методи, алгоритми, програмне забезпечення для вирішення тих чи інших задач. Достовірність отримуваних при цьому результатів на пряму залежить від вдалого вибору моделі, міри її точності, адекватності, відповідності самому об'єкту, який вона описує, відображає.

Саме такими сигналами, потреба вивчення яких привела до необхідності обгрунтування їх моделей, є стохастично періодичні сигнали. Їх приклади можна навести із найрізноманітніших областей науки і техніки. Зокрема, це температура навколишнього середовища, освітленість, сонячна активність, інтенсивність сезонних опадів, енергонавантаження та частота електричних мереж, графіки газоспоживання, інтенсивність функціонування аеропортів, інших транспортних систем, дробовий і магнітний шуми, викликані періодичною зміною відповідних зовнішніх умов, віброакустичні шуми, шуми кавітації, утворені гребними гвинтами, інтенсивність потоків інформації в локальних та Інтернет-мережах.

Для опису цих та подібних їм сигналів використовується ціла низка випадкових процесів, які не тільки враховують їх стохастичну періодичність, але і дають змогу розробляти методи їх статистичного аналізу, імітаційного моделювання і, що особливо важливо, – прогнозу.

Історично першою моделлю, яка дозволяє враховувати стохастичну періодичність сигналів в рамках перших двох моментних функцій, був клас періодично корельованих випадкових процесів, введений І.О.Коронкевичем [1]. Згідно з означенням, випадковий процес $\xi(t)$ називається періодично корельованим, якщо періодичними з деяким періодом T є його математичне сподівання і кореляційна функція:

$$\begin{cases} M\xi(t) = M\xi(t+T),\ t \in (-\infty,\infty),\ T > 0, \\ R(t_1,t_2) = M\,\overset{\circ}{\xi}(t_1)\overset{\circ}{\xi}(t_2) = R(t_1+T,t_2+T), \end{cases} \tag{1}$$

де $\overset{o}{\xi}(t) = \xi(t) - M\xi(t)$ – центрований процес.

Враховуючи (1), при $t_1 = t_2 = t$

$$R(t,t) = D\xi(t) = D\xi(t+T), \tag{2}$$

тобто дисперсія періодичного корельованого процесу теж є періодичною.

Одночасно із розвитком теорії та методів статистичного аналізу періодично корельованих процесів, а також більш вузького їх класу – періодичних процесів, для яких періодичною за сукупністю аргументів є їх багатовимірна функція розподілу,

йшов інтенсивний пошук та дослідження нових класів процесів і послідовностей, що дають можливість враховувати ті чи інші специфічні особливості стохастично періодичних сигналів. Найперше – це періодичні білі шуми з неперервним аргументом [2], які мають як самостійне значення так і широке використання при обґрунтуванні моделей стохастично періодичних сигналів імпульсного характеру у вигляді лінійних періодично корельованих [3] та лінійних періодичних процесів [4-7]. Значної уваги також заслуговують дискретні періодичні шуми в загальному випадку та їх підкласи з тою чи іншою конкретною функцією розподілу [8,9]. Перспективний напрямок у вивченні стохастично періодичних сигналів, систем, започатковують періодичні марківські процеси [10] і періодичні ланцюги Маркова [11].

Поряд із стохастично періодичними сигналами в звичайному розумінні, на основних моделях яких ми коротко зупинилися, в різних областях науки і техніки зустрічаються сигнали, яким теж характерні певні ознаки (особливості) стохастичної періодичності, але загалом ці ознаки не вкладаються в традиційне поняття стохастичної періодичності і не можуть бути враховані жодним із відомих класів періодичних чи періодично корельованих процесів. До таких належать стохастично періодичні сигнали, період повторення ймовірнісних характеристик яких не є постійним, а певним чином змінюється, тобто є деякою функцією часу чи іншого аргументу. Типовим прикладом таких сигналів є електрокардіограми, отримані під час чи зразу ж після дії на організм людини фізичного навантаження чи іншого подразника, що викликає зміну частоти пульсу. Як модель такого роду сигналів в [12] було введено новий клас випадкових процесів – клас ***періодичних випадкових процесів із змінним періодом.*** На базі цих процесів запропоновано також ряд методів їх статистичного аналізу. Найперше – це побудова інтерполяційної кривої зміни періоду процесу, оцінка параметрів кривої, вибір кроку дискретизації процесу. Безумовно, що отримані результати можуть бути успішно використані в задачах розпізнавання, класифікації, діагностики тощо.

Ми так детально зупинилися на сигналах, моделями яких є періодичні випадкові процеси із змінним періодом, оскільки ідейно близькими до сигналів, які описуються цими процесами, є ще одна множина сигналів, що потребує всестороннього і глибокого вивчення. Це сигнали, які можна вважати стохастично періодичними теж при певній умові, яка не вкладається в традиційне визначення стохастичної періодичності, наприклад, в рамках моделі (1), і суть якої зводиться до наступного. Вважається, що період зміни ймовірнісних характеристик таких сигналів є постійним, але при цьому має місце відхилення значень цих характеристик від їх строгої повторюваності через період. Одночасно припускається, що ці відхилення не є хаотичними, а породжені (моделюються) дією певних факторів (впливів). Вважається також, що між значеннями ймовірнісних характеристик, взятими через період, існує певний взаємозв'язок.

Одним із яскравих прикладів такого роду сигналів є температура навколишнього середовища, якщо її поведінку розглядати на достатньо тривалих інтервалах часу, наприклад, в межах року. Тут зрозуміло, що коли математичне сподівання температури для кожного фіксованого місяця року можна вважати періодичним (із періодом $T = 24\ год.$), то математичні сподівання температури для місяців в різні сезони року (наприклад, зимою і літом) хоча теж будуть періодичними, але між собою будуть суттєво відрізнятися. Більш детально на цьому та близькому до нього прикладі енергонавантажень зупинимось нижче.

Як показує огляд літературних джерел, на даний час відсутній клас випадкових процесів, який би враховував стохастичну періодичність сигналів із наведеною вище додатковою особливістю – функціональною залежністю між значеннями їх ймовірнісних характеристик, взятими через один чи декілька періодів. З цієї ж причини відсутні ймовірнісні основи для розробки строгих методів статистичного аналізу, прогнозу такого роду сигналів.

Постановка задачі. Визначити новий клас процесів – клас періодично корельованих випадкових процесів із модельованими через період значеннями їх

ймовірнісних характеристик, розглянути на базі цих процесів деякі задачі та методи їх вирішення, а також виділити проблеми, вирішення яких очікується в майбутньому.

Повернемось до прикладів сигналів, для яких має місце стохастична періодичність з додатковими особливостями, про які говорилося вище. На рис.1 наведені графіки енергонавантажень «Київенерго» за п'ять робочих днів у травні 2002 року (графік 1) і вересні (графік 2) цього ж року.

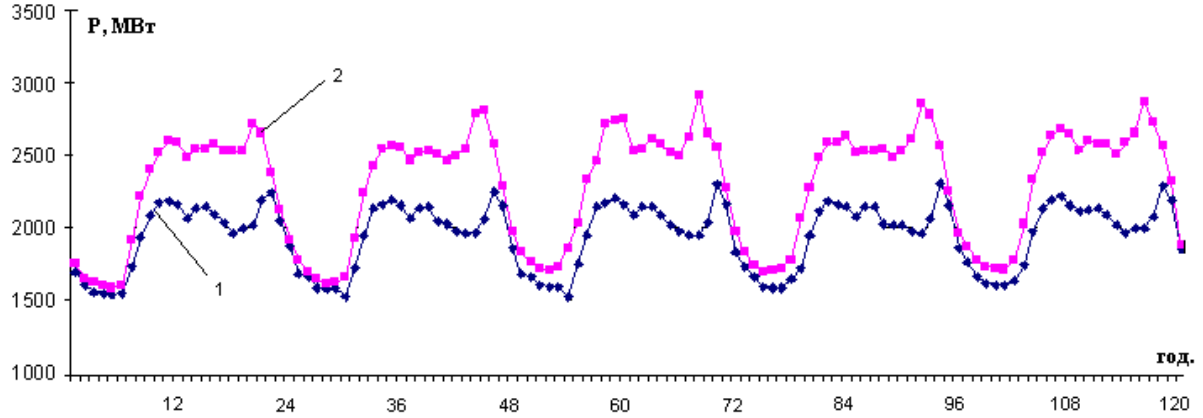

Рисунок 1 - Навантаження «Київенерго» за п'ять робочих днів у травні (графік 1) і вересні (графік 2) 2002 року

Аналізуючи ці графіки, видно, що для кожного із них окремо має місце стохастична періодичність (ритмічність) в її класичному розумінні: хоча для самих графіків детермінована періодичність відсутня, проте вважаються періодичними певні ймовірнісні характеристики енергонавантажень. Саме враховуючи ці особливості, модель енергонавантажень була обґрунтована у вигляді лінійного періодично корельованого випадкового процесу [3], пізніше в роботі [6] – у вигляді лінійного періодичного процесу.

Якщо ж графіки 1 і 2 порівняти між собою, напрошується висновок, що їх періодичні ймовірнісні характеристики будуть відрізняється, і в першу чергу це стосується математичного сподівання. Підтвердженням цього є наведені на рисунку 2 оцінки математичного сподівання енергонавантажень для цих же місяців: графік 1 – це оцінка математичного сподівання енергоспоживання в травні, графік 2 – у вересні 2002 року.

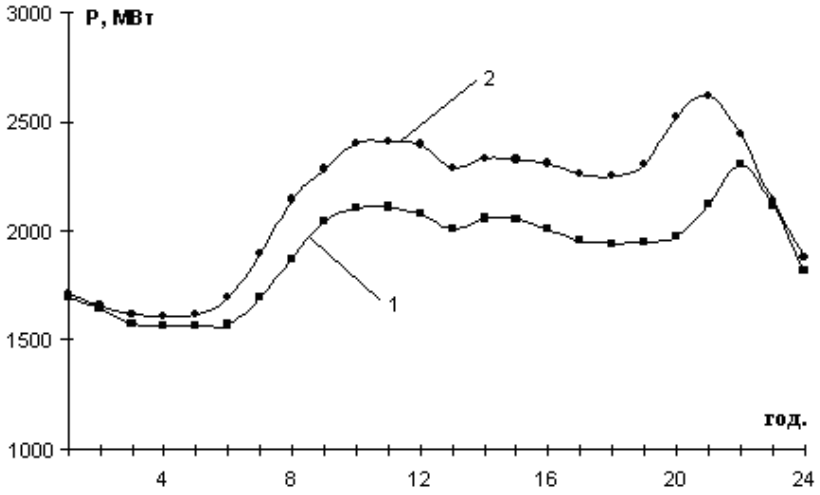

Рисунок 2 - Оцінка математичного сподівання навантаження «Київенерго» за робочі дні травня (графік 1) і вересня (графік 2) 2002 року

Із рисунка видно, що значення оцінок відрізняються між собою майже в кожну годину доби, причому якщо з 23 год. до 5 год. ранку ці відмінності незначні, то

протягом дня (з 6 год. до 22 год.) значення оцінок відрізняються суттєво. В цьому зв'язку виникає ряд запитань, зокрема, наскільки чи в скільки разів середнє значення енергоспоживання в кожну фіксовану годину доби в вересні більше (менше) від відповідних значень енергоспоживання в травні. При досліджені енергоспоживання можуть виникнути і інші задачі, наприклад, щодо виявлення і встановлення функціональної залежності між значеннями тих чи інших періодичних ймовірнісних характеристик енергонавантажень в різні місяці (сезони) року чи для певного місяця (сезону) за різні роки.

Ще одним прикладом стохастично періодичних сигналів, поведінка яких близька до енергонавантажень, є температура навколишнього середовища. На рисунку 3 наведено значення температури протягом п'яти днів у червні 2000 року (графік 1) і в жовтні (графік 2) цього ж року.

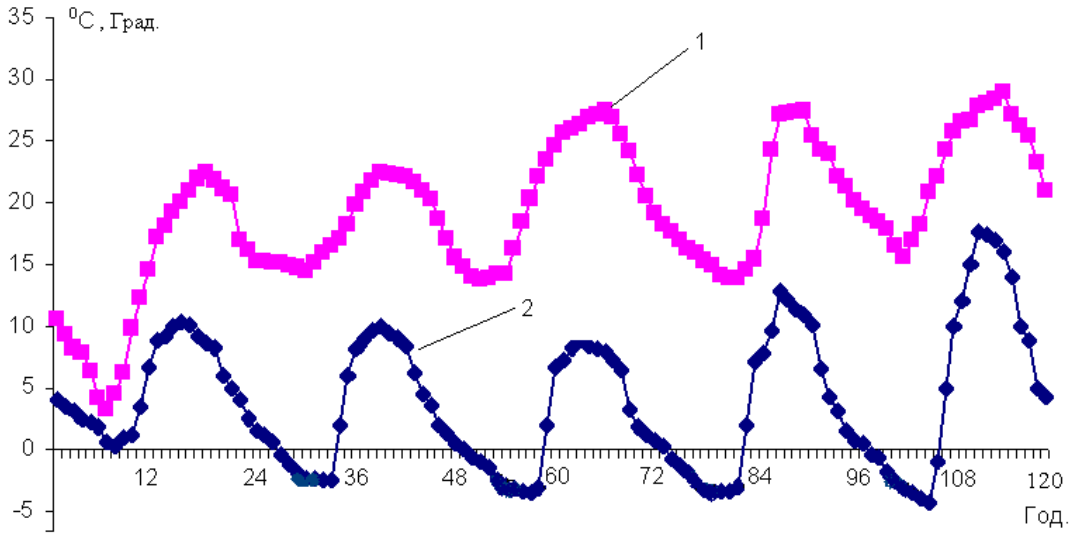

Рисунок 3 - Температура протягом п'яти днів в червні 2002 року (графік 1) і жовтні (графік 2) цього ж року

В поведінці кожного із цих графіків окремо теж спостерігається стохастична періодичність. Якщо ж ці графіки порівняти між собою, то видно, що практично для кожної фіксованої години доби значення температури в червні перевищує відповідне значення в вересні. Очевидно, що при цьому також будуть відрізнятися математичні сподівання температури, її інших періодичних ймовірнісних характеристик.

Оскільки такого роду закономірності в поведінці температури спостерігаються із року в рік, то, як і для енергонавантажень, природно припустити наявність функціональної залежності між значеннями ймовірнісних характеристик температури у фіксовані години доби, але в різні місяці, сезони року.

Щоб була можливість подібні сигнали досліджувати аналітичними і статистичними методами, найперше необхідна відповідна модель, яка б, крім стохастичної періодичності сигналів, враховувала ту чи іншу функціональну залежність між їх ймовірнісними характеристиками в моменти часу, взяті через певне число періодів (один чи декілька).

Як показує огляд літературних джерел, поки що відсутній клас випадкових процесів, який би враховував поведінку такого роду стохастичних сигналів і міг бути використаний як їх модель. З цієї ж причини відсутні і відповідні підходи вивчення їх аналітичними та статистичними методами. Тому, щоб можливість вирішувати подібні задачі появилася, введемо новий клас процесів.

Означення 1. Випадковий процес $\xi(t), t \in (-\infty, \infty)$, називається періодично корельованим із модельованими через період значеннями їх ймовірнісних характеристик, якщо існують такі перетворення (оператори) $F_1[\bullet]$ і $F_2[\bullet]$, що

$$M\xi(t+kT)=F_1[t,kT;M\xi(t)],\ t\in(-\infty,\infty),\ k=\pm1,\pm2,\ldots, \quad (1)$$

$$R(t_1+kT,t_2+kT)=F_2(t_1,t_2,kT;R(t_1,t_2)),\ t_1,t_2\in(-\infty,\infty),\ k_1,k_2=\pm1,\pm2,\ldots. \quad (2)$$

Якщо для перетворень F_1 і F_2 існують зворотні перетворення $F_1^{-1}\overset{df}{=}\tilde{F}_1$, $F_2^{-1}\overset{df}{=}\tilde{F}_2$, то вирази (1) і (2) можна привести до вигляду:

$$M\xi(t)=\tilde{F}_1[t,kT;M\xi(t+kT)],\ t\in(-\infty,\infty),\ k=\pm1,\pm2,\ldots, \quad (1a)$$

$$R(t_1,t_2)=\tilde{F}_2(t_1,t_2,kT;R(t_1+kT,t_2+kT)),\ t_1,t_2\in(-\infty,\infty),\ k_1,k_2=\pm1,\pm2,\ldots. \quad (2a)$$

Зауважимо, що в (1) і (2) перетворення $F_1[\bullet]$ і $F_2[\bullet]$ здійснюється над математичним сподіванням в точці t і відповідно кореляційної функції в точці (t_1,t_2), в результаті чого ми отримуємо значення математичного сподівання в точці $t+kT$, а кореляційної функції в точці (t_1+kT,t_2+kT). Навпаки, здійснюючи, згідно з (1а), перетворення $\tilde{F}_1[\bullet]$ над математичним сподіванням в точці $t+kT$, ми отримуємо значення математичного сподівання в точці t, відповідно перетворення $\tilde{F}_2[\bullet]$ в (2а) над кореляційною функцією в точці (t_1+kT,t_2+kT) дозволяє отримати значення цієї функції в точці (t_1,t_2).

Перетворення $F_1[\bullet]$ залежить від трьох параметрів (t,k,T) і значення $M\xi(t)$, $F_2[\bullet]$ – відповідно від чотирьох параметрів (t_1,t_2,k,T) і значення $F(t_1,t_2)$. Але вони можуть бути спрощені, якщо вибрати деякі «еталонні цикли» («еталони», «норми») математичного сподівання і кореляційної функції, які будуть «піддаватися» перетворенню. В цьому зв'язку «еталонним циклом» для математичного сподівання природно вибрати його значення на відрізку $[0,T]$: $M\xi(t),\ t\in[0,T]$. Для кореляційної функції за «еталонний цикл» виберемо значення $R(t_1,t_2)$ в смузі $[0,T]\times[0,\infty),\ t_2\ge t_1$. За цих умовах замість означення 1 сформулюємо

Означення 2. Випадковий процес $\xi(t)$ називається періодично корельованим із модельованими через період значеннями їх ймовірнісних характеристик відносно «еталону», якщо існують такі перетворення $G_1[\bullet]$ і $G_2[\bullet]$, що

$$M\xi(t+kT]=G_1[k,T;M\xi(t)],\ t\in[0,T],\ k=\pm1,\pm2,\ldots, \quad (3)$$

$$R(t_1+kT,\ t_2+kT)=G_2[k,T;R(t_1,t_2)],\ t_1\in[0,T],\ t_2\ge t_{1.},\ k_1,k_2=\pm1,\pm2,\ldots. \quad (4)$$

Очевидно, при дослідженні реальних сигналів перетворення $G_1[\bullet]$ і $G_2[\bullet]$ можуть набувати конкретних форм. Зручними в практичних дослідженнях є перетворення вигляду:

$$M\xi(t+kT)=f_1(t+kT)+g_1(t+kT)\times M\xi(t),\ t\in[0,T],\ k=\pm1,\pm2,\ldots, \quad (5)$$

$$R(t_1+kT,\ t_2+kT)=f_2(t_1+kT,\ t_2+kT)+g_2(t_1+kT,\ t_2+kT)\times R(t_1,t_2),$$
$$t_1\in[0,T],\ t_2\ge t_1,\ k_1,k_2=\pm1,\pm2,\ldots. \quad (6)$$

Частинними випадками формул (5) і (6) є «адитивне» і «мультиплікативне» перетворення (залежність). У випадку «адитивного» перетворення

$$M\xi(t+kT)=f_1(t+kT)+M\xi(t),\ t\in[0,T],\ k=\pm1,\pm2,\ldots, \quad (7)$$

$$R(t_1+kT,\ t_2+kT)=f_2(t_1+kT,t_2+kT)+R(t_1,t_2),$$
$$t_1\in[0,T],\ t_2\ge t_1,\ k_1,k_2=\pm1,\pm2,\ldots. \quad (8)$$

Як видно із (7), математичне сподівання в точці $t+kT$ відрізняється від «еталонного значення» в точці t на величину

$$f_1(t+kT)=M\xi(t+kT)-M\xi(t),\ t\in[0,T],\ k=\pm1,\pm2,\ldots. \quad (7a)$$

Аналогічно різниця між значенням кореляційної функції в точці (t_1+kT,t_2+kT) і її " «еталонним значенням» в точці (t_1,t_2) рівна

$$f_2(t_1+kT,t_2+kT)=R(t_1+kT,t_2+kT)-R(t_1,t_2),\ t_1\in[0,T],\ t_2\ge t_1,\ k=\pm1,\pm2,\ldots. \quad (8a)$$

Для «мультиплікативного» перетворення

$$M\xi(t+kT)=g_1(t+kT)\times M\xi(t),\ t\in[0,T],\ k=\pm1,\pm2,\dots, \tag{9}$$

$$R(t_1+kT,t_2+kT)=g_2(t_1+kT,t_2+kT)\times R(t_1,t_2),\ t_1\in[0,T],\ k=\pm1,\pm2,\dots. \tag{10}$$

Перетворення (9) і (10) показують, в скільки разів математичне сподівання в точці $t+kT$ і відповідно кореляційна функція в точці (t_1+kT,t_2+kT) відрізняються від їх «еталонних значень». Для математичного сподівання ця відмінність рівна відношенню

$$\frac{M\xi(t+kT)}{M\xi(t)}=g_1(t+kT),\ t\in[0,T],\ k=\pm1,\pm2,\dots. \tag{9а}$$

В останній формулі вважається, що у випадках, коли $M\xi(t)=0$, значення $g_1(t+kT)=0$.

Із (10) випливає, що відношення кореляційних функцій в точці (t_1+kT,t_2+kT) до її «еталонного значення» відповідно дорівнює

$$\frac{R(t_1+kT,t_2+kT)}{R(t_1,t_2)}=g_2(t_1+kT,t_2+kT),\ t_1\in[0,T],\ t_2\ge t_1,\ k=\pm1,\pm2,\dots. \tag{10а}$$

В цьому виразі для випадку, коли $R(t_1,t_2)=0$, теж вважається що $g_2(t_1+kT,t_2+kT)=0$.

Формули (7а), (8а), (9а), (10а) мають прикладне застосування і просту наочну ілюстрацію. Покажемо це на прикладі формул (7а), (9а).

На рис. 4 наведені, отримані раніше [13], оцінки періодичного математичного сподівання газоспоживання для «Тернопільгаз» за робочі дні січня (графік 1) (цю оцінку будемо вважати «еталонним циклом») і липня (графік 2) 2000 року. Для отримання різниці між цими оцінками використаємо дискретний аналог формули (7а), а саме формулу

$$\tilde{f}_1(t_i+kT)=\tilde{M}\xi(t_i+kT)-\tilde{M}\xi(t_i). \tag{7б}$$

В цій формулі $t_i=i\cdot\Delta t=i,\ i=\overline{1,24},\ \Delta t=1\ год.,\ T=24\ год.$ Оскільки січень і липень розділенні інтервалом в 5 місяців або 150 днів, у формулі (7б) значення $k=150$. Через $\tilde{M}$ позначено оператор оцінки математичного сподівання.

Різниця (7б) наведена у вигляді графіка 3. Аналіз отриманого результату показує, що газоспоживання в січні і в липні суттєво відрізняються в кожну годину доби. За формою різниця газоспоживань більш близька до форми газоспоживання в січні. Це можна пояснити тим, що газоспоживання в липні було більш-менш рівномірним протягом всієї доби.

Для отримання відношення математичного сподівання газоспоживання в точках $t+kT,\ t\in[0,T]$, до його «еталонного значення» скористаємося аналогом формули (9а):

$$\tilde{g}_1(t_i+kT)=\frac{\tilde{M}\xi(t_i+kT)}{\tilde{M}\xi(t_i)}.$$

В цьому виразі, як і в (7б), $t_i=i\cdot\Delta t=i,\ i=\overline{1,24},\ \Delta t=1\ год.,\ T=24\ год.,\ k=150$. Використовуючи значення наведених на рис. 4 графіків 1 і 2, отримано відношення оцінки математичного сподівання газоспоживання в липні 2000 року до «еталонного значення» – оцінки математичного сподівання газоспоживання в січні цього ж року. Результат відношення наведений на рисунку 5.

Аналізуючи отриманий результат, видно, що газоспоживання в нічні і ранішні години (з 1 год. ночі до 6 год. ранку) липня було в декілька (8-16) разів менше, ніж у відповідні години січня, і в процентному відношенні складає від 6% до 12%. Протягом дня, починаючи із 7 год. ранку до 23 год. ночі, газоспоживання в липні було приблизно в п’ять разів менше, ніж у відповідні години січня, і складє від 20% до 25%.

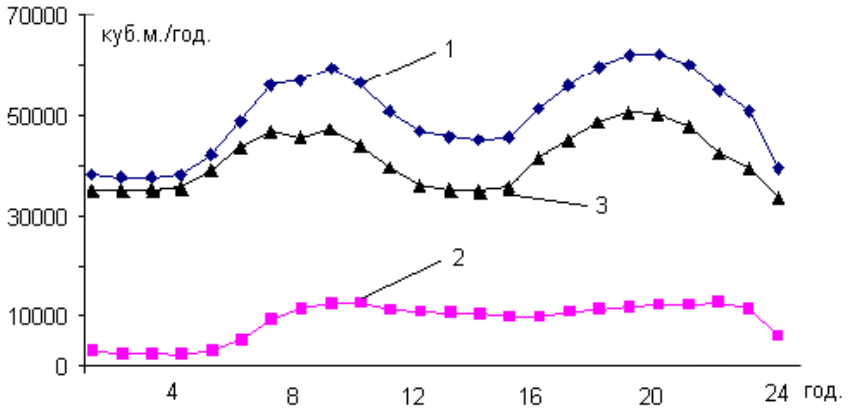

Рисунок 4 - Оцінка періодичного математичного сподівання газоспоживання «Тернопільгаз» в робочі дні січня (графік 1) і липня (графік 2) 2000 року та різниця між цими оцінками (графік 3)

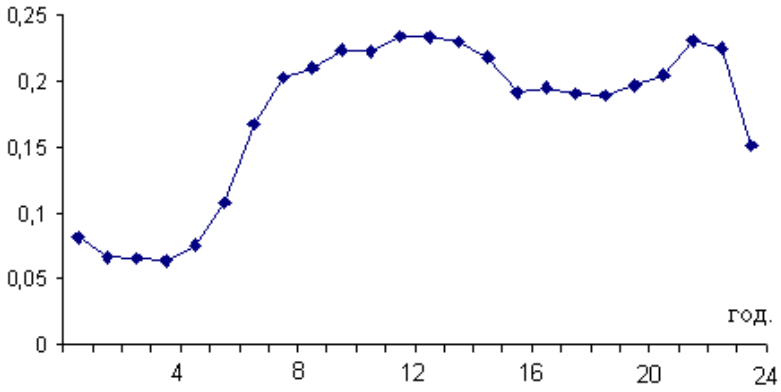

Рисунок 5 - Відношення оцінки періодичного математичного сподівання газоспоживання «Тернопільгаз» в робочі дні січня до оцінки математичного сподівання газоспоживання в липні 2000 року

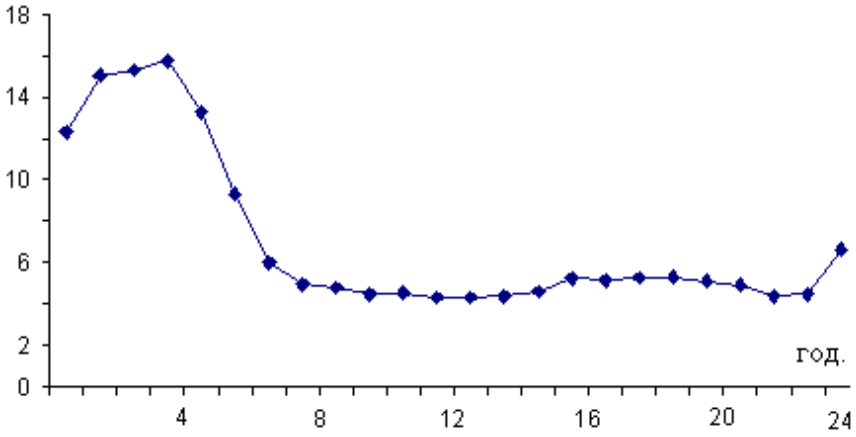

Рисунок 6 - Відношення оцінки періодичного математичного сподівання газоспоживання «Тернопільгаз» в робочі дні липня 2000 року до оцінки математичного сподівання газоспоживання в січні цього ж року

Якщо ж за «еталонний цикл» взяти газоспоживання в липні 2000 року, то по відношенню до нього газоспоживання в січні цього ж року наведені на рис. 6. Аналіз отриманого результату показує, що усередненні значення газоспоживання в січні значно перевищують відповідні значення в липні: в нічні години в 8-16 раз, в денні і вечірні години – в 4-5 разів.

Висновки. В роботі наведено приклади сигналів, для яких мають місце певні ознаки стохастичної періодичності, але в класичне поняття стохастичної періодичності вони не вкладаються, оскільки спостерігаються певні відхилення від строгої повторюваності через період їх ймовірнісних характеристик. До таких сигналів,

зокрема, належать температура навколишнього середовища, газоспоживання, якщо їх розглядати на відрізках, співрозмірних із сезоном року. Для опису таких сигналів, дослідження їх аналітичними і статистичними методами, введено новий клас процесів – клас періодично корельованих випадкових процесів із модельованими через період значеннями їх ймовірнісних характеристик. Запропоновано метод визначення міри відхилення періодичних ймовірнісних характеристик по відношенню до «норми». Безумовно, що будуть продовжені теоретичні дослідження введеного класу процесів і він знайде використання в задачах математичної статистики, зокрема, в задачах порівняння, вибору діагностичних ознак, розпізнавання гіпотез, прогнозу.

The new class of casual processes is entered – the class of periodically correlated casual processes with probabilistic descriptions, functionally dependent through a period. The examples of signals by the model of which this class of processes can be used are resulted. This in particular loading of grids, gas consuming, ambient temperature, if to examine them sufficiently the protracted time, comparable with a season, year domains. It is considered some tasks which can be decided on the base of these processes. Perspective directions of research of the entered class of processes by analytical and statistical methods are marked.

Література

1. Коронкевич О.І. Лінійні динамічні системи під дією випадкових сил // Наукові записки Львів. ун-ту. – 1957. – 44, №8. – С. 175-183.
2. Красильников О.І., Марченко Б.Г., Приймак М.В. Процеси з незалежними періодичними приростами і періодичні білі шуми // Відбір і обробка інформації. – 1996. – Вип. 10(86). – С. 22-27.
3. Баранов Г.Л., Марченко Б.Г., Приймак Н.В. Построение модели и анализ стохастически периодических нагрузок энергосистем // Известия АН СССР. Энергетика и транспорт. – 1991. – Т.37, №2. – С. 12-21.
4. Martchenko B. Concerting on a theorem for periodic in Slutsky sense linear random processes. International Congress of Mathematicians-98 Abstracts of Short Communications and Posters Contents, Berlin. – 1998. – 260 p.
5. Приймак М.В. Дослідження взаємозв'язку лінійних і періодичних випадкових процесів // Вимірювальна та обчислювальна техніка в технологічних процесах. – Хмельницький технологічний ун-т Поділля.– 1999. – №2(8). – С. 139-141.
6. Марченко Б.Г., Приймак М.В. Побудова моделі та аналіз стохастично періодичних навантажень енергосистем // Праці Ін-ту електродинаміки. – Київ: ІЕД НАН України, 1999. – Вип. 1. – С.129-153.
7. Марченко Б.Г. Лінійні періодичні процеси // Праці Ін-ту електродинаміки НАН України. – Електротехніка. – Київ: ІЕД НАН України, 1999. С. 172-185.
8. Приймак М.В. Дискретні періодичні білі шуми з неперервними розподілами і можливості їх імітаційного моделювання // Відбір і обробка інформації. – 2003. – Вип. 18(94). – С. 17-21.
9. Приймак М.В., Савчук М.А. Ймовірнісні моделі періодичних білих шумів з дискретними розподілами // Вісник Тернопільського державного технічного університету. – 2003. – Т.8, число 4. – С.92-97.
10. Приймак М.В. Марківські періодичні процеси // Вісник Тернопільського державного технічного університету. – 2003. – Т.8, число 3. – С. 17-21.
11. Приймак М.В. Періодичні ланцюги Маркова в задачах статистичного аналізу і прогнозу енергонавантажень // Технічна електродинаміка. – 2004. – №2. – С. 3-7.
12. Приймак М.В., Боднарчук І.О., Лупенко С.А. Умовно періодичні випадкові процеси із змінним періодом // Вісник Тернопільського державного технічного університету. – 2005. – №2. – С. 143-152.
13. Мацюк О.В., Приймак М.В. Моделі газонавантажень з врахуванням стохастичної періодичності та можливості їх статистичного аналізу // Розвідка та розробка нафтових і газових родовищ: Всеукраїнський щоквартальний науково-технічний журнал. – 2003. – №2(7). – С. 64-68.

Одержано 25.11.2005 р.