УДК 536.2

Пиндус О. – ст.гр. МАм – 51
Тернопільський національний технічний університет імені Івана Пулюя

РОЗВ'ЯЗОК ДИФЕРЕНЦІАЛЬНОГО РІВНЯННЯ 4-ГО ПОРЯДКУ В ПРЯМОКУТНІЙ ОБЛАСТІ

Науковий керівник: канд. фіз. – мат. наук, доцент Шелестовський Б.Г.

Pyndus O.
Ternopil Ivan Puluj National Technical University

SOLUTION OF THE 4TH ORDER DIFFERENTIAL EQUATION IN RECTANGULAR DOMAIN

Supervisor: Shelestovsky B.

Ключові слова: диференціальне рівняння, граничні умови, ряд.
Key words: differential equation, boundary conditions, series.

Диференціальне рівняння поверхні прямокутної пластинки, яка знаходиться під дією рівномірного навантаження, має вигляд:

$$\frac{\partial^4 w}{\partial x^4}+2\frac{\partial^4 w}{\partial x^2\partial y^2}+\frac{\partial^4 w}{\partial y^4}=\frac{q}{D}.,\qquad (1)$$

Граничні умови:

$$w=0,\ \frac{\partial^2 w}{\partial x^2}=0,\quad \text{для } x=0\ i\ x=a,\qquad (2)$$

$$w=0,\ \frac{\partial^2 w}{\partial y2}=0,\ \text{для } y=-\frac{b}{2}\ i\ y=b/2,\qquad (3)$$

Візьмемо розв'язок рівняння (1) у вигляді

$$w=w_1+w_2,\ w_1=\frac{q}{24D}\left(x^4-2ax^3+a^3x\right),\qquad (4)$$

w_1 задовольняє рівняння (1) та умови (2); w_2 повинно задовольняти рівнянню

$$\frac{\partial^4 w_2}{\partial x^4}+2\frac{\partial^4 w_2}{\partial x^2\partial y^2}+\frac{\partial^4 w_2}{\partial y^4}=0,\qquad (5)$$

Візьмемо w_2 у вигляді

$$w=\sum_{m=1}^{\infty}Y_m\left(y\right)\sin\frac{m\pi x}{a},\qquad (6)$$

Підставивши (6) у рівняння (5), отримаємо

$$\sum_{m=1}^{\infty}\left(Y_m^{IV}-2\frac{m^2\pi^2}{a^2}Y_m''+\frac{m^4\pi^4}{a^4}Y_m\right)\sin\frac{m\pi x}{a}=0.\qquad (7)$$

Це рівняння залишається справедливим для всіх значень *x* при умові, що для *Ym* має місце співвідношення

$$Y_m^{IV} - 2\frac{m^2\pi^2}{a^2}Y_m'' + \frac{m^4\pi^4}{a^2}Y_m = 0. \qquad (8)$$

Загальний розв'язок цього рівняння візьмемо у вигляді:

$$Y_m = \frac{qa^4}{D}\left(A_m\, ch\frac{m\pi y}{a} + B_m\frac{m\pi y}{a}sh\frac{m\pi y}{a} + C_m\, sh\frac{m\pi y}{a} + D_m\frac{m\pi y}{a}ch\frac{m\pi y}{a}\right). \quad (9)$$

Так як зігнута поверхня пластинки симетрична відносно осі *ox,* то у виразі (9) повинні бути парні функції від *y*, покладаємо $C_m = D_m = 0$.

Зігнута поверхня задається виразом:

$$w = \frac{q}{24D}\left(x^4 - 2ax^3 + a^3x\right) + \frac{qa^4}{D}\sum_{m=1}^{\infty}\left(A_m\, ch\frac{m\pi y}{a} + B_m\frac{m\pi y}{a}sh\frac{m\pi y}{a}\right)\sin\frac{m\pi x}{a}, \quad (10)$$

Задовольняючи граничні умови (3), та розклавши w_1 в тригонометричний ряд

$$\frac{q}{24D}\left(x^4 - 2ax^3 + a^3x\right) = \frac{4qa^4}{\pi^5 D}\sum_{m=1}^{\infty}\frac{1}{m^5}\sin\frac{m\pi x}{a}, \quad (11)$$

Зігнута поверхня w тепер набуде вигляду:

$$w = \frac{qa^4}{D}\sum_{m=1}^{m}\left(\frac{4}{\pi^5 m^5} + A_m\, ch\frac{m\pi y}{a} + B_m\frac{m\pi y}{a}sh\frac{m\pi y}{a}\right)\sin\frac{m\pi x}{a} \quad (12)$$

Підставивши цей вираз у граничні умови (3), отримаємо наступні рівняння для визначення постійних A_m, B_m.

$$\frac{4}{\pi^5 m^5} + A_m\, ch\,\alpha_m + \alpha_m B_m\, sh\,\alpha_m = 0;\ \left(A_m + 2B_m\right)ch\,\alpha_m + \alpha_m B_m\, sh\,\alpha_m = 0, \quad (13)$$

звідки

$$A_m = -\frac{2\left(\alpha_m\, th\alpha_m + 2\right)}{\pi^5 m^5\, ch\alpha_m},\ B_m = \frac{2}{\pi^5 m^5\, ch\alpha_m},\ \alpha_m = \frac{m\pi b}{2\alpha}. \quad (14)$$

Підставивши ці вирази у (10), одержимо розв'язок задачі

$$w = \frac{4qa^4}{\pi^5 D}\sum_{m=1,3,5,...}^{\infty}\frac{1}{m^5}\left[1 - \frac{\alpha_m th\alpha_m + 2}{2ch\alpha_m}ch\frac{2\alpha_m y}{b} + \frac{\alpha_m}{2ch\alpha_m}\frac{2y}{b}sh\frac{2\alpha_m y}{b}\right]\sin\frac{m\pi x}{a}. \quad (15)$$

Максимальний прогин одержується в середині пластинки $\left(x = \frac{a}{2},\ y = 0\right.$, де він дорівнює

$$w_{\max} = \frac{4qa^4}{\pi^5 D}\sum_{m=1,3,5,...}^{\infty}\frac{(-1)^{\frac{m-1}{2}}}{m^5}\left(1 - \frac{\alpha_m\, th\alpha_m + 2}{2ch\alpha_m}\right). \quad (16)$$