УДК 539.3

Колцун В. – ст. гр. ММ-11
*Тернопільський національний технічний університет імені Івана Пулюя*

# ПРО КОЛИВАННЯ ПРЯМОКУТНОЇ МЕМБРАНИ, ЗАКРІПЛЕНОЇ НА ЧАСТИНІ КОНТУРА

Науковий керівник: к.ф.-м.н., доц. Самборська О.М.

Koltsun V.
*Ternopil Ivan Puluj National Technical University*

# ON THE OSCILLATION OF A RECTANGULAR MEMBRANE FIXED ON A PART OF ITS CONTOUR

Supervisor: Samborska O.M.

Ключові слова: рівняння коливань мембрани, диференціальні рівняння в частинних похідних, початкові та крайові умови, метод Фур’є.
Keywords: equation of membrane vibrations, partial differential equation, initial and boundary conditions, Fourier method.

У прямокутній мембрані $0 \le x \le s$, $0 \le y \le p$ частина її контура $x = s$, $0 \le y < p$ та $y = p$, $0 \le x < s$ вільна, а інша частина контура закріплена. Визначити закон вільних коливань мембрани, якщо в початковий момент часу $t = 0$ вона має форму, що описується функцією $f(x, y) = Axy$ ($A$ – стала величина), а її початкова швидкість дорівнює нулю.

Позначимо через $u(x, y, t)$ відхилення від положення рівноваги точки мембрани $M(x, y)$ в момент часу $t$. Функція $u(x, y, t)$ задовольняє рівняння в частинних похідних другого порядку

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \left( \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right). \quad (1)$$

Дана задача зводиться до знаходження розв’язку рівняння (1), який задовольняє крайові умови

$$u(0, y, t) = 0,\ u'_x(s, y, t) = 0,$$
$$u(x, 0, t) = 0,\ u'_y(x, p, t) = 0; \quad (2)$$

та початкові умови

$$u(x, y, 0) = Axy,\ u'_t(x, y, 0) = 0. \quad (3)$$

Розв’язок задачі шукаємо методом Фур’є:

$$u(x, y, t) = X(x)Y(y)T(t). \quad (4)$$

Для функції $X(x)$ отримаємо рівняння

$$X'' + \lambda^2 X = 0 \quad (5)$$

та крайові умови

$$X(0) = 0,\ X'(s) = 0; \quad (6)$$

для функції $Y(y)$ – рівняння

$$Y'' + \mu^2 Y = 0 \tag{7}$$

і крайові умови

$$Y(0) = 0,\ Y'(p) = 0. \tag{8}$$

Для функції $T(t)$ одержимо рівняння

$$T'' + a^2\left(\lambda^2 + \mu^2\right)T = 0. \tag{9}$$

Розв’яжемо задачі (5), (6) та (7), (8), знайдемо розв’язок рівняння (9) та підставимо отримані розв’язки у формулу (4):

$$u_{n,k}(x,y,z) = \left(B_{n,k}\cos\omega_{n,k}t + C_{n,k}\sin\omega_{n,k}t\right)\times,$$

$$\times\sin\frac{(2n-1)\pi x}{2s}\sin\frac{(2k-1)\pi y}{2p} \tag{10}$$

де $\omega_{n,k} = \pi a\sqrt{\dfrac{(2n-1)^2}{4s^2} + \dfrac{(2k-1)^2}{4p^2}}$ .

Розв’язок даної задачі (1), (2), (3) шукаємо у вигляді подвійного ряду

$$u(x,y,z) = \sum_{n=1}^{\infty}\sum_{k=1}^{\infty} u_{n,k}(x,y,t). \tag{11}$$

Використовуючи початкові умови (3), знайдемо невідомі коефіцієнти $B_{n,k}$ та $C_{n,k}$. Зокрема, з умови $u'_t(x,y,0) = 0$ слідує, що $C_{n,k} = 0$. Задовольняючи умову $u(x,y,0) = Axy$, отримаємо:

$$\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{k=1}^{\infty} B_{n,k}\sin\frac{(2n-1)\pi x}{2s}\sin\frac{(2k-1)\pi y}{2p} = Axy. \tag{12}$$

Із (12) маємо:

$$B_{n,k} = \frac{4A}{sp}\int_0^s\int_0^p xy\sin\frac{(2n-1)\pi x}{2s}\sin\frac{(2k-1)\pi y}{2p}\,dxdy =$$

$$= \frac{64Asp(-1)^{n+k}}{\pi^4(2n-1)^2(2k-1)^2}. \tag{13}$$

Підставивши одержані значення коефіцієнтів $B_{n,k}$ і $C_{n,k}$ у формули (10) та (11), отримаємо розв’язок даної задачі:

$$u(x,y,z) = \frac{64As\,p}{\pi^4}\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+k}}{(2n-1)^2(2k-1)^2}\cos\omega_{n,k}t\times$$

$$\times\sin\frac{(2n-1)\pi x}{2s}\sin\frac{(2k-1)\pi y}{2p}.$$

**Література**

2. Габрусєв Григорій. Рівняння математичної фізики. Навчальний посібник / Г.В. Габрусєв. – Тернопіль: Видавництво ТНТУ ім. Івана Пулюя: 2014 – 84 ст.
3. Габрусєв Г. В. Звичайні диференціальні рівняння: навчальний посібник / Г. В. Габрусєв , О. М. Самборська. – Тернопіль : ТНТУ імені Івана Пулюя, 2014. – 172 с.