

Секція:
УДК 517.9

Математика

Дерев'янку В. – ст. гр. СН-31

Тернопільський національний технічний університет імені Івана Пулюя

РОЗВ'ЯЗАННЯ ЗАДАЧІ ПРО ПОПЕРЕЧНІ КОЛИВАННЯ СТЕРЖНЯ ЗАСОБАМИ MATHCAD

Науковий керівник: к.т.н. Габрусєва І. Ю.

Derevyanko V.

Ternopil Ivan Puluj National Technical University

SOLVING THE PROBLEM ABOUT TRANSVERSE OSCILLATIONS OF A ROD BY MATHCAD MEANS

Supervisor: Habrusieva I. Yu.

Ключові слова: поперечні коливання, стержень, диференціальні рівняння, частинні похідні.

Keywords: transverse oscillations, rod, differential equations, partial derivative.

Розв'язання задач про коливання суцільних середовищ, таких як струна чи стержень, зводиться в математичному плані до диференціальних рівнянь в частинних похідних гіперболічного типу. Точне їх розв'язання є досить складною задачею, проте для вирішення більшості інженерних завдань достатньо побудувати їх наближені розв'язки [1]. Для цього можна скористатись однією із систем комп'ютерної алгебри.

Розв'яжемо задачу про повздовжні коливання пружного прямолінійного стержня, виведеного із рівноваги тим, що в момент часу $t=0$ його поперечним перерізам надано малі повздовжні зміщення $f(t)$ та швидкості $F(t)$. Розглянемо випадок, коли кінці стержня жорстко закріплено. Вважатимемо, що поперечні перерізи стержня залишаються плоскими в процесі коливань.

Координатну вісь Ox направимо вздовж стержня. За функцію $u(x,t)$ виберемо зміщення вздовж осі поперечного перерізу, абсциса якого в стані рівноваги рівна x . Після застосування закону Гука одержуємо диференціальне рівняння в частинних похідних гіперболічного типу відносно функції $u(x,t)$:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \quad 0 < x < l, \quad t > 0, \quad (1)$$

із початковими умовами $u(x,0) = f(x)$, $u_t(x,0) = F(x)$, $0 < x < l$,

та граничними умовами $u(0,t) = u(l,t) = 0$, $t > 0$,

де $a^2 = \frac{E}{\rho_0}$, E – модуль пружності, ρ_0 – густина матеріалу стержня в незбуреному стані.

Для розв'язання диференціальних рівнянь в частинних похідних існує багато методів, як аналітичних так і чисельних. Також для зручності проведення інженерних розрахунків розроблено ряд програмних комплексів. Одним із них є система автоматизованого проектування *Mathcad*.

Для розв'язання диференціальних рівнянь та їх систем у середовищі *Mathcad* передбачено декілька засобів. Один із них – обчислювальний блок *Given/Pdesolve*.

Проте для його застосування потрібно переписати хвильове рівняння (1), що містить частинні похідні другого порядку як по координаті x так і по часу t , у вигляді системи двох рівнянь в частинних похідних ввівши другу невідому функцію $v(x,t) = t \cdot u(x,t)$

$$\frac{\partial v}{\partial t} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \quad \frac{\partial u}{\partial t} = v, \quad 0 < x < l, \quad t > 0.$$

На рис. 1. продемонстровано використання блока *Given/Pdesolve* для розв'язання поставленої задачі при конкретних значення фізичних сталих.

Задаємо значення фізичних констант	Розв'язуємо гіперболічне рівняння
$D := 0.1$ значення сталої a^2	Given
$L := 1$ довжина стержня	$v_t(x,t) = D \cdot u_{xx}(x,t) \quad u_t(x,t) = v(x,t)$
$T := 2$ максимальне значення часу	початкові умови
Задаємо функції початкових зміщень в стержні	$u(x,0) = f(x) \quad v(x,0) = F(x)$
$f(x) := 2$	граничні умови на кінцях стержня
$F(x) := 1$	$u(0,t) = 0 \quad u(L,t) = 0$
	$\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} := \text{Pdesolve} \left[\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}, x, \begin{pmatrix} 0 \\ L \end{pmatrix}, t, \begin{pmatrix} 0 \\ T \end{pmatrix} \right]$

Рис.1. Лістинг програми в середовищі *Mathcad*

Результат виконання програми, наведеної на рис.1 продемонстровано на рис.2. Крива 1 відповідає початковому моменту часу $t = 0$, крива 2 – $t = 1$, крива 3 – $t = 2$.

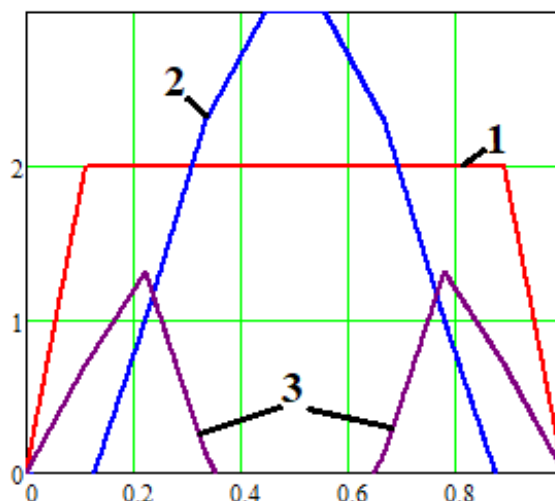


Рис.2. Поперечні зміщення у стержні в різні моменти часу

Література

1. Габрусев Г. В. Вплив початкових деформацій товстої плити на її контактну взаємодію із параболічним штампом / Габрусев Григорій Валерійович, Габрусєва Ірина Юрїївна // Вісник ТНТУ. — Т. : ТНТУ, 2017. — Том 85. — № 1. — С. 29–37. — (Механіка та матеріалознавство).