НАВЧАЛЬНО-МЕТОДИЧНА ЛІТЕРАТУРА

МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ
ТЕРНОПІЛЬСЬКИЙ НАЦІОНАЛЬНИЙ ТЕХНІЧНИЙ УНІВЕРСИТЕТ ІМЕНІ ІВАНА ПУЛЮЯ

Кафедра економічної кібернетики

ОПОРНИЙ КОНСПЕКТ ЛЕКЦІЙ

З ДИСЦИПЛІНИ «ДОСЛІДЖЕННЯ ОПЕРАЦІЙ»

ЗА ОСВІТНІМ СТУПЕНЕМ «БАКАЛАВР»

для студентів денної та заочної форм навчання
спеціальності 051 «Економіка»

Тернопіль 2021

Опорний конспект лекцій з дисципліни «Дослідження операцій» за освітнім ступенем «Бакалавр» для студентів денної та заочної форм навчання спеціальності 051 «Економіка» / Укл. Різник Н.М. Тернопіль: ТНТУ ім. І. Пулюя, 2021. 44 с.

Укладачі: Різник Н.М., кандидат економічних наук,
доцент кафедри економічної кібернетики
ТНТУ ім. І. Пулюя

Рецензент:
Химич Ірина Григорівна, кандидат економічних наук,
доцент кафедри економіки та фінансів
ТНТУ ім. І. Пулюя

Берестецька Олена Михайлівна, кандидат економічних наук,
старший викладач кафедри економічної кібернетики
ТНТУ ім. І. Пулюя

Методичні рекомендації розглянуто і затверджено на засіданні кафедри економічної кібернетики.

Протокол № ___ від _________________

Схвалено на засіданні методичної комісії факультету економіки та менеджменту

Протокол № ___ від _________________

ЗМІСТ

Вступ……………..…….. 4

Тема 1. Дослідження операцій як науковий підхід до аналізу економічних об'єктів і процесів та обґрунтування рішень ………………………………………………….6

Тема 2. Моделі лінійного програмування ……………………………..………………………8

Тема 3. Теорія ігор.…………………………………………………..11

Тема 4. Прийняття рішень в умовах невизначеності …..………………………….………25

Тема 5. Теорія управління запасами ………………..…………………………..……………..30

Тема 6. Теорія масового обслуговування………………………………………….…………36

Використана література…………………………………………………………………………...44

ВСТУП

Опорний конспект лекцій з дисципліни «Дослідження операцій» призначений для надання допомоги студентам під час підготовки до лекційних занять, а також самостійного опрацювання теоретичного матеріалу.

Мета вивчення навчальної дисципліни “Дослідження операцій ” полягає у наданні фундаментальних знань з методології, концепцій, методів і технологій прийняття економічних рішень на основі системного аналізу, математичного моделювання та оптимізації діяльності суб’єктів господарювання в умовах ринкової економіки.

За результатами вивчення дисципліни студент повинен продемонструвати такі результати навчання:

1) оволодіння комплексом знань з основних методів економіко-математичного моделювання, лінійного програмування, динамічного програмування, дослідження задач управління запасами;
2) оволодіння комплексом знань з основних методів дослідження систем масового обслуговування, ; дослідження організаційно-управлінських задач щодо економічних об’єктів, що функціонують в умовах невизначеності та конфлікту
3) оволодіння комплексом знань з основних моделей та методів сіткової оптимізації;
4) вміти розв’язувати задачі лінійного, цілочисельного, динамічного програмування, оптимізаційні задачі управління ресурсами системи масового обслуговування, розв’язувати задачі з умовами невизначеності та конфлікту;
5) використовувати необхідні програмні продукти для аналізу і розв’язування економічних задач.

Вивчення навчальної дисципліни передбачає формування та розвиток у студентів компетентностей:

загальних:

- Уміння приймати виважені та обґрунтовані управлінські рішення щодо функціонування економічних об’єктів і брати за них відповідальність.
- Уміння відшукати, опрацювати, проаналізувати економічну інформацію та використати її у професійній діяльності.
- Готовність до узагальнення знань та умінь, здатність застосувати їх на практиці, мотивація до підвищення професійної компетентності в економічній галузі.
- Уміння використовувати в роботі економіста сучасні комп’ютерні інформаційні технології.

фахових:

- Глибоке розуміння взаємовпливу економічних явищ і процесів, усвідомлення соціальної важливості професії економіста.
- Здатність збирати, структурувати та аналізувати початкові якісні та кількісні дані, необхідні для розрахунку соціально-економічних показників економічних систем.
- Здатність розв’язувати аналітичні та прогнозні задачі за допомогою сучасних технічних засобів та інформаційних технологій та програмних продуктів .
- Здатність будувати моделі економічних процесів суб’єктів господарювання, галузей та економічних систем, знаходити оптимальні рішення.
- Здатність аналізувати надходження, розподіл і використання ресурсів підприємств, галузей економіки, державної економічної системи та прогнозувати наслідки соціально-економічного розвитку

Тема 1. Дослідження операцій як науковий підхід до аналізу економічних об'єктів і процесів та обґрунтування рішень

Проблеми оптимального керування підприємствами, виробничими об'єднаннями, галузями, економікою держави чи навіть деякої сукупності держав (все це будемо надалі називати організаційними системами) займають дуже важливе місце в наукових дослідженнях вчених всіх країн світу.

Дослідження операцій – це наука, яка займається розробленням і практичним застосуванням математичних методів для обґрунтування рішень, що приймаються з метою найбільш ефективного (чи оптимального) керування організаційними системами.

Під **операцією** будемо розуміти систему заходів або дій об'єднаних єдиною метою і направлених на досягнення цієї мети. До тих пір, доки мета не визначена, немає змісту говорити про операцію. (Наприклад, здійснюється система перевезень для забезпечення ряду пунктів певними товарами ;проводиться система заходів по підвищенню рентабельності підприємства з метою збільшення прибутку). Операція завжди керований захід. Це означає, що дослідник може вибирати деякі параметри, що характеризують операцію.

Будь-який визначений набір залежних від нас параметрів будемо називати **рішенням**. Рішення, які забезпечують досягнення мети найвигіднішим способом називаються **оптимальними**.

Отже, основним завданням дослідження операцій є попереднє кількісне обґрунтування оптимальних рішень. Дослідження операцій не ставить перед собою задачі повної автоматизації ухвалення рішень, повного виключення з цього процесу оцінюючої, роздумуючої людської свідомості. Дослідження операцій ставить перед собою задачу підготовки кількісних даних і рекомендацій, що полегшують людині ухвалення рішення.

Для того, щоб порівнювати між собою можливі рішення (стратегії) і вибрати найкраще з них, формулюється критерій ефективності. (або як часто кажуть функція мети). Цей критерій представляється як функція стратегій х і неконтрольованих факторів у, тобто $z = f(x, y)$. Найпростіші критерії ефективності такі: повна вартість перевезень вантажів із складів до місць призначення (транспортна задача), імовірність своєчасного обслуговування заявки на ремонтній станції (задача масового обслуговування), сумарні затрати на придбання і зберігання сировини і т. д. (задача керування запасами).

Основним методом теорії дослідження операцій є метод математичного моделювання, який, як правило, припускає використання ЕОМ. Тоді основним інструментом дослідника операцій є економіко – математична модель, котра представляє собою математичний опис економічного процесу чи об'єкта.

Сформулюємо основну задачу дослідження операції: в рамках прийнятої моделі знайти такі рішення (стратегії), яким відповідають екстремальні значення (мінімум або максимум) критерію ефективності.

В дослідженні операцій виділяють три основні етапи:

1) Побудова моделі, тобто формалізація розглядуваного процесу. Цей етап зводиться до описання процесу на мові математики, причому мова йде не про операцію, а про сам процес, для керування яким потрібно буде формулювати операцію. З допомогою однієї і тієї ж моделі можуть вивчатися різні операції.

2) Описання операції. На цьому етапі оперуюча сторона формулює мету операції, на основі якої дослідник операції проводить необхідний аналіз неконтрольованих факторів, обмежень на стратегії і формалізує мету операції. Тобто на цьому етапі формулюється деяка оптимізаційна задача:

знайти max $z = f(x, y), \ \ x \in X, \ \ y \in Y,$ (1)

де X – множина допустимих стратегій, Y – множина неконтрольованих факторів. Часто обмеження записують так

$g_i(x, y) \le b_i \, , i = \overline{1,m},$ (2)

в яких g_i називають функцією споживання і-того ресурсу, b_i - величина цього ресурсу.

3) Розв'язування оптимізаційної задачі. Використовуючи апробовані оптимізаційні методи на основі побудованої математичної моделі отримують розв'язок задачі.

Тема 2. Моделі лінійного програмування

Більшу частину своїх зусиль людина витрачає на пошук найкращого тобто оптимального рішення поставленої задачі. Як, маючи у своєму розпорядженні певні ресурси, досягнути найбільш високого життєвого рівня, найвищої продуктивності праці, найменших втрат, максимального прибутку, мінімальної витрати часу тощо.

Оцінка ефективності рішень, що ухвалюються, з урахуванням всього комплексу економічних, соціальних та екологічних чинників і планомірна організація господарського механізму, що забезпечує відтворювання і розподіл економічних ресурсів в напрямах найбільшої ефективності – такий основний зміст теоретичних і практичних проблем оптимізації економіки.

З математичної точки зору, задача оптимізації полягає у знаходженні оптимального значення цільової функції f(x) на допустимій множині D. Розв’язати оптимізаційну задачу означає знайти її оптимальне розв’язування або встановити, що розв’язку немає.

Методи розв’язування оптимізаційних задач називаються методами математичного програмування. Лінійне програмування є одним з розділів математичного програмування.

Лінійне програмування – це методи дослідження та відшукання оптимальних значень лінійної функції, на невідомі якої накладені лінійні обмеження.

Лінійне програмування можна застосувати у різноманітних галузях науки. Його використовують в економіці і бізнесі, але можна використати і в інженерних задачах. Серед галузей, які використовують лінійне програмування можна згадати перевезення, енергетику, телекомунікації і виробництво. Лінійне програмування довело свою корисність у моделюванні різних типів проблем у плануванні, маршрутизації.

Загальна лінійна математична модель економічних процесів і явищ — так звана загальна задача лінійного програмування (ЛП) подається у вигляді:

знайти максимум (мінімум) функції

$$Z = cx_1 + c_2x_2 + ... + c_nx_n, \qquad (1)$$

або $Z = c_1x_1 + c_2x_2 + ... + c_nx_n \to \max(\min)$

за умов

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + ... + a_{1n}x_n \{\le, \ge, =\} b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + ... + a_{2n}x_n \{\le, \ge, =\} b_2 \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + ... + a_{mn}x_n \{\le, \ge, =\} b_m \end{cases} \qquad (2)$$

$$x_1 \ge 0, x_2 \ge 0, ..., x_n \ge 0. \qquad (3)$$

Отже, потрібно знайти значення змінних x_1, x_2, …, x_n, які задовольняють умови (2) і (3), тоді як цільова функція набуває екстремального (максимального чи мінімального) значення.

Розглядаючи різні практичні задачі з лінійними обмеженнями і лінійною цільовою функцією бачимо, що в одних задачах обмеження мають вигляд нерівностей типу ≤, в інших ≥, в третіх - типу =. В одних задачах треба знайти максимум цільової функції, в інших - мінімум.

Не у всіх задачах вимагається невід'ємність змінних. Така різноманітність форм запису задач лінійного програмування ускладнює дослідження загальних властивостей задач і вимагає розробки спеціальних методів для розвязування кожного з можливих типів задач.

У зв’язку з цим домовились кожен з типів зводити до єдиної форми , яку назвали канонічна форма.

Будь-яку задачу ЛП можна записати в такій канонічній формі:

знайти максимум функції

$$Z = c_1x_1 + c_2x_2 + \ldots + c_nx_n \to \max \tag{4}$$

за умов

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases} \tag{5}$$

$$x_1 \ge 0, \quad x_2 \ge 0, \ldots, x_n \ge 0; \qquad b_i \ge 0 (i = \overline{1,m}). \tag{6}$$

Задачу (1)—(3) легко звести до канонічної форми, тобто до такого вигляду, коли в системі обмежень (2) всі b_i (i = 1, 2, …, n) невід’ємні, а всі обмеження є рівностями.

Якщо якесь b_i від’ємне, то, помноживши і-те обмеження на (–1), дістанемо у правій частині відповідної рівності додатне значення. Коли і-те обмеження має вигляд нерівності $a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \ldots + \quad + a_{in}x_n \le b_i$,

то останню завжди можна звести до рівності, увівши допоміжну змінну x_{n+1}: $a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \ldots. + a_{in}x_n + x_{n+1} = b_i$.

Аналогічно обмеження виду

$a_{k1}x_1 + a_{k2}x_2 + \ldots. + a_{kn}x_n \ge b_k$

зводимо до рівності, віднімаючи від лівої частини допоміжну змінну x_{n+2}, тобто $a_{k1}x_1 + a_{k2}x_2 + \ldots. + a_{kn}x_n - x_{n+2} = b_k$.

Задачу (4)—(6) можна розв’язувати на мінімум, якщо цільову функцію помножити на (–1), тобто

$$\max Z = \min(-Z) = \min(-c_1x_1 - c_2x_2 - \ldots - c_nx_n).$$

Приклад 1. Записати в канонічній формі таку задачу лінійного програмування:

$Z = x_1 + 2x_2 \to \max$

за умов

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 \le 10 \\ x_1 + x_2 \ge 1 \end{cases}$$

$x_1 \ge 0, x_2 \ge 0$.

Розв'язування. Введемо відповідно допоміжні змінні x_3 і x_4 ($x_3 \ge 0,\ x_4 \ge 0$) для першого і другого обмеження:

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + x_3 = 10; \\ x_1 + x_2 - x_4 = 1; \end{cases}$$

$x_1 \ge 0,\ x_2 \ge 0,\ x_3 \ge 0,\ x_4 \ge 0.$

Приклад 2. Записати в канонічній формі таку задачу лінійного програмування:

$Z = 2x_1 + 3x_2 - 4x_3 \to \max$

за умов

$$\begin{cases} x_1 - 2x_2 - 3x_3 = 10 \\ x_1 - 2x_2 + 3x_3 \ge -180 \\ 5x_1 + x_2 + 2x_3 \ge 100 \end{cases}$$

$x_1 \ge 0, x_2 \ge 0, x_3 \ge 0$.

Розв'язування. Помножимо другу нерівність на (–1) і введемо відповідно допоміжні змінні x_4 і x_5 для другого та третього обмеження:

$$\begin{cases} x_1 - 2x_2 - 3x_3 = 10; \\ -x_1 + 2x_2 - 3x_3 + x_4 = 180; \\ 5x_1 + x_2 + 2x_3 - x_5 = 100; \end{cases}$$

$$x_1 \ge 0,\ x_2 \ge 0,\ x_3 \ge 0,\ x_4 \ge 0,\ x_5 \ge 0.$$

Отже, ми звели дану задачу ЛП до канонічного виду.

Тема 3. Теорія ігор

При розв'язуванні ряду економічних задач дуже часто виникають конфліктні ситуації, які породжуються суперечливими інтересами (наприклад, відносини між постачальником і споживачем, банком і клієнтом, покупцем та продавцем).

Математичним апаратом розв'язку такого типу задач є теорія ігор, яка являє собою теорію побудови математичних моделей прийняття оптимальних рішень в умовах конфлікту. Оскільки сторони, що беруть участь у вирішенні конфліктів, зацікавлені у приховуванні своїх намірів від супротивника, тому прийняття рішень в умовах конфлікту є переважно прийняттям рішень в умовах невизначеності.

Ситуація називається конфліктною, якщо в ній беруть участь сторони, інтереси котрих повністю чи частково протилежні.

Гра – це дійсний або формальний конфлікт, в якому є хоч би два учасники (гравці), кожний із яких прагне досягти власної мети.

Гравцем може бути як окремий індивідуум так і група (колектив).

Допустимі дії кожного з гравців, спрямовані на досягнення деякої мети, називаються **правилами гри**. Кожний гравець має деяку множину (скінченну чи нескінченну) можливих виборів (дій), яка називається стратегіями.

Розглянемо класифікацію ігор в залежності від деяких параметрів:

1. Кількість стратегій. Якщо в грі кожен із гравців має скінченне число стратегій, то вона називається скінченною. Якщо ж хоч би один із гравців має нескінченну кількість можливих стратегій, то така гра буде називатися нескінченною.

2. Співвідношення інтересів учасників. Виділяють ігри з нульовою сумою (сума виграшів учасників гри рівна нулю) та ігри з ненульовою сумою. В такій грі досить задати платежі для одного з гравців. Гра двох гравців з нульовою сумою називається антагоністичною, оскільки цілі гравців в ній прямо протилежні: виграш одного гравця відбувається тільки за рахунок програшу іншого

3. Можливість взаємодії учасників. З цієї точки зору можна розглядати коаліційні (допускається утворення коаліцій між учасниками), безкоаліційні (коаліції не допускаються) та кооперативні (коаліції визначені заздалегідь).

4.Кількість гравців. Розрізняють ігри двох гравців та ігри n гравців. Гра називається парною, якщо в ній беруть участь тільки дві сторони (дві особи).

Надалі ми будемо розглядати лише парні ігри.

Для того, щоб розв'язати гру чи знайти розв'язок гри потрібно для кожного гравця вибрати стратегію, яка задовольняє умові оптимальності.

Оптимальна стратегія – стратегія, яка при багаторазовоному повторенні гри забезпечує даному гравцю максимально можливий середній виграш або мінімально можливий середній програш. Оптимальні стратегії повинні задовольняти умові стабільності, коли кожному з гравців невигідно відмовлятись від своєї стратегії в цій грі.

Виграш гравця при оптимальній поведінці обох сторін називається ціною гри (v).

Розглянемо скінчену гру двох гравців з нульовою сумою.

Нехай гравець А може вибрати m різних стратегій, які позначимо $a_1,\ a_2,\ldots,a_m$. Нехай у гравця В є n різних стратегій, які позначимо $b_1,\ b_2,\ldots,b_n$. Побудуємо матрицю, в яких стратегії гравця А задають рядками , а стратегії гравця В стовпцями:

$Стр.A \setminus Стр.B$	b_1	b_2	...	b_n
a_1	a_{11}	a_{12}	...	a_{1n}
a_2	a_{21}	a_{22}	...	a_{2n}
...	...	...	...	...
a_m	a_{m1}	a_{m2}	...	a_{mn}

(1)

Матриця (1) називається **платіжною матрицею** або матрицею гри.

Кожне число $a_{ij}\ (i=\overline{1,m};\ j=\overline{1,n})$– це виграш гравця А і відповідно програш гравця В, якщо гравець А вибрав свою $i-$ту, а гравець В − свою $j-$ту стратегії. Надалі вважатимемо, що гравець А старається максимізувати свій виграш, а відповідно гравець В – мінімізувати свій програш. Ни один з гравців не знає, яку стратегію прийме його прийме його суперник.

Розглянемо процес прийняття рішень гравцями більш детально, припускаючи, що гравці діють „розумно”.

Якщо гравець А не знає, яку стратегію прийме його суперник, то не бажаю ризикувати, він вибере таку стратегію, яка гарантує йому найбільший із найменших виграшів при будь-якій стратегії гравця В. При такому способі дій гравець А діє за принципом максимінного виграшу (maxmin). Так само гравець В вибирає стратегію, яка мінімізує його максимальний програш (minmax).

Можна довести, що справедлива нерівність:

$$\textbf{maxmin} \leq \textbf{minmax},$$

тому maxmin називають **нижнім значенням гри**, а minmax – **верхнім значенням гри**. Кажуть, що оптимальне рішення досягнуто, якщо ні одному з гравців невигідно змінювати свою стратегію. В цьому випадку гра вважається стабільною або знаходиться в стані рівноваги.

Якщо верхнє і нижнє значення гри співпадають, то кажуть, що гра має сідлову точку і відповідні стратегії гравців А і В називають чистими стратегіями. Такі стратегії оптимальні якраз тому, що ні один із гравців не старається змінити свою стратегію, так як його суперник може відповісти на це вибором іншої стратегії, яка дасть для першого гравця гірший результат.

Нехай виграш гравця А(і відповідно програш гравця В) представлений наступною платіжною матрицею:

$Стр.A \backslash Стр.B$	1	2	3	4	min	max min
1	8	2	9	5	2	
2	6	5	7	18	5	5
3	7	3	-4	10	-4	
max	8	5	9	18		
min max		5				

Визначимо оптимальні стратегії для обох гравців.

Якщо гравець А вибере першу стратегію, він може отримати виграш 8, 2, 9 або 5, залежно від того, яку стратегію вибере гравець В. Його виграш буде не менший від min{8,2,9,5}=2 незалежно від того, як поведе себе гравець В. Аналогічно, якщо він вибере другу чи третю стратегію, його гарантований виграш буде відповідно 5 або -4. Гравець А для того, щоб максимізувати свій мінімальний виграш, повинен вибрати стратегію 2, яка дає maxmin=5. Відповідне максимінне значення є нижнім значенням гри.

Гравець В хоче мінімізувати свій максимальний програш. Такою його стратегією буде 2, для якої minmax=5 – мінімаксне (або верхнє) значення гри.

У даному випадку верхня і нижня ціна гри співпадають:

minmax= maxmin=5

Отже, гра має сідлову точку. Ціна гри рівна V=5. Для гравця А оптимальною стратегією є друга, для гравця В - також друга стратегія.

Поняття про змішані стратегії

Якщо верхнє і нижнє значення гри не співпадають, то така гра не має сідлової точки і тому максимінно-мінімаксні стратегії неоптимальні. Це призводить до того, що кожен із гравців може покращити своє становище, вибравши іншу стратегію. В такому випадку кажуть, що гра нестабільна і оптимальне значення гри тоді повинно задовольняти нерівностям:

maxmin $\leq$ значення гри $\leq$ minmax

Оптимальне рішення в такій грі вимагає від гравців вибору деякої комбінації чистих стратегій. Останній випадок відомий як змішані стратегії.

Розглянемо, наприклад , таку гру з нульовою сумою:

$Стр.A \backslash Стр.B$	1	2	3	4	min	max min
1	5	-10	9	0	-10	
2	6	7	8	1	1	
3	8	6	15	2	2	2
4	3	4	-1	4	-1	
max	8	7	15	4		
min max				4		

Дана гра не має сідлової точки і тому максимінно-мінімаксні стратегії неоптимальні. Це призводить до того, що кожен із гравців може покращити своє становище, вибравши іншу стратегію. В такому випадку кажуть, що гра нестабільна.

Для знаходження рішень у таких задачах і з'явилася ідея використання так званих змішаних стратегій. Кожен гравець замість вибору однієї чистої стратегії може вибрати будь-яку з них із наперед заданою ймовірністю.

Змішаною стратегією гравця А називається застосування ним чистих стратегій $a_1, a_2, \ldots, a_m$ з ймовірністю $p_1, p_2, \ldots, p_{m.}$. Змішану стратегію гравця А позначатимемо $S_A = (p_1, p_2, \ldots, p_m)$. Аналогічно **змішаною стратегією гравця В** називається застосування ним чистих стратегій $b_1, b_2, \ldots, b_n$ з ймовірністю $q_1, q_2, \ldots, q_{n.}$. Змішану стратегію гравця А позначатимемо $S_B = (q_1, q_2, \ldots, q_n)$.

Оскільки задані стратегії за умовою гри повністю вичерпують можливі ходи гравців А і В, тому справедливими є рівності:

$$p_1 + p_2 + \ldots + p_m = 1;$$

$$q_1 + q_2 + \ldots + q_n = 1.$$

Платіжну матрицю (1) тепер запишемо так:

$Стр.A \backslash Стр.B$	q_1	q_2	...	q_n
p_1	a_{11}	a_{12}	...	a_{1n}
p_2	a_{21}	a_{22}	...	a_{2n}
...	...	...	...	...
p_m	a_{m1}	a_{m2}	...	a_{mn}

Розв'язок гри при змішаних стратегіях теж базується на критерії мінімакса та максиміна. Єдина різниця полягає в тому, що гравець А вибирає p_i так, щоб максимізувати найменш очікуваний виграш за стовпцями, тоді як гравець В вибирає q_j з метою мінімізувати найбільш очікуваний програш за рядками матриці.

Відомо декілька методів знаходження оптимальних стратегій в грі двох осіб з нульовою сумою. Ми розглянемо два з них: графічний метод для гри 2xn чи mx2 і загальний метод зведення до задачі лінійного програмування.

Розглянемо приклади розв'язування задач теорії ігор з використанням графічного методу.

Цей метод застосовують тільки для гри, в якій хоча б один гравець має лише дві стратегії. Розглянемо гру виду (2xn)

$Стр.A \backslash Стр.B$	q_1	q_2	...	q_n
p_1	a_{11}	a_{12}	...	a_{1n}
p_2	a_{21}	a_{22}	...	a_{2n}

Припускаємо, що ця гра не має сідлової точки. Так як гравець А має тільки дві стратегії, то $p_2 = 1 - p_1$. Очікувані виграші гравця А, які відповідають чистим стратегіям гравця В, представимо у вигляді таблиці

Чисті страт. гравця В	Очікувані виграші гравця А
1	$a_{11}p_1 + a_{21}p_2 = (a_{11} - a_{21})p_1 + a_{21}$
2	$(a_{12} - a_{22})p_1 + a_{22}$
...	...
n	$(a_{1n} - a_{2n})p_1 + a_{2n}$

Звідси бачимо, що очікуавний виграш гравця А лінійно залежить від p_1. У відповідності з критерієм мінімакса для ігор у змішаних стратегіях гравець А повинен вибрати p_1 так, щоб максимізувати свій мінімальний очікуваний виграш. Цю задачу можна розв'язати графічно шляхом побудови прямих ліній що відповідають лінійним функціям від p_1. Проілюструємо це на конкретному прикладі.

Приклад 1. Для гри двох осіб з нульовою сумою і заданою платіжною матрицею (4) визначити оптимальні стратегії для обох гравців.

$Стр.A \setminus Стр.B$	1	2	min	$\max\min$
1	0	2	0	0
2	3	-1	-1	
max	3	2		
$\min\max$		2		

(2)

Для даної платіжної матриці maxmin=0, minmax=2. Отже верхнє та нижнє значення гри не співпадають, гра не має сідлової точки і відповідні чисті стратегії гравців А та В будуть неоптимальними.

Позначимо p_1 та p_2 – ймовірності вибору відповідно 1-ї та 2-ї стратегії гравцем А; q_1 та q_2 – ймовірності вибору відповідно 1-ї та 2-ї стратегії гравцем В. Тоді запишемо матрицю (2) у вигляді

$Стр.A \setminus Стр.B$	q_1	q_2
p_1	0	2
p_2	3	-1

(3)

Оскільки гравець А має лише дві стратегії, то справедливою буде рівність:

$$p_1 + p_2 = 1, \text{звідки } \mathrm{p}_1 = 1 - p_2. \tag{4}$$

На основі матриці (3), враховуючи залежність (4), визначимо очікувані виграші гравця А, що відповідають чистим стратегіям гравця В:

Чисті стратегії гравця В	Очікувані виграші гравця А
1	$0 \cdot p_1 + 3 \cdot p_2 = -3p_1 + 3$
2	$2 \cdot p_1 - p_2 = 3p_1 - 1$

Зобразимо відповідні відрізки прямих на рисунку (рис. 1).

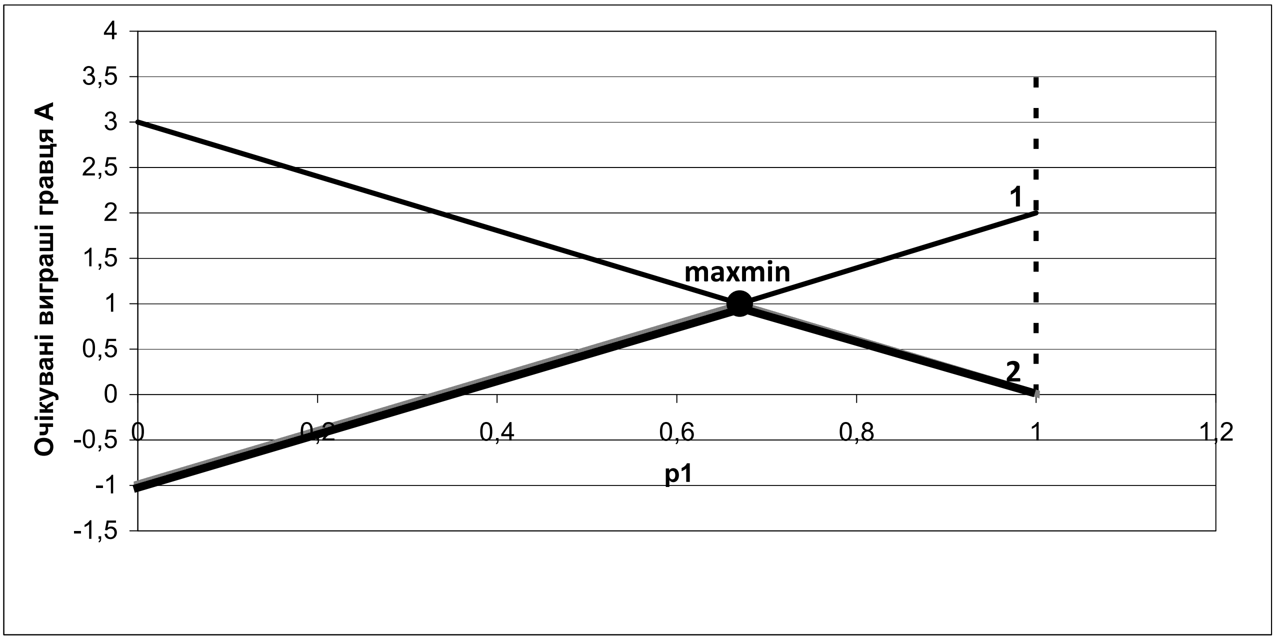

Рис. 1

За максимінною стратегією гравець А прагне максимізувати свій мінімальний виграш. Шуканий максимум знаходиться на перетині прямих, що відображають відповідно 1-шу та 2-гу стратегії гравця В. Тоді розв’яжемо дві системи рівнянь:

$$\begin{cases} 0\cdot p_1 + 3p_2 = v; \\ 2p_1 - p_2 = v; \\ p_1 + p_2 = 1. \end{cases} \Rightarrow \quad p_1 = \frac{2}{3}; \quad p_2 = \frac{1}{3}; \quad v = 1.$$

$$\begin{cases} 0\cdot q_1 + 2q_2 = v; \\ 3q_1 - q_2 = v; \\ q_1 + q_2 = 1. \end{cases} \Rightarrow \quad q_1 = \frac{1}{2}; \quad q_2 = \frac{1}{2}; \quad v = 1.$$

Отже, оптимальна змішана стратегія для гравця А – $S_A = (\frac{1}{3};\frac{2}{3}),$ для гравця В – $S_B = (\frac{1}{2};\frac{1}{2})$. Ціна гри $v = 1$.

Приклад 2. Для гри двох осіб з нульовою сумою і заданою платіжною матрицею (5) визначити оптимальні стратегії для обох гравців.

$Стр.A \setminus Стр.B$	1	2	min	max min
1	4	8	4	
2	13	1	1	
3	10	6	6	6
max	13	8		
min max		8		

(5)

Для даної платіжної матриці maxmin=6, minmax=8. Оскільки верхнє та нижнє значення гри не співпадають, гра не має сідлової точки і відповідні чисті стратегії гравців А та В будуть неоптимальними. Визначимо оптимальні змішані стратегії гравців.

Позначимо p_1, p_2, p_3 – ймовірності вибору відповідно 1-ї, 2-ї та 3-ї стратегії гравцем А; q_1 та q_2 – ймовірності вибору відповідно 1-ї та 2-ї стратегії гравцем В. Тоді запишемо матрицю (5) у вигляді

$Стр.A \setminus Стр.B$	q_1	q_2
p_1	4	8
p_2	13	1
p_3	10	6

(6)

Справедливими будуть рівності

$$p_1 + p_2 + p_3 = 1,$$
$$q_1 + q_2 = 1. \tag{7}$$

На основі матриці (6), враховуючи залежності (7), визначимо очікувані програші гравця В, що відповідають чистим стратегіям гравця А:

Чисті стратегії гравця А	Очікувані програшії гравця В
1	$4q_1 + 8q_2 = -4q_1 + 8$
2	$13q_1 + q_2 = 12q_1 + 1$
3	$10q_1 + 6q_2 = 4q_1 + 6$

Зобразимо відповідні відрізки прямих на рисунку (рис. 2).

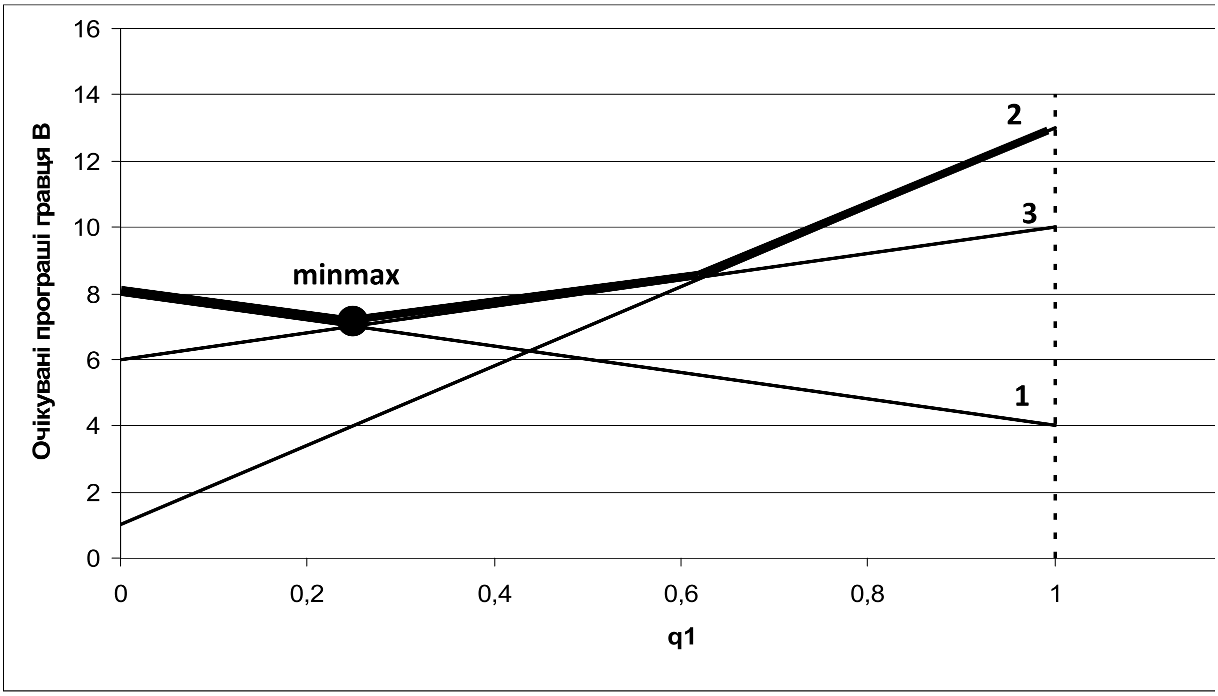

Рис. 2

За мінімаксною стратегією гравець В прагне максимізувати свій мінімальний програш. Шуканий мінімум знаходиться на перетині прямих, що відповідають очікуваним програшам гравця В при виборі гравцем А 1-ї та 3-ї стратегій. Отже $p_2 = 0$.

Знайдемо розв'язки систем рівнянь:

$$\begin{cases} 10p_3 + 4p_1 = v; \\ 6p_3 + 8p_1 = v; \\ p_1 + p_3 = 1. \end{cases} \Rightarrow \quad p_1 = \frac{1}{2}; \quad p_2 = \frac{1}{2}; \quad v = 7.$$

$$\begin{cases} 4q_1 + 8q_2 = v; \\ 10q_1 + 6q_2 = v; \\ q_1 + q_2 = 1. \end{cases} \Rightarrow \quad q_1 = \frac{1}{4}; \quad q_2 = \frac{3}{4}; \quad v = 7.$$

Отже, оптимальна змішана стратегія для гравця А – $S_A = (\frac{1}{2}; \frac{1}{2}),$ для гравця В – $S_{\text{B}} = (\frac{1}{4}; \frac{3}{4})$. Ціна гри $v = 7$.

Зведення задач теорія ігор до задач лінійного програмування

Нехай гра задана платіжною матрицею (1), причому $a_1, a_{2,\dots,} a_m$ – стратегії гравця А; $b_1, b_{2,\dots,} b_n$ – стратегії гравця В; $p_1, p_2, \dots, p_m$ – ймовірності вибору відповідних стратегій гравцем А; $q_1, q_2, \dots, q_n$ – ймовірності вибору відповідних стратегій гравцем В.

$Стр.A \backslash Стр.B$	q_1	q_2	...	q_n
p_1	a_{11}	a_{12}	...	a_{1n}
p_2	a_{21}	a_{22}	...	a_{2n}
...	...	...	...	...
p_m	a_{m1}	a_{m2}	...	a_{mn}

(1)

При цьому справедливими будуть рівності:

$$p_1 + p_2 + \dots + p_m = 1;$$
$$q_1 + q_2 + \dots + q_n = 1.$$

Потрібно визначити оптимальні змішані стратегії гравця А та гравця В.

Оптимальна стратегія забезпечуватиме гравцю А виграш, не менший ніж ціна гри v при будь-якій стратегії гравця В, і виграш, рівний ціні гри, при оптимальній стратегії гравця В.

Тому отримуємо систему нерівностей:

$$\begin{cases} a_{11}p_1 + a_{21}p_2 + \dots + a_{m1}p_m \geq v; \\ a_{12}p_1 + a_{22}p_2 + \dots + a_{m2}p_m \geq v; \\ \dots \\ a_{1n}p_1 + a_{2n}p_2 + \dots + a_{mn}p_m \geq v. \end{cases} \qquad (2)$$

Вважатимемо, що ціна гри v>0. Цього можна досягнути, зробивши всі елементи платіжної матриці додатними. Тоді кожну з нерівностей поділимо на v:

$$\begin{cases} a_{11}\dfrac{p_1}{v}+a_{21}\dfrac{p_2}{v}+...+a_{m1}\dfrac{p_m}{v}\ge 1; \\ a_{12}\dfrac{p_1}{v}+a_{22}\dfrac{p_2}{v}+...+a_{m2}\dfrac{p_m}{v}\ge 1; \\ ... \\ a_{1n}\dfrac{p_1}{v}+a_{2n}\dfrac{p_2}{v}+...+a_{mn}\dfrac{p_m}{v}\ge 1. \end{cases}$$

Зробимо заміну $x_1=\dfrac{p_1}{v};\ x_2=\dfrac{p_2}{v};...;x_m=\dfrac{p_m}{v}$.

Тоді $\begin{cases} a_{11}x_1+a_{21}x_2+...+a_{m1}x_m\ge 1; \\ a_{12}x_1+a_{22}x_2+...+a_{m2}x_m\ge 1; \\ ... \\ a_{1n}x_1+a_{2n}x_2+...+a_{mn}x_m\ge 1. \end{cases}$ (3)

Ціль гравця А – максимізувати свій гарантований виграш, тобто $v\to\max$. Як зазначалося вище, справедливою є рівність $p_1+p_2+...+p_m=1$,

тоді $\dfrac{p_1}{v}+\dfrac{p_2}{v}+...+\dfrac{p_m}{v}=\dfrac{1}{v}$ або $x_1+x_2+...+x_m=\dfrac{1}{v}$.

Якщо гравець А прагме максимізувати ціну гри, то обернена величина $\dfrac{1}{v}\to\min$.

Позначимо $w=\dfrac{1}{v}$.

Задачу лінійного програмування для гравця А можна сформувати таким чином:

Визначити значення змінних $x_i\ge 0, i=1,2,...,m,$ так, щоб цільова функція досягала свого мінімального значення

$W=x_1+x_2+...+x_m\to\min$

і при цьому виконувались умови

$$\begin{cases} a_{11}x_1+a_{21}x_2+...+a_{m1}x_m\ge 1; \\ a_{12}x_1+a_{22}x_2+...+a_{m2}x_m\ge 1; \\ ... \\ a_{1n}x_1+a_{2n}x_2+...+a_{mn}x_m\ge 1. \end{cases}$$

Аналогічно, сформулюємо задачу лінійного програмування для гравця В.

Для оптимальної змішаної стратегії граця В всі очікувані програші не більші за ціну гри v, тому отримуємо систему нерівностей:

$$\begin{cases} a_{11}q_1 + a_{12}q_2 + \ldots + a_{1n}q_n \le v; \\ a_{21}q_1 + a_{22}q_2 + \ldots + a_{2n}q_n \le v; \\ \ldots \\ a_{m1}q_1 + a_{m2}q_2 + \ldots + a_{mn}q_n \le v. \end{cases}$$

Кожну з нерівностей поділимо на v:

$$\begin{cases} a_{11}\dfrac{q_1}{v} + a_{12}\dfrac{q_2}{v} + \ldots + a_{1n}\dfrac{q_n}{v} \le 1; \\ a_{21}\dfrac{q_1}{v} + a_{22}\dfrac{q_2}{v} + \ldots + a_{2n}\dfrac{q_n}{v} \le 1; \\ \ldots \\ a_{m1}\dfrac{q_1}{v} + a_{m2}\dfrac{q_2}{v} + \ldots + a_{mn}\dfrac{q_n}{v} \le 1. \end{cases}$$

Зробимо заміни $y_1 = \dfrac{q_1}{v};\ y_2 = \dfrac{q_2}{v};\ldots;y_m = \dfrac{q_m}{v}$.

Тоді $\begin{cases} a_{11}y_1 + a_{12}y_2 + \ldots + a_{1n}y_n \le 1; \\ a_{21}y_1 + a_{22}y_2 + \ldots + a_{2n}y_n \le 1; \\ \ldots \\ a_{m1}y_1 + a_{m2}y_2 + \ldots + a_{mn}y_n \le 1. \end{cases}$

Ціль гравця В – мінімізувати свій гарантований програш, тобто $v \to \min$. Як зазначалося вище, справедливою є рівність $q_1 + q_2 + \ldots + q_n = 1$,

тоді $\dfrac{q_1}{v} + \dfrac{q_2}{v} + \ldots + \dfrac{q_n}{v} = \dfrac{1}{v}$ або $y_1 + y_2 + \ldots + y_n = \dfrac{1}{v}$.

Якщо гравець В прагне мінімізувати ціну гри, то обернена величина $\dfrac{1}{v} \to \max$.

Позначимо $w = \dfrac{1}{v}$.

Задачу лінійного програмування для гравця В можна сформувати таким чином:

Визначити значення змінних $y_j \ge 0, j = 1,2,\ldots,n,$ так, щоб цільова функція досягала свого максимального значення

$W = y_1 + y_2 + \ldots + y_n \to \max$

і при цьому виконувались умови

$$\begin{cases} a_{11}y_1 + a_{12}y_2 + ... + a_{1n}y_n \le 1; \\ a_{21}y_1 + a_{22}y_2 + ... + a_{2n}y_n \le 1; \\ ... \\ a_{m1}y_1 + a_{m2}y_2 + ... + a_{mn}y_n \le 1. \end{cases}$$

Отже, процес знаходження розв’язку гри з використанням лінійного програмування складається з таких етапів:

1. Знаходження верхнього та нижнього значення гри, перевірка чи гра має сідлову точку.
2. Якщо гра не має сідлової точки, необхідно звести задачу до задачі лінійного програмування (окремо для гравця А і для гравця В).
3. Розв’язання задачі з використанням пакета прикладних програм Excel за допомогою команди «Поиск решения».

Тема 4. Прийняття рішень в умовах невизначеності

Задачі прийняття рішень в умовах невизначеності виникають при необхідності діяти в ситуації, яка відома не повністю.

Ситуація, при якій ймовірність настання невідомих подій завчасно не може бути нами встановленою чи не може бути встановленою традиційними методами називається ***невизначеністю***.

Для прийняття рішень в умовах невизначеності вхідна інформація задається у вигляді матриці, рядки якої відповідають можливим способам дії a_i, а стовпці – станам економічної системи θ_j.

Кожній дії a_i та кожному стану економічної системи θ_j відповідає результат (наслідок) $v(a_i, \theta_j)$, який визначає виграш (або втрати) при виборі даної дії й реалізації даного стану.

Сукупність станів економічної системи разом з можливими діями та відповідними результатами задається матрицею:

$$\begin{array}{c|ccc} & \theta_1 & \ldots & \theta_m \\ \hline a_1 & v(a_1,\theta_1) & \ldots & v(a_1,\theta_m) \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_n & v(a_n,\theta_1) & \ldots & v(a_n,\theta_m) \end{array}$$

Розглянемо основні критерії прийняття рішень в умовах невизначеності та їхнє застосування на прикладі задачі:

Потрібно визначити рівень послуг, які підприємство буде пропонувати клієнтам так, щоб задовольнити їхні потреби протягом наступних свят. Точне число клієнтів невідоме, але очікується, що воно може бути одним з чотирьох значень: 200, 250, 300, 350. Для кожного з цих можливих значень існує найкращий рівень послуг (з точки зору можливих затрат) a_1, a_2, a_3, a_4.

Втрати в тис. грн. залежно від різних рівнів послуг задано у вигляді матриці:

К-сть клієнтів / Рівень послуг	$\theta_1 = 200$	$\theta_2 = 250$	$\theta_3 = 300$	$\theta_4 = 350$
a_1	7	12	13	20
a_2	10	9	19	18
a_3	25	18	14	19
a_4	30	24	12	10

(1)

Знайти оптимальний рівень послуг.

I. Критерій Лапласа.

Критерій Лапласа використовується при умові, коли ймовірності можливих станів системи невідомі, тобто в умовах повної невизначеності. Даний критерій базується на **принципі недостатнього обґрунтування**. Згідно з яким всі стани економічної системи θ_j є **рівноймовірними**. Таким чином, кожному стану економічної системи відповідає ймовірність $p_j = \frac{1}{m},$ де m – кількість станів економічної системи, $j = \overline{1, m}.$

За критерієм Лапласа для знаходження оптимальної дії a_i визначається найменш очікуваний програш ($\min_{a_i}\left[p\sum_{j=1}^{m} v(a_i, \theta_j) \right]$) якщо $v(a_i, \theta_j)$ визначає втрати; або найбільш очікуваний виграш ($\max_{a_i}\left[p\sum_{j=1}^{m} v(a_i, \theta_j) \right]$) якщо $v(a_i, \theta_j)$ визначає прибуток (виграш).

Критерій Лапласа доцільно використовувати в тих випадках, коли різниця між окремими станами економічної системи є великою, тобто велика дисперсія значень.

Визначимо за критерієм Лапласа оптимальний рівень послуг наведеної вище задачі.

Припустимо, що кожен з можливих станів $\theta_1, \theta_2, \theta_3, \theta_4$ є рівноймовірний, тоді ймовірність настання кожного з них рівна $p = 1/4$ і очікувані втрати при різних рівнях послуг становлять:

$$E\{a_1\} = \frac{1}{4}(7 + 12 + 13 + 20) = 52/4 = 13,$$

$$E\{a_2\} = \frac{1}{4}(10 + 9 + 19 + 18) = 56/4 = 14,$$

$$E\{a_3\} = \frac{1}{4}(25 + 18 + 14 + 19) = 76/4 = 19,$$

$$E\{a_4\} = \frac{1}{4}(30 + 24 + 12 + 10) = 76/4 = 19.$$

Отже, за критерієм Лапласа, оптимальним рівнем послуг є a_1.

Зауваження. Якщо в умові задачі задано матрицю прибутків, то найкращий рівень послуг буде при максимальному значенні $E\{a_i\}$.

II. Мінімаксний (максимінний критерій).

Даний критерій є найбільш обережним (песимістичним), оскільки він ґрунтується на виборі найкращої дії з найгірших.

Якщо величина $v(a_i,\theta_j)$ означає втрати, то для дії a_i найбільші втрати, незалежно від можливого стану економічної системи θ_j будуть дорівнювати $\max\limits_{\theta_j}[v(a_i,\theta_j)]$.

Тоді за мінімаксним критерієм необхідно вибрати дію, яка визначає $\min\limits_{a_i}\max\limits_{\theta_j}[v(a_i,\theta_j)]$.

Аналогічно, коли $v(a_i,\theta_j)$ - виграш, тоді найбільші виграші, незалежно від можливого стану економічної системи θ_j будуть дорівнювати $\max\limits_{\theta_j}[v(a_i,\theta_j)]$.

Тоді за максимінним критерієм необхідно вибрати дію, яка визначає $\max\limits_{a_i}\min\limits_{\theta_j}[v(a_i,\theta_j)]$.

Розв'яжемо наведу вище задачу, використовуючи мінімаксний критерій:

К-сть клієнтів / Рівень послуг	$\theta_1 = 200$	$\theta_2 = 250$	$\theta_3 = 300$	$\theta_4 = 350$	max	min
a_1	7	12	13	20	20	
a_2	10	9	19	18	19	19
a_3	25	18	14	19	25	
a_4	30	24	12	10	30	

За мінімаксним критерієм найкращим рівнем послуг є a_2.

Зауваження. Якщо в умові задачі задано матрицю прибутків, то для знаходження найкращого рівня послуг необхідно знайти мінімум в кожному з рядків таблиці, а потім максимум із знайдених мінімумів. Критерій в такому випадку буде називатись максимінним.

III. Критерій Севіджа.

За критерієм Севіджа необхідно в матриці (1) кожне значення величини $v(a_i,\theta_j)$ замінити на $r(a_i,\theta_j)$ таким чином:

$$r(a_i,\theta_j)=\begin{cases}\max\limits_{a_k}\{v(a_k,\theta_j)\}-v(a_i,\theta_j), & \textit{якщо} \quad v - \textit{прибуток},\\ v(a_i,\theta_j)-\min\limits_{a_k}\{v(a_k,\theta_j)\}, & \textit{якщо} \quad v - \textit{витрати}.\end{cases}$$

Отриману в результаті перетворення матрицю називають ***матрицею невикористаних можливостей***.

Для вибору оптимальної дії за критерієм Севіджа визначають:

$$\min_i \max_j r(a_i,\theta_j).$$

Причому дана формула є вірною незалежно від того чи $v(a_i,\theta_j)$ задає втрати чи виграш.

Знайдемо розв’язок наведеної вище задачі за критерієм Севіджа:

К-сть клієнтів / Рівень послуг	$\theta_1=200$	$\theta_2=250$	$\theta_3=300$	$\theta_4=350$	max	min
a_1	0	3	1	10	10	
a_2	3	0	7	8	8	8
a_3	18	9	2	9	18	
a_4	23	15	0	0	24	

За критерієм Севіджа найкращим рівнем послуг є a_2.

IV. Критерій Гурвіца.

Критерій Гурвіца охоплює декілька підходів до прийняття рішень: від найбільш оптимістичного до найбільш песимістичного.

Показником оптимізму є α: при $\alpha = 1$ – критерій ***дуже оптимістичний;***

при $\alpha = 0$ – критерій ***дуже песимістичний.***

Значення α може визначатись в залежності від характеру особи, яка приймає рішення, тобто, що їй найбільш характерно: песимізм або оптимізм. Чим складніша господарська ситуація, чим більше в ній підстрахуватись хоче особа, яка приймає рішення, тим ближче до нуля вибирається α. Використання даного критерію ускладнюється при відсутності достатньої інформації про величину параметра α, який в силу суб'єктивних причин при різних рішеннях і в різних ситуаціях приймає різні значення.

При відсутності інформації про явно виражений характер особи α приймається рівним 0,5.

Для встановлення оптимального способу дії вибирають дію, яка визначає:

$\min\limits_{a_i}[\alpha \min\limits_{\theta_j} v(a_i,\theta_j) + (1-\alpha)\max\limits_{\theta_j} v(a_i,\theta_j)],$ якщо $v(a_i,\theta_j)$ задає втрати;

$\max\limits_{a_i}[\alpha \max\limits_{\theta_j} v(a_i,\theta_j) + (1-\alpha)\min\limits_{\theta_j} v(a_i,\theta_j)],$ якщо $v(a_i,\theta_j)$ задає виграш.

Знайдемо оптимальний рівень послуг наведеної вище задачі за критерієм Гурвіца.

Нехай $\alpha = 0{,}5$. Тоді

К-сть клієнтів / Рівень послуг	θ_1	θ_2	θ_3	θ_4	min	max	$\alpha\min + (1-\alpha)\max$
a_1	7	12	13	20	7	20	$0{,}5 \cdot 7 + 0{,}5 \cdot 20 = 13{,}5$
a_2	10	9	19	18	9	19	14
a_3	25	18	14	19	14	25	19,5
a_4	30	24	12	10	10	30	20

За критерієм Гурвіца оптимальним рівнем послуг є a_1.

Тема 5. Теорія управління запасами

Методологія оптимального управління запасами зосереджена на розробці математичних моделей та методів оптимізації запасів у постачанні, виробництві та збуті продукції.

Запас – це будь-який ресурс, який використовується для задоволення поточної або майбутньої потреби.

Розглянемо основні причини необхідності створення запасів та, на противагу, передумови, які сприяють зменшенню запасів (табл. 1).

Таблиця 1

Причин створення запасів	Передумови, які сприяють зменшенню запасів
• розбіжність ритмів постачання (виробництва) матеріальних запасів з ритмами їх споживання; • випадкові коливання попиту на період між поставками, обсягів поставок, інтервалів між поставками; • територіальна віддаленість постачальників від споживачів, що унеможливлює доставку потрібної сировини, матеріалів або товарів саме у той час і в тому обсязі, коли виникає в них потреба; • сезонність видобутку або виготовлення певних видів сировини, матеріалів або продукції та неперервність попиту на них; • ризик несприятливої зміни ринкових цін на сировину, матеріали або кінцеву продукцію.	• плата за зберігання; • втрачений економічний виграш внаслідок зв'язування обігових коштів у запасах; • втрати у якості і кількості матеріалів, що знаходяться в запасах; • старіння (моральний знос), що приводить до зниження попиту.

Задача управління запасами полягає у визначенні моментів часу і обсягів замовлень на поповнення запасів і розподілі надісланих замовлень по ієрархії ланок системи постачання.

Система постачання - сукупність складів, між якими в процесі операцій з постачання здійснюють переміщення ресурсів.

Системи постачання класифікують за такими ознаками:

- *за кількістю ресурсів*: на одно ресурсні та багато ресурсні;
- *за залежністю попиту на ресурс від часу*: на статичні (попит не залежить від часу) та динамічні (попит залежить від часу);
- *за параметрами постачання/використання ресурсу*: на детерміновані (параметри точно відомі) і стохастичні (хоча б один з параметрів набуває випадкових значень);
- *за типом постачання*: на неперервні та дискретні;
- *залежні від попиту на інші ресурси та незалежні.*

Найпоширенішими системами постачання ресурсів є **детерміновані одноресурсні статичні системи постачання.** Наприклад, хоча попит на хліб чи молоко може змінюватись від однієї доби до іншої, ці зміни є настільки незначними, що припущення статичності та детермінованості попиту неістотно спотворює дійсність. Надалі математичні моделі керування запасами називатимемо відповідно до характеристик системи постачання, яку описують цією моделлю (наприклад, одноресурсна детермінована статична модель керування запасами).

В класичній постановці задачі оптимального управління запасами критерієм оптимальності є мінімізація сукупних витрат, які складаються з чотирьох основних частин:

- витрати, пов'язані з утриманням запасів;
- витрати, пов'язані з організацією виробництва продукції, яка утворюватиме запас;
- витрати, пов'язані з оформленням та доставкою усіх замовлень на поставки окремих партій продукції;
- витрати, пов'язані з дефіцитом продукції.

Із зміною розмірів запасів ці витрати змінюються по-різному, причому одні скорочуються, а інші зростають. Тому виникає проблема визначення оптимального розміру запасів, за якого загальні витрати в системі управління запасами мінімізуються.

Сукупність правил, за якими приймаються рішення на поповнення запасів, називаються **стратегією керування запасами**. Кожна стратегія управління запасами пов'язана з відповідними фінансовими витратами, які відображаються функцією сумарних витрат. Оптимальна стратегія має мінімізувати сумарні витрати на певний період часу.

У подальшому для конкретності будемо розглядати управління запасами на підприємствах.

Введемо необхідні визначення для виробничих запасів.

Поточним називається запас на момент розгляду.

Страховий – запас, зменшення рівня якого може викликати небажані процеси на виробництві, що знижують ефективність його функціонування.

Нормативним називається запас, який дозволяє забезпечити ритмічність виробництва на конкретному наперед заданому інтервалі (рис. 1).

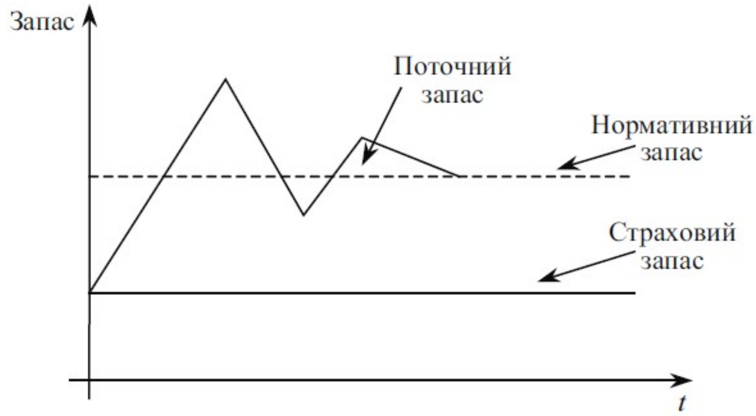

Рис. 1. Виробничі запаси

Детермінована одноресурсна статична модель управління запасами у випадку дискретного постачання без дефіциту ресурсу (модель Уілсона)

Модель Уілсона розглядається з припущенням, що попит на продукцію зберігання є рівномірним, а замовлення на поповнення товарів виконується миттєво. Незважаючи на такі спрощення, ця модель має велике значення в теорії управління запасами і є першою моделлю, яка дала можливість визначити партію замовлення, що оптимізує витрати на зберігання і обслуговування запасу**.**

Постановка задачі. Нехай деякий підприємець повинен поставляти своїм клієнтам R виробів рівномірно протягом інтервалу часу T. Таким чином, попит є фіксований і відомий. Недостача товарів не допускається, тобто штраф при незадоволеному попиті нескінченно великий. Змінні витрати виробництва складаються з таких елементів: C_1- вартість зберігання одного виробу (за одиницю часу); C_2- вартість запуску у виробництво однієї партії товарів.

Підприємцю необхідно вирішити, як часто йому варто організовувати випуск партій і яким повинен бути розмір кожної партії.

Нехай q – розмір партії, t- інтервал часу між запусками у виробництво партій, а R – повний попит за весь час планування T.

Описана вище ситуація представлена графічно на рис.2.

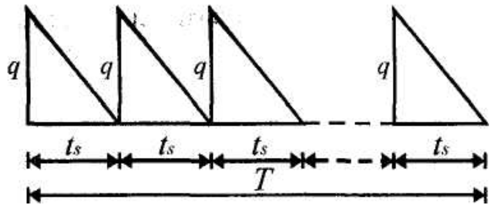

Рис. 2. Графічне зображення моделі

Тоді $\frac{R}{q}$ – число партій за час Т, тоді

$$t = T/(R/q) = (T \cdot q)/R. \tag{1}$$

Якщо інтервал t починається, коли на складі є q виробів, і закінчується при відсутності запасів, то $^q/_2$ – середній запас протягом t. Рівність $^q/_2 = q_{сер}$ варто розглядати наближену. Точність її тим вища, чим більше R. Тоді витрати на зберігання в інтервалі t дорівнюють

$$q/2 \cdot C_1 \cdot t + C_2.$$

Для обчислення повної вартості створених запасів за час Т необхідно цю величину помножити на загальну кількість партій за цей час

$$Q = (q/2 \cdot C_1 \cdot t + C_2)\frac{R}{q}.$$

або

$$Q = \frac{TqC_1}{2} + \frac{RC_2}{q}. \tag{2}$$

Доданки в правій частині рівняння (2) являють собою повну вартість зберігання і повну вартість замовлення у виробництво всіх партій. Із збільшенням розміру партії перший доданок зростає, а другий спадає. Розв'язок задачі управління запасами і полягає у визначенні такого розміру партії q_0 , при якому сумарна вартість була б наймешою.

Знайдемо мінімум функції (2):

$$Q' = \frac{TC_1}{2} - \frac{RC_2}{q^2}.$$

Прирівнявши до нуля, отримаємо формулу, для розрахунку оптимального розміру партії (довести самостійно, що в цій точці буде саме мінімум фукції F(q)):

$$q_0 = \sqrt{\frac{2RC_2}{TC_1}}. \tag{3}$$

Тоді оптимальний інтервал часу між запусками у виробництво партій становитиме:

$$t_0 = \frac{T \cdot q_0}{R} = \sqrt{\frac{2TC_2}{RC_1}}. \quad (4)$$

При цьому загальні витрати становитимуть

$$Q_0 = \frac{Tq_0C_1}{2} + \frac{RC_2}{q_0} = \sqrt{2RTC_1C_2}. \quad (5)$$

Приклад. Нехай підприємцю потрібно поставляти своєму замовнику 24000 одиниць продукції в рік. Оскільки одержувана продукція використовується безпосередньо у виробництві і замовник не має для неї спеціальних складів, постачальник повинен щодня відвантажувати денну норму. У випадку порушення постачання постачальник ризикує втратити замовлення. Тому недостача продукції неприпустима, тобто штраф при недостачі можна вважати нескінченним. Зберігання одиниці продукції за місяць коштує 0,1 у.о. Вартість запуску у виробництво однієї партії продукції складає 350 у.о.

Потрібно визначити оптимальний розмір партії q_0, оптимальний період t_0 і обчислити мінімум загальних очікуваних річних витрат.

Розв'язання. У даному випадку T=12 місяців, R=24000 одиниць, C_1 = 0,1 у.о./місяць, C_2=350 у.о./партія.

Оптимальний розмір партії визначимо за формулою

$$q_0 = \sqrt{\frac{2RC_2}{TC_1}}.$$

Для даної задачі

$$q_0 = \sqrt{\frac{2 \cdot 24000 \cdot 350}{12 \cdot 0{,}1}} = 3740 \text{ од.}$$

Визначимо оптимальний період

$$t_0 = \sqrt{\frac{2TC_2}{RC_1}}, \text{ тоді}$$

$$t_0 = \sqrt{\frac{2 \cdot 12 \cdot 350}{24000 \cdot 0{,}1}} \approx 1{,}87 \text{ місяця} \approx 44 \text{ дні.}$$

При цьому загальні витрати визначимо за формулою

$$Q_0 = \sqrt{2RTC_1C_2}.$$

Для даної за задачі

$$Q_0 = \sqrt{2 \cdot 24000 \cdot 12 \cdot 0{,}1 \cdot 350} = 4490 \text{ у.о./рік.}$$

Результати моделі Уілсона можуть бути узагальнені для детермінованої багато продуктової моделі управління запасами.

Для незалежних груп продуктів відповідно до формули (3) оптимальний розмір партії замовлення при постійному інтенсивному попиті і миттєвій поставці визначається за формулою:

$$q_{0i} = \sqrt{\frac{2R_i C_{2i}}{TC_{1i}}}.$$

Мінімальні витрати на обслуговування запасів багатономенклатурного складу при постійному попиті для взаємно незамінних груп товарів:

$$F(q_0)=\sum_{i=1}^{k}\sqrt{2R_i C_{1i} C_{2i}},$$

де k – кількість продуктів на складі,

C_{1i} — витрати на зберігання одиниці i - тої продукції за одиницю часу,

C_{2i} — витрати на оформлення і доставку партії замовлень q_i.

На збережену на складі продукцію можуть накладатись обмеження типу:

- сумарна вартість запасу продукції не повинна бути менше за величину W_1;
- не перевищувати обмеженої складської площі W_2 і т. ін.

У цьому випадку необхідно розв'язувати задачу умовної оптимізації, для якої можна використати метод множників Лагранжа, а при єдиному обмеженні ефективним є метод Беллмана.

Тема 6. Теорія масового обслуговування

Теорія масового обслуговування являє собою один з нових напрямів теорії ймовірностей, що сформувався в самостійну наукову дисципліну завдяки важливості практичних задач, що вона розглядає, та специфічності математичного апарату.

Засновником теорії масового обслуговування вважають датського математика А.К. Ерланга, який розпочав розробку практичних задач теорії масового обслуговування (початок 20 ст., праця „Теорія ймовірності і телефонні переговори”)

Задачами теорії масового обслуговування є аналіз і дослідження явищ, які виникають в системах масового обслуговування.

Системи, в яких, з одного боку, виникають масові запити(вимоги) на виконання яких-небудь видів послуг, а з другого відбувається задоволення цих запитів, називаються ***системами масового обслуговування.***

Прикладами задач масового обслуговування є – оптимізація обслуговування продавцями покупців, надання консультацій по телефону, надання медичної допомоги, готельне обслуговування тощо.

Предметом теорії масового обслуговування є встановлення залежності між характером потоку заявок, кількістю каналів, їх продуктивністю, правилами роботи СМО та ефективністю обслуговування.

Кожна СМО складається з деякої кількості обслуговуючих одиниць, які називаються ***каналами обслуговування***. У ролі „каналів обслуговування” можуть бути лінії зв’язку, робочі місця, залізничні колії, ліфти тощо. В залежності від кількості каналів обслуговування СМО ділять на ***одноканальні та багатоканальні.***

Кожна СМО призначена для обслуговування (виконання) деякого потоку запитів або вимог, що поступають у СМО в певні випадкові моменти часу. Обслуговування запиту, що поступив, продовжується якийсь час, після чого канал звільняється і готовий до обслуговування наступного запиту.

Випадковий характер потоку запитів та часу обслуговування призводять до того, що канали обслуговування завантажені нерівномірно. В одні періоди часу накопичується велика кількість вимог на обслуговування. Вони або стають у чергу, або залишають систему обслуговування. У ролі характеристик ефективності обслуговування, в залежності від умов задачі і мети дослідження, можуть виступати різні величини і функції, наприклад: середня кількість заявок, яка може бути обслужена СМО за одиницю часу; середній відсоток заявок, що одержують відмову і покидають СМО не обслуженими; середній час очікування в черзі; середня кількість заявок, що знаходяться в черзі тощо.

Класифікація систем масового обслуговування

Залежно від характеру формування черги усі СМО розподіляються на два класи:

1. ***Системи з відмовами*** – коли запит, що поступив у момент, коли всі канали зайняті отримує „відмову”, покидає СМО і в подальшому процесі обслуговування участі не приймає.
2. ***Системи з чергами*** – запит, що поступив у момент завантаженості усіх каналів, потрапляє до черги на обслуговування.

Серед систем з чергами розрізняють ***системи з обмеженим або з необмеженим часом очікування в черзі***. У системах з необмеженим часом очікування в черзі кожна заявка, що поступила в момент, коли немає вільних каналів, стає в чергу і чекає звільнення каналу, який прийме її на обслуговування. У таких системах кожний запит буде рано чи пізно обслужений. У системах з обмеженим очікуванням на перебування запиту в черзі накладаються певні обмеження. Ці обмеження можуть стосуватися довжини черги (кількості запитів, що одночасно знаходяться в черзі), часу перебування запиту в черзі (після деякого часу перебування в черзі заявка її покидає), загального часу перебування запиту в СМО тощо.

Обслуговування в системах з чергами може бути „***впорядкованим***” (заявки обслуговуються в порядку надходження) і „***невпорядкованим”*** (заявки обслуговуються у випадковому порядку). У деяких СМО застосовується так зване „обслуговування з пріоритетом”.

Найпростіший потік подій і його властивості

Потоком подій називається послідовність однорідних подій, що слідують одна за другою в деякі випадкові моменти часу. Прикладами потоків подій можуть бути: потік викликів на телефонній станції; потік автомобілів, які прибувають на заправку; потік покупців в магазині.

Потік подій є ***ординарним***, якщо в кожен момент часу може надійти не більше одного запиту на обслуговування.

Ординарність потоку означає, що події потоку з’являються поодинці, а не парами, трійками і т.д. Прикладом ординарного потоку подій може бути потік звернень пасажирів до працівника залізничної каси. Прикладом неординарного потоку може бути потік звернень громадян у ЗАГС.

Потік називається ***потоком без післядії*** якщо для кожного моменту часу кількість запитів, які надійдуть у майбутньому, не залежить від кількості запитів, які надійшли у минулому.

Відсутність післядії в потоці означає, що події, які утворюють потік, з'являються в послідовні моменти часу незалежно одна від одної. Прикладом потоку без післядії може бути потік пасажирів, які входять у станцію метро. Це пояснюється тим, що причини, які визначили прихід одного пасажира в певний момент часу, як правило, не залежать від аналогічних причин для інших пасажирів.

Потік подій називають ***стаціонарним***, якщо ймовірність надходження до системи певної кількості запитів за певний проміжок часу залежить лише від довжини цього проміжку та не залежить від моменту часу, коли починається цей проміжок.

На практиці часто зустрічаються потоки, які, по крайній мірі, на обмежених інтервалах є стаціонарними. Наприклад, потік викликів на телефонну станцію протягом доби не є стаціонарним, оскільки інтенсивність викликів вночі менша ніж вдень. Однак на окремих інтервалах часу з достатнім ступенем точності його можна вважати стаціонарним.

Потік подій, що є стаціонарним, без післядії і ординарним, називається ***найпростішим або стаціонарним пуассонівським.***

Пуассонівський потік подій тісно пов'язаний з розподілом Пуассона. Кількість подій потоку, що попадає на довільний інтервал часу, розподілена за законом Пуассона. При цьому ймовірність того, що в СМО за певний проміжок часу t надійде k вимог рівна:

$$P_k(t) = e^{-\lambda t}\,\frac{(\lambda t)^k}{k!}, k = 1,2,...n; \qquad (1)$$

де $P_k(t)$ - ймовірність надходження в обслуговуючу систему k вимог за досліджуваний проміжок часу t;

е- відома константа математичного аналізу е=2,7;

λ - середня кількість вимог, що поступають на обслуговування в одиницю часу (інтенсивність потоку);

k - кількість вимог, що надійде в СМО за час t.

Найпростіший потік у теорії масового обслуговування відіграє таку ж роль, як нормальний закон розподілу випадкової величини в теорії ймовірності.

Два найпростіші потоки відрізняються між собою лише інтенсивністю – параметром λ.

Якщо потік подій ординарний, без післядії, але не стаціонарний, то він називається ***нестаціонарним пуасонівським потоком***. У такому потоці інтенсивність є змінною величиною.

При нестаціонарному потоці вимог практичні задачі можна вирішувати в такий спосіб: весь інтервал часу функціонування системи масового обслуговування ділиться на відрізки, в межах яких можна вважати потік вимог постійним. Для кожного такого відрізка часу аналізується робота системи, наприклад, по змінах доби та ін.

Розглянемо приклад задачі :

Приклад 1. *Одним робітником опорного диспетчерського пункту обслуговуються шість будинків, кожний з яких обладнаний одним ліфтом. Середнє число будинків (ліфтів), що вимагають обслуговування протягом години, дорівнює трьом: λ=3. Обчислити імовірність того, що протягом години рівно k ліфтів потребують обслуговування. Зробити розрахунки шуканих імовірностей для k = 0,1, … , 6.*

Розв'язання. Для даної задачі інтенсивність потоку рівна *λ=3.* Ймовірність того, що протягом години буде потрібно обслуговування для k ліфтів, обчислюється за формулою (1):

$$P_k(t) = e^{-\lambda t}\,\frac{(\lambda t)^k}{k!} = \frac{1}{2{,}72^3}\cdot\frac{(3\cdot 1)^k}{k!}$$

Обчислені значення шуканої імовірності при k = 0,1, … , 6 подані в табл. 1.

Таблиця 1

k	0	1	2	3	4	5	6
$P_k(t)$	0,0497	0,1491	0,2240	0,2236	0,1680	0,1006	0,0504

Приклад 2. *Нехай в умові прикладу 1 середній час обслуговування одного ліфта дорівнює 20 хв. (1/3 год.). Яка імовірність того, що за 20 хв.:*

а) не буде працювати більше 3 ліфтів?

б) буде працювати не менше 2 ліфтів?

Розв'язання. Спочатку визначимо імовірності того, що за 20хв. не будуть працювати рівно k ліфтів або, іншими словами, визначимо ймовірність того, що протягом 20 хв. (1/3 год.) буде потрібно обслуговування для k ліфтів (k=1,2,3,4,5,6):

$$P_k\left(\tfrac{1}{3}\right) = e^{-3\cdot\frac{1}{3}}\cdot\frac{(3\cdot\frac{1}{3})^k}{k!} = \frac{1}{2{,}72}\cdot\frac{1}{k!}$$

Результати розрахунків при різних значеннях k зведені в табл. 2.

Таблиця 2

k (кількість не працюючих ліфтів)	0	1	2	3	4	5	6
l=6-k (кількість працюючих ліфтів)	6	5	4	3	2	1	0
$P_k(1/3)$	0,3679	0,3679	0,1839	0,0613	0,0153	0,0031	0,0005

Використовуючи дані табл. 2, визначимо шукані ймовірності:

а) ймовірність того, що за час t не буде працювати більше k ліфтів, визначається за формулою

$$P_{>k}(t) = P_{k+1}(t) + P_{k+2}(t) + \ldots + P_6(t).$$

Тоді ймовірність того, що за 20 хв. не буде працювати більше 3-х ліфтів становитиме:

$$P_{>3}(1/3) = 0{,}0153 + 0{,}0031 + 0{,}0005 = 0{,}0189.$$

б) Спершу визначимо ймовірність того, що протягом часу t буде працювати не менше *l* ліфтів:

$$P_{\geq l}(t) = P_0(t) + P_1(t) + \ldots + P_{k-l}(t).$$

Тоді ймовірність того, що за 20 хв. буде працювати не менше 2-х ліфтів становитиме:

$$P_{\geq 2}(t) = 0{,}3689 + 0{,}3689 + 0{,}1839 + 0{,}0613 + 0{,}0153 = 0{,}9983.$$

Системи масового обслуговування з відмовами. Одноканальна система масового обслуговування з відмовами

У СМО з відмовами запит на обслуговування у випадку, коли всі канали обслуговування зайняті, отримує відмову.

Для одноканальної СМО з відмовами характерні такі особливості:

- наявність одного каналу обслуговування;
- запит, що поступає в ситему, негайно обслуговується, якщо канал вільний;
- запит, що поступає в систему, покидає її не обслуженим, якщо канал обслуговування зайнятий.

Задачі на визначення основних показників такої системи вирішуються при наявності пуассонівського розподілу потоку вимог.

Розглянемо основні показники, що характеризують одноканальну СМО:

1. λ - ***інтенсивність вхідного потоку запитів***:

$$\lambda = \frac{N}{T} \text{ (запитів/год)},$$

де N – кількість запитів, які надходять в СМО; t – періо, за який надходять запити.

2. μ - ***інтенсивність потоку обслуговування***:

$$\mu = \frac{1}{\bar{t}} \text{ (запитів/год)},$$

де $\bar{t}$ - середній час обслуговування.

3. ρ - ***коефіцієнт завантаження***. Визначається як відношення інтенсивності вхідного потоку запитів до інтенсивності вихідного потоку обслуговування:

$$\rho = \frac{\lambda}{\mu}.$$

4. Позначимо P_o – ***ймовірніть того, що канал обслуговування в СМО є вільним***;

P_1 – ймовірність того, що канал обслуговування в СМО є зайнятим.

Справедливою буде рівність

$$P_1 + P_0 = 1. \tag{1}$$

Ймовірність відмови в обслуговуванні для одноканальної СМО збігається з перебуванням системи в стані P_1 і визначається за формулою:

$$P_{відм} = P_1 = \frac{\lambda}{\lambda + \mu}. \qquad (2)$$

Тоді з (1) та (2) визначимо ймовірність того, що канал обслуговування вільний:

$$P_0 = 1 - P_1;$$

$$P_0 = 1 - \frac{\lambda}{\lambda + \mu};$$

і в результаті після спрощень отримаємо

$$P_0 = \frac{\mu}{\mu + \lambda},$$

поділивши на μ матимемо $P_0 = \dfrac{1}{1+\rho}$. (3)

Саме за формулою (3) найпростіше визначити P_0 .

Ймовірність перебування системи в стані P_0 дозволяє визначити ***середній відсоток обслужених запитів*** $m_{об}$ шляхом множення P_0 на 100 %:

$$m_{об} = P_0 \cdot 100\%.$$

Ймовірність перебування системи в стані P_1 дозволяє визначити ***середній відсоток необслужених запитів*** $m_{об}$ шляхом множення P_1 на 100 %:

$$m_{но} = P_1 \cdot 100\%.$$

5. Q – ***відносна пропускна спроможність***:

$$Q = 1 - P_{відм} = P_0 \text{ або } Q = \frac{\mu}{\mu + \lambda}.$$

Для одноканальної СМО з відмовами $P_0 = Q$. Тобто ймовірність того, що канал є вільний і є відносною пропускною спроможністю. Оскільки запит буде обслужений тільки в тому випадку, якщо в момент його надходження в систему канал буде вільний.

6. ***Абсолютна пропускна спроможність системи*** за одиницю часу визначається за формулою:

$$A = \lambda P_0 = \lambda Q \text{ (запитів/год).}$$

Багатоканальна система масового обслуговування з відмовами

Для багатоканальної СМО з відмовами характерні такі особливості:

- наявність декількох каналів обслуговування;
- кожен канал у довільний момент часу може обслуговувати лише один запит;
- запит, що поступає в систему, відразу обслуговується, якщо хоча б один з каналів вільний;
- якщо всі канали зайняті, запит, що поступає в систему, покидає її не обслуженим.

Низка показників ефективності функціонування багатоканальної СМО з відмовами визначаються аналогічно, як і для одноканальної СМО. До них належать **інтенсивність вхідного потоку запитів (λ), інтенсивність потоку обслуговування (μ), коефіцієнт завантаження (ρ).**

Розглянемо деякі показники, що характерні для багатоканальної СМО з відмовами:

1) **ймовірність того, що всі канали вільні** (**P_0**) визначається за формулою:

$$P_0 = \left(1 + \rho + \frac{\rho^2}{2!} + \ldots + \frac{\rho^n}{n!}\right)^{-1}.$$

2) **ймовірність відмови в обслуговуванні** (тобто, ймовірність того, що всі канали зайняті) (**$P_{відм}$**):

$$P_{відм} = \frac{\rho^n}{n!} P_0.$$

3) відносна пропускна спроможність СМО (Q):

$$Q = 1 - P_{відм}.$$

4) абсолютна пропускна спроможність (A):

$$A = \lambda Q$$ (запитів/год.).

Використана література

1. Карагодова О.О., Кігель В.Р., Рожок В.Д. Дослідження операцій: Навч. посібник.— К.: Центр учбової літератури, 2007 — 256 с.
2. Методы исследования операций : учебн. пособ. / Т. С. Кле-банова, В.А. Забродский, Е.В. Раевнева и др. – Х. : ХГЭУ, 1999. – 160 с.
3. Моделирование экономики : учебн. пособ. / Т. С. Клебанова, В. А. Забродский, О. Ю. Полякова и др. – Х. : ХГЭУ, 2001. – 140 с.
4. М. Михайлишим. Методичні вказівки до виконання самостійних завдань з курсу «Дослідження операцій» для студентів напрямків «Менеджмент організацій», «Економіка і підприємництво» денної та заочної форми навчання / М.Михайлишин. – Тернопіль:ТДТУ, 2008. – 36 с.
5. Хемди А. Таха Введение в исследование операцій / А. Хемди. – М. : Издательский дом "Вильямс", 2005. – 912 с.
6. Шелобаев С. И. Математические методы и модели в экономике, финансах, бизнесе : учебн. пособ. для вузов / С. И. Шелобаев. – М. : ЮНИТИ-ДАНА, 2001. – 367 с.
7. Шикин Е. В. Исследование операций : учебн. пособ. / Е. В. Шикин, Г. Е. Шикина. – М. : Изд. Проспект, 2006. – 280 с. 32
8. Дослідження операцій і методи оптимізації: Навч. посіб. / М. Є. Корольов, В. І. Павленко, О. В. Савіна, А. Г. Тимошенко.— К.: Університет «Україна», 2007.— 177 с.
9. Кобиляцький Л. С. Управління проектами / Л. С. Кобиляцький. – К. : Наукова думка, 2002. – 198 с.
10. Математичні моделі в менеджменті та маркетингу : навч. посібн. – Луганськ : СПД Резніков В. С., 2010. – 311 с.
11. Нелінійні моделі та аналіз складних систем : навч. посібн. : в 2 ч. / М. Є. Рогоза, С. К. Рамазанов, Е. К. Мусаєва та ін. – Полтава : РВВ ПУЕТ, 2011. – 300 с.