Електромаґнетна теорія лучистого тисненя.

написав

Володимир Кучер.

Вступ.

Електромаґнетна теорія сьвітла, збудована Cl. Maxwell-ем, довела до дуже цікавих вислідів, а іменно, що поверхня кождого тіла, на яке паде сьвітляна филя, дізнає певного рода тисненя, яке називаємо нині лучистим тисненем. Се тиснене удалось вже навіть означити чисельно на одиницю поверхнї і як досьвіди дальші оказали, рівнає ся воно лучистій енерґії, яка містить ся в одиниці обему в случаю зовсїм чорної поверхнї тіла т. з. що згадана поверхня тіла поглотила всю енерґію падучих лучів.

Першим, якому прийшло на думку тиснене сьвітла на поверхню ним осьвітлену, був Keppler (1619); однак пояснював він его, як взагалї всї сьвітляні явища в тодїшних часах, емісийною теорією. На основі сего тисненя старав ся Keppler вже пояснити хвости комет. Зі смертю Keppler-а однак пішла в забуте також его думка про лучисте тиснене, а підніс еї знов до значіня Euler (1746). Досьвідом викрити се тиснене старали ся насамперед De Mairan та Du Fay. Але обом не удалось отримати ясних вислїдів. Се саме можнаб віднести також до вислїдів, отриманих досьвідною дорогою через Fresnel-a (1825), Zöllner-a, Bartoli-oro та Crookes-a; проби послїдного довели до відкритя радіометричних явищ. Аж П. Лебедевови (1901) удалось виказати досьвідною дорогою єствоване лучистого тисненя; єму першому довелось отримати висліди, які годились з теоретичними обчисленями. Опісля Nichols і Hull (1902) робили поміри лучистого тисненя і дійшли до дуже точних дат, які лише

$$U = \frac{1}{2} \iiint \operatorname{div} \mathfrak{d} \,.\, \varphi \,.\, d v + \frac{1}{2} \iint \mathfrak{d}_n \,.\, \varphi \,.\, d S.$$

Знаємо однак, що:

$$\mathfrak{d} = \frac{k}{4\pi} \mathfrak{E},$$

де k є постійною діелектричною; для етеру $k = 1$, отже:

$$\mathfrak{d} = \frac{1}{4\pi} \mathfrak{E}.$$

З огляду на III. маємо:

$$\operatorname{div} \mathfrak{d} = 0. \qquad 1)$$

По узгляденю сего в послїднім вираженю на енерґію, отримаємо:

$$U = \frac{1}{2} \iint \mathfrak{d}_n \,.\, \varphi \,.\, d S,$$

що після теореми Gauss-а можна перетворити на:

$$\iint \mathfrak{d}_n \;\; \varphi \,.\, d s = \iiint \operatorname{div} \mathfrak{d} \,.\, \varphi \, d v - \iiint \left(\mathfrak{d}_x \frac{\partial \varphi}{\partial x} + \mathfrak{d}_y \frac{\partial \varphi}{\partial y} + \mathfrak{d}_z \frac{\partial \varphi}{\partial z} \right) d v.$$

Перший член правої сторони з огляду на 1.) є зером, а остане лише другий. Отже електрична енерґія представить ся, як:

$$U = - \iiint \left(\mathfrak{d}_x \frac{\partial \varphi}{\partial x} + \mathfrak{d}_y \frac{\partial \varphi}{\partial y} + \mathfrak{d}_z \frac{\partial \varphi}{\partial z} \right) d v.$$

А що:

$$\mathfrak{E}_x = - \frac{\partial \varphi}{\partial x}, \;\; \mathfrak{E}_y = - \frac{\partial \varphi}{\partial y}, \;\; \mathfrak{E}_z = - \frac{\partial \varphi}{\partial z},$$

тому по вставленю тих реляций в послїдне рівнане на U, отримаємо:

$$U = \frac{1}{2} \iiint (\mathfrak{E}_x \mathfrak{d}_x + \mathfrak{E}_y \mathfrak{d}_y + \mathfrak{E}_z \mathfrak{d}_z) \, d v.$$

або:

$$U = \frac{1}{2} \iiint (\mathfrak{E} \mathfrak{d}) \, d v.$$

В нашім случаю беремо під увагу плоску филю, яка розходить ся в напрямі оси z. Всї величини, які впливають на зміну величини филї, є тодї функціями лише двох змінних, а се: z і часу t. В тім случаю:

$$\mathfrak{E}_y = \mathfrak{E}_z = 0.$$

Електрична енерґія такої филї на одиницю обєму буде:

$$U = \frac{1}{2} \mathfrak{E}_x \mathfrak{d}_z.$$

По узглядненю однак, що:

$$\mathfrak{d}_x = \frac{1}{4\pi}\mathfrak{E}_x,$$

дістанемо:

$$U = \frac{1}{8\pi}\mathfrak{E}_x{}^2. \qquad 2)$$

З електродинаміки знов знаємо, що вектор на маґнетну силу $\mathfrak{H}$ представляє ся все як curl векторового потенціялу пр. $\mathfrak{A}$, зі складовими: $\mathfrak{A}_x$, $\mathfrak{A}_y$, $\mathfrak{A}_z$, отже:

$$\mathfrak{H} = \operatorname{curl}\mathfrak{A}. \qquad 3)$$

Похідна вектору $\mathfrak{A}$ зі згляду на час t дає нам силу індукції. Коли зіставимо реляцию 3) в рівнанем II., тоді легко побачимо, що:

$$\mathfrak{E} = -\frac{1}{c}\frac{\partial\mathfrak{A}}{\partial t}.$$

По заступленю $\mathfrak{E}$ послїдним вираженем в реляції 2), дістанемо:

$$U = \frac{1}{8\pi c^2}\left(\frac{\partial\mathfrak{A}_x}{\partial t}\right)^2 \qquad 4)$$

Зовсїм анальоґічно можна обчислити електрокінетичну енерґію T. Поступимо тут в той спосіб, що ролю вектора $\mathfrak{E}$ заступимо вектором $\mathfrak{H}$, а вираженє дїелектричного пересуненя $4\pi\mathfrak{d}$ заступимо маґнетною індукцією $\mathfrak{B}$. З огляду на се одержимо:

$$T = \iiint (\mathfrak{H}\,.\,\mathfrak{B})\,d\,v.$$

А що для етеру $\mathfrak{H} = \mathfrak{B}$, тому напишемо:

$$T = \frac{1}{8\pi}\iiint \mathfrak{H}^2\,d\,v.$$

В нашім случаю филя має напрям оси z, отже:

$$\mathfrak{H}_x = 0, \; \mathfrak{H}_z = 0,$$

і остає, що:

$$T = \frac{1}{8\pi}\iiint \mathfrak{H}_y{}^2\,d\,v.$$

З розвиненя знов взору $\mathfrak{H} = \operatorname{curl}\mathfrak{A}$, дістанемо:

$$\mathfrak{H}_y = \frac{\partial\mathfrak{A}_x}{\partial z} - \frac{\partial\mathfrak{A}_z}{\partial x}.$$

Але для плоскої филї в напрямі оси z також складові потенціялу векторового $\mathfrak{A}$:

$$\mathfrak{A}_y = 0, \; \mathfrak{A}_z = 0, \text{ лише } \mathfrak{A}_x \neq 0,$$

тому:

$$\mathfrak{H}_y = \frac{\partial\mathfrak{A}_x}{\partial z}.$$

З огляду на се:

$$T = \frac{1}{8\pi} \iiint \left(\frac{\partial \mathfrak{A}_x}{\partial z}\right)^2 d\,v,$$

а на одиницю обему:

$$T = \frac{1}{8\pi} \left(\frac{\partial \mathfrak{A}_x}{\partial z}\right)^2. \tag{5}$$

Цїла отже енерґія филї в одиниці обему виносить:

$$W = U + T = \frac{1}{8\pi}\left\{\frac{1}{c^2}\left(\frac{\partial \mathfrak{A}_x}{\partial t}\right)^2 + \left(\frac{\partial \mathfrak{A}_x}{\partial z}\right)^2\right\}.$$

Докажемо тепер, що обі енерґії електромаґнетної филї є собі рівні. В тій цїли розважимо ще деякі взори з електродинаміки.

Густота найзагальнїйшої електричної струї складає ся з проводженої струї, із струї дїелектричного пересуненя та з конвекційної струї, іменно:

$$\mathfrak{u} = \mathfrak{i} + \frac{\partial \mathfrak{d}}{\partial t} + \varrho\,\mathfrak{v}, \text{[1]} \tag{6}$$

де $\mathfrak{i}$ є проводженою струєю, $\frac{\partial \mathfrak{d}}{\partial t}$ струєю дїелектричного пересуненя, а $\varrho\,\mathfrak{v}$ конвекційною струєю. Але в нашім случаю маємо до дїла тільки зі струєю дїелектричного пересуненя; перший і третий складник рівнаня 6) відпадають, остає лише:

$$\mathfrak{u} = \frac{\partial \mathfrak{d}}{\partial t},$$

або:

$$\mathfrak{u} = \frac{1}{4\pi}\,\frac{\partial \mathfrak{E}}{\partial t}.$$

Коли знов $\mathfrak{E}$ виразимо через силу індукциї і підставимо в послїднім рівнаню, тодї дістанемо:

$$\mathfrak{u} = \frac{1}{4\pi c}\,\frac{\partial^2 \mathfrak{A}_x}{\partial t^2}. \tag{7}$$

Дальше знаємо з електродинаміки, що вир маґнетного поля $\mathfrak{H}$ є пропорциональний до густоти струї $\mathfrak{u}$, а іменно:

$$\text{curl}\ \mathfrak{H} = \frac{4\pi}{c}\,\mathfrak{u}, \text{[2]}$$

або:

$$\mathfrak{u} = \frac{c}{4\pi}\,\text{curl}\ \mathfrak{H}.$$

Коли в тім рівнаню за $\mathfrak{H}$ підставимо 3), то отримаємо:

$$\mathfrak{u} = \frac{c}{4\pi}\,\text{curl}^2\,\mathfrak{A},$$

[1]) M. Abraham. — A. Föppl: Theorie d. Elektr. B. I. 1907. §§ 54—55.

[2]) L. c. § 62.

або на основі взору з векторової аналізи про curl², маємо:

$$\mathfrak{u} = \frac{c}{4\pi}(\nabla \operatorname{div} \mathfrak{A} - \nabla^2 \mathfrak{A}).$$ [1]

А що:

$$\operatorname{div} \mathfrak{A} = 0,$$

тому останеся лише:

$$\mathfrak{u} = -\frac{c}{4\pi}\nabla^2 \mathfrak{A}.$$

В послїднім взорі треба знов узглянути, що: $\mathfrak{A}_y = \mathfrak{A}_z = 0$, та що всї величини, які спричиняють якунебудь зміну филї, є функціями t і z; по узгляденю сего отримаємо:

$$\mathfrak{u} = -\frac{c}{4\pi}\frac{\partial^2 \mathfrak{A}_x}{\partial z^2}. \tag{9}$$

Коли тепер зіставимо рівнаня 7. і 9. з собою, тодї отримаємо таке ріжничкове рівнане другого ряду:

$$\frac{\partial^2 \mathfrak{A}_x}{\partial t^2} = c^2 \frac{\partial^2 \mathfrak{A}_x}{\partial z^2}. \tag{10}$$

Інтеґралом сего рівнаня є функція такого типу:

$$\mathfrak{A}_x = f(z - ct).$$

По зріжничкованю єї раз з огляду на t, а другий раз з огляду на z і по вставленю одержаних вартостий в 4) і 5), отримаємо такі взори на U і T:

$$U = \frac{1}{8\pi c^2}\left(\frac{\partial \mathfrak{A}_x}{\partial t}\right)^2 = \frac{1}{8\pi} f'^2,$$

$$T = \frac{1}{8\pi}\left(\frac{\partial \mathfrak{A}_x}{\partial z}\right)^2 = \frac{1}{8\pi} f'^2,$$

отже:

$$U = T.$$

Вся енерґія даної плоскої филї складає ся в половинї з електричної, а в половинї з електрокінетичної енерґії. Приймім, що e представляє нам чисельну вартість обох енерґій, тодї цїла енерґія систему виносить:

$$W = 2e.$$

Вислїдом єствованя тих двох енерґій є тиснене в напрямі розходженя филї т. є. в напрямі оси z, якого величина рівнає ся сумі обох тих енерґій то є т. зв. густотї енерґії W. Вартість отже, лучистого тисненя виносить:

$$p = W = 2e. \tag{11}$$

---

[1] L. c. § 28.

Послїдний взір походить від Maxwell-a; его можна примінити лише до тїл зовсїм блискучих і то для случаю, коли лучі падуть нормально. Коли спроможність відбиваня є $r < 1$, тодї дістанемо на лучисте тисненє з огляду на 11) такий взір:

$$p = e(1 + r).$$

* * *

Загальна теорія лучистого тисненя.

Взір Maxwell-a нїчого не говорить нам про пондеромоторичні сили, які дїлають на границї двох осередків. Вислїди із взорів Maxwell-a остають тільки так довго важні, як довго дїланя пондеромоторичних сил складають ся із самого лучистого тисненя, а електромаґнетні натуги зовсїм на внутрішні елементи обему не дїлають. Hertz показав однак в своїй електродинаміці, що взір сей не можна уважати як загальний случай. Тому будемо старати ся із електродинамічних рівнань Hertz-a для тїл в руху найти загальну форму для лучистого тисненя.

Возьмім під увагу осередок, який порушає ся зі скоростию $\mathfrak{v}$, тодї для него сила маґнетного поля $\mathfrak{H}$ буде визначена рівнанєм:

$$\mathrm{I}'.^{1)} \quad \operatorname{curl} \mathfrak{H} = \frac{1}{c}\left\{4\,\pi\,\mathfrak{i} + \frac{\partial \mathfrak{E}}{\partial t} + \operatorname{curl}[\mathfrak{v}\,\mathfrak{E}] + \mathfrak{v}\operatorname{div}\mathfrak{E}\right\}.$$

Подібно друге рівнанє для електричної сили $\mathfrak{E}$:

$$\mathrm{II}'.^{2)} \quad \operatorname{curl} \mathfrak{E} = \frac{1}{c}\left\{\frac{\partial \mathfrak{H}}{\partial t} + \operatorname{curl}[\mathfrak{v}\,\mathfrak{H}] + \mathfrak{v}\operatorname{div}\mathfrak{H}\right\}.$$

В рівнаню II'. зникне третий член, бо як висше ми заложили $\operatorname{div}\mathfrak{H} = 0$; те саме дїє ся з третим членом правої сторони рівнаня I'. з огляду, що $\mathfrak{v}\operatorname{div}\mathfrak{E}$ представляє індукцийну струю, яка є зером, бо вона в сїм случаю витворює те саме маґнетне поле, що проводжена струя.

Помножім I'. і II'. через $\frac{c}{4\pi}$, а опісля перше через $\mathfrak{E}$, а друге через $\mathfrak{H}$ і зінтеґруймо їх над простором v та додаймо оба рівнаня, то отримаємо:

$$\frac{1}{4\pi}\iiint\left\{\mathfrak{E}\frac{\partial \mathfrak{E}}{\partial t} + \mathfrak{H}\frac{\partial \mathfrak{H}}{\partial t}\right\}dv + \frac{1}{4\pi}\iiint\left\{\mathfrak{E}\operatorname{curl}[\mathfrak{v}\,\mathfrak{E}] + \mathfrak{H}\operatorname{curl}[\mathfrak{v}\,\mathfrak{H}]\right\}dv =$$
$$= \frac{c}{4\pi}\iiint\left\{\mathfrak{H}\operatorname{curl}\mathfrak{E} - \mathfrak{E}\operatorname{curl}\mathfrak{H}\right\}dv - \iiint(\mathfrak{E}\,\mathfrak{i})\,dv.$$

В послїднім рівнаню маємо чотири інтеґрали; назвім їх по черзї кождий з осібна через I_1, I_2, I_3, I_4, тодї послїдне рівнанє буде мати форму:

1) M. Abraham — A. Föppl: Theorie der Elektrizität, Bd. I. 1907. § 94. 2) Ibidem.

$$I_1 + I_2 = I_3 - I_4.$$

Розберім тепер з фізичної сторони значінє кождого інтеґралу з осібна. Перший з них:

$$\mathrm{I}_1 = \frac{1}{8\pi}\frac{\partial}{\partial t}\iiint (\mathfrak{H}^2 + \mathfrak{E}^2)\, d\, v,$$

означає зміну електромаґнетної енерґії з часом t; інтеґрал знов I_2:

$$I_2 = \frac{1}{4\pi}\iiint\Big\{\mathfrak{E}\,\mathrm{curl}\,[\mathfrak{v}\,\mathfrak{E}] + \mathfrak{H}\,\mathrm{curl}\,[\mathfrak{v}\,\mathfrak{H}]\Big\}\, d\, v,$$

представляє працю, яка походить від тисненьо, що ділають на елементи обєму v. Третий інтеґрал можемо написати ще так:

$$I_3 = -\frac{c}{4\pi}\iiint\Big\{\mathfrak{E}\,\mathrm{curl}\,\mathfrak{H} - \mathfrak{H}\,\mathrm{curl}\,\mathfrak{E}\Big\}\, d\, v,$$

або:

$$I_3 = -\frac{c}{4\pi}\iint [\mathfrak{E}\,\mathfrak{H}]\, d\, S,$$

де S означає поверхню, яка ограничає простір v. Послїдний взір є нїчим иншим, як відємним вектором Poynting-а; він означає приплив лучистої енерґії через поверхню $d\,S$. — Четвертий інтеґрал:

$$I_4 = -\iiint (\mathfrak{E}\,\mathrm{i})\, d\, v,$$

подає нам часть енерґії, яка перемінилась в тепло Joule-а.

Розвинім тепер інтеґрал I_2 виконуючи назначені дїланя під знаком інтеґрованя, то отримаємо:

$$I_2 = -\frac{1}{4\pi}\iiint\Big\{\Big[\frac{\partial\mathfrak{v}_x}{\partial x}(\mathfrak{E}_y{}^2 + \mathfrak{E}_z{}^2) + \frac{\partial\mathfrak{v}_y}{\partial y}(\mathfrak{E}_x{}^2 + \mathfrak{E}_z{}^2) + \frac{\partial\mathfrak{v}}{\partial z_z}(\mathfrak{E}_x{}^2 + \mathfrak{E}_y{}^2)\Big] +$$

$$+ \Big[\mathfrak{E}_x\,\mathfrak{E}_y\,.\,c + \mathfrak{E}_y\,\mathfrak{E}_z\,.\,a + \mathfrak{E}_z\,\mathfrak{E}_x\,.\,b\Big]\Big\}\, d\, v -$$

$$-\frac{1}{4\pi}\iiint\Big\{\Big[\frac{\partial\mathfrak{v}_x}{\partial x}(\mathfrak{H}_y{}^2 + \mathfrak{H}_z{}^2) + \frac{\partial\mathfrak{v}_y}{\partial y}(\mathfrak{H}_x{}^2 + \mathfrak{H}_z{}^2) + \frac{\partial\mathfrak{v}_z}{\partial z}(\mathfrak{H}_x{}^2 + \mathfrak{H}_y{}^2)\Big] +$$

$$+ [\mathfrak{H}_x\,\mathfrak{H}_y\,.\,c + \mathfrak{H}_y\,\mathfrak{H}_z\,.\,a + \mathfrak{H}_z\,\mathfrak{H}_x\,.\,b]\Big\}\, d\, v,$$

де a, b, c мають слїдуюче значінє:

$$a = \frac{\partial\mathfrak{v}_y}{\partial z} + \frac{\partial\mathfrak{v}_z}{\partial y},\quad b = \frac{\partial\mathfrak{v}_z}{\partial x} + \frac{\partial\mathfrak{v}_x}{\partial z},\quad c = \frac{\partial\mathfrak{v}_x}{\partial y} + \frac{\partial\mathfrak{v}_y}{\partial x}.$$

Інтеґрал I_2, як вже висше ми згадали, представляє працю, котра походить від пондеромоторичних сил, пр. L. Для простїйшої форми вираженя на L впровадьмо ще слїдуючі знаки:

$$\mathfrak{X}_x = \frac{1}{8\pi}\Big\{(-\mathfrak{H}_x{}^2 + \mathfrak{H}_y{}^2 + \mathfrak{H}_z{}^2) + (-\mathfrak{E}_x{}^2 + \mathfrak{E}_y{}^2 + \mathfrak{E}_z{}^2)\Big\}.$$

$$\mathfrak{X}_y = \mathfrak{Y}_x = -\frac{1}{4\pi}(\mathfrak{H}_x\mathfrak{H}_y + \mathfrak{E}_x\mathfrak{E}_y)$$

$$\mathfrak{Y}^y = \frac{1}{8\pi}\left\{(\mathfrak{H}_x^2 - \mathfrak{H}_y^2 + \mathfrak{H}_z^2) + (\mathfrak{E}_x^2 - \mathfrak{E}_y^2 + \mathfrak{E}_z^2)\right\}$$

$$\mathfrak{Y}_z = \mathfrak{Z}_y = -\frac{1}{4\pi}(\mathfrak{H}_y\mathfrak{H}_z + \mathfrak{E}_y\mathfrak{E}_z)$$

$$\mathfrak{Z}_z = \frac{1}{8\pi}\left\{(\mathfrak{H}_x^2 + \mathfrak{H}_y^2 - \mathfrak{H}_z^2) + (\mathfrak{E}_x^2 + \mathfrak{E}_y^2 - \mathfrak{E}_z^2)\right\}$$

$$\mathfrak{Z}_x = \mathfrak{X}_z = -\frac{1}{4\pi}(\mathfrak{H}_z\mathfrak{H}_x + \mathfrak{E}_z\mathfrak{E}_x).$$

Тоді отримаємо:

$$I_z = L = \iiint\left\{\mathfrak{X}_x\frac{\partial\mathfrak{v}_x}{\partial x} + \mathfrak{Y}_y\frac{\partial\mathfrak{v}_y}{\partial y} + \mathfrak{Z}_z\frac{\partial\mathfrak{v}_z}{\partial z} + \mathfrak{X}_y\,.\,c + \mathfrak{Y}_z\,.\,a + \mathfrak{Z}_x\,.\,b\right\}d\,v.$$

Коли послідне рівнане зінтеґруємо щераз частково, то одержимо:

$$L = \iiint\left\{\mathfrak{v}_x\left(-\frac{\partial\mathfrak{X}_x}{\partial x} - \frac{\partial\mathfrak{Y}_x}{\partial y} - \frac{\partial\mathfrak{Z}_x}{\partial z}\right) + \mathfrak{v}_y\left(-\frac{\partial\mathfrak{X}_y}{\partial x} - \frac{\partial\mathfrak{Y}_y}{\partial y} - \frac{\partial\mathfrak{Z}_y}{\partial z}\right) + \right.$$

$$\left. + \mathfrak{v}_z\left(-\frac{\partial\mathfrak{X}_z}{\partial x} - \frac{\partial\mathfrak{Y}_x}{\partial y} - \frac{\partial\mathfrak{Z}_z}{\partial z}\right)\right\}d\,v + \iint\left\{\mathfrak{v}_x\left[-\mathfrak{X}_x\cos(x\,n) - \mathfrak{X}_y\cos(n\,y)\right.\right.$$

$$- \mathfrak{X}_z\cos(n\,z)\big] + \mathfrak{v}_y\left[-\mathfrak{Y}_x\cos(n\,x) - \mathfrak{Y}_y\cos(n\,y) - \mathfrak{Y}_z\cos(n\,z)\right] +$$

$$\left. + \mathfrak{v}_z\left[-\mathfrak{Z}_x\cos(n\,x) - \mathfrak{Z}_y\cos(n\,y) - \mathfrak{Z}_z\cos(n\,z)\right]\right\}d\,S,$$

або в скороченій формі:

$$12)\; L = \iiint\left\{\mathfrak{T}_x\,.\,\mathfrak{v}_x + \mathfrak{T}_y\,\mathfrak{v}_y + \mathfrak{T}_z\,.\,\mathfrak{v}_z\right\}d\,v + \iiint\left\{\mathfrak{T}'_x\,\mathfrak{v}_x + \mathfrak{T}'_y\,\mathfrak{v}_y + \mathfrak{T}'_z\,\mathfrak{v}_z\right\}d\,S,$$

де $\mathfrak{T}_x$, $\mathfrak{T}_y$, $\mathfrak{T}_z$ та $\mathfrak{T}'_x$, $\mathfrak{T}'_y$, $\mathfrak{T}'_z$ означають:

$$\mathfrak{T}_x = -\left(\frac{\partial\mathfrak{X}_x}{\partial x} + \frac{\partial\mathfrak{Y}_x}{\partial y} + \frac{\partial\mathfrak{Z}_x}{\partial z}\right)$$

$$\mathfrak{T}_y = -\left(\frac{\partial\mathfrak{X}_y}{\partial x} + \frac{\partial\mathfrak{Y}_y}{\partial y} + \frac{\partial\mathfrak{Z}_y}{\partial z}\right)$$

$$\mathfrak{T}_z = -\left(\frac{\partial\mathfrak{X}_z}{\partial x} + \frac{\partial\mathfrak{Y}_z}{\partial y} + \frac{\partial\mathfrak{Z}_z}{\partial z}\right),$$

$$\mathfrak{T}'_x = -\left(\mathfrak{X}_x\cos(n\,x) + \mathfrak{X}_y\cos(n\,y) + \mathfrak{X}_z\cos(n\,z)\right)$$

$$\mathfrak{T}'_y = -\left(\mathfrak{Y}_x\cos(n\,x) + \mathfrak{Y}_y\cos(n\,y) + \mathfrak{Y}_z\cos(n\,z)\right)$$

$$\mathfrak{T}'_z = -\left(\mathfrak{Z}_x\cos(n\,z) + \mathfrak{Z}_y\cos(n\,y) + \mathfrak{Z}_z\cos(n\,z)\right).$$

З рівнаня 12) бачимо, що пондеромоторичні сили складають ся з двох частий, а іменно з сил $\mathfrak{T}$, які ділають на елементи обєму $d\,v$, та з сил $\mathfrak{T}'$, що ділають на граничну поверхню $d\,S$.

Возьмім тепер під увагу спецыяльний случай, а іменно, що филя паде в площі (yz); тодї маємо:

$$\mathfrak{E}_y = \mathfrak{E}_z = 0, \text{ та } \mathfrak{H}_x = 0,$$

а всї похідні з огляду на y і z зникають. Що стане ся тепер із силами першого рода $\mathfrak{T}$? В сїм спеціяльнім случаю:

$$\mathfrak{T}_x = -\frac{\partial \mathfrak{X}_x}{\partial x} = \frac{1}{8\pi}\left(\mathfrak{H}_y \frac{\partial \mathfrak{H}_y}{\partial x} + \mathfrak{H}_z \frac{\partial \mathfrak{H}_z}{\partial x}\right):$$

а що:

$$\frac{\partial \mathfrak{H}_y}{\partial x} = \frac{1}{c}\,\frac{\partial \mathfrak{E}_z}{\partial t} = 0,$$

так само:

$$\frac{\partial \mathfrak{H}_z}{\partial x} = -\frac{1}{c}\,\frac{\partial \mathfrak{E}_y}{\partial t} = 0,$$

тому:

$$\mathfrak{T}_x = 0.$$

А дальше:

$$\mathfrak{X}_y = 0,\ \mathfrak{X}_z = 0,$$

з чого слїдує, що:

$$\mathfrak{T}_y = 0,\ \mathfrak{T}_z = 0.$$

Всї отже пондеромоторичні сили, що дїлають на обєм v, зникають, остають лише сили, які дїлають на граничну поверхню S. На тій поверхнї маємо $\cos(nz) = 1$, отже:

$$\mathfrak{T}'_x = 0,\ \mathfrak{T}'_y = \overline{\mathfrak{Y}}_z,\ \mathfrak{T}'_z = \overline{\mathfrak{Z}}_z, \qquad 13)$$

де перечеркненя в горі означає пересїчну вартість.

Приймім, що послїдні рівнаня справджує слїдуюча вартість для $\mathfrak{E}_x = \mathfrak{E}$:

$$\mathfrak{E} = A\,e^{i\vartheta},$$

де A є амплїтудою дроганя, а ϑ означає:

$$\vartheta = 2\pi\left(\frac{-z\cos\varphi + y\sin\varphi}{\lambda} - \frac{t}{\tau}\right);$$

притім φ є кутом паданя, λ довготою филї, τ періодом дроганя.

Означім вартість на електричну силу впадаючої филї:

$$\mathfrak{E}_i = A_i\,e^{i\vartheta}$$

для відбитої филї знов:

$$\mathfrak{E}_r = A_r\,e^{i(\vartheta+\varepsilon)},$$

де ε означає фазу, тодї сума дійсних частий обох виражень:

$$\mathfrak{E}' = \text{real. part. з } e^{i\vartheta}\,(A_i + A_r\,e^{i\varepsilon})$$

буде представляти повну електричну силу филї. Легко тепер запримітити, що:

$$(A_i + A_r\,e^{i\varepsilon})\,e^{i\vartheta} = (A_i + A_r\cos\varepsilon)\cos\vartheta - A_r\sin\vartheta\sin\varepsilon;$$

Положім дальше:

$$A_i + A_r \cos \varepsilon = A_1 \cos \omega$$

а:

$$A_r \sin \varepsilon \qquad = A_1 \sin \omega,$$

тоді дїйсна часть для $\mathfrak{E}$:

$$\mathfrak{E}' = A_1 \cos (\omega + \vartheta),$$

з заміткою, що: $A_1{}^2 = A_i^2 + A_r^2 + 2 A_i A_r \cos \varepsilon,$
а:

$$t g\, \omega = \frac{A_r \sin \varepsilon}{A_i + A_r \cos \varepsilon}.$$

В граничній площі:

$$\mathfrak{H}_x = - \mathfrak{H} \cos \varphi = - \mathfrak{E} \cos \varphi,$$
$$\mathfrak{H}_z = \mathfrak{H} \sin \varphi = \mathfrak{E} \sin \varphi,$$

тому:

$$\frac{1}{8\pi} \overline{\mathfrak{H}}_x{}^2 = \frac{1}{16\pi} (A_i{}^2 + A_r{}^2 - 2 A_i A_r \cos \varepsilon) \cos^2 \varphi,$$
$$\frac{1}{8\pi} \overline{\mathfrak{H}}_z{}^2 = \frac{1}{16\pi} (A_i{}^2 + A_r{}^2 + 2 A_i A_r \cos \varepsilon) \sin^2 \varphi,$$

а дальше:

$$\frac{1}{4\pi} \overline{\mathfrak{H}}_x \cdot \overline{\mathfrak{H}}_z = - \frac{1}{8\pi} (A_i{}^2 - A_r{}^2) \cos \varphi \sin \varphi,$$

притім перечеркненя означають пересічні вартости.

Впровадьмо дальше для $\mathfrak{E}^2$ т. зв. єї пересічну квадрадну вартість, отже:

$$\overline{\mathfrak{E}}^2 = \frac{1}{2} A^2.$$

котра послужить нам до обчисленя тисненя филї на поверхню S.

Тиснене се спричинене силами $\mathfrak{T}'$ є в звязи з густотою енерґії филї W. Коли W_i буде відносити ся до впадаючої филї, W_r знов до відбитої филї, то після взорів електромаґнетної теорії сьвітла маємо:

$$W_i = \frac{1}{8\pi} A_i^2, \quad W_r = \frac{1}{8\pi} A_r^2.$$

По узглядненю послїдних взорів в рівнанях для $\mathfrak{T}'$ отримаємо:

$$\mathfrak{T}_x' = 0$$
$$\mathfrak{T}_y' = - \frac{1}{4\pi} \overline{\mathfrak{H}}_y \cdot \overline{\mathfrak{H}}_z = (W_i - W_r) \sin \varphi \cos \varphi,$$
$$\mathfrak{T}_z' = \frac{1}{8\pi} [(\overline{\mathfrak{H}}_y{}^2 - \overline{\mathfrak{H}}_z{}^2) + \overline{\mathfrak{E}}_x{}^2] = (W_i + W_r) \cos^2 \varphi.$$

Площа, від котрої филя відбиває ся, дізнає тисненя p, якого напрям є згідний з площею паданя, а з осию z заключає кут пр. ψ. Напрям тисненя визначимо в сей спосіб:

$$tg\,\psi = \frac{\mathfrak{T}_y'}{\mathfrak{T}_z'} = \frac{W_i - W_r}{W_i + W_r}\,tg\,\varphi.$$

Що до величини тисненя p, то є воно вислідною ділання сил $\mathfrak{T}'$, іменно:

$$p = \sqrt{\mathfrak{T}_x'^2 + \mathfrak{T}_y'^2 + \mathfrak{T}_z'^2},$$

або по вираженю складових $\mathfrak{T}'$ через густоту енерґії, отримаємо:

$$p = \sqrt{(W_i - W_r)^2 \sin^2\varphi \cos^2\varphi + (W_i + W_r)^2 \cos^4\varphi},$$

або:

$$p = \cos\varphi \sqrt{W_i^2 + W_r^2 + 2\,W_i\,W_r \cos 2\,\varphi.}$$

Рівнанє се є загальною формою на лучисте тисненє.

Коли r означати буде рефлексийну спроможність, то заходити буде така звязь між W_i а W_r:

$$r = \frac{W_r}{W_i},$$

а дальше:

$$tg\,\psi = \frac{1-r}{1+r}\,tg\,\varphi.$$

В наслідок сего маємо:

$$p = W_i \cos\varphi \sqrt{1 + 2\,r \cos 2\,\varphi + r^2}.$$

Для зовсім відбиваючої поверхнї є рефлексийна спроможність $r = 1$, тому

$$tg\,\psi = 0, \text{ отже } \psi = 0,$$

і одержимо:

$$p = 2\,W_i \cos^2\varphi.$$

Для зовсім чорної поверхнї $r = 0$, отже:

$$tg\,\psi = tg\,\varphi, \text{ т. зн. } \psi = \varphi,$$

в наслідок чого:

$$p = W_i \cos\varphi.$$

В першім случаю напрям тисненя p є згідний з осию z, в другім случаю є він зовсім згідний з напрямом падаючої филї. Коли лучі падали би нормально на поверхню, тодї $\varphi = 0$, а також $\psi = 0$, а для тисненя p отримаємо форму:

$$p = W_i(1 + r),$$

а ся форма є саме формою Maxwell-a, висше наведеною.

Для зовсім блискучої поверхнї $r = 1$, тодї:

$$p = 2\,W_i,$$

а для зовсім чорної поверхнї $r = 0$, отже:

$$p = W_i.$$

Лучисте тисненє для зовсім блискучої поверхнї рівнає ся подвійному лучистому тисненю зовсім чорної поверхнї.

Лучисте тиснене порожного простору.

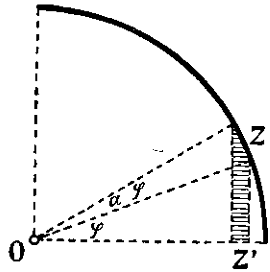
В порожнім просторі промінюванє розходить ся рівномірно у всїх напрямах. Подумаймо собі в такім просторі зовсїм блискучу поверхню; най єї трафляє сьвітляна филя під кутом φ. Заложім дальше, що у всїх напрямах з O (фіґ. 1) виходять лучі і падуть на елемент кулистої стрефи ZZ', якого поверхня

$$dF = 2\pi \sin\varphi\, d\varphi.$$

Густота цілої висланої енерґії виносить:

$$W = 2\pi\varepsilon\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos\varphi \sin\varphi\, d\varphi =$$

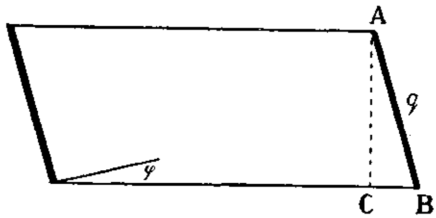
$$= -\frac{\pi\varepsilon}{2}\cos 2\varphi\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = \pi\varepsilon,$$



Фіґ. 1.

притім ε означає емісийну спроможність.

Коли q представляє величину промінюючої поверхнї AB (фіґ. 2), то тиснене на поверхнї AC в беззглядних одиницях виносить:



Фіґ. 2.

$$dp' = 2\frac{dW}{AC.c}, \quad \text{де} \quad c = 3.10^{10};$$

або:

$$dp' = \frac{2}{c}\frac{dW}{q\cos\varphi}.$$

Кождому елементови поверхнї AC відповідає аналоґічний елемент поверхнї AB $\frac{1}{\cos\varphi}$ разів більший. Тому тиснене на одиницю поверхнї AB є $\cos\varphi$ разів менше від dp'. А що напрям того тисненя замикає з нормальною до AB кут φ, тому:

$$dp = dp'\cos^2\varphi = \frac{2\,dW\cos\varphi}{c\,.\,q};$$

тиснене знов на одиницю поверхнї ε:

$$dp = 2\frac{dW}{c}\cos\varphi = \frac{4\pi\varepsilon}{c}\cos^2\varphi\sin\varphi\, d\varphi.$$

По зінтеґрованю отримаємо:

$$p = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{4\pi\varepsilon}{c}\cos^2\varphi\sin\varphi\, d\varphi = \frac{4}{3}\frac{\pi\varepsilon}{c}.$$

В случаю нормальних лучів до поверхні, густота енерґії буде:

$$W_e = \frac{2\,W}{c}.$$

Коли знов енерґія промінюв під кутом, який лежить між φ а $(\varphi + d\,\varphi)$, тоді будемо мати:

$$W_e = 4\,\pi\,\varepsilon \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin\varphi \cos\varphi\, d\,\varphi}{c \cos\varphi} = \frac{4\,\pi\,\varepsilon}{c}.$$

По вставленю послідної вартости у взорі на p, дістанемо:

$$p = \frac{1}{3}\,W_e$$

а се значить, що лучисте тиснене в порожнім просторі на зовсїм відбиваючу поверхню рівнає ся третій части цілої густоти енерґії филї.