РОЗДІЛ 1
КЛАСИФІКАЦІЯ ДИФЕРЕНЦІАЛЬНИХ РІВНЯНЬ В ЧАСТИННИХ ПОХІДНИХ ДРУГОГО ПОРЯДКУ ІЗ ДВОМА НЕЗАЛЕЖНИМИ ЗМІННИМИ

§1.1. Диференціальні рівняння в частинних похідних із двома незалежними змінними
§1.2. Канонічний вигляд диференціальних рівнянь в частинних похідних другого порядку
§1.3. Зведення до канонічного виду лінійних диференціальних рівнянь в частинних похідних із сталими коефіцієнтами

РОЗДІЛ 2. ВИВЕДЕННЯ РІВНЯНЬ ПРОЦЕСІВ, ЩО ВИВЧАЮТЬСЯ МЕТОДАМИ МАТЕМАТИЧНОЇ ФІЗИКИ

§2.1. Задача про поперечні коливання струни
§2.2. Задача теплопровідності металевого стержня
§2.3. Поняття крайових задач, їх класифікація та постановка

РОЗДІЛ 3. АНАЛІТИЧНІ МЕТОДИ РОЗВ'ЯЗАННЯ КРАЙОВИХ ЗАДАЧ МАТЕМАТИЧНОЇ ФІЗИКИ

§3.1. Загальна задача Штурма-Ліувілля
§3.2. Метод Фур'є
§3.3. Мішана крайова задача для однорідного хвильового рівняння із однорідними граничними умовами
§3.4. Мішана крайова задача для неоднорідного хвильового рівняння
§3.5. Мішані крайові задачі для одновимірного рівняння теплопровідності
§3.6. Задача Діріхле для рівняння Лапласа в прямокутнику
§3.7. Задача Діріхле для рівняння Лапласа в крузі
§3.8. Формули Д'Аламбера та Пуассона, принцип Дюгамеля

РОЗДІЛ 1
КЛАСИФІКАЦІЯ ДИФЕРЕНЦІАЛЬНИХ РІВНЯНЬ В ЧАСТИННИХ ПОХІДНИХ ДРУГОГО ПОРЯДКУ ІЗ ДВОМА НЕЗАЛЕЖНИМИ ЗМІННИМИ

§1.1. Диференціальні рівняння з частинними похідними з двома незалежними змінними

Основу класичної теорії рівнянь математичної фізики складають диференціальні рівняння з частинними похідними другого порядку, оскільки ними можна описати дуже багато фізичних процесів. В даному посібнику розглядається лише випадок, коли шукана функція залежить від двох незалежних змінних. Питання щодо рівнянь із більшою кількістю змінних детально викладено в [3, 7, 8, 9, 14, 17, 18].

Диференціальним рівнянням з частинними похідними (ДРЧП) другого порядку з двома незалежними змінними x, y називається співвідношення між невідомою функцією $u(x, y)$ та її частинними похідними до 2-го порядку включно:

$$F(x, y, u, u_x, u_y, u_{xx}, u_{xy}, u_{yy}) = 0 .$$

Тут $u_x = \dfrac{\partial u}{\partial x}$, $u_y = \dfrac{\partial u}{\partial y}$, $u_{xx} = \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}$, $u_{xy} = \dfrac{\partial^2 u}{\partial x \partial y}$, $u_{yy} = \dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2}$.

Рівняння називається ***лінійним відносно старших похідних***, якщо воно має вигляд:

$$a_{11}u_{xx} + 2a_{12}u_{xy} + a_{22}u_{yy} + F_1(x, y, u, u_x, u_y) = 0, \qquad (1.1)$$

де a_{11}, a_{12}, a_{22} є функціями змінних *x, y.*

Якщо коефіцієнти a_{11}, a_{12}, a_{22} рівняння (1.1) залежать не лише від *x, y,* але і від u, u_x, u_y, то таке рівняння називається ***квазілінійним***.

ДРЧП називається ***лінійним***, якщо воно лінійне як відносно старших похідних u_{xx}, u_{xy}, u_{yy}, так і відносно функції $u(x, y)$ та її перших похідних u_x, u_y:

$$a_{11}u_{xx} + 2a_{12}u_{xy} + a_{22}u_{yy} + b_1u_x + b_2u_y + cu + f(x, y) = 0, \qquad (1.2)$$

де a_{11}, a_{12}, a_{22}, b_1, b_2, c, f – функції лише змінних x, y.

Якщо коефіцієнти ДРЧП (1.2) не залежать від змінних x, y, то дане рівняння називається ***лінійним ДРЧП зі сталими коефіцієнтами.***

§1.2. Канонічний вигляд диференціальних рівнянь з частинними похідними другого порядку

За допомогою перетворення змінних

$$\xi = \phi(x,y), \ \eta = \psi(x,y),$$

для якого існує обернене перетворення, ми отримаємо нове рівняння, еквівалентне попередньому. Виникає питання: яким чином вибрати функції $\phi(x,y)$ та $\psi(x,y)$, так, щоб рівняння в змінних ξ та η мало простішу форму, тобто не містило якомога більше старших похідних.

Застосувавши властивості похідної складеної функції, перетворимо похідні до нових змінних:

$$u_x = u_\xi \xi_x + u_\eta \eta_x,$$

$$u_y = u_\xi \xi_y + u_\eta \eta_y,$$

$$u_{xx} = u_{\xi\xi}\xi_x^2 + 2u_{\xi\eta}\xi_x\eta_x + u_{\eta\eta}\eta_x^2 + u_\xi\xi_{xx} + u_\eta\eta_{xx}, \tag{1.3}$$

$$u_{xy} = u_{\xi\xi}\xi_x\xi_y + u_{\xi\eta}(\xi_x\eta_y + \xi_y\eta_x) + u_{\eta\eta}\eta_x\eta_y + u_\xi\xi_{xy} + u_\eta\eta_{xy},$$

$$u_{yy} = u_{\xi\xi}\xi_y^2 + 2u_{\xi\eta}\xi_y\eta_y + u_{\eta\eta}\eta_y^2 + u_\xi\xi_{yy} + u_\eta\eta_{yy}.$$

Підставляючи значення похідних з (1.3) в рівняння (1.1), отримаємо

$$\bar{a}_{11}u_{\xi\xi} + 2\bar{a}_{12}u_{\xi\eta} + \bar{a}_{22}u_{\eta\eta} + \bar{F} = 0, \tag{1.4}$$

де

$$\bar{a}_{11} = a_{11}\xi_x^2 + 2a_{12}\xi_x\xi_y + a_{22}\xi_y^2,$$

$$\bar{a}_{12} = a_{11}\xi_x\eta_x + a_{12}(\xi_x\eta_y + \xi_y\eta_x) + a_{22}\xi_y\eta_y,$$

$$\bar{a}_{22} = a_{11}\eta_x^2 + 2a_{12}\eta_x\eta_y + a_{22}\eta_y^2,$$

а функція $\bar{F}$ не залежить від похідних другого порядку.

Виберемо змінні ξ та η таким чином, щоб коефіцієнти $\bar{a}_{11}$ та $\bar{a}_{22}$ стали рівними нулю.

Для цього розглянемо спершу диференціальне рівняння з частинними похідними першого порядку:

$$a_{11}z_x^2 + 2a_{12}z_x z_y + a_{22}z_y^2 = 0. \qquad (1.5)$$

Можна довести, що для того, щоб функція $z = \phi(x, y)$ була частинним розв'язком рівняння (1.5), необхідно і достатньо, щоб співвідношення $\phi(x, y) = c$, де $c = const$, являло собою загальний інтеграл звичайного диференціального рівняння

$$a_{11}dy^2 - 2a_{12}dxdy + a_{22}dx^2 = 0. \qquad (1.6)$$

Рівняння (1.6) називається ***характеристичним*** для рівняння (1.1), а його інтеграли – ***характеристиками***.

Отже вибравши $\xi = \phi(x, y)$, де $\phi(x, y) = const$ – загальний інтеграл рівняння (1.6), перетворюємо в нуль коефіцієнт $\bar{a}_{11}$ при похідній $u_{\xi\xi}$. Якщо $\psi(x, y) = const$ – другий загальний інтеграл рівняння (1.6), що не залежить від $\phi(x, y)$, то вибравши $\eta = \psi(x, y)$, перетворимо в нуль також і коефіцієнт $\bar{a}_{22}$ при похідній $u_{\eta\eta}$. Тобто для спрощення рівняння (1.1) потрібно спочатку розв'язати (1.6).

Поділимо ліву та праву частини рівняння (1.6) на $(dx)^2$:

$$a_{11}\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 - 2a_{12}\frac{dy}{dx} + a_{22} = 0.$$

Розв'язавши отримане квадратне рівняння відносно $\frac{dy}{dx}$, отримаємо:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{a_{12} + \sqrt{a_{12}^2 - a_{11}a_{22}}}{a_{11}}, \qquad (1.7)$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{a_{12} - \sqrt{a_{12}^2 - a_{11}a_{22}}}{a_{11}}. \qquad (1.8)$$

Тобто рівняння (1.6) еквівалентне двом рівнянням (1.7) та (1.8). Знак підкореневого виразу в (1.7), (1.8) визначає тип рівняння (1.1).

Рівняння (1.1) в точці $M(x, y)$ називають:

- ***рівнянням гіперболічного типу***, якщо $a_{12}^2 - a_{11}a_{22} > 0$;
- ***рівнянням параболічного типу***, якщо $a_{12}^2 - a_{11}a_{22} = 0$;
- ***рівнянням еліптичного типу***, якщо $a_{12}^2 - a_{11}a_{22} < 0$.

Для рівняння гіперболічного типу $a_{12}^2 - a_{11}a_{22} > 0$ і праві частини рівнянь (1.7) та (1.8) дійсні і різні. Їх загальні інтеграли $\phi(x,y) = const$, $\psi(x,y) = const$ визначають дійсні сім'ї характеристик. Позначивши

$$\xi = \phi(x,y),\ \eta = \psi(x,y),$$

приводимо рівняння (1.4) після ділення на коефіцієнт при $u_{\xi\eta}$ до виду

$$u_{\xi\eta} = \Phi\left(\xi, \eta, u, u_\xi, u_\eta\right), \qquad (1.9)$$

де $\Phi = -\dfrac{\bar{F}}{2\bar{a}_{12}}$. Це – канонічна форма рівнянь гіперболічного типу. Часто користуються іншою канонічною формою. Позначивши

$$\xi = \alpha + \beta,\ \eta = \alpha - \beta,$$

або

$$\alpha = \frac{\xi + \eta}{2},\ \beta = \frac{\xi - \eta}{2},$$

де α і β – нові незалежні змінні, матимемо:

$$u_\xi = \frac{1}{2}\left(u_\alpha + u_\beta\right),\ u_\eta = \frac{1}{2}\left(u_\alpha - u_\beta\right),\ u_{\xi\eta} = \frac{1}{4}\left(u_{\alpha\alpha} - u_{\beta\beta}\right)$$

В результаті такої заміни (1.9) набуде вигляду:

$$u_{\alpha\alpha} - u_{\beta\beta} = \Phi_1\left(\alpha, \beta, u, u_\alpha, u_\beta\right).$$

Для рівняння параболічного типу $a_{12}^2 - a_{11}a_{22} = 0$ і праві частини рівнянь (1.7) та (1.8) дійсні та рівні. Аналогічно до (1.9) можна отримати канонічну форму рівняння параболічного типу

$$u_{\eta\eta} = \Phi\left(\xi, \eta, u, u_\xi, u_\eta\right).$$

Для рівняння еліптичного типу $a_{12}^2 - a_{11}a_{22} < 0$ і праві частини диференціальних рівнянь (1.7), (1.8) різні та комплексно спряжені. В результаті аналогічних міркувань рівняння (1.4) набуде вигляду

$$u_{\alpha\alpha} + u_{\beta\beta} = \Phi\left(\alpha, \beta, u, u_\alpha, u_\beta\right).$$

§1.3. Канонічні форми лінійних диференціальних рівнянь з частинними похідними зі сталими коефіцієнтами

Припустимо, що в рівнянні (1.2) коефіцієнти є сталими. Тоді за допомогою відповідного перетворення змінних дане рівняння зводиться до одного з наступних канонічних видів:

$$u_{\xi\eta} + b_1 u_\xi + b_2 u_\eta + cu + f = 0 \text{ або}$$

$$u_{\xi\xi} - u_{\eta\eta} + b_1 u_\xi + b_2 u_\eta + cu + f = 0 \text{ (гіперболічний тип);} \qquad (1.10)$$

$$u_{\xi\xi} + b_1 u_\xi + b_2 u_\eta + cu + f = 0 \text{ (параболічний тип);} \qquad (1.11)$$

$$u_{\xi\xi} + u_{\eta\eta} + b_1 u_\xi + b_2 u_\eta + cu + f = 0 \text{ (еліптичний тип).} \qquad (1.12)$$

Для подальшого спрощення проведемо заміну $u(\xi,\eta) = \upsilon(\xi,\eta)e^{\lambda\xi+\mu\eta}$, де $\upsilon(\xi,\eta)$ – нова невідома функція, λ, μ – поки-що невідомі константи. Тоді

$$u_\xi = (\upsilon_\xi + \lambda\upsilon)e^{\lambda\xi+\mu\eta},$$

$$u_\eta = (\upsilon_\eta + \mu\upsilon)e^{\lambda\xi+\mu\eta},$$

$$u_{\xi\xi} = (\upsilon_{\xi\xi} + 2\lambda\upsilon_\xi + \lambda^2\upsilon)e^{\lambda\xi+\mu\eta},$$

$$u_{\xi\eta} = (\upsilon_{\xi\eta} + \lambda\upsilon_\eta + \mu\upsilon_\xi + \lambda\mu\upsilon)e^{\lambda\xi+\mu\eta},$$

$$u_{\eta\eta} = (\upsilon_{\eta\eta} + 2\mu\upsilon_\eta + \mu^2\upsilon)e^{\lambda\xi+\mu\eta}.$$

Підставляючи знайдені похідні, наприклад, в рівняння (1.12) і, поділивши на множник $e^{\lambda\xi+\mu\eta} \neq 0$, отримуємо

$$\upsilon_{\xi\xi} + \upsilon_{\eta\eta} + (b_1 + 2\lambda)\upsilon_\xi + (b_2 + 2\mu)\upsilon_\eta + (\lambda^2 + \mu^2 + b_1\lambda + b_2\mu + c)\upsilon + f_1 = 0.$$

Параметри λ, μ виберемо так, щоб два коефіцієнти при перших похідних перетворились в нуль. Тобто, $\lambda = -b_1/2$, $\mu = -b_2/2$. В результаті отримаємо

$$\upsilon_{\xi\xi} + \upsilon_{\eta\eta} + \gamma\upsilon + f_1 = 0,$$

де $\gamma = -b_1^2/4 - b_2^2/4 + c$, $f_1 = f \cdot e^{\frac{b_1}{2}\xi + \frac{b_2}{2}\eta}$.

Виконуючи аналогічні дії для рівнянь (1.10) та (1.11), отримуємо наступні канонічні форми ДРЧП другого порядку зі сталими коефіцієнтами:

$$\upsilon_{\xi\eta} + \gamma\upsilon + f_1 = 0 \text{ або } \upsilon_{\xi\xi} - \upsilon_{\eta\eta} + \gamma\upsilon + f_1 = 0 \text{ (гіперболічний тип);}$$

$$\upsilon_{\xi\xi} + b_2\upsilon_\eta + f_1 = 0 \text{ (параболічний тип);}$$

$$\upsilon_{\xi\xi} + \upsilon_{\eta\eta} + \gamma\upsilon + f_1 = 0 \text{ (еліптичний тип).}$$

Приклад 1. Дослідити тип рівняння та звести його до канонічного вигляду в кожній із областей, де його тип зберігається

$$u_{xx} + xu_{yy} = 0. \qquad (\text{П}1.1)$$

Розв'язання.

Тут $a_{11} = 1, a_{12} = 0, a_{22} = x \Rightarrow D = a_{12}^2 - a_{11} \cdot a_{22} = 0 - x = -x$. Отже, можливі наступні випадки:

1) $D > 0 \Rightarrow -x > 0 \Rightarrow x < 0 \Rightarrow$ рівняння (П1.1) – це рівняння гіперболічного типу. Характеристичне рівняння має вигляд

$$(dy)^2 + x(dx)^2 = 0,$$

$$\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 - (-x) = 0,$$

$$\frac{dy}{dx} - \sqrt{-x} = 0 \text{ або } \frac{dy}{dx} + \sqrt{-x} = 0,$$

$$y + \tfrac{2}{3}(-x)^{3/2} = const, \ y - \tfrac{2}{3}(-x)^{3/2} = const.$$

В рівнянні (П1.1) проводимо заміну змінних

$$\xi = y + \tfrac{2}{3}(-x)^{3/2}, \ \eta = y - \tfrac{2}{3}(-x)^{3/2}. \qquad (\text{П}1.2)$$

Тоді

$$u_{xx} = u_{\xi\xi}\left(-(-x)^{1/2}\right)^2 + 2u_{\xi\eta}\left(-(-x)^{1/2}\right)(-x)^{1/2} + u_{\eta\eta}\left((-x)^{1/2}\right)^2 +$$
$$+ u_\xi \frac{1}{2}(-x)^{1/2} + u_\eta\left(-\frac{1}{2}(-x)^{1/2}\right) = -xu_{\xi\xi} + 2xu_{\xi\eta} -$$
$$-xu_{\eta\eta} + \frac{1}{2}u_\xi(-x)^{-1/2} - \frac{1}{2}u_\eta(-x)^{-1/2};$$

$$u_{yy} = u_{\xi\xi} \cdot (1)^2 + 2u_{\xi\eta} \cdot 1 \cdot 1 + u_{\eta\eta} \cdot (1)^2 = u_{\xi\xi} + 2u_{\xi\eta} + u_{\eta\eta}.$$

Підставивши знайдені похідні в (П1.1), дістанемо

$$-xu_{\xi\xi} + 2xu_{\xi\eta} - xu_{\eta\eta} + \frac{1}{2}u_{\xi}(-x)^{1/2} - \frac{1}{2}u_{\eta}(-x)^{-1/2} +$$

$$+xu_{\xi\xi} + 2xu_{\xi\eta} + xu_{\eta\eta} = 0,$$

$$4xu_{\xi\eta} + \frac{1}{2}u_{\xi}(-x)^{1/2} - \frac{1}{2}u_{\eta}(-x)^{-1/2} = 0,$$

$$u_{\xi\eta} - \frac{1}{8(-x)^{3/2}}\left(u_{\xi} - u_{\eta}\right) = 0. \qquad (П1.3)$$

З (П1.2) маємо

$$\xi - \eta = \frac{4}{3}(-x)^{3/2} \Rightarrow (-x)^{3/2} = \frac{3}{4}(\xi - \eta). \qquad (П1.4)$$

Провівши заміну в (П1.3) згідно (П1.4), отримаємо

$$u_{\xi\eta} - \frac{1}{6(\xi - \eta)}\left(u_{\xi} - u_{\eta}\right) = 0.$$

2) $D < 0 \Rightarrow -x < 0 \Rightarrow x > 0 \Rightarrow$ рівняння (П1.1) – це рівняння еліптичного типу. Характеристичне рівняння має вигляд

$$(dy)^2 + x(dx)^2 = 0,$$

$$\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 + x = 0,$$

$$\frac{dy}{dx} - i\sqrt{x} = 0 \text{ або } \frac{dy}{dx} + i\sqrt{x} = 0,$$

$$y + {}^{2}\!/_{3}\, ix^{3/2} = const, \; y - {}^{2}\!/_{3}\, ix^{3/2} = const.$$

В рівнянні (П1.1) проводимо заміну змінних

$$\alpha = \frac{\phi + \phi^*}{2}, \; \beta = \frac{\phi - \phi^*}{2i},$$

де

$$\phi = y + \frac{2}{3}ix^{3/2}, \phi^* = y - \frac{2}{3}ix^{3/2}.$$

Тоді

$$\alpha = y, \; \beta = \frac{2}{3}x^{3/2};$$

$$u_{xx}=u_{\alpha\alpha}\cdot 0+2u_{\alpha\beta}\cdot 0+u_{\beta\beta}\left(x^{1/2}\right)^2+u_{\alpha}\cdot 0+u_{\beta}\frac{1}{2}x^{-1/2}=xu_{\beta\beta}+\frac{1}{2}u_{\beta}x^{-1/2};$$

$$u_{yy}=u_{\alpha\alpha}.$$

З (П1.1) отримаємо

$$u_{\beta\beta}+\frac{1}{2}u_{\beta}x^{-1/2}+xu_{\alpha\alpha}=0,$$

$$u_{\alpha\alpha}+u_{\beta\beta}+\frac{1}{2x^{3/2}}u_{\beta}=0. \qquad (\text{П}1.5)$$

Оскільки $x^{3/2}=\frac{3}{2}\beta$, то $u_{\alpha\alpha}+u_{\beta\beta}+\frac{1}{3\beta}u_{\beta}=0$.

3) $D=0\Rightarrow x=0$ і рівняння (П1.1) вироджується в рівняння $u_{xx}=0$.

Відповідь:

1) x<0:

$$u_{\xi\eta}-\frac{1}{6(\xi-\eta)}\left(u_{\xi}-u_{\eta}\right)=0,\ \xi=y+2/3(-x)^{3/2},\ \eta=y+2/3(-x)^{3/2}.$$

2) x>0:

$$u_{\alpha\alpha}+u_{\beta\beta}+\frac{1}{3\beta^{3/2}}u_{\beta}=0,\ \alpha=y,\ \beta=\frac{2}{3}x^{3/2}.$$

Рівняння (П1.1) носить назву ***рівняння Чаплигіна-Трікомі***.

Завдання для самостійної роботи

Задача 1. Дослідити тип рівняння.

1. $\left(1+x^2\right)u_{xx}+\left(1+y^2\right)u_{yy}+xu_x+yu_y=0$;
2. $x^2u_{xx}+2xyu_{xy}-3y^2u_{yy}-2xu_x+4yu_y+16x^4u=0$;
3. $y^2u_{xx}-e^{2x}u_{yy}-4y^2u_x=0$;
4. $x^2u_{xx}+2xyu_{xy}+y^2u_{yy}=0$;
5. $y^2u_{xx}+2xyu_{xy}+x^2u_{yy}=0$;

6. $x^2u_{xx}-y^2u_{yy}=0$;

7. $y^2u_{xx}-x^2u_{yy}=0$;

8. $u_{xx}sign(y)+2u_{xy}-u_{yy}sign(x)=0$;

9. $u_{xx}+2u_{xy}-(1-sign(x))u_{yy}=0$;

10. $u_{xx}sign(y)+2u_{xy}-u_{yy}=0$;

11. $u_{xx}+xyu_{yy}=0$;

12. $yu_{xx}+xu_{yy}=0$;

13. $xu_{xx}+yu_{yy}=0$;

14. $xu_{xx}+yu_{yy}-2u_x+2u_y=0$;

15. $e^{2x}u_{xx}+2e^{x+y}u_{xy}+e^{2y}u_{yy}-xu=0$;

16. $u_{xx}-\left(1+y^2\right)^2u_{yy}-2y\left(1+y^2\right)u_y=0$;

17. $u_{xx}+2\sin x\cdot u_{xy}-\left(\cos^2 x-\sin^2 x\right)u_{yy}+\cos x\cdot u_y=0$;

18. $u_{xx}-2\sin x\cdot u_{xy}-\cos^2 x\cdot u_{yy}-3\cos x\cdot u_y=0$;

19. $2xu_{xx}-yu_{xy}-6xu_{yy}-e^xu_y=0$;

20. $xu_{xx}-|y|u_{xy}-6u_{yy}-|x|u_y=0$;

21. $2\sin x\cdot u_{xx}-\cos x\cdot u_{xy}-6\cos x\cdot u_{yy}+u_x-12u_y-11u=0$;

22. $2(x+y)u_{xx}-3xu_{xy}-4xu_{yy}+8u_x+2u_y-u=0$;

23. $(x+y)u_{xx}-xu_{xy}-2xu_{yy}-u_x+u=0$;

24. $3u_{xx}-3xu_{xy}-xu_{yy}+8u_x+2u_y-u=0$;

25. $(x+y)u_{xx}-(3x-y)u_{xy}-(y+4)u_{yy}-8u_x-3u_y+5u=0$;

26. $(2x-y)u_{xx}-(3x-y)u_{xy}-5xu_{yy}-8u_x+2u_y-u=0$;

27. $4\sin(x+y)u_{xx}-5\cos(x+y)u_{xy}+2\cos(x+y)u_{yy}=0$;

28. $\sin yu_{xx}-5\cos yu_{xy}+4\cos yu_{yy}+4u_x-2u_y-7u=0$;

29. $ch(y)u_{xx}-sh(x)u_{yy}-3u_x=0$;

30. $sh(y)u_{xx}-ch(x)u_{yy}-3u_y=0$.

Приклад 2. Звести наступне диференціальне рівняння з частинними похідними до канонічного вигляду

$$2u_{xx}+2u_{xy}+u_{yy}+4u_x+4u_y+u=0. \qquad (\text{П}2.1)$$

Розв'язання. Тут $D=a_{12}^2-a_{11}\cdot a_{22}=-1<0$, $a_{11}=2, a_{12}=1, a_{22}=1$. Отже, рівняння (П2.1) – це рівняння еліптичного типу. Характеристичне рівняння має наступний вигляд:

$$2(dy)^2-2dxdy+(dx)^2=0,$$

$$2\left(\frac{dy}{dx}\right)^2-2\frac{dy}{dx}+1=0,$$

$$\frac{dy}{dx}=\frac{1\pm\sqrt{D}}{2}.$$

Отже, $\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{1+i}{2}$ або $\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{1-i}{2}$.

Розв'язавши вищевказані звичайні диференціальні рівняння, отримаємо рівняння першої характеристики

$$2y-(1+i)x=const,$$

та рівняння другої характеристики

$$2y-(1-i)x=const.$$

Щоб отримати рівняння з дійсними коефіцієнтами проведемо наступну заміну змінних

$$\alpha=\frac{\phi+\bar{\phi}}{2},\ \beta=\frac{\phi-\bar{\phi}}{2},$$

де $\phi=2y-(1+i)x$, $\bar{\phi}=2y-(1-i)x$. Тоді

$$\alpha=2y-x,\quad \beta=-x.$$

Проводимо заміну похідних:

$$u_x=u_\alpha\alpha_x+u_\beta\beta_x=-u_\alpha-u_\beta;$$

$$u_y=u_\alpha\alpha_y+u_\beta\beta_y=2u_\alpha;$$

$$u_{xx}=u_{\alpha\alpha}\alpha_x^2+2u_{\alpha\beta}\alpha_x\beta_x+u_{\beta\beta}\beta_x^2+u_\alpha\alpha_{xx}+u_\beta\beta_{xx}=u_{aa}+2u_{a\beta}+u_{\beta\beta};$$

$$u_{yy}=u_{\alpha\alpha}\alpha_y^2+2u_{\alpha\beta}\alpha_y\beta_y+u_{\beta\beta}\beta_y^2+u_\alpha\alpha_{yy}+u_\beta\beta_{yy}=u_{aa};$$

$$u_{xy}=u_{\alpha\alpha}\alpha_x\alpha_y+(\alpha_x\beta_y+\beta_x\alpha_y)u_{\alpha\beta}+u_{\beta\beta}\beta_x\beta_y+u_a a_{xy}+u_\beta\beta_{xy}=$$

$$=-2u_{aa}-2u_{a\beta}.$$

Підставивши знайдені похідні в (П2.1), отримаємо:

$$2(u_{\alpha\alpha}+2u_{\alpha\beta}+u_{\beta\beta})-2(-2u_{\alpha\alpha}-2u_{\alpha\beta})-4u_{\alpha\alpha}+4(-u_a-u_\beta)+8u_\beta+u=0,$$

$$2u_{\alpha\alpha}+2u_{\beta\beta}+4u_\alpha-4u_\beta+u=0,$$

$$u_{\alpha\alpha}+u_{\beta\beta}+2u_\alpha-2u_\beta+\frac{1}{2}u=0. \qquad (П2.2)$$

Для подальшого спрощення введемо заміну

$$u(\alpha,\beta)=v(\alpha,\beta)e^{\lambda\alpha+\mu\beta},$$

де $v(\alpha,\beta)$ - нова невідома функція;

λ, μ - сталі, які потрібно знайти.

Тоді

$$u_\alpha=(v_\alpha+\lambda v)e^{\lambda\alpha+\mu\beta};$$

$$u_\beta=(v_\beta+\mu v)e^{\lambda\alpha+\mu\beta};$$

$$u_{\alpha\alpha}=(v_{\alpha\alpha}+2\lambda v_\alpha+\lambda^2v)e^{\lambda\alpha+\mu\beta};$$

$$u_{\beta\beta}=(v_{\beta\beta}+2\mu v_{\beta\beta}+\mu^2v)e^{\lambda\alpha+\mu\beta}.$$

Проводячи заміну, з рівняння (П2.2) дістанемо

$$v_{\alpha\alpha}+v_{\beta\beta}+(2\lambda+2)v_\alpha+(2\mu+2)v_\beta+(\lambda^2+\mu^2+2\lambda-2\mu+\frac{1}{2})v=0. \qquad (П2.3)$$

Виберемо λ та μ з умови рівності нулю коефіцієнтів при v_x та v_y. Маємо

$$\begin{cases}2\lambda+2=0,\\2\mu-2=0;\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}\lambda=-1,\\\mu=1.\end{cases}$$

При знайдених λ та μ з (П2.3) отримаємо

$$v_{\alpha\alpha}+v_{\beta\beta}-\frac{3}{2}v=0.$$

<u>Відповідь:</u> $v_{\alpha\alpha}+v_{\beta\beta}-\frac{3}{2}v=0$,

де $u(\alpha,\beta)=v(\alpha,\beta)e^{-\alpha+\beta}$, $\alpha=2y-x$, $\beta=-x$.

Завдання для самостійної роботи

Задача 2. Звести рівняння до канонічного виду та спростити його.

1. $u_{xx} - 4u_{xy} + 5u_{yy} - 3u_x + u_y + u = 0$;
2. $2u_{xy} - 4u_{yy} + u_x - u_y + u + x = 0$;
3. $u_{xy} + 2u_{yy} - u_x + 4u_y + u = 0$;
4. $2u_{xx} + 2u_{xy} + u_{yy} + 4u_x + 4u_y + u = 0$;
5. $u_{xx} + 2u_{xy} + u_{yy} + 3u_x - 5u_y + 4u = 0$;
6. $u_{xx} - u_{xy} + u_{yy} + u_x + u_y - 4u = 0$;
7. $u_{xx} + u_{xy} - u_y - 10u + x = 0$;
8. $3u_{xx} + u_{xy} + 3u_x + u_y - u + y = 0$;
9. $u_{xx} + 4u_{xy} + 5u_{yy} - 2u_x - 2u_y + u = 0$;
10. $5u_{xx} + 16u_{xy} + 16u_{yy} + 24u_x + 32u_y + 64u = 0$;
11. $u_{xx} - 2u_{xy} + u_{yy} - 3u_x + 12u_y + 27u = 0$;
12. $u_{xx} + 4u_{xy} + 13u_{yy} + 3u_x + 24u_y - 9u + 9(x + y) = 0$;
13. $9u_{xx} - 6u_{xy} + u_{yy} + 10u_x - 15u_y - 50u + x - 2y = 0$;
14. $u_{xx} + u_{xy} - 2u_{yy} - 3u_x - 15u_y + 27x = 0$;
15. $2u_{xx} + 3u_{xy} + u_{yy} + 7u_x + 4u_y - 2u = 0$;
16. $u_{xx} - 2u_{xy} + u_{yy} + 9u_x + 9u_y - 9u = 0$;
17. $3u_{xx} - u_{xy} - u_{yy} + 5u_x + u_y - 5u = 0$;
18. $2u_{xx} + 5u_{xy} + 2u_{yy} - 6u_x + 7u = 0$;
19. $3u_{xx} + 9u_{xy} + 27u_{yy} - 2u_x + 7u_y - 2u = 0$;
20. $2u_{xx} + 6u_{xy} + 17u_{yy} + 5u_x - 2u_y - 7u = 0$;
21. $12u_{xx} - 9u_{xy} + u_{yy} + u_x + 4u_y - 5u = 0$;
22. $u_{xx} + 6(x + 2y)u_{xy} + yu_{yy} + 15u_x + 12u_y - u = 0$;
23. $3xu_{xx} + 6yu_{xy} + 2(x - 3y)u_{yy} + 4u_x + u_y - 21u = 0$;
24. $xu_{xx} + 5yu_{xy} + (3x - 2y)u_{yy} - 2u_x + u_y - 4u = 0$;
25. $3xu_{xx} + 6yu_{xy} + xu_{yy} + 2u_x + 3u_y - 4u = 0$;

26. $2u_{xx} - 5u_{xy} + 6u_{yy} + 4u_x - 3u_y - 15u = 0$;

27. $11u_{xx} - 7u_{xy} + 7u_{yy} + u_x - 8u_y + 5u = 0$;

28. $7xu_{xy} + 3u_{yy} - 11u_x + 2u_y - 3u = 0$;

29. $u_{xx} + 7u_{xy} + 9u_x - u_y - u = 0$;

30. $u_{xx} + u_{xy} + u_{yy} + 3u_x + 5u = 0$.

РОЗДІЛ 2. ВИВЕДЕННЯ РІВНЯНЬ ТА ПОСТАНОВКА КРАЙОВИХ ЗАДАЧ

§2.1. Задача про поперечні коливання струни

Описання процесу коливання струни можна провести за допомогою задання положення точок струни в різні моменти часу. Для визначення положення струни в момент часу t достатньо задати положення вектора зміщення $\vec{u}(x,t)$ для будь-якої точки струни x.

Зробимо наступні припущення:

1. Коливання здійснюються в одній площині xOu і вектор зміщення є перпендикулярним до осі Ox в довільний момент часу $t \geq 0$. Тоді процес коливання можна описати однією функцією $u(x,t)$, яка характеризує вертикальне зміщення точок струни.
2. Струна є абсолютно гнучкою, тобто сила натягу $\vec{T}$ значно перевищує силу опору струни $\vec{R}$. Тому надалі вважаємо, що $\left|\vec{R}\right| \approx 0$.
3. Струна абсолютно пружна, тобто виконується закон Гука – сила натягу прямо пропорційна видовженню.
4. Сили опору навколишнього середовища відсутні, а коливання струни малі, тобто $\alpha^2(x,t) \approx 0$, де $\alpha(x,t)$ – гострий кут між дотичною до струни в точці x в момент часу t та віссю Ox (див. рис. 2.1).

Враховуючи припущення $\sin\alpha \approx \alpha$, тоді $\cos\alpha \approx 1$. Звідси $\sin\alpha \approx tg\alpha = \dfrac{\partial u}{\partial x}$ і $tg^2\alpha \approx \sin^2\alpha = \left(\dfrac{\partial u}{\partial x}\right)^2$.

Розглянемо частину струни між точками $M_1(x_1)$ та $M_2(x_2)$ (рис. 1). Тоді $L_{M_1M_2} = \int\limits_{x_1}^{x_2} \sqrt{1 + \left(\dfrac{\partial u}{\partial x}\right)^2}\, dx \approx \int\limits_{x_1}^{x_2} dx = x_2 - x_1$. Отже, довжина струни в процесі коливань не змінюється. Тоді в силу припущень 2–4 сила натягу $\vec{T}$ не залежить від часу.

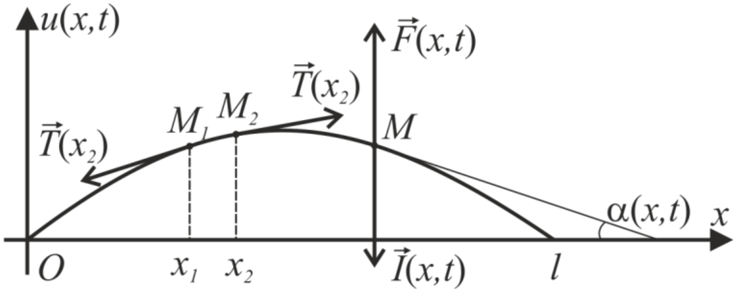

Рис. 1. Коливання струни

Нехай $\vec{F}(x,t)$ – зовнішня сила, паралельна осі Ou, рівномірно розподілена вздовж струни і розрахована на одиницю довжини; $\vec{I}(x,t)$ – сила інерції. Згідно принципу Д'Аламбера сума проекцій всіх сил, що діють на проміжок струни (x_1, x_2), на відповідну координатну вісь, рівна нулю. Маємо

$$np_x\vec{F} = 0,\ np_x\vec{I} = 0,\ np_x\vec{T}(x_1) = -T(x_1)\cos\alpha(x_1,t) \approx -T(x_1),$$

$$np_x\vec{T}(x_2) = T(x_2)\cos\alpha(x_2,t) \approx T(x_2).$$

Отже,

$$T(x_2) - T(x_1) = 0,$$

$$T(x_2) = T(x_1).$$

В силу довільності точок x_1 та x_2 випливає, що $T(x) = T = const$.

Визначимо суму проекцій на вісь Ou всіх сил, які діють на проміжок струни (x_1, x_2). Проекція сили натягу в точці x_2 $np_u\vec{T}(x_2) = T\sin\left(\alpha(x_2,t)\right) = T\left.\dfrac{\partial u}{\partial x}\right|_{x=x_2}$. Аналогічно, в точці x_1 $np_u\vec{T}(x_1) = -T\sin\left(\alpha(x_1,t)\right) = -T\left.\dfrac{\partial u}{\partial x}\right|_{x=x_1}$. Взявши до уваги зовнішні сили $\int\limits_{x_1}^{x_2} F(x,t)dx$, що діють на проміжок (x_1, x_2) та сили інерції $-\int\limits_{x_1}^{x_2} \rho\dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2}dx$, де ρ – лінійна густина струни, маємо

$$\int_{x_1}^{x_2}\left(F(x,t)-\rho\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}\right)dx+T\left.\frac{\partial u}{\partial x}\right|_{x=x_2}-T\left.\frac{\partial u}{\partial x}\right|_{x=x_1}=0\,,$$

$$\int_{x_1}^{x_2}\left(F(x,t)-\rho\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}\right)dx+\int_{x_1}^{x_2}T\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)dx=0\,,$$

$$\int_{x_1}^{x_2}\left(F(x,t)-\rho\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}+T\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right)dx=0\,.$$

В силу довільності точок x_1 та x_2 з останньої рівності дістанемо

$$u_{tt}=a^2u_{xx}+f(x,t)\,, \tag{2.1}$$

де $a^2=\dfrac{T}{\rho}$; $f(x,t)=\dfrac{F(x,t)}{\rho}$ – інтенсивність зовнішніх сил.

Поперечні коливання мембрани, яка в площині xOy займає область D, описуються рівнянням

$$u_{tt}=a^2(u_{xx}+u_{yy})+f(x,y,t)\,, \tag{2.2}$$

де функція $u(x,y,t)$ характеризує положення точок мембрани в різні моменти часу t. У випадку тривимірного простору рівняння набуває вигляду

$$u_{tt}=a^2(u_{xx}+u_{yy}+u_{zz})+f(x,y,z,t) \tag{2.3}$$

Для зручності та компактності запису рівнянь у математичній фізиці часто застосовується оператор Лапласа ∇^2, що визначається як сума других частинних похідних по кожній декатровій координаті. Так у тривимірному випадку оператор Лапласа буде мати вигляд

$$\nabla^2=\frac{\partial^2}{\partial x^2}+\frac{\partial^2}{\partial y^2}+\frac{\partial^2}{\partial z^2}\,.$$

З його допомогою хвильове рівняння можна записати

$$u_{tt}=a^2\nabla^2 u+f(x,y,z,t)\,. \tag{2.4}$$

Рівняння (2.1) – (2.4) є рівняннями гіперболічного типу. Інші коливні процеси, наприклад, коливання газу, електромагнітні коливання, звукові хвилі, тощо, також описуються рівняннями гіперболічного типу [2, 3, 5 – 7, 9, 14 – 18]. Тому інколи їх називають хвильовими рівняннями.

§ 2.2. Задача теплопровідності металевого стержня

Розглянемо металевий стержень, бічна поверхня якого теплоізольована (рис. 2.). Теплоізольованість бічної поверхні стержня означає, що через його поверхню не відбувається теплообміну з навколишнім середовищем. Якщо цей стержень у початковому стані нерівномірно нагрітий, то завдяки теплопровідності в ньому буде відбуватися передача тепла від більш нагрітих частин до менш нагрітих.

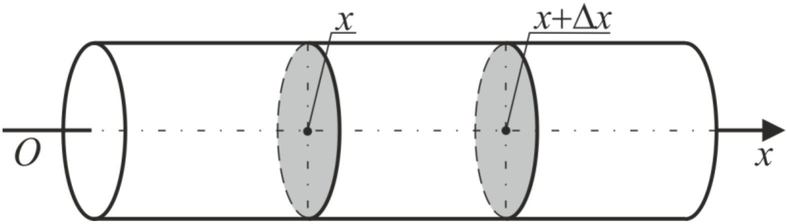

Рис. 2. Металевий стержень

У задачі лінійної теплопровідності стержень передбачається настільки тонким, що в будь-який момент часу температура всіх точок деякого поперечного перерізу стержня (рис. 2.2) буде однаковою. Якщо прийняти вісь стержня за вісь абсцис, то температура u буде функцією координати x та часу t. При постійному t функція $u(x,t)$ являє собою залежність температури точок стержня в даний момент часу від їхньої відстані до початку координат. Частинна похідна $(-\dfrac{\partial u}{\partial x})$ виражає при цьому швидкість зміни температури в напрямку осі *Ox*. Якщо зафіксувати абсцису x, то $u(x,t)$ виражає закон зміни температури у даному перерізі стержня з часом.

При виведенні рівняння теплопровідності будемо враховувати:

1) кількість тепла, яке необхідно передати однорідному тілу, щоб підвищити його температуру на Δu, дорівнює

$$\Delta Q = c\rho V \Delta u , \tag{2.5}$$

де V – об'єм тіла, ρ – його густина, c – питома теплоємність;

2) кількість тепла, що протікає через поперечний переріз стержня за час Δt ***(тепловий потік)***, пропорційна площі поперечного перерізу, швидкості зміни температури в напрямку, перпендикулярному до перерізу, і величині проміжку часу Δt, тобто

$$\Delta Q = -kS\frac{\partial u}{\partial x}\Delta t, \qquad (2.6)$$

де S - площа поперечного перерізу, k - коефіцієнт теплопровідності.

Знак мінус у формулі (2.6) пояснюється тим, що величину теплового потоку ми будемо вважати додатною, якщо тепло йде у бік зростання *x.* Якщо $\frac{\partial u}{\partial x} > 0,$ то це означає, що зі зростанням x температура підвищується, а оскільки тепло переходить від більш нагрітих ділянок до менш нагрітих, то тепловий потік буде спрямований у бік зменшення *x,* тобто його величина буде від'ємною. Будемо вважати коефіцієнт теплопровідності постійним. Це припущення справджується, якщо стержень однорідний і температура змінюється в невеликих межах.

Виділимо ділянку стержня, обмежену поперечними перерізами з абсцисами x та $x+\Delta x$ (рис. 2.2) і складемо для неї рівняння ***теплового балансу***.

Із означення частинної похідної $\Delta u = \frac{\partial u}{\partial x}\Delta x + \alpha\left(\Delta x\right)\Delta x$, де $\alpha\left(\Delta x\right)$ – нескінчено мала більшого порядку малості ніж Δx. Якщо знехтувани цією нескінчено малою величиною, то матимемо

$$u\left(x+\Delta x,t\right) = u\left(x,t\right) + \frac{\partial u}{\partial x}\Delta x .$$

Продифиринціювавши останню рівність по змінній x отримаємо

$$\frac{\partial u(x+\Delta x,t)}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x}\left(u(x,t) + \frac{\partial u}{\partial x}\Delta x\right) = \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\Delta x .$$

На основі співвідношення (2.6), величина теплового потоку, що поступає у виділену ділянку стержня через переріз із абсцисою x $\Delta Q_1 = -kS\frac{\partial u}{\partial x}\Delta t$. Аналогічно величина теплового потоку, що виходить із виділеної ділянки через переріз з абсцисою $x+\Delta x$ дорівнює $\Delta Q_2 = -kS(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\Delta x)\Delta t.$ Знайшовши різницю величин вхідного і вихідного теплового потоків, ми одержимо кількість тепла $\Delta Q,$ яку отримала ділянка стержня за час Δt

$$\Delta Q = \Delta Q_1 - \Delta Q_2 = -kS\frac{\partial u}{\partial x}\Delta t + kS(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\Delta x)\Delta t = kS\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\Delta x\Delta t.$$

З іншого боку, за цей же проміжок часу температура змінилася на величину $\Delta u = \frac{\partial u}{\partial t}\Delta t$. Оскільки об'єм виділеної ділянки стержня $V = S\Delta x$, то за формулою (2.5), отримана кількість тепла дорівнює

$$\Delta Q = c\rho S\Delta x\frac{\partial u}{\partial t}\Delta t .$$

Прирівнюючи отримані вирази для ΔQ матимемо:

$$c\rho\frac{\partial u}{\partial t} = k\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} . \tag{2.7}$$

Позначивши $\frac{k}{c\rho} = a^2$, з (2.7) дістанемо основне рівняння розповсюдження тепла в однорідному стержні без теплових джерел

$$\frac{\partial u}{\partial t} = a^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \tag{2.8}$$

Сталу $a = \sqrt{\frac{k}{c\rho}}$ називають ***коефіцієнтом температуропровідності***.

Припустимо, що в деяких ділянках стержня може виділятись або поглинатися тепло. Виділення та поглинання тепла зручно характеризувати за допомогою інтенсивності теплових джерел $F(x,t)$, функції, що чисельно рівна відношенню кількості тепла яка виділяється чи поглинається нескінченомалою ділянкою стержня ($x, x+\Delta x$) за проміжок часу Δt до об'єму ділянки стержня та часу Δt

$$F(x,t) = \frac{\Delta Q}{V\Delta t} \tag{2.9}$$

Якщо $F(x,t) < 0$, то тепло поглинається на ділянці, якщо ж $F(x,t) > 0$, то тепло виділяється.

Тому при складанні рівняння теплового балансу (2.7) потрібно врахувати тепло, що виділяється розглянутою ділянкою назовні, або ж навпаки, приходить у стержень із навколишнього середовища. Для цього додамо до правої частини рівняння (2.7) величину, обумовлену появию теплових джерел (2.9) і розділену на $S\Delta x\Delta t$. Отримаємо

$$c\rho\frac{\partial u}{\partial t}=k\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+F(x,t\ ).$$

Розділивши обидві частини отриманої рівності на $c\rho$ і ввівши позначення $\frac{1}{c\rho}F(x,t)=f(x,t),$ прийдемо до рівняння

$$\frac{\partial u}{\partial t}=a^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+f(x,t). \qquad (2.10)$$

Для випадків дво та три вимірного простору останнє рівняння набуває наступного вигляду

$$\frac{\partial u}{\partial t}=a^2\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right)+f\left(x,y,t\right)$$

$$u_t\left(x,y,z,t\right)=a^2\nabla^2 u\left(x,y,z,t\right)+f\left(x,y,z,t\right)$$

Рівняння (2.8) є лінійним однорідним, а (2.10) – неоднорідним рівнянням параболічного типу. Фізичні задачі, пов’язані з розповсюдженням тепла та дифузією розчинених речовин як правило приводять до рівнянь параболічного типу.

Якщо ж припустити, що процес розподілу тепла не залежить від часу, тобто $u=u(x,y,z)$, а інтенсивність внутрішніх джерел тепла f теж не залежить від часу, то ми отримуємо рівняння еліптичного типу

$$\nabla^2 u=f_1(x,y,z),$$

де $f_1(x,y,z)=-\frac{f(x,y,z)}{a^2}$.

§2.3. Поняття крайових задач, їх класифікація та постановка

Оскільки ДРЧП має нескінченну кількість розв'язків то, для однозначної характеристики фізичного процесу, до ДРЧП потрібно приєднати деякі додаткові умови, які називаються ***крайовими***. Крайові ж умови поділяються на ***початкові,*** що характеризують початковий стан процесу та ***граничні,*** що задаються на межі області визначення функції розв'язку ДРЧП.

Виділяють наступні типи граничних умов:

- $u\big|_S = \mu(x,y,z,t), (x,y,z) \in S$ – гранична умова першого роду;
- $\left.\dfrac{\partial u}{\partial n}\right|_S = \nu(x,y,z,t), (x,y,z) \in S$ – гранична умова другого роду;
- $\left.\left(\dfrac{\partial u}{\partial n} + h(x,y,z,t)u\right)\right|_S = \beta(x,y,z,t), (x,y,z) \in S$ – гранична умова третього роду).

Тут S – межа області визначення функції розв'язку рівняння, $\mu(x,y,z,t)$, $\nu(x,y,z,t)$, $h(x,y,z,t)$ та $\beta(x,y,z,t)$ – відомі функції; $\dfrac{\partial}{\partial n} = \dfrac{\partial}{\partial x}\cdot n^{(x)} + \dfrac{\partial}{\partial y}\cdot n^{(y)} + \dfrac{\partial}{\partial z}\cdot n^{(z)}$ – оператор похідної по зовнішній нормалі межі S; $n^{(x)}$, $n^{(y)}$, $n^{(z)}$ – складові вектора напрямних косинусів зовнішньої нормалі межі S.

Сукупність диференціального рівняння з частинними похідними та крайових умов становить математичне формулювання фізичної задачі і називається ***крайовою задачею математичної фізики.***

ДРЧП, в яких шукана функція не залежить від часу називаються ***стаціонарними***. Але досить багато рівнянь математичної фізики описують процеси, що залежать від часу. Такі рівняння називаються ***нестаціонарними***.

Зрозуміло, що для стаціонарних ДРЧП крайові умови складаються лише з граничних умов, адже початкові умови для таких рівнянь втрачають зміст. Задачу відшукання розв'язку нестаціонарних ДРЧП у всьому просторі із заданими початковими умовами називають ***задачею Коші***. Якщо ж розв'язок нестаціонарного ДРЧП шукається не у всьому просторі, а лише у якійсь його області, то окрім початкових потрібно задавати також граничні умови. В такому випадку крайову задачу називають ***мішаною***.

При розв'язуванні крайових задач потрібно впевнитись, що серед крайових умов немає суперечливих. Зоркема для мішаних крайових задач початкові та граничні умови повинні узгоджуватись. Тобто, на межі області розв'язку задачі початкові умови мають дорівнювати граничним умовам, обчисленим в початковий момент часу.

Для забезпечення єдиності розв'язку рівнянь гіперболічного та параболічного типу потрібно задати початкові та граничні умови для шуканої функції.

Початкові умови для рівнянь гіперболічного типу (2.1) мають вигляд

$$u(x,0)=\phi(x), \quad u_t(x,0)=\psi(x),$$

де $\phi(x)$ та $\psi(x)$ – відомі функції.

Для рівнянь параболічного типу (2.10), на відміну від рівнянь гіперболічного типу, початкова умова полягає лише в задані значень функції в початковий момент часу $t=0$:

$$u(x,0)=\phi(x).$$

Розглянемо постановку граничних умов на при на прикладі коливання скінченної струни в області $0 \le x \le l$.

Якщо кінці струни рухаються за певними законами $\mu_1(t)$, $\mu_2(t)$, тоді на даних кінцях струни для функції $u(x,t)$ задаються граничні умови першого роду

$$u\big|_{x=0}=\mu_1(t), \; u\big|_{x=l}=\mu_2(t).$$

У випадку $\mu_1(t)=\mu_2(t)\equiv 0$ кінці струни є нерухомими.

Якщо задано закон зміни сили, прикладеної до кінців струни, яка діє в напрямку коливань, то для функції $u(x,t)$ задаються граничні умови другого роду

$$\left.\frac{\partial u}{\partial x}\right|_{x=0}=\upsilon_1(t), \quad \left.\frac{\partial u}{\partial x}\right|_{x=l}=\upsilon_2(t).$$

При умові $\upsilon_1(t)=\upsilon_2(t)\equiv 0$, кінці струни здійснюють вільні коливання.

Якщо до кінців струни прикріплені пружини, які рухаються за власними законами $\gamma_1(t)$, $\gamma_2(t)$. Тоді на кінцях струни для функції $u(x,t)$ задаються граничні умови третього роду

$$(\frac{\partial u}{\partial x} - h(u - \gamma_1(t))\big|_{x=0} = 0, \; (\frac{\partial u}{\partial x} + h(u - \gamma_2(t))\big|_{x=l} = 0,$$

де $h = \frac{\alpha}{E}$; E – модуль Юнга; α – коефіцієнт жорсткості.

Рівняння виду

$$\nabla^2 u = f,$$

де f – відома функція називається ***рівнянням Пуассона.***

Рівняння виду

$$\nabla^2 u = 0$$

називається ***рівнянням Лапласа.***

Крайові умови для рівнянь Пуассона та Лапласа включають лише граничні умови. Відповідно до їх типу розрізняють:

- ***першу крайовоу задачу для рівняння еліптичного типу*** або ***задачу Діріхле;***
- ***другу крайову задачу для рівняння еліптичного типу*** або ***задачу Неймана;***
- ***третю крайову задачу для рівняння еліптичного типу***.

Функція $u(x_1, x_2, ..., x_n)$ називається ***гармонічною в обмеженій області*** D, якщо вона двічі неперервно диференційована в цій області по кожній змінній і є розв’язком рівняння Лапласа

РОЗДІЛ 3. АНАЛІТИЧНІ МЕТОДИ РОЗВ'ЯЗАННЯ КРАЙОВИХ ЗАДАЧ МАТЕМАТИЧНОЇ ФІЗИКИ

§ 3.1. Загальна задача Штурма-Ліувілля

Розглянемо на інтервалі $(a;b)$ звичайне диференціальне рівняння другого порядку відносно функції $y(x)$

$$\frac{d}{dx}\left[p(x)\frac{dy}{dx}\right]+\left[\lambda\rho(x)-g(x)\right]y(x)=0, \tag{3.1}$$

де $y(x)$, $p(x)$, $\rho(x)$ та $g(x)$ – достатньо гладкі дійсні функції, при чому $p(x)>0$, $\rho(x)>0$, $g(x)\geq 0$, функція $\rho(x)$ є обмеженою на $[a,b]$, $\lambda = const$.

Сформулюємо для рівняння (3.1) задачу Штурма-Ліувілля: знайти всі числа λ, для яких існують нетривіальні розв'язки рівняння (3.1) $y_\lambda(x)$, які задовольняють граничним умовам

$$\alpha y_\lambda(a)+\beta y'_\lambda(a)=0, \tag{3.2}$$

$$\gamma y_\lambda(b)+\delta y'_\lambda(b)=0, \tag{3.3}$$

де $\alpha,\beta,\gamma,\delta$ – константи, причому $\alpha^2+\beta^2=0$, $\gamma^2+\delta^2=0$.

Числа λ, при яких задача (3.1) – (3.3) має нетривіальні розв'язки називаються ***власними значеннями***, а відповідні їм розв'язки $y_\lambda(x)$ − ***власними функціями***.

Розглянемо деякі властивості вказаних власних значень та власних функцій задачі (3.1) – (3.3).

Теорема 3.1. Якщо функція $y_1(x)$ є власною функцією, яка відповідає власному значенню λ_1, то функція $Cy_1(x)$, де $C\neq 0$ - довільна константа, також буде власною функцією, яка відповідає власному значенню λ_1.

Теорема 3.2. Нехай $y_1(x)$ та $y_2(x)$ є власними функціями задачі (3.1)-(3.3), які відповідають власному значенню λ_1. Тоді будь-яка їх лінійна комбінація

$$C_1y_1(x)+C_2y_2(x),$$

де $C_1,C_2=const$ також буде власною функцією, яка відповідає цьому ж власному значенню λ_1.

Теорема 3.3. Якщо $y_1(x),\quad y_2(x)$ є власними функціями задачі (3.1) – (3.3), які відповідають різним власним значенням $\lambda_1 \neq \lambda_2$, то вони ортогональні на відрізку $[a;b]$ з вагою $\rho(x)$, тобто,

$$\int_a^b \rho(x) y_1(x) y_2(x) dx = 0. \tag{3.4}$$

Теорема 3.4. Всі власні значення задачі (3.1) – (3.3) дійсні.

Теорема 3.5. Якщо $g(x) \geq 0$, то всі власні значення задачі (3.1) –(3.3) невід'ємні.

Розглянемо частковий випадок задачі (3.1) –(3.3). Вибравши $p(x) \equiv 1$, $g(x) \equiv 0$, $\rho(x) \equiv 0$, $a = 0$, $b = l$ будемо мати

$$y''(x) + \lambda y(x) = 0,\, y\left(x\right) \neq 0. \tag{3.5}$$

$$y(0) = 0,\, y(l) = 0. \tag{3.6}$$

Виходячи із властивості 3.5, власні числа задачі (3.5), (3.6) – невід'ємні, тобто $\lambda > 0$. Характеристичне рівняння для лінійного диференціального рівняння зі сталими коефіцієнтами (3.5)

$$k^2 + \lambda = 0$$

в даному випадку має два комплексно спряжені корені

$$k_1 = i\sqrt{\lambda}, k_2 = -i\sqrt{\lambda}.$$

Тоді розв'язок рівняння (3.5) має вигляд

$$y(x) = C_1 \cos\sqrt{\lambda}x + C_2 \sin\sqrt{\lambda}x.$$

З (3.6) маємо

$$\begin{cases} C_1 = 0, \\ C_1 \cos\sqrt{\lambda}l + C_2 \sin\sqrt{\lambda}l = 0. \end{cases}$$

Тобто, $C_2 \sin\sqrt{\lambda}l = 0$. Оскільки ми вимагаємо, щоб $C_2 \neq 0$, то остання рівність можлива лише у випадку

$$\sin\sqrt{\lambda}l = 0,$$

$$\sqrt{\lambda}l = \pi n, n \in Z,$$

$$\lambda = \lambda_n = \left(\frac{\pi n}{l}\right)^2, n = 1,2,3,... \tag{3.7}$$

Знайденим власним значенням λ_n відповідають власні функції

$$y_n(x) = C \cdot \sin \frac{\pi n}{l} x \, , C = const \, . \tag{3.8}$$

Легко можна одержати інші розв’язки задачі Штурма-Ліувілля для рівняння (3.5) та граничних умов:

- $y'(0) = 0 \, , y(l) = 0 \; - \; \lambda_n = \left(\frac{(2n+1)\pi}{2l} \right)^2 \, , \; y_n(x) = C \cdot \cos \frac{(2n+1)\pi}{2l} x \, ,$

  $C = const, \; n = 0,1,2,... \; .$

- $y(0) = 0 \, , y'(l) = 0 \; - \; \lambda_n = \left(\frac{(2n+1)\pi}{2l} \right)^2 \, , \; y_n(x) = C \cdot \sin \frac{(2n+1)\pi}{2l} x \, ,$

  $C = const, \; n = 0,1,2,... \; .$

- $y'(0) = 0 \, , y'(l) = 0 \; - \; \lambda_n = \left(\frac{\pi n}{l} \right)^2 \, , \; y_n(x) = C \cdot \cos \frac{\pi n}{l} x \, ,$

  $C = const, \; n = 0,1,2,... \; .$

Рівняння (3.1) називають загальним рівнянням теорії спеціальних функцій. Спеціальні функції – це розв’язки задачі Штурма–Ліувілля для деяких часткових випадків рівняння (3.1). Розглянемо деякі з них.

1) $p(x) \equiv x, g(x) \equiv \frac{n^2}{x}, \quad \rho(x) \equiv x, \quad a = 0, \quad b = l.$

Рівняння (3.1) в даному випадку набуває вигляду

$$\frac{d}{dx}\left(x \frac{dy}{dx} \right) + \left(\lambda x - \frac{n^2}{x} \right) y = 0, \quad 0 < x < l. \tag{3.9}$$

Також будемо вимагати виконання граничних умов, а саме:

$$y(l) = 0 \text{ та } y(x) \text{ – обмежена при } x \to +0 \tag{3.10}$$

Введемо заміну змінних $t = \sqrt{\lambda} x$. Тоді з (3.9) матимемо

$$\sqrt{\lambda} \frac{d}{dt}\left(\frac{t}{\sqrt{\lambda}} \sqrt{\lambda} \frac{dy}{dt} \right) + \left(\sqrt{\lambda} t - \frac{n^2 \sqrt{\lambda}}{t} \right) y = 0,$$

$$\frac{d}{dt}\left(t \frac{dy}{dt} \right) + \left(t - \frac{n^2}{t} \right) y = 0, \quad 0 < t < \sqrt{\lambda} l. \tag{3.11}$$

Рівняння (3.11) називається рівнянням Бесселя порядку n. Його розв‘язком при виконанні першої з умов (3.10) є функції Бесселя першого роду (див., наприклад, [1, 9, 12, 18]), які для $n \in N$ та $n = 0$ визначаються за формулою

$$J_n(t) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k!(k+n)!} \left(\frac{t}{2}\right)^{2k+n}.$$

Повертаючись до заміни $t = \sqrt{\lambda} x$ і використовуючи другу з граничних умов (3.10), матимемо

$$J_n\left(\sqrt{\lambda} l\right) = 0,$$

або

$$J_n(\mu) = 0,$$

де $\mu = \sqrt{\lambda} l > 0$. Якщо $\mu_k^{(n)}$ - k-й додатний корінь вищенаведеного рівняння, то

$$\lambda_k = \left(\frac{\mu_k^{(n)}}{l}\right)^2, \quad y_k(x) = J_n\left(\frac{\mu_k^{(n)}}{l} x\right), \; k = 1, 2, 3...$$

будуть відповідно власними числами та власними функціями задачі Штурма-Ліувілля (3.9), (3.10).

2) $p(x) \equiv 1 - x^2, \quad \rho(x) \equiv 1, \quad g(x) \equiv 0, \quad a = -1, \quad b = 1.$

При цьому рівняння (3.1) набуває вигляду

$$\frac{d}{dx}\left[\left(1 - x^2\right)\frac{dy}{dx}\right] + \lambda y = 0, \; -1 < x < 1. \qquad (3.12)$$

При умові обмеженості $y(x)$ на межі області визначення, власні значення та власні функції задачі Штурма-Ліувілля маютимуть вигляд:

$$\lambda_k = k(k+1), \; y_k(x) = P_k(x), \; k = 0, 1, 2...$$

де $P_k(x)$ – многочлени Лежандра, які визначаються за формулою $P_k(x) = \frac{d^k}{2^k k! dx^k}(x^2 - 1)^k, \quad k > 0, \; P_0(x) \equiv 1$. Рівняння (3.12) називають рівнянням Лежандра нульового порядку.

3) $p(x) \equiv 1 - x^2, \quad \rho(x) \equiv 1, \quad g(x) \equiv \frac{m^2}{1 - x^2}$ ($m \geq 0$ – ціле), $a = -1, \quad b = 1$.

При цьому рівняння (3.1) набуває вигляду

$$\frac{d}{dx}\left[(1 - x)^2 \frac{dy}{dx}\right] + \left(\lambda - \frac{m^2}{1 - x^2}\right) y = 0, \; -1 < x < 1. \qquad (3.13)$$

При умові обмеженості $y(x)$ на межі області визначення, власні значення та власні функції задачі Штурма-Ліувілля маютимуть вигляд:

$$\lambda_k = k(k+1), \quad y_k(x) = P_k^{(m)}(x), \quad k = m, m+1, m+2, \ldots,$$

де $P_k^{(m)}(x)$ – приєднані функції Лежандра, які визначаються наступним чином:

$$\begin{cases} P_k^{(m)}(x) = (1-x^2)^{\frac{m}{2}} \dfrac{d^m P_k(x)}{dx^m}, \quad m > 0, \quad k \geq m, \\ P_k^{(0)}(x) = P_k(x), \quad m = 0, \quad k \geq 0. \end{cases}$$

Рівняння (3.13) називають рівнянням Лежандра порядку m.

§ 3.2. Метод Фур'є

Позначимо через $P_t[u]$ диференціальний оператор m–го порядку виду

$$P_t[u] = \sum_{i=0}^{m} a_i(t) \frac{d^i}{dt^i},$$

де $a_i(t)$, $i = \overline{0,m}$ – відомі неперервні функції.

Розглянемо мішану крайову задачу: знайти розв'язок $u(x,t)$ рівняння

$$\rho(x) P_t[u] = \frac{\partial}{\partial x}\left[p(x) \frac{\partial u}{\partial x} \right] - g(x)u, \; 0 < x < l, \; t > 0, \tag{3.14}$$

що задовольняє однорідним граничним

$$\left[\alpha_1 \frac{\partial u}{\partial x} + \beta_1 u(x,t) \right]\Bigg|_{x=0} = 0, \; \left[\alpha_2 \frac{\partial u}{\partial x} + \beta_2 u(x,t) \right]\Bigg|_{x=l} = 0 \tag{3.15}$$

та початковим умовам

$$\left. \frac{\partial^i u}{\partial t^i} \right|_{t=0} = \varphi_i(x), \; i = \overline{0,m}. \tag{3.16}$$

Функції $p(x)$, $\rho(x)$, та $g(x)$ – відомі, неперервні на $[0,l]$ функції, при чому $p(x) > 0$, $\rho(x) > 0$, а $p(x)$ – має неперервну на $[0,l]$ похідну.

Очевидно, що таких обмеженнях накладених на функції $p(x)$, $\rho(x)$, $g(x)$ та при порядку ДРЧП (3.14) $m=2$ його тип залежить від знаку функції, $t>0$:

- якщо $a_2(t)>0$, то отримаємо рівняння гіперболічного типу;
- якщо $a_2(t)=0$ – параболічного типу;
- якщо $a_2(t)<0$ – еліптичного типу.

Розв'язати задачу (3.14) – (3.16) можна за допомогою методу Фур'є. Нетривіальні розв'язки будемо шукати у вигляді добутку двох невідомих функцій

$$u(x,t)=X(x)T(t). \tag{3.17}$$

Підставивши останню рівність у (3.14) та відокремивши змінні будемо мати

$$\frac{P_t[T]}{T(t)}=\frac{\frac{d}{dx}\left[p(x)\frac{dX}{dx}\right]-g(x)X(x)}{\rho(x)X(x)}. \tag{3.18}$$

Оскільки ліва частина одержаного рівняння не залежить від x, а права – від t, то рівність при довільних x та t можлива лише при рівності обох частин (3.18) деякій сталій величині $-\lambda$ (знак «мінус» вибрано для зручності подальших записів). Отже рівняння (3.18) розпадається на два

$$P_t[T]+\lambda T(t)=0, \tag{3.19}$$

$$\frac{d}{dx}\left[p(x)\frac{dX}{dx}\right]+\left(\lambda\rho(x)-g(x)\right)X(x)=0. \tag{3.20}$$

Після підстановки рівності (3.17) у граничні умови (3.15) отримаємо:

$$\alpha_1 X'(0)+\beta_1 X(0)=0,\ \alpha_2 X'(0)+\beta_2 X(0)=0 \tag{3.21}$$

Отже для мішаної крайової задачі (3.14) – (3.16) побудовано задачу Штурма-Ліувілля (3.20), (3.21), розв'язавши яку отримаємо набір власних значень λ_n та відповідних їм власних функцій $X_n(x)$, $n=0,1,2...$

Далі для кожного значення λ_n знаходимо загальний розв'язок лінійного однорідного рівняння (3.19)

$$T_n(t)=\sum_{i=1}^{m}C_i T_{ni}^{*}(t),$$

де $T_{ni}^{*}(t)$, $i=\overline{1,m}$ – фундаментальна система розв'язків (3.19), а C_i – довільні сталі.
Отже отриманий таким чином ряд

$$u(x,t)=\sum_{n=0}^{\infty}X_n(x)T_n(t)=\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{i=1}^{m}C_iX_n(x)T_{ni}^{*}(t) \tag{3.22}$$

є загальним розв'язком (3.14), що задовольняє граничним умовам (3.15). Сталі C_i, що входять до (3.22), визначають вимагаючи виконання початкових умов (3.16):

$$\left.\frac{\partial^i u}{\partial t^i}\right|_{t=0}=\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{i=1}^{m}C_iX_n(x)\left.\frac{d^iT_{ni}^{*}}{dt^i}\right|_{t=0}=\varphi_i(x),\ i=\overline{0,m}.$$

При цьому задані функції $\varphi_i(x)$ потрібно розкласти в ряд за власними функціями $X_n(x)$:

$$\varphi_i(x)=\sum_{n=0}^{\infty}\alpha_{ni}X_n(x).$$

Остаточно отримуємо рівняння для визначення невідомих сталих C_i:

$$\sum_{i=1}^{m}C_i\left.\frac{d^iT_{ni}^{*}}{dt^i}\right|_{t=0}=\alpha_{ni},\ i=\overline{0,m}.$$

§ 3.3. Мішана крайова задача для однорідного хвильового рівняння із однорідними граничними умовами

Розглянемо мішану крайову задачу

$$u_{tt} = a^2 u_{xx}\,,\ x \in (0,l)\,,\ t > 0\,, \tag{3.23}$$

$$u(x,0) = \phi(x)\,,\quad u_t(x,0) = \psi(x)\,,\ x \in [0,l], \tag{3.24}$$

$$u(0,t) = 0\,,\ u(l,t) = 0\,,\ t \geq 0, \tag{3.25}$$

де $\varphi(x)$, $\psi(x)$ – неперервні із своїми похідними до другого порядку на відрізку $[0,l]$ функції.

Будемо вимагати виконання так званих ***умов узгодженості***

$$\phi(0) = \phi(l) = 0\,,\ \psi(0) = \psi(l) = 0\,,$$

які є однією з необхідних умов існування класичного розв'язку крайової задачі (3.23) – (3.25).

Згідно методу Фур'є, розв'язок шукатимемо у вигляді

$$u(x,t) = X(x)T(t)\,, \tag{3.26}$$

де $X(x)$, $T(t)$ - невідомі функції, які залежать лише від змінної x та змінної t відповідно.

Підставивши (3.26) в (3.23) та розділивши змінні, отримаємо

$$\frac{T''(t)}{a^2 T(t)} = \frac{X''(x)}{X(x)} = -\lambda\,. \tag{3.27}$$

Рівність (3.27) запишемо у вигляді системи двох рівнянь

$$T''(t) + a^2 \lambda T(t) = 0\,, \tag{3.28}$$

$$X''(x) + \lambda X(x) = 0\,, \tag{3.29}$$

З (3.26) та граничних умов (3.24) слідує

$$X(0) = 0\,,\ X(l) = 0\,. \tag{3.30}$$

Отже, щоб знайти $X(x)$ та $T(t)$ потрібно розв'язати рівняння (3.28) та задачу Штурма–Ліувілля (3.29)–(3.30). Її власні значення та функції знайдені у §3.1 та мають вигляд (3.7) – (3.8).

Підставивши $\lambda_n = \left(\frac{\pi n}{l}\right)^2$, $n = 1,2,3,...$, в рівняння (3.28), знайдемо розв'язок даного лінійного диференціального рівняння другого порядку із сталими коефіцієнтами

$$T_n(t) = A_n^* \cos\frac{\pi n}{l}at + B_n^* \sin\frac{\pi n}{l}at\,,$$

де A_n^*, B_n^* – довільні сталі. Оскільки власні функції задачі (3.29) – (3.30) $X_n(x) = C \cdot \sin\frac{\pi n}{l}x, C = const$, то загальний розв'язок (3.23), що задовольняє граничним умовам (3.24), матиме вигляд:

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty}\left(A_n \cos\frac{\pi n}{l}at + B_n \sin\frac{\pi n}{l}at\right)\sin\frac{\pi n}{l}x, \qquad (3.31)$$

де $A_n = CA_n^*$, $B_n = CB_n^*$.

Для відшукання довільних сталих A_n та B_n використовуємо початкові умови (3.24):

$$\sum_{n=1}^{\infty} A_n \sin\frac{\pi n}{l}x = \varphi(x), \sum_{n=1}^{\infty} B_n \frac{\pi n}{l}a \sin\frac{\pi n}{l}x = \psi(x).$$

Розкладемо функції $\varphi(x)$ та $\psi(x)$ на відрізку $[0,l]$ в ряди Фур'є за синусами [6, 13]

$$\varphi(x) = \sum_{n=1}^{\infty}\alpha_n \sin\frac{\pi n}{l}x, \text{ де } \alpha_n = \frac{2}{l}\int_0^l \alpha(z)\sin\frac{\pi n}{l}zdz;$$

$$\psi(x) = \sum_{n=1}^{\infty}\beta_n \sin\frac{\pi n}{l}x, \text{ де } \beta_n = \frac{2}{l}\int_0^l \psi(z)\sin\frac{\pi n}{l}zdz.$$

Далі одержимо

$$\sum_{n=1}^{\infty} A_n \sin\frac{\pi n}{l}x = \sum_{n=1}^{\infty}\alpha_n \sin\frac{\pi n}{l}x,$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} B_n \frac{\pi n}{l}a \cdot \sin\frac{\pi n}{l}x = \sum_{n=1}^{\infty}\beta_n \cdot \sin\frac{\pi n}{l}x,$$

тобто,

$$A_n = \frac{2}{l}\int_0^l \alpha(z)\sin\frac{\pi n}{l}zdz, \ B_n = \frac{2}{\pi n a}\int_0^l \psi(z)\sin\frac{\pi n}{l}zdz. \qquad (3.32)$$

Отже, загальним розв'язком задачі (3.23) – (3.25) є ряд (3.31) з коефіцієнтами (3.32).

Приклад 3. Розв'язати наступну крайову задачу:

$$u_{tt} = 16u_{xx}, t > 0, 0 < x < 2,$$

$$u(0,t) = u(2,t) = 0,$$

$$u(x,0) = 0, \ u_t(x,0) = \sin \pi x.$$

Розв'язання. Як відомо , розв'язок крайової задачі

$$u_{tt} = 16u_{xx}, t > 0, 0 < x < 2,$$

$$u(0,t) = u(2,t) = 0,$$

$$u(x,0) = \varphi(x), \ u_t(x,0) = \psi(x),$$

згідно методу розділення змінних подається у вигляді ряду

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} \left(A_n \cos 2\pi nt + B_n \sin 2\pi nt \right) \sin \frac{\pi n}{2} x,$$

де

$$A_n = \int_0^2 \varphi(z) \sin \frac{\pi n}{2} z dz, \ B_n = \frac{1}{2\pi n} \int_0^2 \psi(z) \sin \frac{\pi n}{2} z dz.$$

В нашому випадку $\varphi(x) = 0$, а тому $A_n = 0$, $n = 1, 2, \ldots$

Отже,

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} B_n \sin 2\pi nt \sin \frac{\pi n}{2} x.$$

Для визначення B_n маємо

$$u_t(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} 2\pi n B_n \cos 2\pi nt \sin \frac{\pi n}{2} x,$$

$$u_t(x,0) = \sum_{n=1}^{\infty} 2\pi n B_n \sin \frac{\pi n}{2} x = \sin \pi x.$$

Остання рівність можлива лише у випадку

$$B_n = \begin{cases} 0, n \neq 2; \\ \dfrac{1}{4\pi}, n = 2. \end{cases}$$

Відповідь: $u(x,t) = \dfrac{1}{4\pi} \sin 4\pi t \cdot \sin \pi x.$

Завдання для самостійної роботи

Задача 3. Розв’язати мішану задачу.

1. $u_{tt} = 81u_{xx}$; $u(x, 0) = \sin \pi x$; $u_t(x, 0) = 0$; $u(0, t) = u(5, t) = 0$.
2. $u_{tt} = 64u_{xx}$; $u(x, 0) = 0$; $u_t(x, 0) = 8\pi \sin \pi x$; $u(0, t) = u(6, t) = 0$.
3. $u_{tt} = 49u_{xx}$; $u(x, 0) = 3\sin 2\pi x$; $u_t(x, 0) = 0$; $u(0, t) = u(4, t) = 0$.
4. $u_{tt} = 36u_{xx}$; $u(x, 0) = 0$; $u_t(x, 0) = 12\pi \sin 2\pi x$;
   $u(0, t) = u(5, t) = 0$.
5. $u_{tt} = 25u_{xx}$; $u(x, 0) = 5\sin 3\pi x$; $u_t(x, 0) = 0$; $u(0, t) = u(3, t) = 0$.
6. $u_{tt} = 16u_{xx}$; $u(x, 0) = 0$; $u_t(x, 0) = 12\pi \sin 3\pi x$;
   $u(0, t) = u(4, t) = 0$.
7. $u_{tt} = 9u_{xx}$; $u(x, 0) = 7\sin 4\pi x$; $u_t(x, 0) = 0$; $u(0, t) = u(2, t) = 0$.
8. $u_{tt} = 4u_{xx}$; $u(x, 0) = 0$; $u_t(x, 0) = 8\pi \sin 4\pi x$; $u(0, t) = u(3, t) = 0$.
9. $u_{tt} = u_{xx}$; $u(x, 0) = 9\sin 5\pi x$; $u_t(x, 0) = 0$; $u(0, t) = u(1, t) = 0$.
10. $u_{tt} = u_{xx}$; $u(x, 0) = 0$; $u_t(x, 0) = 5\pi \sin 5\pi x$; $u(0, t) = u(3, t) = 0$.
11. $u_{tt} = 4u_{xx}$; $u(x, 0) = 11\sin 6\pi x$; $u_t(x, 0) = 0$; $u(0, t) = u(2, t) = 0$.
12. $u_{tt} = 9u_{xx}$; $u(x, 0) = 0$; $u_t(x, 0) = 18\pi \sin 6\pi x$; $u(0, t) = u(1, t) = 0$.
13. $u_{tt} = 16u_{xx}$; $u(x, 0) = 13\sin 5\pi x$; $u_t(x, 0) = 0$; $u(0, t) = u(3, t) = 0$.
14. $u_{tt} = 25u_{xx}$; $u(x, 0) = 0$; $u_t(x, 0) = 25\pi \sin 5\pi x$;
    $u(0, t) = u(2, t) = 0$.
15. $u_{tt} = 36u_{xx}$; $u(x, 0) = 15\sin 4\pi x$; $u_t(x, 0) = 0$; $u(0, t) = u(4, t) = 0$.
16. $u_{tt} = 49u_{xx}$; $u(x, 0) = 0$; $u_t(x, 0) = 28\pi \sin 4\pi x$;
    $u(0, t) = u(3, t) = 0$.
17. $u_{tt} = 64u_{xx}$; $u(x, 0) = 17\sin 3\pi x$; $u_t(x, 0) = 0$; $u(0, t) = u(5, t) = 0$.
18. $u_{tt} = 81u_{xx}$; $u(x, 0) = 0$; $u_t(x, 0) = 27\pi \sin 3\pi x$;
    $u(0, t) = u(4, t) = 0$.

19. $u_{tt} = u_{xx}$; $u(x,0) = 19\sin 7\pi x$; $u_t(x,0) = 0$; $u(0,t) = u(2,t) = 0$.

20. $u_{tt} = 4u_{xx}$; $u(x,0) = 0$; $u_t(x,0) = 14\pi \sin 7\pi x$;
$u(0,t) = u(1,t) = 0$.

21. $u_{tt} = 9u_{xx}$; $u(x,0) = 21\sin 6\pi x$; $u_t(x,0) = 0$; $u(0,t) = u(3,t) = 0$.

22. $u_{tt} = 16u_{xx}$; $u(x,0) = 0$; $u_t(x,0) = 24\pi \sin 6\pi x$;
$u(0,t) = u(2,t) = 0$.

23. $u_{tt} = 25u_{xx}$; $u(x,0) = 23\sin 5\pi x$; $u_t(x,0) = 0$; $u(0,t) = u(4,t) = 0$.

24. $u_{tt} = 36u_{xx}$; $u(x,0) = 0$; $u_t(x,0) = 30\pi \sin 5\pi x$;
$u(0,t) = u(3,t) = 0$.

25. $u_{tt} = 49u_{xx}$; $u(x,0) = 25\sin 4\pi x$; $u_t(x,0) = 0$;
$u(0,t) = u(5,t) = 0$.

26. $u_{tt} = 64u_{xx}$; $u(x,0) = 0$; $u_t(x,0) = 32\pi \sin 4\pi x$;
$u(0,t) = u(4,t) = 0$.

27. $u_{tt} = 81u_{xx}$; $u(x,0) = 27\sin 3\pi x$; $u_t(x,0) = 0$; $u(0,t) = u(6,t) = 0$.

28. $u_{tt} = u_{xx}$; $u(x,0) = 0$; $u_t(x,0) = 3\pi \sin 3\pi x$; $u(0,t) = u(5,t) = 0$.

29. $u_{tt} = 4u_{xx}$; $u(x,0) = 29\sin 2\pi x$; $u_t(x,0) = 0$; $u(0,t) = u(7,t) = 0$.

30. $u_{tt} = 9u_{xx}$; $u(x,0) = 0$; $u_t(x,0) = 6\pi \sin 2\pi x$; $u(0,t) = u(6,t) = 0$.

§ 3.4. Мішана крайова задача для неоднорідного хвильового рівняння

Знайдемо розв'язок наступної крайової задачі

$$u_{tt} = a^2 u_{xx} + f(x,t)\,,\ t > 0\,,\ x \in (0;l)\,, \tag{3.33}$$

$$u(x,0) = \varphi(x)\,,\ \ u_t(x,0) = \psi(x)\,,\ x \in [0;l]\,, \tag{3.34}$$

$$u(0,t) = 0\,,\ u(l,t) = 0\,,\ t \ge 0\,. \tag{3.35}$$

Часто при розв'язуванні деякої складної задачі намагаються звести її до розв'язування більш простих задач (редуціювати загальну задачу). Так наприклад розв'язок крайової задачі (3.33) – (3.35) можна подати у вигляді

$$u(x,t) = z(x,t) + v(x,t)\,, \tag{3.36}$$

де $z(x,t)$ є розв'язком мішаної крайової задачі для однорідного хвильового рівняння з неоднорідними початковими умовами (3.23) – (3.25), а $v(x,t)$ – розв'язком мішаної крайової задачі для неоднорідного хвильового рівняння з однорідними початковими умовами

$$v_{tt} = a^2 v_{xx} + f(x,t)\,,\ t > 0\,,\ x \in (0;l) \tag{3.37}$$

$$v(x,0) = 0\,,\ v_t(x,0) = 0\,,\ x \in [0;l]\,, \tag{3.38}$$

$$v(0,t) = 0\,,\ v(l,t) = 0\,,\ t \ge 0\,. \tag{3.39}$$

Простою перевіркою легко переконатись, що вибрана таким чином функція (3.36) буде задовольняти рівняння та крайові умови задачі (3.33) – (3.35). Спрощення полягає в тому, що в першій задачі рівняння та граничні умови є однорідними, а в другій задачі хоча рівняння є неоднорідним, але всі крайові умови однорідні. Однак "платою" за таке спрощення є збільшення кількості задач, які потрібно розв'язати.

Згідно §3.3 $z(x,t)$ визначається рядом (3.31) з коефіцієнтами (3.32). Функцію $v(x,t)$ шукаємо у вигляді

$$v(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} T_n(t) X_n(x), \tag{3.40}$$

де $X_n(x)$ – власні функції задачі Штурма–Ліувілля (3.29) – (3.30). Тобто, $X_n(x) = \sin\dfrac{\pi n}{l}x$ (довільні константи покладемо рівними одиниці).

Таким чином ряд (3.40) задовольняє граничні умови (3.39). Потрібно також вибрати функції $T_n(t)$ так, щоб він задовольняв рівняння (3.37) та початкові умови (3.38).

Розкладемо функцію $f(x,t)$ в ряд Фур'є за системою власних функцій:

$$f(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} f_n(t) \sin\frac{\pi n}{l} x, \quad f_n(t) = \frac{2}{l}\int_0^l f(z,t)\sin\frac{\pi n}{l} z dz \qquad (3.41)$$

Підставляючи ряди (3.40), (3.41) у рівняння (3.37), матимемо

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left[T_n''(t) + \left(\frac{\pi n a}{l}\right)^2 T_n(t) - f_n(t)\right]\sin\frac{\pi n}{l} x = 0,$$

що можливе лише у випадку

$$T_n''(t) + \left(\frac{\pi n a}{l}\right)^2 T_n(t) = f_n(t), n = 1, 2, \ldots \qquad (3.42)$$

Щоб функція $v(x,t)$ задовольняла початкові умови (3.38), потрібно функції $T_n(t)$ задовольняли умовам

$$T_n(0) = 0, \;\; T_n'(0) = 0\,. \qquad (3.43)$$

Характеристичне рівняння для лінійного неоднорідного диференціального рівняння зі сталими коефіцієнтами (3.42) має вигляд

$$k^2 + \left(\frac{\pi n a}{l}\right)^2 = 0,$$

звідки маємо

$$k_{1,2} = \pm\frac{\pi n a}{l} i.$$

Тому, згідно методу варіації довільної сталої, загальний розв'язок рівняння (3.42) шукаємо у вигляді

$$T_n(t) = C_1(t)\cos\frac{\pi n a}{l} t + C_2(t)\sin\frac{\pi n a}{l} t.$$

Для визначення невідомих функцій $C_1(t)$, $C_2(t)$ отримаємо систему

$$\begin{cases} C_1'(t)\cos\dfrac{\pi na}{l}t + C_2'(t)\sin\dfrac{\pi na}{l}t = 0, \\ -\dfrac{\pi na}{l}C_1'(t)\sin\dfrac{\pi na}{l}t + \dfrac{\pi na}{l}C_2'(t)\cos\dfrac{\pi na}{l}t = f_n(t), \end{cases}$$

звідки одержимо

$$\begin{cases} C_1'(t)\left(\dfrac{\pi na}{l}\cos^2\dfrac{\pi na}{l}t + \dfrac{\pi na}{l}\sin^2\dfrac{\pi na}{l}t\right) = -f_n(t)\sin\dfrac{\pi na}{l}t, \\ C_2'(t)\left(\dfrac{\pi na}{l}\sin^2\dfrac{\pi na}{l}t + \dfrac{\pi na}{l}\cos^2\dfrac{\pi na}{l}t\right) = f_n(t)\cos\dfrac{\pi na}{l}t, \end{cases}$$

$$C_1(t) = -\frac{l}{\pi na}\int_0^t f_n(\tau)\sin\frac{\pi na}{l}\tau d\tau + C_1^*,$$

$$C_2(t) = \frac{l}{\pi na}\int_0^t f_n(\tau)\cos\frac{\pi na}{l}\tau d\tau + C_2^*.$$

Отже, загальним розв’язком рівняння (3.42) є

$$T_n(t) = \left(-\frac{l}{\pi na}\int_0^t f_n(\tau)\sin\frac{\pi na}{l}\tau d\tau + C_1^*\right)\cos\frac{\pi na}{l}t +$$

$$\left(\frac{l}{\pi na}\int_0^t f_n(\tau)\cos\frac{\pi na}{l}\tau d\tau + C_2^*\right)\sin\frac{\pi na}{l}t,$$

або

$$T_n(t) = \frac{l}{\pi na}\int_0^t f_n(\tau)\sin\frac{\pi na}{l}(t-\tau)d\tau + C_1^*\cos\frac{\pi na}{l}t + C_2^*\sin\frac{\pi na}{l}t.$$

Для визначення констант C_1^* та C_2^* використаємо умови (3.43)

$$\begin{cases} T_n(0) = C_1^* = 0, \\ T_n'(0) = -\dfrac{\pi na}{l}C_2^* = 0, \end{cases} \Rightarrow C_1^* = 0, C_2^* = 0.$$

Тоді розв’язком задачі Коші (3.42), (3.43) є функція

$$T_n(t) = \frac{l}{\pi na}\int_0^t f_n(\tau)\sin\frac{\pi na}{l}(t-\tau)d\tau .$$

Отже розв’язок задачі (3.37) – (3.39) матиме вигляд:

$$v(x,t)=\sum_{n=1}^{\infty}\left[\frac{2}{\pi na}\int_0^t\int_0^l f(z,\tau)\sin\left(\frac{\pi n}{l}z\right)\sin\left(\frac{\pi na}{l}(t-\tau)\right)dzd\tau\cdot\sin\frac{\pi n}{l}x\right].$$

А тому, згідно із (3.36), отримаємо розв’язок задачі (3.33)–(3.35)

$$u(x,t)=\sum_{n=1}^{\infty}\left[2\int_0^l\left[\frac{1}{l}\varphi(z)\cos\left(\frac{\pi na}{l}t\right)+\frac{1}{\pi na}\psi(z)\sin\left(\frac{\pi na}{l}t\right)\right]\times\right.$$

$$\left.\times\sin\left(\frac{\pi n}{l}z\right)dz\cdot\sin\left(\frac{\pi n}{l}t\right)\right]+$$

$$+\sum_{n=1}^{\infty}\left[\frac{2}{\pi na}\int_0^t\int_0^l f(z,\tau)\sin\left(\frac{\pi n}{l}z\right)\sin\left(\frac{\pi na}{l}(t-\tau)\right)dzd\tau\cdot\sin\frac{\pi n}{l}x\right].$$

Знайдемо тепер розв’язок крайової задачі для неоднорідного хвильового рівняння з неоднорідними граничними умовами

$$u_{tt}=a^2u_{xx}+f(x,t)\,,\ t>0\,,\ x\in(0;l)\,, \tag{3.44}$$

$$u(x,0)=\phi(x)\,,\ u_t(x,0)=\psi(x)\,,\ x\in[0;l]\,, \tag{3.45}$$

$$u(0,t)=\mu^{(1)}(t)\,,\ u(l,t)=\mu^{(2)}(t)\,,\ t\geq 0\,, \tag{3.46}$$

де $\mu^{(1)}(t),\ \mu^{(2)}(t)$ – деякі задані функції змінної t. Вводячи заміну

$$u(x,t)=\omega(x,t)+\mu^{(1)}(t)+\frac{\mu^{(2)}(t)-\mu^{(1)}(t)}{l}x$$

для нової невідомої функції $\omega(x,t)$ отримаємо наступну крайову задачу

$$\omega_{tt}=a^2\omega_{xx}+f^{(1)}(x,t)\,,\ t>0\,,\ x\in(0;l)\,, \tag{3.47}$$

$$\omega(x,0)=\phi^{(1)}(x)\,,\ \omega_t(x,0)=\psi^{(1)}(x)\,,\ x\in[0;l]\,, \tag{3.48}$$

$$\omega(0,t)=0\,,\ \omega(l,t)=0\,,\ t\geq 0\,, \tag{3.49}$$

де

$$f^{(1)}(x,t)=f(x,t)-\mu_{tt}^{(1)}-\frac{\mu_{tt}^{(2)}-\mu_{tt}^{(1)}}{l}x\,,$$

$$\varphi^{(1)}(x)=\varphi(x)-\mu^{(1)}-\frac{\mu^{(2)}-\mu^{(1)}}{l}x\,,\ \psi^{(1)}(x)=\psi(x)-\mu_t^{(1)}-\frac{\mu_t^{(2)}-\mu_t^{(1)}}{l}x\,.$$

Задача (3.47)–(4.49) розв’язана в попередньому параграфі.

Отже, мішану крайову задачу з неоднорідними граничними умовами (3.44) – (3.46) можна звести до задачі з однорідними граничними умовами.

Приклад 4. Розв'язати крайову задачу

$$u_{tt} = 4u_{xx}, \tag{П4.1}$$

$$u(0,t) = 0, \quad \frac{\partial u}{\partial x}\Big|_{x=4} = 0, \tag{П4.2}$$

$$u(x,0) = \sin\frac{5\pi}{8}x, \; u_t(x,0) = \sin\frac{\pi}{8}x\,. \tag{П4.3}$$

Розв'язання. Розв'язок шукаємо у вигляді:

$$u(x,t) = X(x)\cdot T(t) \not\equiv 0\,. \tag{П4.4}$$

Підставляючи (П4.4) в рівняння (П4.1) та граничні умови (П4.2), розділяючи змінні, отримуємо рівняння для функції $T(t)$

$$T'' + 4\lambda T = 0, \; T(t) \not\equiv 0 \tag{П4.5}$$

та задачу Штурма–Ліувіля для функції $X(x)$

$$X'' + \lambda X = 0, \; X(x) \not\equiv 0\,, \tag{П4.6}$$

$$X(0) = 0, X'(4) = 0\,. \tag{П4.7}$$

Власними значеннями задачі (П4.6) – (П4.7) є (див. § 3.1)

$$\lambda_n = \left(\frac{(2n+1)\pi}{8}\right)^2,$$

а відповідні їм власні функції

$$X_n(x) = C_2\sin\frac{(2n+1)\pi}{8}x\,, \; n = 0, 1, 2... \tag{П4.8}$$

Розв'язуючи рівняння (П4.5) при знайдених λ_n та враховуючи (П4.4), (П4.8), дістанемо

$$u(x,t) = \sum_{n=0}^{\infty}\left(A_n\cos\frac{(2n+1)\pi}{4}t + B_n\sin\frac{(2n+1)\pi}{4}t\right)\sin\frac{(2n+1)\pi}{8}x,$$

де A_n, B_n довільні константи.

З початкових умов (П4.4) маємо:

$$u(x,0) = \sum_{n=0}^{\infty}A_n\sin\frac{(2n+1)\pi}{8}x = \sin\frac{5\pi}{8}x \Rightarrow A_n = \begin{cases}1, n = 2;\\ 0, n \neq 2.\end{cases}$$

$$u_t(x,0)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(2n+1)\pi}{4}B_n\cdot\sin\frac{(2n+1)\pi}{8}x=\sin\frac{\pi}{8}x\Rightarrow$$

$$\Rightarrow B_n=\begin{cases}\frac{4}{\pi}, n=0;\\ 0, n\neq 0.\end{cases}$$

Відповідь: $u(x,t)=\frac{4}{\pi}\sin\frac{\pi}{4}t\cdot\sin\frac{\pi}{8}x+\cos\frac{5\pi}{4}t\cdot\sin\frac{5\pi}{8}x.$

Приклад 5. Розв'язати крайову задачу:

$$u_{tt}=u_{xx}, \qquad (П5.1)$$

$$u(0,t)=t^2,\ \ u(\pi,t)=t^3,$$

$$u(x,0)=\sin x,\ \ u_t(x,0)=0,\ \ 0<x<\pi,\ \ t>0.$$

Розв'язання. Якщо при $x=0, x=l$ задано неоднорідні граничні умови першого роду

$$u(0,t)=\mu^{(1)}(t),\ \ u(l,t)=\mu^{(2)}(t),$$

то вводячи заміну

$$u(x,t)=\omega(x,t)+\mu^{(1)}(t)+x\frac{\mu^{(2)}(t)-\mu^{(1)}(t)}{l},$$

ми отримаємо однорідні граничні умови для нової невідомої функції $\omega(x,t)$.

В нашому випадку

$$u(x,t)=\omega(x,t)+t^2+x\frac{t^3-t^2}{\pi}.$$

Тоді, знайшовши похідні u_{tt}, u_{xx} та підставивши їх у рівняння (П5.1), дістанемо наступну першу мішану крайову задачу для нової невідомої функції $\omega(x,t)$:

$$\omega_{tt}=\omega_{xx}-2-\frac{x}{\pi}(6t-2),$$

$$\omega(0,t)=0,\ \ \omega(\pi,t)=0,$$

$$\omega(x,0)=\sin x,\ \ \omega_t(x,0)=0,\ \ 0<x<\pi,\ \ t>0.$$

Як відомо, розв'язок крайової задачі

$$\omega_{tt}=a^2\omega_{xx}+f(x,t), t>0, x\in(0,l),$$

$$\omega(0,t)=\omega(l,t)=0,\ \ t\geq 0,$$
$$\omega(x,0)=\varphi(x)\ ,\ \ \omega_t(x,0)=\psi(x)\ ,\ \ x\in[0,l]$$
подається у вигляді ряду
$$\omega(x,t)=\sum_{n=0}^{\infty}\left(A_n\cos\frac{\pi n}{l}at+B_n\sin\frac{\pi n}{l}at\right)\sin\frac{\pi n}{l}x+$$
$$+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2}{\pi na}\int_0^t\int_0^j f(\xi,\tau)\sin\frac{\pi n}{l}\xi d\xi\cdot\sin\frac{\pi na}{l}(t-\tau)d\tau\cdot\sin\frac{\pi n}{l}x,$$
де
$$A_n=\frac{2}{l}\int_0^l\phi(\xi)\sin\frac{\pi n}{l}\xi d\xi\ ,\ \ B_n=\frac{2}{\pi na}\int_0^l\psi(\xi)\sin\frac{\pi n}{l}\xi d\xi\ .$$
Знайшовши A_n,B_n, ми знайдемо $\omega(x,t)$, а з (П4.11) - невідому функцію $u(x,t)$.

Завдання для самостійної роботи

Задача 4. Розв'язати мішану задачу.

1. $u_{tt}=9u_{xx}$; $u(0,t)=-8,\ u(2,t)=2$;
   $u(x,0)=\sin 6\pi x-8+5x,\ u_t(x,0)=0$.
2. $u_{tt}=9u_{xx}$; $u(0,t)=7,\ u(1,t)=2$;
   $u(x,0)=7-5x,\ u_t(x,0)=12\pi\sin 4\pi x$.
3. $u_{tt}=9u_{xx}$; $u(0,t)=-6,\ u(3,t)=6$;
   $u(x,0)=3\sin 3\pi x-6+4x,\ u_t(x,0)=0$.
4. $u_{tt}=9u_{xx}$; $u(0,t)=5t,\ u(2,t)=-3t$;
   $u(x,0)=0,\ u_t(x,0)=12\pi\sin 4\pi x+5-4x$.
5. $u_{tt}=16u_{xx}$; $u(0,t)=-4,\ u(1,t)=-1$;
   $u(x,0)=5\sin 2\pi x-4+3x,\ u_t(x,0)=0$.
6. $u_{tt}=16u_{xx}$; $u(0,t)=3,\ u(2,t)=7$;
   $u(x,0)=3+2x,\ u_t(x,0)=12\pi\sin 3\pi x$.

7. $u_{tt} = 16u_{xx}$; $u(0, t) = -2$, $u(3, t) = 1$;

$u(x, 0) = 7\sin 4\pi x - 2 + x$, $u_t(x, 0) = 0$.

8. $u_{tt} = 16u_{xx}$; $u(0, t) = t$, $u(1, t) = -t$;

$u(x, 0) = 0$, $u_t(x, 0) = 28\pi \sin 7\pi x + 1 - x$.

9. $u_{tt} = 25u_{xx}$; $u(0, t) = -1$, $u(1, t) = -3$;

$u(x, 0) = 9\sin 3\pi x - 1 - 2x$, $u_t(x, 0) = 0$.

10. $u_{tt} = 25u_{xx}$; $u(0, t) = 3$, $u(2, t) = -5$;

$u(x, 0) = 3 - 4x$, $u_t(x, 0) = 20\pi \sin 4\pi x$.

11. $u_{tt} = 25u_{xx}$; $u(0, t) = -5$, $u(1, t) = 1$;

$u(x, 0) = 11\sin 3\pi x - 5 + 6x$, $u_t(x, 0) = 0$.

12. $u_{tt} = 25u_{xx}$; $u(0, t) = 7t$, $u(2, t) = -3t$;

$u(x, 0) = 0$, $u_t(x, 0) = 10\pi \sin 2\pi x + 7 - 5x$.

13. $u_{tt} = 36u_{xx}$; $u(0, t) = -9$, $u(3, t) = 3$;

$u(x, 0) = 13\sin 3\pi x - 9 + 4x$, $u_t(x, 0) = 0$.

14. $u_{tt} = 36u_{xx}$; $u(0, t) = 8$, $u(2, t) = 2$;

$u(x, 0) = 8 - 3x$, $u_t(x, 0) = 18\pi \sin 3\pi x$.

15. $u_{tt} = 36u_{xx}$; $u(0, t) = -6$, $u(3, t) = 0$;

$u(x, 0) = 15\sin 2\pi x - 6 + 2x$, $u_t(x, 0) = 0$.

16. $u_{tt} = 36u_{xx}$; $u(0, t) = 4t$, $u(4, t) = 8t$;

$u(x, 0) = 0$, $u_t(x, 0) = 24\pi \sin 4\pi x + 4 + x$.

17. $u_{tt} = 49u_{xx}$; $u(0, t) = -2$, $u(3, t) = -5$;

$u(x, 0) = 17\sin 3\pi x - 2 - x$, $u_t(x, 0) = 0$.

18. $u_{tt} = 49u_{xx}$; $u(0, t) = 3$, $u(2, t) = -1$;

$u(x, 0) = 3 - 2x$, $u_t(x, 0) = 35\pi \sin 5\pi x$.

19. $u_{tt} = 49u_{xx}$; $u(0, t) = -1$, $u(1, t) = -4$;

$u(x,0)=19\sin 7\pi x-1-3x,\ u_t(x,0)=0$.

20. $u_{tt}=49u_{xx}$; $u(0,t)=2t,\ u(2,t)=-6t$;

$u(x,0)=0,\ u_t(x,0)=28\pi\sin 4\pi x+2+4x$.

21. $u_{tt}=64u_{xx}$; $u(0,t)=-4,\ u(1,t)=-9$;

$u(x,0)=23\sin 3\pi x-4-5x,\ u_t(x,0)=0$.

22. $u_{tt}=64u_{xx}$; $u(0,t)=2,\ u(3,t)=-7$;

$u(x,0)=2-3x,\ u_t(x,0)=24\pi\sin 3\pi x$.

23. $u_{tt}=64u_{xx}$; $u(0,t)=-3,\ u(1,t)=1$;

$u(x,0)=23\sin 2\pi x-3+4x,\ u_t(x,0)=0$.

24. $u_{tt}=64u_{xx}$; $u(0,t)=4t,\ u(2,t)=-6t$;

$u(x,0)=0,\ u_t(x,0)=32\pi\sin 4\pi x+4-5x$.

25. $u_{tt}=81u_{xx}$; $u(0,t)=-5,\ u(3,t)=1$;

$u(x,0)=25\sin 3\pi x-5+2x,\ u_t(x,0)=0$.

26. $u_{tt}=81u_{xx}$; $u(0,t)=6,\ u(4,t)=-2$;

$u(x,0)=6-7x,\ u_t(x,0)=27\pi\sin 3\pi x$.

27. $u_{tt}=81u_{xx}$; $u(0,t)=-7,\ u(3,t)=2$;

$u(x,0)=24\sin 2\pi x-7+3x,\ u_t(x,0)=0$.

28. $u_{tt}=81u_{xx}$; $u(0,t)=8t,\ u(4,t)=-4t$;

$u(x,0)=0,\ u_t(x,0)=27\pi\sin 3\pi x+8-3x$.

29. $u_{tt}=4u_{xx}$; $u(0,t)=-9,\ u(2,t)=1$;

$u(x,0)=29\sin 4\pi x-9+5x,\ u_t(x,0)=0$.

30. $u_{tt}=4u_{xx}$; $u(0,t)=9,\ u(3,t)=-3$;

$u(x,0)=9-4x,\ u_t(x,0)=10\pi\sin 5\pi x$.

Задача 5. Розв'язати мішану задачу для даного неоднорідного хвильового рівняння з нульовими початковими і граничними умовами

$$u(x,0)=u_t(x,0)=0;\ u(0,t)=u(\pi,t)=0.$$

1. $u_{tt}=u_{xx}+65e^{-8t}\sin x$.
2. $u_{tt}=\frac{1}{4}u_{xx}+3\sin 2t\sin 2x$.
3. $u_{tt}=u_{xx}+16\cos 8t\sin 8x$.
4. $u_{tt}=\frac{1}{9}u_{xx}+8\sin 3t\sin 3x$.
5. $u_{tt}=\frac{1}{16}u_{xx}+50e^{-7t}\sin 4x$.
6. $u_{tt}=\frac{1}{25}u_{xx}+3\cos 2t\sin 5x$.
7. $u_{tt}=4u_{xx}+28\cos 14t\sin 7x$.
8. $u_{tt}=\frac{1}{36}u_{xx}+8\cos 3t\sin 6x$.
9. $u_{tt}=\frac{1}{49}u_{xx}+37e^{-6t}\sin 7x$.
10. $u_{tt}=\frac{1}{64}u_{xx}+15\sin 4t\sin 8x$.
11. $u_{tt}=9u_{xx}+36\cos 18t\sin 6x$.
12. $u_{tt}=\frac{1}{81}u_{xx}+15\cos 4t\sin 9x$.
13. $u_{tt}=u_{xx}+26e^{-5t}\sin x$.
14. $u_{tt}=\frac{1}{4}u_{xx}+24\sin 5t\sin 2x$.
15. $u_{tt}=16u_{xx}+40\cos 20t\sin 5x$.
16. $u_{tt}=\frac{1}{9}u_{xx}+24\cos 5t\sin 3x$.
17. $u_{tt}=\frac{1}{16}u_{xx}+17e^{-4t}\sin 4x$.
18. $u_{tt}=\frac{1}{25}u_{xx}+35\sin 6t\sin 5x$.
19. $u_{tt}=25u_{xx}+40\cos 20t\sin 4x$.
20. $u_{tt}=\frac{1}{36}u_{xx}+35\cos 6t\sin 5x$.
21. $u_{tt}=\frac{1}{49}u_{xx}+10e^{-2t}\sin 7x$.
22. $u_{tt}=\frac{1}{64}u_{xx}+48\sin 7t\sin 8x$.
23. $u_{tt}=36u_{xx}+36\cos 18t\sin 3x$.
24. $u_{tt}=\frac{1}{81}u_{xx}+48\cos 7t\sin 9x$.
25. $u_{tt}=u_{xx}+5e^{-2t}\sin x$.
26. $u_{tt}=\frac{1}{4}u_{xx}+63\sin 8t\sin 2x$.
27. $u_{tt}=49u_{xx}+28\cos 14t\sin 2x$.
28. $u_{tt}=\frac{1}{9}u_{xx}+63\cos 8t\sin 3x$.
29. $u_{tt}=\frac{1}{16}u_{xx}+2e^{-t}\sin 4x$.
30. $u_{tt}=\frac{1}{25}u_{xx}+80\sin 9t\sin 5x$.

§ 3.5. Мішані крайові задачі для одновимірного рівняння теплопровідності

Розв'яжемо методом Фур'є наступну крайову задачу:

$$u_t(x,t) = a^2 u_{xx}(x,t), t > 0, x \in (0,l), \tag{3.50}$$

$$u(x,0) = \phi(x), x \in [0,l], \tag{3.51}$$

$$u(0,t) = 0, u(l,t) = 0, t \geq 0. \tag{3.52}$$

Будемо вимагати, щоб початкова та граничні умови були не суперечливі, тобто, вони задовольняють умову узгодженості

$$\phi(0) = \phi(l) = 0 .$$

Розв'язок крайової задачі (3.50) – (3.52) шукаємо у вигляді

$$u(x,t) = X(x)T(t). \tag{3.53}$$

Підставивши (3.53) у рівняння (3.50) і граничні умови (3.52) та відокремивши змінні, отримаємо диференціальне рівняння відносно функції $T(t)$

$$T'(t) + a^2 \lambda T(t) = 0 , \tag{3.54}$$

та задачу Штурма-Ліувілля для визначення функції $X(x)$

$$X''(x) + \lambda X(x) = 0, \tag{3.55}$$

$$X(0) = 0, X(l) = 0 . \tag{3.56}$$

Підставивши власні значення λ_n задачі (3.55) – (3.56) в рівняння (3.54), одержимо

$$T_n'(t) + \left(\frac{\pi n a}{l}\right)^2 T_n(t) = 0 . \tag{3.57}$$

Інтегруючи звичайне диференціальне рівняння (3.57), маємо

$$\frac{dT_n}{dt} = -\left(\frac{\pi n a}{l}\right)^2 T_n,$$

$$\frac{dT_n}{T_n} = -\left(\frac{\pi n a}{l}\right)^2 dt,$$

$$\ln|T_n| = -\left(\frac{\pi n a}{l}\right)^2 t + c,$$

$$T_n(t) = A_n^* e^{-\left(\frac{\pi n a}{l}\right)^2 t},$$

де $A_n^* = e^c$. Із (3.53), функції $u_n(x,t) = A_n e^{-\left(\frac{\pi n}{l}\right)^2 t} \sin\left(\frac{\pi n}{l} x\right)$, $n = 1,2,3,...$, де $A_n = C \cdot A_n^*$, задовольняють рівняння (3.50) та граничні умови (3.52). В силу лінійності та однорідності рівняння (3.50) сума частинних розв'язків

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n e^{-\left(\frac{\pi n a}{l}\right)^2 t} \sin\left(\frac{\pi n}{l} x\right) \qquad (3.58)$$

також задовольняє даному рівнянню та граничним умовам (3.52). Коефіцієнти A_n вибирають так, щоб ряд (3.58) задовольняв початкову умову (3.51). Тобто,

$$u(x,0) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n \sin\frac{\pi n}{l} x = \phi(x). \qquad (3.59)$$

Розклавши $\phi(x)$ в ряд Фур'є за системою власних функцій $\sin\left(\frac{\pi n}{l} x\right)$ із (3.59) визначимо коефіцієнти ряду (3.58)

$$A_n = \frac{2}{l} \int_0^l \phi(z) \sin\left(\frac{\pi n}{l} z\right) dz. \qquad (3.60)$$

Знайдемо розв'язок неоднорідного рівняння параболічного типу

$$u_t(x,t) = a^2 u_{xx}(x,t) + f(x,t),\ t > 0,\ x \in (0,l), \qquad (3.61)$$

де функція $u(x,t)$ задовольняє крайовим умовам (3.51), (3.52).

Аналогічно, як і при розв'язуванні гіперболічних рівнянь (див. §3.4), згідно принципу редукції, розв'язок задачі (3.61), (3.51), (3.52) будемо шукати у вигляді

$$u(x,t) = z(x,t) + v(x,t), \qquad (3.62)$$

де $z(x,t)$ є розв'язком задачі (3.50) – (3.52), а $v(x,t)$ є розв'язком крайової задачі

$$v_t(x,t) = a^2 v_{xx}(x,t) + f(x,t), t > 0, x \in (0,l). \qquad (3.63)$$

$$v(x,0) = 0, x \in (0,l), \qquad (3.64)$$

$$v(0,t) = 0, v(l,t) = 0, t \ge 0. \qquad (3.65)$$

Згідно вищенаведених міркувань функція $z(x,t)$ подається у вигляді ряду (3.58) з коефіцієнтами (3.60).

Функцію $v(x,t)$, як розв’язок крайової задачі (3.63) – (3.65) шукаємо у вигляді

$$v(x,t)=\sum_{n=1}^{\infty}T_n(t)X_n(x), \tag{3.66}$$

де $X_n(x)$ є власними функціями задачі Штурма-Ліувілля (3.55), (3.56). Тобто, $X_n(x)=\sin\left(\frac{\pi n}{l}x\right)$ (тут довільні сталі покладені рівними одиниці). Ряд (3.66) задовольняє граничні умови (3.65). Потрібно вибрати функції $T_n(t)$ таким чином, щоб він також задовольняв рівняння (3.63) та початкові умови (3.64).

Розкладемо функцію $f(x,t)$ в ряд Фур’є за системою власних функцій $\sin\left(\frac{\pi n}{l}x\right)$

$$f(x,t)=\sum_{n=1}^{\infty}f_n(t)\sin\left(\frac{\pi n}{l}x\right), \tag{3.67}$$

де

$$f_n(t)=\frac{2}{l}\int_0^l f(z,t)\sin\left(\frac{\pi n}{l}z\right)dz\,. \tag{3.68}$$

Підставляючи ряди (3.66), (3.67) у рівняння (3.63), одержимо

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left[T_n'(t)+\left(\frac{\pi na}{l}\right)^2T_n(t)-f_n(t)\right]\sin\left(\frac{\pi n}{l}x\right)=0,$$

що можливо лише у випадку

$$T_n'(t)+\left(\frac{\pi na}{l}\right)^2T_n(t)-f_n(t)=0, n=1,2,\ldots \tag{3.69}$$

Щоб функція $v(x,t)$ задовольняла початкову умову (3.64) потрібно вимагати

$$T_n(0)=0, n=1,2,\ldots \tag{3.70}$$

Лінійне звичайне диференціальне рівняння першого порядку (3.69) розв'яжемо методом Бернуллі. Розв'язок шукаємо у вигляді

$$T_n(t)=p(t)\cdot\omega(t).$$

Тоді з (3.69) маємо

$$p'\cdot\omega+p\cdot\omega'+\left(\frac{\pi na}{l}\right)^2 p\cdot\omega=f_n(t),$$

$$p'\cdot\omega+p\left(\omega'+\left(\frac{\pi na}{l}\right)^2\omega\right)=f_n(t). \qquad (3.71)$$

Функцію $\omega(t)$ виберемо з умови

$$\omega'+\left(\frac{\pi na}{l}\right)^2\omega=0,$$

$$\frac{d\omega}{dt}=-\left(\frac{\pi na}{l}\right)^2\omega,$$

$$\frac{d\omega}{\omega}=-\left(\frac{\pi na}{l}\right)^2 dt,$$

$$\ln|\omega|=-\left(\frac{\pi na}{l}\right)^2 t.$$

Тоді, наприклад, можемо взяти

$$\omega=e^{-\left(\frac{\pi na}{l}\right)^2 t} \qquad (3.72)$$

Враховуючи (3.72), з (3.71) маємо

$$p'\cdot e^{-\left(\frac{\pi na}{l}\right)^2 t}=f_n(t),$$

$$p'=f_n(t)e^{\left(\frac{\pi na}{l}\right)^2 t},$$

$$p(t)=\int_0^t f_n(\tau)e^{\left(\frac{\pi na}{l}\right)^2 \tau}d\tau+c.$$

Тобто,

$$T_n(t)=\left(\int_0^t f_n(\tau)e^{\left(\frac{\pi na}{l}\right)^2 \tau}d\tau+c\right)\cdot e^{-\left(\frac{\pi na}{l}\right)^2 t}.$$

З умови (3.70) маємо

$$T_n(0)=(0+c)\cdot 1=0 \Rightarrow c=0.$$

Тоді

$$T_n(t)=\int_0^t e^{-\left(\frac{\pi n a}{l}\right)^2 (t-\tau)} f_n(\tau)d\tau.$$

Враховуючи вищенаведені міркування, з (3.66) отримаємо

$$v(x,t)=\sum_{n=1}^{\infty}\left(\int_0^t e^{-\left(\frac{\pi n}{l}\right)^2 a^2(t-\tau)} f_n(\tau)d\tau\right)\sin\left(\frac{\pi n}{l}x\right).$$

Отже, розв'язком мішаної крайової задачі для неоднорідного рівняння теплопровідності (3.61), (3.51), (3.52) є функція

$$u(x,t)=\sum_{n=1}^{\infty} A_n e^{-\left(\frac{\pi n a}{l}\right)^2 t}\sin\left(\frac{\pi n}{l}x\right)+$$

$$+\sum_{n=1}^{\infty}\left(\int_0^t e^{-\left(\frac{\pi n a}{l}\right)^2 (t-\tau)} f_n(\tau)d\tau\right)\sin\left(\frac{\pi n}{l}x\right),$$

де A_n та $f_n(\tau)$ визначаються формулами (3.60), (3.68) відповідно.

Аналогічно, як і для рівнянь гіперболічного типу, мішану крайову задачу з неоднорідними граничними умовами $u(0,t)=\mu^{(1)}(t)$, $u(l,t)=\mu^{(2)}(t)$ можна звести до задачі з однорідними граничними умовами (див. §3.4).

<u>Приклад 6</u>. Розв'язати наступну крайову задачу:

$$u_t=9u_{xx},\ \ t>0,\ \ 0<x<2,$$

$$u(x,0)=x,\ \ x\in[0,2],$$

$$u(0,t)=u(2,t)=0,\ \ t\geq 0,$$

де $A-const$.

<u>Розв'язання</u>. Як відомо, розв'язком задачі

$$u_t=a^2u_{xx},\ \ t>0,\ \ 0<x<l,$$

$$u(x,0)=\varphi(x),\ \ x\in[0,l],$$

$$u(0,t)=u(l,t)=0,\ \ t\geq 0.$$

є функція $u(x,t)$, яка подається у вигляді ряду

$$u(x,t)=\sum_{n=1}^{\infty}A_n e^{-\left(\frac{\pi na}{l}\right)^2 t}\sin\frac{\pi n}{l}x,$$

де

$$A_n=\int_0^2\varphi(z)\sin\frac{\pi n}{2}zdz$$

В нашому випадку

$$A_n=\int_0^2 z\sin\frac{\pi n}{2}zdz=\int_0^2 z\sin\frac{\pi n}{2}zdz=$$

$$=\left(-\frac{2}{\pi n}\right)\int_0^2 zd\left(\cos\frac{\pi n}{2}z\right)=-\frac{2}{\pi n}\cdot\left(z\cos\frac{\pi n}{l}z\Big|_0^2-\int_0^2\cos\frac{\pi n}{2}zdz\right)=$$

$$=-\frac{2}{\pi n}\left(2\cdot(-1)^n-\frac{2}{\pi n}\sin\frac{\pi n}{2}z\Big|_0^2\right)=(-1)^{n+1}\frac{4}{\pi n}.$$

Отже,

$$u(x,t)=\frac{4}{\pi}.\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n}e^{-\left(\frac{3\pi n}{2}\right)^2 t}\sin\frac{\pi n}{2}x\,.$$

<u>Відповідь</u>:

$$u(x,t)=\frac{4}{\pi}.\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n}e^{-\left(\frac{3\pi n}{2}\right)^2 t}\sin\frac{\pi n}{2}x$$

<u>Приклад 7</u>. Розв'язати наступну крайову задачу:

$$u_t=9u_{xx}-8u,\ \ t>0,\ \ 0<x<2, \qquad (П7.1)$$

$$u(x,0)=\varphi(x),\ \ x\in[0,2], \qquad (П7.2)$$

$$u(0,t)=u(2,t)=0,\ \ t\geq 0. \qquad (П7.3)$$

<u>Розв'язання</u>. Розв'язок шукаємо у вигляді

$$u(x,t)=T(t)\cdot X(x)\not\equiv 0.$$

Тоді з рівняння (П7.1) отримуємо

$$T'X=9TX''-8TX,$$

$$\frac{T'}{T}=-9\frac{X''}{X}-8.$$

Розділяючи змінні, маємо рівняння для функції $T(t)$

$$T'+(9\lambda+8)T=0,$$

та задачу Штурма-Ліувілля для функції $X(x)$

$$X''+\lambda X=0, \quad (\text{П}7.4)$$

$$X(0)=0,\ \ X(2)=0, \quad (\text{П}7.5)$$

де λ – стала величина.

Розв'язок задачі (П7.4), (П7.5) відомий:

$$\lambda_n=\left(\frac{\pi n}{2}\right)^2,$$

$$X_n=C_n\sin\frac{\pi n}{2}x, C_n=const.$$

Підставляючи λ_n в рівняння для $T(t)$ та розв'язуючи його , знаходимо

$$T_n(t)=C_n^*e^{-\left(\left(\frac{3\pi n}{2}\right)^2+8\right)t}, C_n^*=const.$$

Отже,

$$u(x,t)=\sum_{n=1}^{\infty}A_ne^{-\left(\left(\frac{3\pi n}{2}\right)^2+9\right)t}\sin\frac{\pi n}{2}x,$$

константи $A_n=C_n^*\cdot C_n$ знаходимо з використанням початкової умови (П7.2).

Відповідь:

$$u(x,t)=\sum_{n=1}^{\infty}A_ne^{-\left(\left(\frac{3\pi n}{2}\right)^2+9\right)t}\sin\frac{\pi n}{2}x,\ \ A_n=\int_0^2\varphi(z)\sin\frac{\pi n}{2}zdz\ .$$

Приклад 8. Розв'язати наступну крайову задачу:

$$u_t=a^2u_{xx},\ \ t>0,\ \ 0<x<l, \quad (\text{П}8.1)$$

$$u(x,0)=0,\ \ x\in[0,l], \quad (\text{П}8.2)$$

$$u(0,t)=\alpha,\ \ u(l,t)=\beta,\ \ t\geq 0, \quad (\text{П}8.3)$$

де $\alpha,\beta-const.$

Розв'язання. Щоб звести неоднорідні граничні умови (П8.3) до однорідних введемо наступну заміну:

$u\left(x,t\right)=\omega\left(x,t\right)+\alpha+\dfrac{\beta-\alpha}{l}x,$ де $\omega(x,t)$ - нова невідома функція. Тоді

$$u_t\left(x,t\right)=\omega_t\left(x,t\right),$$

$$u_x\left(x,t\right)=\omega_x\left(x,t\right)+\frac{\beta-\alpha}{l},$$

$$u_{xx}(x,t)=\omega_{xx}(x,t),$$

$$u\left(x,0\right)=\omega\left(x,0\right)+\alpha+\frac{\beta-\alpha}{l}x=0\Rightarrow\omega\left(x,0\right)=\frac{\alpha-\beta}{l}x-\alpha,$$

$$u\left(0,t\right)=\omega\left(0,t\right)+\alpha=\alpha\Rightarrow\omega\left(0,t\right)=0,$$

$$u\left(l,t\right)=\omega\left(l,t\right)+\alpha+\beta-\alpha=\omega\left(l,t\right)+\beta=\beta\Rightarrow\omega\left(l,t\right)=0.$$

Отже, маємо наступну крайову задачу для функції $\omega\left(x,t\right)$:

$$\omega_t=a^2\omega_{xx},\quad t>0,$$

$$\omega(x,0)=\frac{\alpha-\beta}{l}x-\alpha,\quad x\in\left[0,l\right],$$

$$\omega(0,t)=0,\quad \omega(l,t)=0,\quad t\geq 0.$$

Як відомо

$$\omega\left(x,t\right)=\sum_{n=1}^{\infty}A_n e^{-\left(\frac{\pi na}{l}\right)^2 t}\sin\frac{\pi n}{l}x,$$

де

$$A_n=\frac{2}{l}\int_0^l\left(\frac{\alpha-\beta}{l}\xi-\alpha\right)\sin\frac{\pi n}{l}\xi d\xi=$$

$$=\frac{2}{l}\left(\frac{\alpha-\beta}{l}\int_0^l\xi\sin\frac{\pi n}{l}\xi d\xi-\alpha\int_0^l\sin\frac{\pi n}{l}\xi d\xi\right)=$$

$$=\frac{2}{l}\left(-\frac{\alpha-\beta}{l}\frac{l}{\pi n}\int_0^l\xi d\left(\sin\frac{\pi n}{l}\xi\right)-\alpha\frac{l}{\pi n}\cos\frac{\pi n}{l}\Big|_0^l\right)=$$

$$=\frac{2}{l}\left(\frac{\beta-\alpha}{\pi n}\left(\xi\cos\frac{\pi n}{l}\xi\Big|_0^l-\int_0^l\cos\frac{\pi n}{l}\xi d\xi\right)+\frac{\alpha l}{\pi n}\left(\left(-1\right)^n-1\right)\right)=$$

$$=\frac{2}{l}\left(\frac{\beta-\alpha}{\pi n}\left(l(-1)^n-\frac{l}{\pi n}\sin\frac{\pi n}{l}\xi\Big|_0^l\right)+\frac{\alpha l}{\pi n}\left((-1)^n-1\right)\right)=$$

$$=\frac{2}{l}\left(\frac{\beta-\alpha}{\pi n}l(-1)^n+\frac{\alpha l}{\pi n}(-1)^n-\frac{\alpha l}{\pi n}\right)=$$

$$=\frac{2}{l}\left(\frac{\beta l}{\pi n}(-1)^n-\frac{\alpha l}{\pi n}\right)=\frac{2}{\pi n}\left(\beta(-1)^n-\alpha\right).$$

Повертаючись до проведеної заміни, маємо

$$u(x,t)=\frac{\beta-\alpha}{l}x+\alpha+\frac{2}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}\left(\beta(-1)^n-\alpha\right)e^{-\left(\frac{\pi n}{l}a\right)^2 t}\sin\frac{\pi n}{l}x.$$

Відповідь:

$$u(x,t)=\frac{\beta-\alpha}{l}x+\alpha+\frac{2}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}\left(\beta(-1)^n-\alpha\right)e^{-\left(\frac{\pi n}{l}a\right)^2 t}\sin\frac{\pi n}{l}x.$$

Завдання для самостійної роботи

Задача 6. Розв’язати мішану задачу.

1. $u_t=2u_{xx}$; $u(x,0)=19\sin 5\pi x$; $u(0,t)=0$; $u_x(0{,}5;t)=0$.
2. $u_t=5u_{xx}$; $u(x,0)=8\sin \pi x$; $u_x(0,t)=0$; $u(1{,}5;t)=0$.
3. $u_t=8u_{xx}$; $u(x,0)=17\sin 3\pi x$; $u(0,t)=0$; $u_x(2{,}5;t)=0$.
4. $u_t=u_{xx}$; $u(x,0)=6\cos 9\pi x$; $u_x(0,t)=0$; $u(3{,}5;t)=0$.
5. $u_t=4u_{xx}$; $u(x,0)=15\sin 3\pi x$; $u(0,t)=0$; $u_x(4{,}5;t)=0$.
6. $u_t=2u_{xx}$; $u(x,0)=4\cos 5\pi x$; $u_x(0,t)=0$; $u(3{,}5;t)=0$.
7. $u_t=3u_{xx}$; $u(x,0)=13\sin 5\pi x$; $u(0,t)=0$; $u_x(2{,}5;t)=0$.
8. $u_t=u_{xx}$; $u(x,0)=2\cos 7\pi x$; $u_x(0,t)=0$; $u(1{,}5;t)=0$.
9. $u_t=5u_{xx}$; $u(x,0)=19\sin 3\pi x$; $u(0,t)=0$; $u_x(0{,}5;t)=0$.
10. $u_t=u_{xx}$; $u(x,0)=8\cos 5\pi x$; $u_x(0,t)=0$; $u(1{,}5;t)=0$.
11. $u_t=6u_{xx}$; $u(x,0)=17\sin 3\pi x$; $u(0,t)=0$; $u_x(2{,}5;t)=0$.
12. $u_t=2u_{xx}$; $u(x,0)=6\cos 7\pi x$; $u_x(0,t)=0$; $u(3{,}5;t)=0$.

13. $u_t = u_{xx}$; $u(x,0) = 15\sin 9\pi x$; $u(0,t) = 0$; $u_x(4{,}5;t) = 0$.

14. $u_t = 3u_{xx}$; $u(x,0) = 4\cos 5\pi x$; $u_x(0,t) = 0$; $u(3{,}5;t) = 0$.

15. $u_t = 7u_{xx}$; $u(x,0) = 13\sin 3\pi x$; $u(0,t) = 0$; $u_x(2{,}5;t) = 0$.

16. $u_t = 9u_{xx}$; $u(x,0) = 12\cos 3\pi x$; $u_x(0,t) = 0$; $u(1{,}5;t) = 0$.

17. $u_t = 2u_{xx}$; $u(x,0) = 9\sin 7\pi x$; $u(0,t) = 0$; $u_x(2{,}5;t) = 0$.

18. $u_t = 5u_{xx}$; $u(x,0) = 18\cos \pi x$; $u_x(0,t) = 0$; $u(3{,}5;t) = 0$.

19. $u_t = 8u_{xx}$; $u(x,0) = 7\sin 3\pi x$; $u(0,t) = 0$; $u_x(4{,}5;t) = 0$.

20. $u_t = u_{xx}$; $u(x,0) = 16\cos 9\pi x$; $u_x(0,t) = 0$; $u(3{,}5;t) = 0$.

21. $u_t = 4u_{xx}$; $u(x,0) = 5\sin 3\pi x$; $u(0,t) = 0$; $u_x(2{,}5;t) = 0$.

22. $u_t = 2u_{xx}$; $u(x,0) = 14\cos 5\pi x$; $u_x(0,t) = 0$; $u(1{,}5;t) = 0$.

23. $u_t = 3u_{xx}$; $u(x,0) = 3\sin 5\pi x$; $u(0,t) = 0$; $u_x(0{,}5;t) = 0$.

24. $u_t = 8u_{xx}$; $u(x,0) = 12\cos 7\pi x$; $u_x(0,t) = 0$; $u(1{,}5;t) = 0$.

25. $u_t = 5u_{xx}$; $u(x,0) = 5\sin 3\pi x$; $u(0,t) = 0$; $u_x(2{,}5;t) = 0$.

26. $u_t = u_{xx}$; $u(x,0) = 18\cos 5\pi x$; $u_x(0,t) = 0$; $u(3{,}5;t) = 0$.

27. $u_t = 5u_{xx}$; $u(x,0) = 7\sin 3\pi x$; $u(0,t) = 0$; $u_x(4{,}5;t) = 0$.

28. $u_t = 2u_{xx}$; $u(x,0) = 3\cos 7\pi x$; $u_x(0,t) = 0$; $u(3{,}5;t) = 0$.

29. $u_t = u_{xx}$; $u(x,0) = 5\sin 9\pi x$; $u(0,t) = 0$; $u_x(2{,}5;t) = 0$.

30. $u_t = 3u_{xx}$; $u(x,0) = 14\cos 5\pi x$; $u_x(0,t) = 0$; $u(1{,}5;t) = 0$.

Задача 7. Розв'язати мішану задачу.

1. $u_t = 9u_{xx}$; $u(x,0) = 5\sin 2\pi x - 1 + 3x$; $u(0,t) = -1$; $u(2,t) = 5$.
2. $u_t = 8u_{xx}$; $u(x,0) = 6\sin 3\pi x + 2 - 3x$; $u(0,t) = 2$; $u(3,t) = -7$.
3. $u_t = 7u_{xx}$; $u(x,0) = 7\sin 2\pi x - 3 + 4x$; $u(0,t) = -3$; $u(1,t) = 1$.
4. $u_t = 6u_{xx}$; $u(x,0) = 8\sin 4\pi x + 4 - 5x$; $u(0,t) = 4$; $u(2,t) = -6$.
5. $u_t = 5u_{xx}$; $u(x,0) = 9\sin 3\pi x - 5 + 2x$; $u(0,t) = -5$; $u(3,t) = 1$.
6. $u_t = 9u_{xx}$; $u(x,0) = 8\sin 3\pi x + 6 - 2x$; $u(0,t) = 6$; $u(4,t) = -2$.

7. $u_t = 8u_{xx}$; $u(x,0) = 7\sin 2\pi x - 7 + 3x$; $u(0,t) = -7$; $u(3,t) = 2$.

8. $u_t = 7u_{xx}$; $u(x,0) = 6\sin 3\pi x + 8 - 3x$; $u(0,t) = 8$; $u(4,t) = -4$.

9. $u_t = 4u_{xx}$; $u(x,0) = 5\sin 4\pi x - 9 + 5x$; $u(0,t) = -9$; $u(2,t) = 1$.

10. $u_t = 3u_{xx}$; $u(x,0) = 4\sin 5\pi x + 9 - 4x$; $u(0,t) = 9$; $u(3,t) = -3$.

11. $u_t = 2u_{xx}$; $u(x,0) = 3\sin 6\pi x - 8 + 5x$; $u(0,t) = -8$; $u(2,t) = 2$.

12. $u_t = 3u_{xx}$; $u(x,0) = 2\sin 4\pi x + 7 - 5x$; $u(0,t) = 7$; $u(1,t) = 2$.

13. $u_t = 5u_{xx}$; $u(x,0) = 3\sin 3\pi x - 6 + 4x$; $u(0,t) = -6$; $u(3,t) = 6$.

14. $u_t = 6u_{xx}$; $u(x,0) = 4\sin 4\pi x + 5 - 4x$; $u(0,t) = 5$; $u(2,t) = -3$.

15. $u_t = 8u_{xx}$; $u(x,0) = 5\sin 2\pi x - 4 + 3x$; $u(0,t) = -4$; $u(1,t) = -1$.

16. $u_t = 7u_{xx}$; $u(x,0) = 6\sin 3\pi x + 3 + 2x$; $u(0,t) = 3$; $u(2,t) = 7$.

17. $u_t = 6u_{xx}$; $u(x,0) = 7\sin 4\pi x - 2 + x$; $u(0,t) = -2$; $u(3,t) = 1$.

18. $u_t = 2u_{xx}$; $u(x,0) = 8\sin 7\pi x + 1 - x$; $u(0,t) = 1$; $u(2,t) = -1$.

19. $u_t = 4u_{xx}$; $u(x,0) = 9\sin 3\pi x - 1 - 2x$; $u(0,t) = -1$; $u(1,t) = -3$.

20. $u_t = 6u_{xx}$; $u(x,0) = 8\sin 4\pi x + 3 - 4x$; $u(0,t) = 3$; $u(2,t) = -5$.

21. $u_t = 7u_{xx}$; $u(x,0) = 7\sin 3\pi x - 5 + 6x$; $u(0,t) = -5$; $u(1,t) = 1$.

22. $u_t = 8u_{xx}$; $u(x,0) = 6\sin 2\pi x + 7 - 5x$; $u(0,t) = 7$; $u(2,t) = -3$.

23. $u_t = 9u_{xx}$; $u(x,0) = 5\sin 3\pi x - 9 + 4x$; $u(0,t) = -9$; $u(3,t) = 3$.

24. $u_t = 8u_{xx}$; $u(x,0) = 4\sin 3\pi x + 8 - 3x$; $u(0,t) = 8$; $u(2,t) = 2$.

25. $u_t = 7u_{xx}$; $u(x,0) = 3\sin 2\pi x - 6 + 2x$; $u(0,t) = -6$; $u(3,t) = 0$.

26. $u_t = 6u_{xx}$; $u(x,0) = 2\sin 4\pi x + 4 + x$; $u(0,t) = 4$; $u(4,t) = 8$.

27. $u_t = 5u_{xx}$; $u(x,0) = 3\sin 3\pi x - 2 - x$; $u(0,t) = -2$; $u(3,t) = -5$.

28. $u_t = 3u_{xx}$; $u(x,0) = 4\sin 5\pi x + 3 - 2x$; $u(0,t) = 3$; $u(2,t) = -1$.

29. $u_t = 2u_{xx}$; $u(x,0) = 5\sin 7\pi x - 1 - 3x$; $u(0,t) = -1$; $u(1,t) = -4$.

30. $u_t = 4u_{xx}$; $u(x,0) = 6\sin 4\pi x + 2 - 4x$; $u(0,t) = 2$; $u(2,t) = -6$.

Задача 8. Розв'язати мішану задачу для даного неоднорідного рівняння теплопровідності з нульовими крайовими умовами

$$u(x,0)=0;\ u(0,t)=0;\ u(\pi,t)=0.$$

1. $u_t = \frac{1}{9}u_{xx} + 5\sin 2t \sin 3x$.
2. $u_t = \frac{1}{16}u_{xx} + e^{-2t}\sin 4x$.
3. $u_t = \frac{1}{4}u_{xx} + 10\cos 3t \sin 2x$.
4. $u_t = 2u_{xx} + 7e^{-18t}\sin 3x$.
5. $u_t = \frac{1}{16}u_{xx} + 10\sin 3t \sin 4x$.
6. $u_t = \frac{1}{4}u_{xx} + 2e^{-3t}\sin 2x$.
7. $u_t = \frac{1}{9}u_{xx} + 2\cos t \sin 3x$.
8. $u_t = 3u_{xx} + 8e^{-48t}\sin 4x$.
9. $u_t = \frac{1}{4}u_{xx} + 5\sin 2t \sin 2x$.
10. $u_t = \frac{1}{9}u_{xx} + 3e^{-4t}\sin 3x$.
11. $u_t = \frac{1}{16}u_{xx} + 10\cos 3t \sin 4x$.
12. $u_t = 5u_{xx} + 6e^{-45t}\sin 3x$.
13. $u_t = \frac{1}{9}u_{xx} + 2\sin t \sin 3x$.
14. $u_t = \frac{1}{16}u_{xx} + 4e^{-5t}\sin 4x$.
15. $u_t = \frac{1}{9}u_{xx} + 10\cos 3t \sin 3x$.
16. $u_t = 4u_{xx} + 5e^{-64t}\sin 4x$.
17. $u_t = \frac{1}{16}u_{xx} + 2\sin t \sin 4x$.
18. $u_t = \frac{1}{4}u_{xx} + 2e^{-2t}\sin 2x$.
19. $u_t = \frac{1}{9}u_{xx} + 5\cos 2t \sin 3x$.
20. $u_t = 7u_{xx} + 4e^{-63t}\sin 3x$.
21. $u_t = \frac{1}{4}u_{xx} + 10\sin 3t \sin 2x$.
22. $u_t = \frac{1}{9}u_{xx} + 2e^{-3t}\sin 3x$.
23. $u_t = \frac{1}{16}u_{xx} + 5\cos 2t \sin 4x$.
24. $u_t = 5u_{xx} + 3e^{-20t}\sin 2x$.
25. $u_t = \frac{1}{9}u_{xx} + 10\sin 3t \sin 3x$.
26. $u_t = \frac{1}{16}u_{xx} + 3e^{-4t}\sin 4x$.
27. $u_t = \frac{1}{4}u_{xx} + 5\cos 2t \sin 2x$.
28. $u_t = 6u_{xx} + 2e^{-24t}\sin 2x$.
29. $u_t = \frac{1}{16}u_{xx} + 5\sin 2t \sin 4x$.
30. $u_t = \frac{1}{4}u_{xx} + 4e^{-5t}\sin 2x$.

§3.6. Задача Діріхле для рівняння Лапласа в прямокутнику

Знайдемо розв'язок рівняння Лапласа

$$u_{xx} + u_{yy} = 0 \tag{3.73}$$

в прямокутнику *OACB* (рис. 3) при умові, що на сторонах прямокутника задані граничні умови першого роду

$$u\big|_{y=0} = f(x),\ u\big|_{y=b} = \phi(x), \tag{3.74}$$

$$u\big|_{x=0} = \psi(y),\ u\big|_{x=a} = \eta(y), \tag{3.75}$$

де $f(x), \phi(x), \psi(y), \eta(y)$ – задані функції.

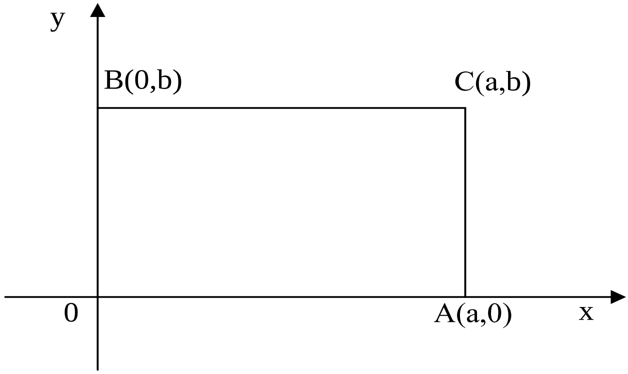

Рис. 3. Область розв'язку задачі

Будемо вимагати виконання умов узгодження граничних умов

$$f(0) = \psi(0),\ f(a) = \eta(0),\ \eta(b) = \phi(a),\ \phi(0) = \psi(b).$$

Шукану функцію подамо у наступному вигляді

$$u(x,y) = u_0(x,y) + \upsilon(x,y), \tag{3.76}$$

де $u_0(x,y)$ – гармонічна функція, яка вибирається так, щоб нова невідома функція $\upsilon(x,y)$ в усіх вершинах прямокутника перетворювалась в нуль. Покладаючи

$$u_0(x,y) = \alpha + \beta x + \gamma y + \delta xy, \tag{3.77}$$

бачимо, що дана функція є гармонічною (оскільки задовольняє рівняння Лапласа). Невідомі коефіцієнти $\alpha,\ \beta,\ \delta,\ \gamma$ виберемо з умов (3.74), (3.75) та умов $\upsilon(0;0) = 0,\ \upsilon(a,0) = 0,\ \upsilon(0,b) = 0,\ \upsilon(a,b) = 0$. Тоді маємо $\alpha = f(0)$, $\alpha + \beta \cdot a = f(a)$, $\alpha + \gamma \cdot b = \phi(0)$, $\alpha + \beta \cdot a + \gamma \cdot b + \delta \cdot ab = \phi(a)$. Звідки легко отримати:

$$\alpha = f(0)\,,\ \beta = \frac{f(a) - f(0)}{a}\,,\ \gamma = \frac{\varphi(0) - f(0)}{b}\,,$$

$$\delta = \frac{\left(\varphi(a) - f(a)\right) + \left(f(0) - \varphi(0)\right)}{ab} \qquad .(3.78)$$

Підставляючи (3.76) в умови (3.74), (3.75) та врахувавши (3.77), (3.78), отримаємо, що гармонічна функція $\upsilon(x,y)$ задовольняє граничні умови

$$\upsilon\Big|_{y=0} = \overline{f}(x),\ \upsilon\Big|_{y=b} = \overline{\phi}(x)\,, \upsilon\Big|_{x=0} = \overline{\psi}(y),\ \upsilon\big|_{x=a} = \overline{\eta}(y)\,,$$

де функції $\overline{\phi}(x)$, $\overline{f}(x)$, $\overline{\psi}(y)$, $\overline{\eta}(y)$ перетворюються в нуль у вершинах прямокутника і

$$\overline{\phi}(x) = \phi(x) - u_0(x,b)\,,$$
$$\overline{f}(x) = f(x) - u_0(x,0)\,,$$
$$\overline{\psi}(y) = \psi(y) - u_0(0,y)\,,$$
$$\overline{\eta}(y) = \eta(y) - u_0(a,y)\,.$$

Функцію $\upsilon(x,y)$ можна подати у вигляді суми чотирьох гармонічних функцій (проводимо редукцію загальної задачі)

$$\upsilon(x,y) = \upsilon_1(x,y) + \upsilon_2(x,y) + \upsilon_3(x,y) + \upsilon_4(x,y)\,,$$

кожна з яких приймає задане значення на одній із сторін і перетворюється в нуль на інших трьох сторонах прямокутника.

Знайдемо одну з таких функцій, наприклад $\upsilon_1(x,y)$ з рівняння

$$(\upsilon_1)_{xx} + (\upsilon_1)_{yy} = 0 \qquad (3.79)$$

і яка задовольняє граничні умови

$$\upsilon_1\Big|_{y=0} = 0,\ \upsilon_1\Big|_{y=b} = \overline{\phi}(x)\,,\ \upsilon_1\big|_{x=0} = 0,\ \upsilon_1\big|_{x=a} = 0\,. \qquad (3.80)$$

Позначивши $\upsilon_1(x,y) = X(x) \cdot Y(y)$, з (3.79) отримуємо

$$\frac{X''}{X} = -\frac{Y''}{Y} = -\lambda = const$$

або

$$Y'' - \lambda Y = 0\,, \qquad (3.81)$$

$$X'' + \lambda X = 0\,. \qquad (3.82)$$

З граничних умов (3.80) маємо

$$X(0) = 0,\ \ X(a) = 0\,, \qquad (3.83)$$

$$Y(0)=0\,. \tag{3.84}$$

Власні значення та власні функції задачі (3.82) – (3.83) мають вигляд

$$\lambda_n=\left(\frac{\pi n}{a}\right)^2,\ X_n(x)=C\cdot\sin\frac{\pi n}{a}x\,.$$

Характеристичне рівняння для (3.81) буде наступним

$$k^2-\lambda=0,\ \lambda>0\,.$$

Звідки отримуємо

$$k_1=\sqrt{\lambda},\ k_2=-\sqrt{\lambda}$$

або

$$k_1=\frac{\pi n}{a},k_2=-\frac{\pi n}{a}.$$

Тоді загальним розв'язком лінійного диференціального рівняння (3.81) є

$$Y_n(y)=A_n^*e^{-\frac{\pi n}{a}y}+B_n^*e^{\frac{\pi n}{a}y},$$

де A_n^*,B_n^* – деякі константи. Умова (3.84) дає

$$A_n^*+B_n^*=0,$$

$$A_n^*=-B_n^*\,.$$

Тоді

$$Y_n(y)=B_n^*\cdot\left(e^{\frac{\pi n}{a}y}-e^{-\frac{\pi n}{a}y}\right),$$

або

$$Y_n(y)=B_n sh\left(\frac{\pi n}{a}y\right),$$

де $B_n=2B_n^*$. Отже, розв'язок задачі (3.79), (3.80) можна подати у вигляді ряду

$$\upsilon_1(x,y)=\sum_{n=1}^{\infty}A_n sh\left(\frac{\pi n}{a}y\right)\sin\left(\frac{\pi n}{a}x\right),$$

де $A_n = C \cdot B_n$. З граничної умови $\upsilon_1\big|_{y=b} = \overline{\varphi}(x)$ маємо $A_n = \dfrac{\overline{\varphi_n}}{sh\left(\dfrac{\pi n}{a} b\right)}$,

де $\overline{\varphi_n} = \dfrac{2}{a}\int\limits_0^a \overline{\varphi}(x)\sin\left(\dfrac{\pi n}{a} x\right)dx$. Отже,

$$\upsilon_1(x,y) = \sum_{n=1}^{\infty} \overline{\varphi_n} \frac{sh\left(\dfrac{\pi n}{a} y\right)}{sh\left(\dfrac{\pi n}{a} b\right)} \sin\left(\frac{\pi n}{a} x\right).$$

Аналогічно знаходячи $\upsilon_2(x,y)$, $\upsilon_3(x,y)$, $\upsilon_4(x,y)$, одержимо

$$u(x,y) = \sum_{n=1}^{\infty} \left\{ \left[\overline{\varphi_n} \frac{sh\left(\dfrac{\pi n}{a} y\right)}{sh\left(\dfrac{\pi n}{a} b\right)} + \overline{f_n} \frac{sh\left(\dfrac{\pi n}{a}(b-y)\right)}{sh\left(\dfrac{\pi n}{a} b\right)} \right] \sin\left(\frac{\pi n}{a} x\right) + \right.$$

$$\left. + \left[\overline{\eta_n} \frac{sh\left(\dfrac{\pi n}{b} x\right)}{sh\left(\dfrac{\pi n}{b} a\right)} + \overline{\psi_n} \frac{sh\left(\dfrac{\pi n}{b}(a-x)\right)}{sh\left(\dfrac{\pi n}{b} a\right)} \right] \sin\left(\frac{\pi n}{b} y\right) \right\} + u_0(x,y),$$

де

$$\overline{f}_n = \frac{2}{a}\int\limits_0^a \overline{f}(x)\sin\left(\frac{\pi n}{a} x\right)dx, \quad \overline{\psi_n} = \frac{2}{b}\int\limits_0^b \overline{\psi}(y)\sin\left(\frac{\pi n}{b} y\right)dy,$$

$$\overline{\eta_n} = \frac{2}{b}\int\limits_0^b \overline{\eta}(y)\sin\left(\frac{\pi n}{b} y\right)dy.$$

§3.7. Задача Діріхле для рівняння Лапласа в крузі

При переході від прямокутної декартової системи координат (O,x,y) до полярної (O,r,θ), рівняння Лапласа набуде наступного вигляду

$$u_{rr}+\frac{1}{r}u_r+\frac{1}{r^2}u_{\theta\theta}=0 \qquad (3.85)$$

Знайдемо розв'язок рівняння Лапласа (3.85) в області $D=\{(r,\theta)\ |0\le r<R,\ 0<\theta\le 2\pi\}$, який задовольняє граничну умову

$$u(r,\theta)\big|_{r=R}=f(\theta),\ 0<\theta\le 2\pi\,. \qquad (3.86)$$

Крім того мають виконуватись умови періодичності (випливають з умови єдиності розв'язку)

$$u(R,\theta)=u(R,\theta+2\pi),$$

$$f(\theta)=f(\theta+2\pi).$$

Нетривіальні розв'язки рівняння (3.85) шукаємо у вигляді

$$u(r,\theta)=X(r)\cdot Y(\theta)\neq 0\,. \qquad (3.87)$$

Підставивши (3.87) у (3.85) та відокремивши змінні, одержимо

$$Y''(\theta)+\lambda Y(\theta)=0\,, \qquad (3.88)$$

$$r^2X''(r)+rX'(r)-\lambda X(r)=0\,, \qquad (3.89)$$

при умові

$$Y(\theta)=Y(\theta+2\pi), \qquad (3.90)$$

де λ – деяка константа.

Нетривіальні періодичні розв'язки задачі Штурма-Ліувілля (3.88), (3.90) існують лише при $\lambda=n^2$, де $n\in Z$. Тому її власні значення та власні функції відповідно рівні

$$\lambda_n=n^2,\ Y_n(\theta)=C_1\cos n\theta+C_2\sin n\theta,\ \ n=1,2,3,...$$

де C_1,C_2 – невідомі сталі. Підставивши λ_n в (3.89), маємо

$$r^2X''(r)+rX'(r)-n^2X(r)=0\,.$$

Останнє звичайне диференціальне рівняння є рівнянням Ейлера і заміною $r=e^t$ зводиться до вигляду

$$X''(t)-n^2X(t)=0\,.$$

Розв’язуючи вищенаведене лінійне диференціальне рівняння, отримаємо

$$X_n(t)=\begin{cases} C_3e^{-nt}+C_4e^{nt}, & n>0; \\ C_5t+C_6, & n=0; \end{cases}$$

або

$$X_n(r)=\begin{cases} C_3r^{-n}+C_4r^{n}, & n>0; \\ C_5\ln r+C_{6,} & n=0. \end{cases}$$

Для того, щоб функція $X_n(r)$ в крузі $0\le r<R$ була неперервною, потрібно вибрати $C_3=C_5=0$. Отже,

$$X_n(r)=C_4r^n,\ \ n=0,1,2,...$$

Тому розв’язок шукаємо у вигляді

$$u(r,\theta)=\sum_{n=0}^{\infty}X_n(r)\cdot Y_n(\theta)=\sum_{n=0}^{\infty}r^n\left(A_n\cos n\theta+B_n\sin n\theta\right)=$$
$$=\frac{A_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}r^n\left(A_n\cos n\theta+B_n\sin n\theta\right), \tag{3.91}$$

де $A_n=C_1C_4$, $B_n=C_2C_4$. Константи A_n та B_n треба вибрати так, щоб ряд (3.91) задовольняв граничну умову (3.86). З (3.86) отримаємо

$$f(\theta)=\frac{A_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}R^n\left(A_n\cos n\theta+B_n\sin n\theta\right).$$

Тоді, розкладаючи функцію $f(\theta)$ в ряд Фур’є на відрізку $[0;2\pi]$ (з коефіцієнтами α_n та β_n), отримаємо

$$A_n=\frac{\alpha_n}{R^n}=\frac{1}{\pi R^n}\int_0^{2\pi}f(z)\cos nz dz,\ \ n=0,1,2,3,...$$

$$B_n=\frac{\beta_n}{R^n}=\frac{1}{\pi R^n}\int_0^{2\pi}f(z)\sin nz dz,\ \ n=1,2,3,...$$

<u>Приклад 9</u>. Знайти розв'язок рівняння Лапласа

$$u_{xx} + u_{yy} = 0 \qquad (\text{П}9.1)$$

в прямокутнику $0 < x < p$, $0 < y < s$, який задовольняє наступним граничним умовам:

$$u(0, y) = u_x(p, y) = 0, \qquad (\text{П}9.2)$$

$$u(x, 0) = 0,\ u(x, s) = f(x). \qquad (\text{П}9.3)$$

<u>Розв'язання</u>. Розв'язок шукаємо у вигляді

$$u(x, y) = X(x) \cdot Y(y) \not\equiv 0. \qquad (\text{П}9.4)$$

Тоді, з рівняння (П7.1), маємо

$$X'' \cdot Y + X \cdot Y'' = 0,$$

$$\frac{X''}{X} = -\frac{Y''}{Y},$$

або

$$\frac{X''}{X} = -\frac{Y''}{Y} = -\lambda, \qquad (\text{П}9.5)$$

де $\lambda = const$. З (П7.5) дістанемо

$$Y'' - \lambda Y = 0, \qquad (\text{П}9.6)$$

$$X'' + \lambda X = 0. \qquad (\text{П}9.7)$$

З граничних умов отримуємо

$$u(0, y) = X(0) \cdot Y(y) = 0 \Rightarrow X(0) = 0, \qquad (\text{П}9.8)$$

$$u_x(p, y) = X'(p) \cdot Y(y) = 0 \Rightarrow X'(p) = 0, \qquad (\text{П}9.9)$$

$$u(x, 0) = X(x) \cdot Y(0) = 0 \Rightarrow Y(0) = 0. \qquad (\text{П}9.10)$$

Задача Штурма-Ліувілля (П9.7) – (П9.9) вже розв'язана

$$\lambda_n = \left(\frac{(2n+1)\pi}{2p}\right)^2,\ X_n(x) = C_1 \sin\frac{(2n+1)\pi}{2p} x, n = 0, 1, 2, \ldots, \qquad (\text{П}9.11)$$

де C_1 – довільна стала. Розв'язуючи задачу (П9.6), (П9.10) при знайдених λ_n, знаходимо

$$Y_n(y) = C_2 sh\frac{\pi(2n+1)}{2p} y, n = 0, 1, 2, \ldots \qquad (\text{П}9.12)$$

Отже, розв'язок задачі (П9.1) – (П9.3) шукаємо у вигляді ряду

$$u(x, y) = \sum_{n=0}^{\infty} A_n sh\frac{(2n+1)\pi}{2p} y \cdot \sin\frac{(2n+1)\pi}{2p} x, \qquad (\text{П}9.13)$$

де $A_n = C_1 \cdot C_2$. З другої граничної умови (П9.3), при $y = s$, отримуємо

$$\sum_{n=0}^{\infty} A_n sh\frac{(2n+1)\pi}{2p}s\cdot\sin\frac{(2n+1)\pi}{2p}x = f(x).$$

Розкладемо функцію $f(x)$ на відрізку $[0;p]$ в ряд Фур'є лише за синусами. Дістанемо

$$\sum_{n=0}^{\infty} A_n sh\frac{(2n+1)\pi}{2p}s\cdot\sin\frac{(2n+1)\pi}{2p}x = \sum_{n=0}^{\infty} f_n \sin\frac{(2n+1)\pi}{2p}x,$$

де

$$f_n = \frac{2}{p}\int_o^p f(\xi)\sin\frac{(2n+1)\pi}{2p}\xi d\xi.$$

Вищенаведена рівність буде виконуватись, якщо

$$A_n\cdot sh\frac{(2n+1)\pi}{2p}s = f_n \Rightarrow A_n = \frac{f_n}{sh\frac{(2n+1)\pi}{2p}s}.$$

<u>Відповідь</u>:

$$u(x,y) = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{sh\frac{(2n+1)\pi}{2p}y}{sh\frac{(2n+1)\pi}{2p}s}\cdot\sin\frac{(2n+1)\pi}{2p}x,$$

де

$$f_n = \frac{2}{p}\int_o^p f(\xi)\sin\frac{(2n+1)\pi}{2p}\xi d\xi.$$

<u>Приклад 10</u>. Знайти функцію, гармонічну всередині одиничного круга з центром в початку координат і таку, що

$$u\big|_{r=1} = \cos^2\varphi. \qquad (П10.1)$$

<u>Розв'язання</u>. Як відомо, функція $u(r,\varphi)$, гармонічна в середині круга $D=\{(r,\varphi)\,|\,0\le r<R, 0<\varphi\le 2\pi\}$, є розв'язком рівняння Лапласа (записаного в полярних координатах)

$$u_{rr} + \frac{1}{r}u_r + \frac{1}{r^2}u_{\varphi\varphi} = 0. \qquad (П10.2)$$

Якщо $u(r,\varphi)$ задовольняє граничну умову першого роду

$$u(r,\varphi)\big|_{r=R} = f(\varphi)\,,\ 0<\varphi\le 2\pi\,, \qquad (\text{П}10.3)$$

то розв’язком граничної задачі (П10.2), (П10.3) є ряд

$$u(r,\varphi)=\frac{A_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty} r^n\,(A_n\cos n\varphi + B_n\sin n\varphi)\,, \qquad (\text{П}10.4)$$

де

$$A_n=\frac{1}{\pi R^n}\int_0^{2\pi} f(\psi)\cos n\psi\,d\psi\,,\ n=0,1,2,\dots .$$

$$B_n=\frac{1}{\pi R^n}\int_0^{2\pi} f(\psi)\sin n\psi\,d\psi\,,\ n=0,1,2,\dots .$$

Отже, розв’язком рівняння (П10.2) є функція (П10.4), причому коефіцієнти A_n, B_n знайдемо з умови (П10.1), враховуючи, що $R=1$. Маємо

$$u\big|_{r=1}=\frac{A_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}(A_n\cos n\varphi + B_n\sin n\varphi)=\cos^2\varphi\,,$$

$$\frac{A_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}(A_n\cos n\varphi + B_n\sin n\varphi)=\frac{1}{2}+\frac{\cos 2\varphi}{2}\,. \qquad (\text{П}10.5)$$

З (П10.5) отримаємо

$$A_0=1\,,\ A_1=0\,,\ A_2=\frac{1}{2}\,,\ A_i=0\,,\ i=3,4,\dots,B_j=0\,,\ j=1,2,\dots .$$

Отже, розв’язком граничної задачі (П10.2), (П10.1) є функція

$$u(r,\varphi)=\frac{1}{2}+\frac{r^2}{2}\cos 2\varphi\,.$$

Відповідь:

$$u(r,\varphi)=\frac{1}{2}(1+r^2\cos 2\varphi)\,.$$

Завдання для самостійної роботи

Задача 9. Розв’язати задачу Діріхле для рівняння Лапласа $\Delta u=0$ у крузі $0\le r<1$, $0\le\varphi<2\pi$ (r, φ – полярні координати), на межі якого шукана функція $u(r,\ \varphi)$ має значення:

1. $u(1,\ \varphi)=\cos 9\varphi$.
2. $u(1,\ \varphi)=2\sin 8\varphi$.
3. $u(1,\ \varphi)=3\cos 7\varphi$.
4. $u(1,\ \varphi)=4\sin 6\varphi$.
5. $u(1,\ \varphi)=5\cos 5\varphi$.
6. $u(1,\ \varphi)=6\sin 4\varphi$.
7. $u(1,\ \varphi)=7\cos 3\varphi$.
8. $u(1,\ \varphi)=8\sin 2\varphi$.
9. $u(1,\ \varphi)=9\cos 2\varphi$.
10. $u(1,\ \varphi)=10\sin 3\varphi$.
11. $u(1,\ \varphi)=11\cos 4\varphi$.
12. $u(1,\ \varphi)=12\sin 5\varphi$.
13. $u(1,\ \varphi)=13\cos 6\varphi$.
14. $u(1,\ \varphi)=14\sin 7\varphi$.
15. $u(1,\ \varphi)=15\cos 8\varphi$.
16. $u(1,\ \varphi)=16\sin 9\varphi$.
17. $u(1,\ \varphi)=17\cos 9\varphi$.
18. $u(1,\ \varphi)=18\sin 8\varphi$.
19. $u(1,\ \varphi)=19\cos 7\varphi$.
20. $u(1,\ \varphi)=20\sin 6\varphi$.
21. $u(1,\ \varphi)=21\cos 5\varphi$.
22. $u(1,\ \varphi)=22\sin 4\varphi$.
23. $u(1,\ \varphi)=23\cos 3\varphi$.
24. $u(1,\ \varphi)=24\sin 2\varphi$.
25. $u(1,\ \varphi)=25\cos 2\varphi$.
26. $u(1,\ \varphi)=26\sin 3\varphi$.
27. $u(1,\ \varphi)=27\cos 4\varphi$.
28. $u(1,\ \varphi)=28\sin 5\varphi$.
29. $u(1,\ \varphi)=29\cos 6\varphi$.
30. $u(1,\ \varphi)=30\sin 7\varphi$.

§3.8. Формули Д'Аламбера та Пуассона, принцип Дюгамеля

Розглянемо задачу Коші для однорідного хвильового рівняння

$$u_{tt}=a^2u_{xx}, \qquad (3.92)$$

$$u(x,0)=\varphi(x),\ u_t(x,0)=\psi(x),\ x\in(-\infty;+\infty), \qquad (3.93)$$

де $\psi(x)$ та $\varphi(x)$ – неперервні разом із своїми похідними до 2-го порядку на усій дійсній осі.

Зведемо рівняння (3.92) до канонічного вигляду (1.9), що містить мішану похідну. Характеристичне рівняння

$$(dx)^2-a^2(dt)^2=0$$

розпадається на два рівняння

$$dx+adt=0,$$

$$dx-adt=0,$$

загальними інтегралами яких є

$$x + at = C_1, \;\; x - at = C_2,$$

де $C_1 = const$, $C_2 = const$.

Ввівши нові змінні $\xi = x + at$, $\eta = x - at$, отримаємо (див. формули (1.3))

$$u_x = u_\xi + u_\eta,$$

$$u_t = au_\xi - au_\eta,$$

$$u_{xx} = u_{\xi\xi} + 2u_{\xi\eta} + u_{\eta\eta},$$

$$u_{tt} = a^2 u_{\xi\xi} - 2a^2 u_{\xi\eta} + a^2 u_{\eta\eta}.$$

Підставивши знайдені похідні в рівняння (3.92) та звівши подібні доданки, дістанемо наступне рівняння:

$$u_{\xi\eta} = 0. \tag{3.94}$$

Інтегруючи (3.94) по ξ, маємо

$$\frac{\partial}{\partial \xi}\left(\frac{\partial u}{\partial \eta}\right) = 0 \Rightarrow \frac{\partial u}{\partial \eta} = f(\eta), \tag{3.95}$$

де $f(\eta)$ – довільна функція. Інтегруючи (3.95) по η, отримаємо

$$u(\xi,\eta) = \int f(\eta) d\eta + f_1(\xi) = f_1(\xi) + f_2(\eta) \tag{3.96}$$

де $f_1(\xi)$ та $f_2(\eta)$ – довільні функції. Повертаючись до змінних x, t з (3.96) одержимо

$$u(x,t) = f_1(x + at) + f_2(x - at). \tag{3.97}$$

Визначимо функції f_1 та f_2 з початкових умов (3.93):

$$u(x,0) = f_1(x) + f_2(x) = \varphi(x), \tag{3.98}$$

$$u_t(x,0) = af_1'(x) - af_2'(x) = \psi(x). \tag{3.99}$$

Інтегруючи (3.99), отримаємо

$$f_1(x) - f_2(x) = \frac{1}{a}\int_{x_0}^{x} \psi(z) dz + C, \tag{3.100}$$

де C – довільна константа. Додавши рівності (3.98) та (3.100) і віднявши рівність (3.100) від (3.98), отримаємо:

$$f_1(x) = \frac{1}{2}\varphi(x) + \frac{1}{2a}\int_{x_0}^{x} \psi(z) dz + \frac{C}{2}.$$

$$f_2(x)=\frac{1}{2}\varphi(x)-\frac{1}{2a}\int_{x_0}^{x}\psi(z)dz-\frac{C}{2}.$$

Підставимо знайдені функції $f_1(x)$ та $f_2(x)$ в (3.97). В результаті матимемо:

$$u(x,t)=f_1(x+at)+f_2(x-at)=$$

$$=\frac{1}{2}\varphi(x+at)+\frac{1}{2a}\int_{x_0}^{x+at}\psi(z)dz+\frac{C}{2}+\frac{1}{2}\varphi(x-at)-\frac{1}{2a}\int_{x_0}^{x-at}\psi(z)dz-\frac{C}{2}=$$

$$=\frac{\varphi(x+at)+\varphi(x-at)}{2}+\frac{1}{2a}\int_{x_0}^{x+at}\psi(\mathrm{z})dz+\frac{1}{2a}\int_{x-at}^{x_0}\psi(\mathrm{z})dz.$$

Або остаточно

$$u(x,t)=\frac{\varphi(x+at)+\varphi(x-at)}{2}+\frac{1}{2a}\int_{x-at}^{x+at}\psi(z)dz, \quad (3.101)$$

.

Співвідношення (3.101) називають ***формулою Д'Аламбера.***

Розглянемо задачу Коші для неоднорідного хвильового рівняння

$$u_{tt}=a^2u_{xx}+f(x,t), \quad (3.102)$$

$$u(x,0)=\varphi(x),\quad u_t(x,0)=\psi(x),\quad x\in(-\infty;+\infty), \quad (3.103)$$

Згідно з принципом редукції загальної задачі (див. §3.4) розв'язок задачі Коші (3.102), (3.103) шукаємо у вигляді

$$u(x,y)=z(x,t)+v(x,t), \quad (3.104)$$

де $z(x,t)$ – розв'язок задачі Коші (3.92), (3.93), а $v(x,t)$ знаходимо як розв'язок крайової задачі

$$v_{tt}=a^2v_{xx}+f(x,t), \quad (3.105)$$

$$v(x,0)=0, v_t(x,0)=0. \quad (3.106)$$

Спершу покажемо, що

$$v(x,t)=\int_0^t\omega(x,t-\tau)d\tau, \quad (3.107)$$

де функція $\omega(x,t-\tau)$ є розв'язком задачі Коші

$$\omega_{tt}(x,t-\tau)=a^2\omega_{xx}(x,t-\tau), \quad (3.108)$$

$$\omega(x,0)=0, \omega_t(x,0)=f(x,\tau), t>\tau, x\in(-\infty;+\infty). \qquad (3.109)$$

Двічі продиференціюємо (3.107) за кожною змінною. Для цього використаємо наступну теорему:

Теорема 3.6. Розглянемо інтеграл

$$I(y)=\int_{\alpha(y)}^{\beta(y)} f(x,y)dx.$$

Нехай функція $f(x,y)$ *визначена і неперервна в прямокутнику* $[a,b;c,d]$, *а криві* $x=\alpha(y), x=\beta(y)$ $(c\le y\le d)$ *неперервні і не виходять за його межі. Крім того функція* $f(x,y)$ *має в даному прямокутнику неперервну похідну* $f_y(x,y)$, *а також існують похідні* $\alpha'(y), \beta'(y)$. *Тоді*

$$I'(y)=\int_{\alpha(y)}^{\beta(y)} f_y(x,y)dx+\beta'(y)\cdot f(\beta(y),y)-\alpha'(y)\cdot f(\alpha(y),y).$$

(детальніше див. [19]).

Використавши теорему 3.6, матимемо:

$$v_t(x,t)=\omega(x,0)+\int_0^t \omega_t(x,t-\tau)d\tau.$$

Аналогічно

$$v_{tt}(x,y)=\omega_t(x,0)+\int_0^t \omega_{tt}(x,t-\tau)d\tau,$$

або, з урахуванням другої з умов (3.109),

$$v_{tt}(x,t)=f(x,t)+\int_0^t \omega_{tt}(x,t-\tau)d\tau,$$

а також

$$v_{xx}(x,t)=\int_0^t \omega_{xx}(x,t-\tau)d\tau.$$

Підставляючи отримані вирази для похідних в (3.105), матимемо

$$f(x,t)+\int_0^t \omega_{tt}(x,t-\tau)d\tau = a^2\int_0^t \omega_{xx}(x,t-\tau)d\tau + f(x,t),$$

$$0 \equiv 0,$$

і $v(x,0)=0, v_t(x,0)=\omega(x,0)=0$. Тобто, функція (3.107) є розв'язком задачі Коші (3.105), (3.106).

Застосувавши формулу Д'Аламбера (3.101) для задачі (3.108), (3.109) отримаємо

$$\omega(x,t-\tau)=\frac{1}{2a}\int_{x-a(t-\tau)}^{x+a(t+\tau)} f(z,\tau)d\tau\,. \qquad (3.110)$$

Підставивши (3.110) в (3.107), а (3.107) в (3.104) дістанемо загальний розв'язок задачі Коші (3.102), (3.103) у вигляді

$$u(x,t)=\frac{\varphi(x+at)+\varphi(x-at)}{2}+\frac{1}{2a}\int_{x-at}^{x+at}\psi(z)dz+$$

$$+\frac{1}{2a}\int_0^t\int_{x-a(t-\tau)}^{x+a(t-\tau)} f(z,\tau)dzd\tau$$

Вищенаведений принцип побудови розв'язку задачі Коші (3.102), (3.103) називається ***принципом Дюгамеля.***

Знайдемо обмежений розв'язок наступної задачі Коші:

$$u_t(x,t)=a^2u_{xx}(x,t),\ \ t>0, \qquad (3.111)$$

$$u(x,0)=\phi(x),\ \ x\in(-\infty;+\infty), \qquad (3.112)$$

де $\phi(x)$ – задана обмежена і неперервна функція.

Обмежений нетривіальний розв'язок задачі (3.111) – (3.112) шукатимемо згідно методу Фур'є у вигляді:

$$u(x,t)=X(x)\cdot T(t)\neq 0. \qquad (3.113)$$

Підставивши (3.113) у (3.112) та розділивши змінні, отримаємо два рівняння

$$T'(t)+\lambda a^2T(t)=0, \qquad (3.114)$$

$$X''(x)+\lambda X(x)=0, \qquad (3.115)$$

де λ – деяке число.

Розв'язком лінійного диференціального рівняння першого порядку (3.114) є функція

$$T(t)=C_1\cdot e^{-\lambda a^2 t}, \tag{3.116}$$

де $C_1=const$. Як видно з (3.116), обмежений розв'язок можливий лише у випадку коли $\lambda\ge 0$. Розв'язком лінійного диференціального рівняння другого порядку (3.115) при $\lambda\ge 0$ є функція

$$X(x)=C_2\cos\sqrt{\lambda}x+C_3\sin\sqrt{\lambda}x,$$

де C_2, C_3 – деякі константи, значення яких залежить від λ. Покладемо $\lambda=k^2, \quad -\infty<k<+\infty.$ Тоді, згідно (3.113)

$$u_k(x,t)=\big(A(k)\cos kx+B(k)\sin kx\big)e^{-k^2a^2t},$$

де $A(k)=C_1\cdot C_2$, $B(k)=C_1\cdot C_3$ – деякі константи, що залежать від k. В силу лінійності та однорідності рівняння (3.111) його розв'язок можна подати у вигляді

$$u(x,t)=\int_{-\infty}^{+\infty}u_k(x,t)\,dk=\int_{-\infty}^{+\infty}\big(A(k)\cos kx+B(k)\sin kx\big)e^{-k^2a^2t}dk. \tag{3.117}$$

$A(k),\ B(k)$ знайдемо з початкової умови (3.112)

$$u(x,0)=\int_{-\infty}^{+\infty}\big(A(k)\cos kx+B(k)\sin kx\big)dk=\varphi(x). \tag{3.118}$$

Подаючи функцію $\phi(x)$ у вигляді інтеграла Фур'є

$$\varphi(x)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}dk\int_{-\infty}^{+\infty}\varphi(\xi)\cos\big(k(x-\xi)\big)d\xi=$$

$$=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\left[\int_{-\infty}^{+\infty}\varphi(\xi)\cos(k\xi)\,d\xi\cdot\cos(kx)+\int_{-\infty}^{+\infty}\varphi(\xi)\sin(k\xi)\,d\xi\cdot\sin(kx)\right]dk$$

і порівнюючи його з (3.118), отримаємо

$$A(k)=\frac{1}{2\pi}\int_{+\infty}^{-\infty}\varphi(\xi)\cos(k\xi)\,d\xi,\ B(k)=\frac{1}{2\pi}\int_{+\infty}^{-\infty}\varphi(\xi)\sin(k\xi)\,d\xi.$$

Підставляючи знайдені коефіцієнти в (3.117), одержуємо

$$u(x,t)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}dk\int_{-\infty}^{+\infty}\varphi(\xi)e^{-k^2a^2t}\cos k(\xi-x)d\xi=$$
$$=\frac{1}{\pi}\int_{0}^{+\infty}dk\int_{-\infty}^{+\infty}\varphi(\xi)e^{-k^2a^2t}\cos k(\xi-x)d\xi. \tag{3.119}$$

Тут використовується парність підінтегральної функції по k. Використовуючи формулу $\int_{0}^{+\infty} e^{k^2c^2}\cos\beta k dk=\frac{\sqrt{\pi}}{2c}\cdot e^{-\frac{\beta^2}{4c^2}}$, $c\neq 0$, та змінюючи порядок інтегрування в (3.119), отримаємо

$$u(x,t)=\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\varphi(\xi)d\xi\int_{0}^{+\infty} e^{-k^2a^2t}\cos k(\xi-x)dk=$$

$$=\int_{-\infty}^{+\infty}\varphi(\xi)\frac{1}{\pi}\frac{\sqrt{\pi}}{2a\sqrt{t}}\cdot e^{-\frac{(\xi-x)^2}{4a^2}t}d\xi=\int_{-\infty}^{+\infty}\varphi(\xi)\cdot\frac{1}{2a\sqrt{\pi t}}e^{-\frac{(\xi-x)^2}{4a^2}t}d\xi.$$

Останнє співвідношення називають ***формулою Пуассона.***

Приклад 11. Розв'язати задачу Коші

$$u_{tt}=u_{xx}+bx^2,$$
$$u(x,0)=e^{-x},\ u_t(x,0)=d,\ d=const.$$

Розв'язання. Як відомо, розв'язок задачі Коші

$$u_{tt}=a^2u_{xx}+f(x,t),$$
$$u(x,0)=\varphi(x),\ u_t(x,0)=\psi(x).$$

можна знайти за формулою Д'Аламбера. Використовуючи (П3.1) в нашому випадку, отримаємо

$$u(x,t)=\frac{e^{-(x+t)}+e^{-(x-t)}}{2}+\frac{1}{2}\int_{x-t}^{x+t}ddz+\frac{1}{2}\int_{0}^{t}\int_{x-(t-\tau)}^{x+(t-\tau)}bz^2dzd\tau=$$

$$=e^{-x}\cdot\frac{e^{t}+e^{-t}}{2}+\frac{1}{2}d\left(x+t-x+t\right)+\frac{1}{2}\int_{0}^{t}\frac{b}{3}\left(\left(x+t-\tau\right)^{3}-\left(x-t+\tau\right)^{3}\right)d\tau=$$

$$=e^{-x}\cdot cht+dt-\frac{b}{6}\int_{0}^{t}(x+t-\tau)^{3}d(x+t-\tau)-\frac{b}{6}\int_{0}^{t}(x-t+\tau)^{3}d(x-t+\tau)=$$

$$=e^{-x}cht+dt-\frac{b}{24}(x+t-\tau)^{4}\Big|_{0}^{t}-\frac{b}{24}(x-t+\tau)^{4}\Big|_{0}^{t}=$$

$$=e^{-x}cht+dt-\frac{b}{24}\left(x^{4}-(x+t)^{4}+x^{4}-(x-t)^{4}\right)=$$

$$=e^{-x}cht+dt+\frac{b}{2}x^{2}t^{2}+\frac{b}{12}t^{4}.$$

Відповідь: $u(x,t)=e^{-x}cht+dt+\frac{b}{2}x^{2}t^{2}+\frac{b}{12}t^{4}.$

Приклад 12. Розв’язати задачу Коші:

$$u_{t}=4u_{xx}+t+e^{t},$$

$$u\left(x,0\right)=2.$$

Розв’язання. Задану початкову умову можна звести до однорідної врахувавши наступну властивість: якщо $f_{xx}(x,t)\equiv 0$ для будь-якого $x\in R$ при кожному фіксованому $t\geq 0$, то функція

$$u\left(x,t\right)=\int_{0}^{t}f\left(x,\tau\right)d\tau$$

є розв’язком задачі Коші:

$$u_{t}=a^{2}u_{xx}+f\left(x,t\right),\ \ u\left(x,0\right)=0\,.$$

Для цього введемо заміну $u\left(x,t\right)=\omega\left(x,t\right)+2,$ де $\omega\left(x,t\right)$ – нова невідома функція. Тоді для функції $\omega(x,t)$ отримуємо наступну крайову задачу

$$\omega_{t}=4\omega_{xx}+t+e^{t},\ \omega\left(x,0\right)=0.$$

Тут $f(x,t)=t+e^{t}$, $f_{xx}\left(x,t\right)\equiv 0.$ Тому,

$$\omega(x,t)=\int_0^t\left(\tau+e^{\tau}\right)d\tau=\frac{t^2}{2}+e^t-1.$$

Повертаючись до проведеної заміни, маємо

$$u(x,t)=\omega(x,t)+2=1+\frac{t^2}{2}+e^t.$$

Відповідь:

$$u(x,t)=1+\frac{t^2}{2}+e^t.$$

Приклад 13. Розв’язати задачу Коші

$$u_t=u_{xx}+3t^2,$$
$$u(x,0)=\sin x.$$

Розв’язання. Проведемо редукцію даної задачі. Розв’язок шукаємо у вигляді

$$u(x,t)=v(x,t)+\omega(x,t),$$

де $v(x,t)$ є розв’язком задачі Коші

$$v_t=v_{xx}+3t^2,\ \ v(x,0)=0,$$

а $\omega(x,t)$ є розв’язком задачі

$$\omega_t=\omega_{xx},\ \ \omega(x,0)=\sin x.$$

Згідно прикладу 12, маємо

$$v(x,t)=\int_0^t 3\tau^2 d\tau=t^3.$$

Легко перевірити, що якщо функція $\omega(x,t)$ визначена як сума ряду

$$\omega(x,t)=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{a^{2k}t^k}{k!}\nabla^k\varphi(x),$$

який допускає почленне диференціювання потрібну кількість разів, то вона є розв’язком задачі Коші

$$\omega_t=a^2\omega_{xx},\ \ \omega(x,0)=\varphi(x),$$

де $\nabla^0\varphi=\varphi$, $\nabla^1\varphi=\varphi_{xx}$, $\nabla^2\varphi=\nabla\left(\nabla^1\varphi\right)$, …

Отже для нашого випадку матимемо:

$$\omega(x,t)=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{t^k}{k!}\Delta^k\sin x=\sin x-\frac{t^1}{1!}\sin x+\frac{t^2}{2!}\sin x-\frac{t^3}{3!}\sin x+\cdots=$$

$$=\sin x\left(1-\frac{t^1}{1!}+\frac{t^2}{2!}-\frac{t^3}{3!}+\frac{t^4}{4!}-\cdots\right)=\sin x\cdot e^{-t}.$$

Отже,

$$u(x,t)=t^3+\sin x\cdot e^{-t}.$$

<u>Відповідь</u>:

$u(x,t)=t^3+\sin x\cdot e^{-t}$.

<u>Завдання для самостійної роботи</u>

Задача 10. Розв'язати задачу Коші

1. $u_{tt}=2u_{xx}; u(x,0)=\sin 3\pi x;\ u_t(x,0)=e^x$;
2. $u_{tt}=9u_{xx}; u(x,0)=2\sin 2\pi x+3\sin 3\pi x;\ u_t(x,0)=e^{3x}$
3. $u_{tt}=3u_{xx}; u(x,0)=3\sin 2\pi x;\ u_t(x,0)=3e^{-2x}$;
4. $u_{tt}=2u_{xx}; u(x,0)=4\sin 2\pi x+5\sin 4\pi x;\ u_t(x,0)=5e^x$;
5. $u_{tt}=4u_{xx}; u(x,0)=5\sin 3\pi x;\ u_t(x,0)=-e^{\frac{x}{3}}$;
6. $u_{tt}=7u_{xx}; u(x,0)=6\sin 2\pi x+7\sin 3\pi x;\ u_t(x,0)=10e^{-x}$;
7. $u_{tt}=5u_{xx}; u(x,0)=7\sin 2\pi x;\ u_t(x,0)=7e^{\frac{3x}{7}}$;
8. $u_{tt}=6u_{xx}; u(x,0)=8\sin 3\pi x+9\sin 4\pi x;\ u_t(x,0)=e^{-x}$;
9. $u_{tt}=6u_{xx}; u(x,0)=9\sin 3\pi x;\ u_t(x,0)=e^{8x}$;
10. $u_{tt}=5u_{xx}; u(x,0)=10\sin 2\pi x+3\sin 3\pi x;\ u_t(x,0)=3e^{\frac{x}{8}}$;
11. $u_{tt}=7u_{xx}; u(x,0)=11\sin 2\pi x;\ u_t(x,0)=e^{\frac{x}{4}}$;
12. $u_{tt}=4u_{xx}; u(x,0)=12\sin 3\pi x+5\sin 4\pi x;\ u_t(x,0)=12e^{4x}$;

13. $u_{tt}=8u_{xx};u(x,0)=13\sin 3\pi x$; $u_t(x,0)=2e^{-3x}$;

14. $u_{tt}=3u_{xx};u(x,0)=14\sin 2\pi x+7\sin 3\pi x$; $u_t(x,0)=3e^{-\frac{x}{3}}$;

15. $u_{tt}=9u_{xx};u(x,0)=15\sin 2\pi x$; $u_t(x,0)=e^{-7x}$;

16. $u_{tt}=2u_{xx};u(x,0)=16\sin 3\pi x+9\sin 4\pi x$; $u_t(x,0)=-7e^{x}$;

17. $u_{tt}=2u_{xx};u(x,0)=17\sin 2\pi x$; $u_t(x,0)=e^{-\frac{x}{5}}$;

18. $u_{tt}=3u_{xx};u(x,0)=18\sin 3\pi x+3\sin 4\pi x$; $u_t(x,0)=3e^{10x}$;

19. $u_{tt}=3u_{xx};u(x,0)=19\sin 3\pi x$; $u_t(x,0)=4e^{2x}$;

20. $u_{tt}=8u_{xx};u(x,0)=20\sin 2\pi x+7\sin 3\pi x$; $u_t(x,0)=3e^{-3x}$;

21. $u_{tt}=4u_{xx};u(x,0)=21\sin 2\pi x$; $u_t(x,0)=2e^{5x}$;

22. $u_{tt}=4u_{xx};u(x,0)=22\sin 3\pi x+5\sin 4\pi x$; $u_t(x,0)=7e^{8x}$;

23. $u_{tt}=5u_{xx};u(x,0)=23\sin 3\pi x$; $u_t(x,0)=6e^{9x}$;

24. $u_{tt}=6u_{xx};u(x,0)=24\sin 2\pi x+9\sin 3\pi x$; $u_t(x,0)=-11e^{\frac{x}{11}}$;

25. $u_{tt}=6u_{xx};u(x,0)=25\sin 2\pi x$; $u_t(x,0)=14e^{x}$;

26. $u_{tt}=5u_{xx};u(x,0)=26\sin 3\pi x+3\sin 4\pi x$; $u_t(x,0)=-5e^{\frac{x}{5}}$;

27. $u_{tt}=7u_{xx};u(x,0)=27\sin 3\pi x$; $u_t(x,0)=6e^{-\frac{x}{4}}$;

28. $u_{tt}=4u_{xx};u(x,0)=28\sin 2\pi x+5\sin 3\pi x$; $u_t(x,0)=6e^{\frac{x}{7}}$;

29. $u_{tt}=8u_{xx};u(x,0)=29\sin 2\pi x$; $u_t(x,0)=2e^{x}$;

30. $u_{tt}=3u_{xx};u(x,0)=30\sin 3\pi x+7\sin 4\pi x$; $u_t(x,0)=7e^{3x}$.

Задача 11. Розв’язати задачу Коші

1. $u_t=2u_{xx};u(x,0)=\cos 3\pi x+2\cos 4\pi x$;

2. $u_t=2u_{xx};u(x,0)=2\cos 2\pi x$;

3. $u_t=3u_{xx};u(x,0)=3\cos 3\pi x+4\cos 4\pi x$;

4. $u_t = 3u_{xx}; u(x,0) = 4\cos 3\pi x$;

5. $u_t = 8u_{xx}; u(x,0) = 5\cos 2\pi x + 6\cos 3\pi x$;

6. $u_t = 4u_{xx}; u(x,0) = 6\cos 2\pi x$;

7. $u_t = 4u_{xx}; u(x,0) = 7\cos 3\pi x + 8\cos 4\pi x$;

8. $u_t = 5u_{xx}; u(x,0) = 8\cos 3\pi x$;

9. $u_t = 6u_{xx}; u(x,0) = 9\cos 2\pi x + 10\cos 3\pi x$;

10. $u_t = 6u_{xx}; u(x,0) = 10\cos 2\pi x$;

11. $u_t = 5u_{xx}; u(x,0) = 11\cos 3\pi x + 12\cos 4\pi x$;

12. $u_t = 7u_{xx}; u(x,0) = 12\cos 3\pi x$;

13. $u_t = 4u_{xx}; u(x,0) = 13\cos 2\pi x + 14\cos 3\pi x$;

14. $u_t = 8u_{xx}; u(x,0) = 14\cos 2\pi x$;

15. $u_t = 3u_{xx}; u(x,0) = 15\cos 3\pi x + 16\cos 4\pi x$;

16. $u_t = 9u_{xx}; u(x,0) = 16\cos 3\pi x$;

17. $u_t = 2u_{xx}; u(x,0) = 17\cos 3\pi x + 18\cos 4\pi x$;

18. $u_t = 4u_{xx}; u(x,0) = 18\cos 3\pi x$;

19. $u_t = 7u_{xx}; u(x,0) = 19\cos 2\pi x + 20\cos 4\pi x$;

20. $u_t = 5u_{xx}; u(x,0) = 20\cos 2\pi x$;

21. $u_t = 6u_{xx}; u(x,0) = 21\cos 3\pi x + 22\cos 4\pi x$;

22. $u_t = 4u_{xx}; u(x,0) = 22\cos 3\pi x$;

23. $u_t = 5u_{xx}; u(x,0) = 23\cos 2\pi x + 24\cos 3\pi x$;

24. $u_t = 7u_{xx}; u(x,0) = 24\cos 2\pi x$;

25. $u_t = 4u_{xx}; u(x,0) = 25\cos 3\pi x + 26\cos 4\pi x$;

26. $u_t = 8u_{xx}; u(x,0) = 26\cos 3\pi x$;

27. $u_t = 8u_{xx}; u(x,0) = 27\cos 2\pi x + 28\cos 3\pi x$;

28. $u_t = 9u_{xx}; u(x,0) = 28\cos 2\pi x$;

29. $u_t = 9u_{xx}; u(x,0) = 29\cos 2\pi x + 30\cos 3\pi x$;

30. $u_t = 3u_{xx}; u(x,0) = 30\cos 2\pi x$.

Література

1. Адамар Ж. Задача Коши для линейных уравнений с частными производными гиперболического типа.- Москва: Наука, 1978.- 278с.
2. Араманович И.Г., Левин В.И. Уравнения математической физики.- Москва: Наука,1969.-288с.
3. Бицадзе А.В. Уравнения математической физики.- Москва: Наука, 1976.- 296с.
4. Білоколос Є.Д., Шека Д.Д. Збірник задач з курсу «Рівняння математичної фізики»: навчальний посібник для студентів природничих факультетів. – К., 2007. – 77 с.
5. Боголюбов А.Н., Кравцов В.В. Задачи по математической физике.- Москва: Изд-во МГУ, 1998. - 350с.
6. Бугров Я.С., Никольский С.М. Высшая математика. Дифференциальные уравнения. Краткие интегралы. Ряды. Функции комплексного переменного.- Москва: Наука, 1985. – 464с.
7. Владимиров В.С. Уравнения математической физики.- Москва: Наука,1981.- 512с.
8. Годунов С.К. Уравнения математической физики.- Москва: Наука,1979.- 392с.
9. Кошляков Н.С. и др. Уравнения в частных производных математической физики.- Москва: Высш.шк., 1970. - 712с.
10. Сборник заданий по высшей математике (типовые расчеты): учеб. Пособие для вузов. – 2-е изд., доп. – М.: Высш. шк., 1994. – 206 с.
11. Мартинюк П.М. Рівняння математичної фізики: Навч. посібник.– Рівне: НУВГП, 2007. – 178 с.
12. Никифоров А.Ф., Уваров В.Б. Специальные функции математической физики. – Москва: Наука, 1978. - 320с.
13. Никольский С.М. Курс математического анализа. Т. II. – Москва: Наука, 1991. -544с.
14. Перестюк М.О., Маринець В.В. Теорія рівнянь математичної фізики. – Київ: Либідь, 2001. – 333с.
15. Положій Г.М. Рівняння математичної фізики. – Київ: Рад. шк., 1959. - 479с.
16. Самарский А.А., Попов Ю.П. Разностные схемы газовой динамики. - Москва: Наука, 1975.- 352с.

17. Соболев С.Л. Уравнения математической физики.- Москва: Наука, 1966. - 444с.
18. Тихонов А.Н., Самарский А.А. Уравнения математической физики.- Москва: Наука,1977.- 736с.
19. Фихтенгольц Г.М. Курс дифференциального и интегрального исчисления. Т.II. – Москва: Наука, 1970. – 800с.